Prof. Eduardo Gontijo Carrano - DEE/EE/UFMG

Programação Linear

Modelagem.

Introdução

- Muitas aplicações de interesse prático podem ser representadas por meio de modelos matemáticos lineares.
  - Em alguns casos é possível separar problemas complexos em subproblemas que podem ser modelados por meio de relações lineares.
- Uma vez disponível, o modelo linear pode ser resolvido utilizando técnicas exatas concebidas para lidar com este tipo de problema, como: **Algoritmo Simplex, Branch and Cut, etc**.

Hipóteses Básicas da Programação Linear

- Proporcionalidade.
- Aditividade.
- Certeza.

Proporcionalidade

Hipótese da proporcionalidade: a contribuição de cada atividade ao valor da função objetivo Z é proporcional ao nível da atividade x_j, conforme representado pelo termo $c_j.x_j$ na função. De modo semelhante, a contribuição de cada atividade do lado esquerdo de cada restrição é proporcional ao nível da atividade x_j, como representado pelo termo $a_j.x_j$ na restrição.

Aditividade

Hipótese da aditividade: toda função em um modelo de programação linear (seja a função objetivo, seja a função que se encontra do lado esquerdo da declaração de uma restrição funcional) é a soma das contribuições individuais das respectivas atividades.

Certeza

Hipótese da certeza: assume-se que o valor atribuído a cada parâmetro de um modelo de programação linear é uma constante conhecida.

Problemas
Variáveis numéricas

Problema 1

Uma agroindústria deve produzir um tipo de ração para determinado animal. Essa ração é produzida pela mistura de farinhas de três ingredientes básicos: osso, soja e restos de peixe. Cada um desses ingredientes contém diferentes quantidades de dois nutrientes necessários a uma dieta nutricional balanceada: proteína e cálcio. Encontre a ração que satisfaça às restrições nutricionais com o mínimo custo.

		Ingredientes		
Nutrientes	**Osso**	**Soja**	**Peixe**	**Ração**
Proteína	0,2	0,5	0,4	0,3
Cálcio	0,6	0,4	0,4	0,5
Custo ($/*kg*)	0,56	0,81	0,46	-

Problema 2

Uma metalúrgica deseja maximizar sua receita bruta. A tabela a seguir ilustra a proporção de cada material na mistura para a obtenção das ligas passíveis de fabricação. Formule o problema de programação matemática.

	Liga Especial de Baixa Resistência	Liga Especial de Alta Resistência	Disponibilidade de Matéria-prima
Cobre	0,50	0,20	16 ton
Zinco	0,25	0,30	11 ton
Chumbo	0,25	0,50	15 ton
Preço da Venda (*$/ton*)	3.000	5.000	-

Problema 3

Um fabricante de geladeiras precisa decidir quais modelos deve produzir em uma nova fábrica. O departamento de *marketing* e vendas identificou que dois modelos têm maior preferência de mercado, luxo e básico. Encontre o mix de produção que irá fornecer maior lucratividade.

Modelo	Lucro (em $)	Horas de Trabalho	Demanda Máxima
Luxo	100	10	1500
Básico	50	8	6000

Total de horas de trabalho disponíveis: 25.000

Capacidade de produção: 4.500 unidades

Problema 4

A Wyndor Glass CO. fabrica janelas e portas em vidro. A empresa possui três fábricas, sendo que a **Fábrica 1** produz as esquadrias de alumínio e as ferragens, a **Fábrica 2** produz as esquadrias de madeira e a **Fábrica 3** produz os vidros e faz a montagem. A empresa decidiu renovar sua linha de produtos e manter em produção apenas seus dois recentes lançamentos:

- **Produto 1**: porta de vidro de 2,5*m* com esquadrias de alumínio.
- **Produto 2**: uma janela duplamente adornada com esquadrias de madeira de 1,20*m* X 1,80*m*.

As demandas de tempo e lucros por unidade são apresentadas na tabela a seguir. Construa um modelo de programação linear para maximização dos lucros.

Fábrica	Tempo de produção por lote (em h) — Produto 1	Tempo de produção por lote (em h) — Produto 2	Tempo de produção disponível por semana (em h)
1	1	0	4
2	0	2	12
3	3	2	18
Lucro por lote (em $)	3.000	5.000	

Problema 5

Considere uma companhia distribuidora de bebidas que tem 2 centros de produção (**C1**: Araraquara e **C2**: São José dos Campos) e 3 mercados consumidores principais (**M1**: São Paulo, **M2**: Belo Horizonte e **M3**: Rio de Janeiro). Encontre a política de distribuição que garante o atendimento dos mercados consumidores com o menor custo.

Mercado

Centro	M1 SP	M2 BH	M3 RJ	Suprimento
C1 AR	4	2	5	800
C2 SJ	11	7	4	1000
Demanda	500	400	900	-

Problema 6

A Confederação Meridional de *Kibutzim* (CMK) é um grupo de três *kibutzim* (comunidades agrícolas coletivas) em Israel. A produção agrícola de cada *kibutz* é limitada tanto pela quantidade de área irrigável disponível quanto pela disponibilidade de água para irrigação. Serão plantados beterraba, algodão e sorgo. Em razão da limitada disponibilidade de irrigação, a CMK não será capaz de usar toda sua área disponível para a próxima temporada. Para garantir o equilíbrio entre os três *kibutzim*, acordou-se que cada um deles plantará a mesma proporção de sua área irrigável (se o *kibtuz* 1 planta 200/400 acres, então o *kibtuz* 2 planta 300/600 e o *kibtuz* 3 planta 150/300). Construa um modelo de programação linear que maximize o retorno líquido total.

Kibutz	Terra utilizável (em *acres*)	Água (em *acres pés*)
1	400	600
2	600	800
3	300	375

Plantação	Cota máxima (em *acres*)	Consumo de água (em *acres pés/acre*)	Retorno líquido ($/*acre*)
Beterraba	600	3	1.000
Algodão	500	2	750
Sorgo	325	1	250

Proporção de uso de área entre os 3 *kibutzim*

Problema 7

Um hospital trabalha com um atendimento variável em demanda durante as 24 horas do dia. As necessidades distribuem-se segundo a tabela a seguir.

O horário de trabalho de um enfermeiro é de 8 horas quando ele entra nos turnos 1, 2, 3, 4 e 6. O enfermeiro que entra no turno 4 recebe uma gratificação de 50% sobre o salário e o enfermeiro que entra no turno 5 trabalha apenas 4 horas.

Elabore um modelo de programação linear inteira que minimiza o gasto com a mão-de-obra.

Turno de Trabalho	Horário	Número Mínimo de Enfermeiros
1	08h - 12h	50
2	12h - 16h	60
3	16h - 20h	50
4	20h - 00h	40
5	00h - 04h	30
6	04h - 08h	20

Problema 8

A Union Airways deseja planejar a alocação de equipes em solo para atendimento de suas demandas em um determinado aeroporto. Após um estudo do histórico de demandas, foi levantado um número mínimo de atendentes necessários por período do dia. Construa um modelo de programação linear para atendimento dos requisitos mínimos de pessoas e minimização dos gastos com pessoal.

Período	Períodos cobertos					Número mínimo de atendentes
	Turno					
	1	2	3	4	5	
6h-8h	X					48
8h-10h	X	X				79
10h-12h	X	X				65
12h-14h	X	X	X			87
14h-16h		X	X			64
16h-18h			X	X		73
18h-20h			X	X		82
20h-22h				X		43
22h-00h				X	X	52
00h-06h					X	15
Custo diário por funcionário (em $)	170	160	175	180	195	

Problema 9

Uma indústria de papel produz bobinas-jumbo de L=400*cm* de largura e cada uma pesa T = 1*ton*. As bobinas devem ser cortadas em bobinas menores, conforme solicitação de diversos clientes. Determine a política de corte que garanta o atendimento das demandas previstas e minimize o consumo de papel.

- L = 400*cm* de largura
- T = 1,0*ton*
- **Demandas:**
  - 40*cm*: 5,0*ton*
  - 45*cm*: 3,5*ton*
  - 55*cm*: 4,0*ton*
  - 60*cm*: 5,0*ton*
- **Padrões:**
  - P1 = [10 - 0 - 0 - 0]
  - P2 = [1 - 8 - 0 - 0]
  - P3 = [0 - 0 - 7 - 0]
  - P4 = [1 - 0 - 0 - 6]
  - P5 = [0 - 4 - 4 - 0]
  - P6 = [0 - 0 - 4 - 3]

Problema 10

Uma fábrica necessita cortar uma fita de aço de 12*cm* de largura e 1m de comprimento em tiras de 2,4*cm*, 3,4*cm* e 4,5*cm* de largura. As necessidades globais das tiras são:

- Tira 1 (2,4*cm*): 2.500*m*
- Tira 2 (3,4*cm*): 4.500*m*
- Tira 3 (4,5*cm*): 8.000*m*

Formule um problema para minimizar as perdas de material.

Padrão de Corte	Tiras Tipo I	Tiras Tipo II	Tiras Tipo III	Perda
P1	5	0	0	0
P2	3	1	0	1,4
P3	3	0	1	0,3
P4	2	2	0	0,4
P5	1	0	2	0,6
P6	0	3	0	1,8
P7	0	2	1	0,7

Problema 11

O processo de produção de um pilar envolve 8 etapas, algumas delas interdependentes. Respeitadas as dependências, encontre o sequenciamento que leve ao menor tempo de produção possível.

Atividade	Descrição	Pred. Imediato	Duração (em h)
A	Preparo da armadura	-	6
B	Preparo da forma	-	5
C	Lançamento da armadura	A	4
D	Lançamento da forma	B, C	2
E	Providências para concretagem	-	2
F	Aplicação de concreto	E, D	3
G	Cura de concreto	F	72
H	Desforma do pilar	G	3

Problemas
Variáveis lógicas

Problemas de Mochila

Mochila 0-1

Considere n projetos e um capital de investimento b. O projeto j tem um custo a_j e um retorno esperado p_j. Formule um problema que permita selecionar o portfólio de projetos que maximiza o lucro sem exceder os recursos disponíveis.

Múltiplas Mochilas

Considere n itens que podem ser colocados em m mochilas de capacidades distintas b_i. Cada item j tem uma lucratividade p_j e um peso w_j. Monte um problema que maximize o valor agregado das mochilas sem exceder os limites de pesos.

Empacotamento de Mochilas

Considere que existam n itens, onde cada item j tem peso w_j, que devem ser transportados. Formule um problema de forma a minimizar o número de mochilas idênticas, de capacidade b necessárias para transportar os n itens.

Problemas de Designação

Designação Simples

Considere que existam n tarefas e n agentes, de tal forma que cada tarefa deve ser atribuída a um agente e cada agente só pode receber uma tarefa. A execução da tarefa i pelo agente j tem um custo c_{ij}. Formule um problema que atribua as tarefas de forma a minimizar o custo total de execução.

Designação Generalizada

Considere que existam n tarefas e m agentes ($n > m$), de tal forma que cada tarefa deve ser atribuída a um único agente. A execução da tarefa i pelo agente j tem um custo c_{ij} e demanda uma quantidade de recursos a_{ij}. Cada agente j tem uma disponibilidade de recursos b_j. Formule um problema que atribua as tarefas de forma a minimizar o custo total de execução e não exceder os recursos de cada agente.

Problemas de Máquinas Paralelas

Makespan de Máquinas Idênticas

Considere n tarefas indivisíveis e m máquinas idênticas. Sendo p_i o tempo de processamento de cada tarefa i, formule um problema que visa minimizar o tempo necessário para conclusão de todas as tarefas.

Makespan de Máquinas Não Relacionadas

Repita o problema anterior para máquinas não relacionadas, sendo p_{ij} o tempo que a máquina j leva para processar a tarefa i.

Referências

- [Arenales et al, 2007] M. Arenales; V. Armentano; R. Morabito; H. Yanasse. **Pesquisa Operacional para Cursos de Engenharia**, Editora Campus / Elsevier, 2007.
- [Goldbarg et al, 2005] M. C. Goldbarg; H. P. Luna. **Otimização Combinatória e Programação Linear - Modelos e Algoritmos**, 2a ed., Editora Campus / Elsevier, 2005.
- [Hillier et al, 2013] F. S. Hillier; G. J. Lieberman. **Introdução à Pesquisa Operacional**, 9a ed., Editora Mc Graw Hill, 2013.