

# Programação Linear

Introdução.

# Pesquisa Operacional

- ❖ *Operational Research* (UK).
- ❖ *Operations Research* (USA).
- ❖ **Definição:** desenvolvimento de métodos científicos que têm por objetivo dar suporte na decisão da melhor forma de se operar um sistema, usualmente sob condições que exijam a utilização de recursos limitados.

## Pesquisa Operacional

- ❖ É uma área da matemática aplicada que usa métodos matemáticos para ajudar a tomar melhores decisões.
  - ❖ Pesquisa operacional
    - ❖ Pesquisa de como operar
    - ❖ Pesquisa de como atuar
  - ❖ Pesquisa operacional é portanto utilizada para economizar recursos (dinheiro, tempo, etc) ao se resolver algum problema.

## Breve Histórico

- ❖ Origem do termo: construção do radar na Inglaterra, iniciada em 1934:
  - ❖ O termo PO é associado à A. P. Rowe, que coordenava equipes para examinar a eficiência de técnicas de operações advindas de experimentos com interceptação de radar.
  - ❖ Em 1941, foi fundada a Seção de Pesquisa Operacional do Comando da Força Aérea de Combate, responsável por resolver problemas de operações de guerra.

◊ Pós-guerra:

- ◊ Em 1947, foi fundada a SCOOP (*Scientific Computation of Optimal Programs*) no Pentágono: apoiar decisões de operações na força aérea americana.
- ◊ Projeto coordenado pelo economista Marshall Wood e pelo matemático George Dantzig.
- ◊ George Dantzig desenvolveu, formalizou e testou o método Simplex. Este desenvolvimento se baseou no resultados obtidos pelo matemático Leonid Kantorovich e contou com o apoio do economista T. C. Koopmans.
- ◊ Kantorovich e Koopmans ganharam o prêmio Nobel de economia de 1975, por suas contribuições à teoria de alocação ótima de recursos.

5

5

◊ Primeiras sociedades:

- ◊ 1952: Sociedade Científica Americana de Pesquisa Operacional (ORSA - *Operations Research Society of America*).
- ◊ 1953: Sociedade Inglesa de Pesquisa Operacional (ORS - *Operational Research Society*).
- ◊ 1953: Instituto Americano de Ciências de Administração (TIMS - *The Institute of Management Sciences*).

6

6

- ❖ Entre 1950 e 1970, a pesquisa operacional foi aplicada a vários problemas dos setores públicos e privados.
- ❖ Em 1967, foram identificados 766 grupos de pesquisa operacional, dos quais 553 estavam envolvidos nos setores industrial e financeiro.
- ❖ Exemplos: mineração, construção civil e militar, produção farmacêutica, setor bancário, coleta de lixo e transportes.
- ❖ Em 1970 a PO começou a ser objeto de estudos em cursos de graduação.

7

- ❖ Grupos e sociedades atuais:
  - ❖ ORS, ORSA e TIMS.
  - ❖ INFORMS (*Institute for Operations Research and the Management Sciences*).
  - ❖ GOR (*German Operations Research Society*).
  - ❖ CORS (*Canadian Operations Research Society*).
  - ❖ APDIO (Associação Portuguesa de Investigação Operacional).
  - ❖ ALIO (*Asociación Latino-Ibero-Americana de Investigación Operativa*).
  - ❖ SOBRAPO (Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional).

8

## Exemplos da Aplicação Prática de PO

(Fonte: [Hillier et al, 2013])

Organização	Natureza da aplicação	Seção	Economia anual (US\$)
Federal Express	Planejamento logístico de despachos	1.3	Não estimada
Continental Airlines	Otimizar a realocação de tripulações quando ocorrem desajustes nos horários de voo	2.2	40 milhões
Swift & Company	Aumentar as vendas e melhorar o desempenho na fabricação	3.1	12 milhões
Memorial Sloan-Kettering Cancer Center	Procedimentos de tratamentos radioterápicos	3.4	459 milhões
United Airlines	Programar turnos de trabalho nas centrais de reserva e nos balcões em aeroportos	3.4	6 milhões
Welch's	Otimizar o uso e a movimentação de matéria-prima	3.5	150 mil
Samsung Electronics	Desenvolver métodos de redução de tempo de fabricação e níveis de estoque	4.3	200 milhões mais receitas
Pacific Lumber Company	Gestão de ecossistemas florestais a longo prazo	6.7	398 milhões VPL*
Procter & Gamble	Redesenho do sistema de produção e distribuição	8.1	200 milhões
Canadian Pacific Railway	Planejamento de rotas para frete ferroviário	9.3	100 milhões
United Airlines	Realocação de aeronaves quando ocorrem problemas	9.6	Não estimada
U.S. Military	Planejamento logístico das Operações Tempestade no Deserto	10.3	Não estimada
Air New Zealand	Alocação de tripulação de voo	11.2	6,7 milhões
Taco Bell	Programar a escala de funcionários nas lojas da rede	11.5	13 milhões
Waste Management	Desenvolvimento de um sistema de gerenciamento de rotas para coleta e eliminação de lixo	11.7	100 milhões
Bank Hapoalim Group	Desenvolvimento de um sistema de apoio à tomada de decisão para analistas de investimentos	12.1	31 milhões mais receitas

Organização	Natureza da aplicação	Seção	Economia anual (US\$)
Sears	Programação e rotas de veículos para as frotas de entrega e de atendimento domiciliar	13.2	42 milhões
Conoco-Phillips	Avaliação de projetos de exploração petrolífera	15.2	Não estimada
Workers' Compensation	Gestão de pedidos de benefícios por invalidez e reabilitação de alto risco	15.3	4 milhões
Westinghouse	Avaliar projetos de pesquisa e desenvolvimento	15.4	Não estimada
Merrill Lynch	Gestão de riscos de liquidez para linhas de crédito rotativo	16.2	4 bilhões mais liquidez
PSA Peugeot Citroën	Orientar o processo de projeto para plantas de montagem de veículos eficientes	16.8	130 milhões mais lucros
KeyCorp	Aumentar a eficiência do serviço dos caixas de banco	17.6	20 milhões
General Motors	Aumentar a eficiência das linhas de produção	17.9	90 milhões
Deere & Company	Controle de estoques por meio de uma cadeia de suprimentos	18.5	1 bilhão menos estoque
Time Inc.	Gerenciamento dos canais de distribuição para revistas	18.7	3,5 milhões mais lucros
Bank One Corporation	Gestão de linhas de crédito e taxas de juros para cartões de crédito	19.2	75 milhões mais lucros
Merrill Lynch	Análise para estabelecimento de preços para o fornecimento de serviços financeiros	20.2	50 milhões mais receitas
AT&T	Projeto e operação de call centers	20.5	750 milhões mais lucros

## Resolução de Problemas com Modelos Matemáticos

- ❖ A partir da observação de fenômenos, processos ou sistemas, buscam-se leis que os regem. Essas leis, se passíveis de serem descritas por relações matemáticas, dão origem aos modelos matemáticos.
- ❖ *Modelo* é uma entidade que procura imitar as principais características de um objeto real para fins de representação.

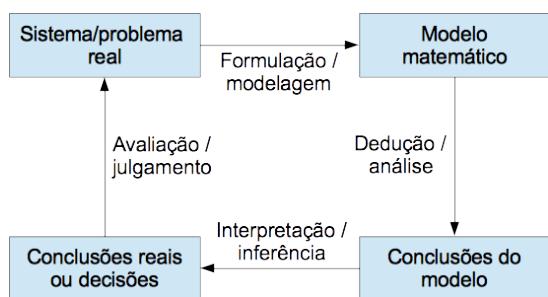
11

11

- ❖ A construção de um modelo matemático geralmente envolve simplificações.
  - ❖ O modelo matemático é, em geral, uma representação simplificada do problema real.
- ❖ É necessário validar o modelo matemático para se ter certeza que este é coerente com o contexto original.
- ❖ O modelo desenvolvido deve ser detalhado o suficiente para captar os elementos essenciais do problema, mas suficientemente tratável por métodos de otimização.

12

12



13

❖ Etapas do processo de modelagem:

- ❖ **Formulação/modelagem:** define as variáveis e as relações matemáticas para descrever o comportamento relevante do sistema ou problema real.
- ❖ **Dedução/análise:** aplica técnicas matemáticas e tecnologia para resolver o modelo matemático e visualizar quais conclusões ele sugere.

14

- ❖ **Interpretação/inferência:** argumenta se as conclusões retiradas do modelo têm significado suficiente para inferir conclusões ou decisões para o problema real.
- ❖ **Avaliação/julgamento:** muitas vezes as conclusões ou decisões inferidas na etapa de interpretação/inferência não são aderentes ao problema real, fazendo com que a modelagem necessite de revisão.

15

15

- ❖ Abordagem de resolução do problema:
  - ❖ **(i) Definição do problema:** definição do escopo do problema em estudo.
  - ❖ **(ii) Construção do modelo:** tradução da fase (i) em relações matemáticas e/ou lógicas de simulação.
  - ❖ **(iii) Solução do modelo:** aplicação de algoritmos de solução conhecidos para resolver o modelo da fase (ii).
  - ❖ **(iv) Validação do modelo:** verificação se o modelo proposto representa adequadamente o problema, ou seja, o modelo prediz adequadamente o comportamento do sistema.
  - ❖ **(v) Implementação da solução:** implementação da solução na prática, traduzindo os resultados do modelo em decisões.
- ❖ Muitas vezes o modelo obtido não apresenta o comportamento esperado, o que gera um ciclo entre os passos **(i)** e **(iv)**.

16

16

# Problemas de Otimização

Composição do problema:

- ❖ **Função objetivo:** deve ser minimizada ou maximizada. Representa o desejo do projetista (minimização do custo, maximização da durabilidade, minimização da variabilidade, etc).
- ❖ **Restrições:** conjunto de especificações que, após a escolha de uma solução, devem ser necessariamente atendidas (peso máximo, volume mínimo, necessidade de atender um cliente, etc).
- ❖ **Domínio das variáveis:** domínio das variáveis envolvidas no problema (reais, inteiras e lógicas).

17

17

Tipos de problemas:

- ❖ **Problemas lineares:** função objetivo e restrições lineares.
- ❖ **Problemas não lineares bem comportados:** função objetivo e restrições são lineares ou não lineares bem comportados (convexas, mono-modais, diferenciáveis, etc) e existe ao menos um funcional não linear bem comportado.
- ❖ **Problemas não lineares:** função objetivo e restrições são lineares ou não lineares e existe ao menos um funcional não linear que não é bem comportado.

18

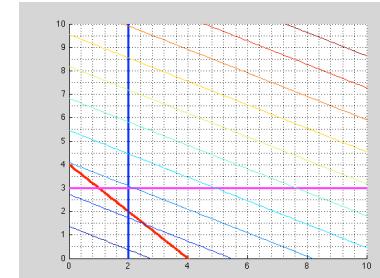
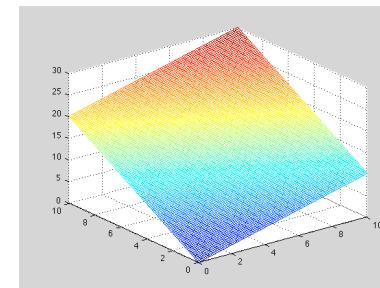
18

## Problema Linear

$$\begin{aligned} & \min 1x_1 + 2x_2 \\ \left\{ \begin{array}{l} 1x_1 + 1x_2 \leq 4 \\ 1x_1 + 0x_2 \leq 2 \\ 0x_1 + 1x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

19

19



20

Técnicas:

- ❖ Algoritmo Simplex;
- ❖ Algoritmo de Pontos Interiores;
- ❖ dentre outros.

21

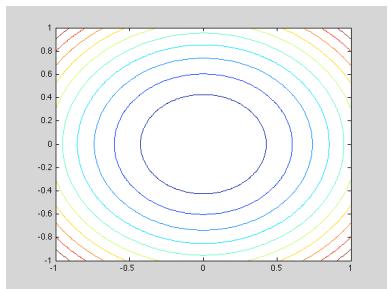
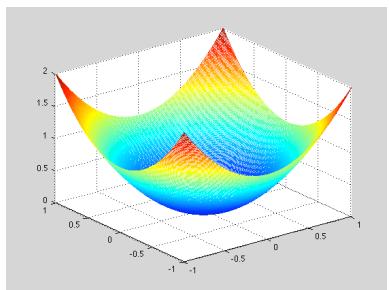
21

## Problema Não Linear Bem Comportado

$$\begin{aligned} \min & 1x_1^2 + 1x_2^2 \\ & -1 \leq x_1, x_2 \leq 1 \end{aligned}$$

22

22



23

Técnicas:

- ❖ Algoritmo Elipsoidal;
- ❖ Algoritmo de Gradiente;
- ❖ Algoritmo quasi-Newton;
- ❖ dentre outros.

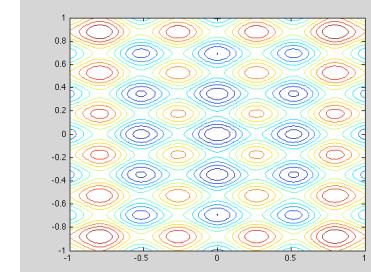
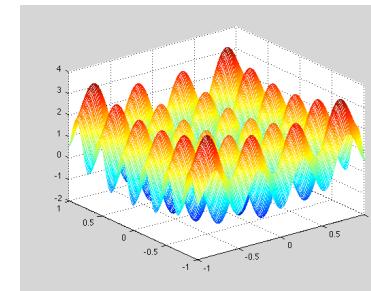
24

## Problema Não Linear

$$\begin{aligned} \min & 1x_1^2 + 1x_2^2 - \cos(12x_1) - \cos(18x_2) \\ & -1 \leq x_1, x_2 \leq 1 \end{aligned}$$

25

25



26

26

Técnicas:

- ❖ Algoritmos de busca local (Simulated Annealing, Busca Tabu, Iterated Local Search, Variable Neighborhood Search, etc).
- ❖ Algoritmos evolucionários (Algoritmo Genético, Evolução Diferencial, Estratégias Evolutivas, Algoritmo de Colônia de Formigas, etc).

27

27

## Problema Combinatório

- ❖ Existem variáveis inteiras e / ou binárias.
- ❖ Em geral, o número de combinações possíveis cresce exponencialmente ou fatorialmente com o tamanho do problema.
- ❖ O problema final pode ser linear ou não linear.
- ❖ Sempre existem restrições a serem atendidas.

28

28

## Referências

- ❖ [Arenales et al, 2007] M. Arenales; V. Armentano; R. Morabito; H. Yanasse. **Pesquisa Operacional para Cursos de Engenharia**, Editora Campus / Elsevier, 2007.
- ❖ [Goldbarg et al, 2005] M. C. Goldbarg; H. P. Luna. **Otimização Combinatória e Programação Linear - Modelos e Algoritmos**, 2a ed., Editora Campus / Elsevier, 2005.
- ❖ [Hillier et al, 2013] F. S. Hillier; G. J. Lieberman. **Introdução à Pesquisa Operacional**, 9a ed., Editora Mc Graw Hill, 2013.
- ❖ [Gonçalves, 2018] V. M. Gonçalves. Pesquisa Operacional - Notas de Aula. DEE/UFMG.