UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Lista de Exercícios de Otimização Multiobjetivo

Professores:
Frederico Gadelha Guimarães
Eduardo Gontijo Carrano
Lucas de Souza Batista

Exercício 1
Conceitue função, funcional, continuidade e diferenciabilidade.

Exercício 2
Conceitue gradiente e subgradiente.

Exercício 3
Supondo um problema de minimização, conceitue direção minimizante de $f(\cdot)$.

Exercício 4
Conceitue curva de nível, superfície de nível, região subnível e bacia de atração.

Exercício 5
Conceitue função convexa, função quasi-convexa e função não-convexa.

Exercício 6
Conceitue função unimodal e função multimodal.

Exercício 7
Conceitue mínimo local, mínimo global, solução Pareto-ótima, conjunto Pareto-ótimo e fronteira Pareto-ótima.

Exercício 8
Seja $f(\mathbf{x}) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$ sujeito a $g(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 \leq 2$. Verifique se as condições necessárias para um mínimo local são satisfeitas em $(1,\ 1)^T$.

Exercício 9
Considere o problema de minimização restrita a seguir:

$$\min f(\mathbf{x}) = -x_1^2 - x_2^2$$
$$\text{sujeito a } \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

i. Esboce a região factível e algumas curvas de nível da função-objetivo.

ii. Marque a solução do problema.

iii. Mostre graficamente que as condições de Karush-Kuhn-Tucker são satisfeitas no ponto solução.

iv. Mostre graficamente que as condições de Karush-Kuhn-Tucker também são satisfeitas no ponto $(2,\ 1)^T$ e explique porquê, já que esse ponto não é solução.

Exercício 10

Seja o problema de maximização da função $f(x) = x^2$, $-1 \leq x \leq 2$. Mostre que as condições de Karush-Kuhn-Tucker são satisfeitas em $x = 1$, $x = 0$, e $x = 2$, embora o ótimo global seja $x = 2$. Discuta.

Exercício 11

Resolva o problema de minimização restrita a seguir de forma analítica usando as condições de otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker.

$$\min f(\mathbf{x}) = -x_1 x_2$$
$$\text{sujeito a } \begin{cases} g(\mathbf{x}) = x_1^2 + 3x_2^2 \leq 3 \\ h(\mathbf{x}) = x_1 + 3x_2 - 9 = 0 \end{cases}$$

Exercício 12

Seja $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 25x_2^2$ e $\mathbf{x}_0 = (2,\ 2)^T$.

i. Aplique uma iteração do método do Gradiente para minimizar $f(\mathbf{x})$.

ii. Aplique uma iteração do método de Newton para minimizar $f(\mathbf{x})$.

Exercício 13

Seja $f(\mathbf{x}) = x_1^3 + x_1 x_2 - x_1^2 x_2^2$ e $\mathbf{x}_0 = (1,\ 1)^T$. Um programa computacional cuidadosamente programado para executar o método de Newton não foi bem sucedido. Discuta as prováveis razões para o não sucesso.

Exercício 14

Quais as vantagens dos métodos de minimização quasi-Newton em relação aos demais métodos de Direção de Busca?

Exercício 15

Conhecido o intervalo inicial $[a, b]$ é possível calcular o número de iterações necessárias, pelo método da Seção Áurea, para que $(b - a) \leq \xi$. Mostre como calcular o número de iterações.

Exercício 16

Considere o problema a seguir:

$$\min f(\mathbf{x}) = 5x_1$$
$$\text{sujeito a } \begin{cases} g_1(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 \leq 0 \\ g_2(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 4 \leq 0 \end{cases}$$

i. Esboce a região factível e determine a solução graficamente.

ii. Construa uma função barreira que poderia ser usada para resolver o problema.

iii. Construa uma função penalidade que poderia ser usada para resolver o problema.

iv. Verifique as condições de Karush-Kuhn-Tucker no ponto solução.

v. Verifique que as condições de Karush-Kuhn-Tucker não são satisfeitas em outro ponto factível.

Exercício 17

Contraste os Métodos de Penalidades e o Método do Lagrangeano Aumentado, destacando vantagens e desvantagens de cada técnica.

Exercício 18

Nos Métodos de Penalidades utilizamos um único parâmetro u para todas as restrições. Qual(is) a(s) vantagem(ns) de usar um parâmetro para cada restrição? Sugira um esquema de atualização desses parâmetros.

Exercício 19

Seja o problema: $\min f(x) = x^3$, sujeito a $h(x) = x - 1 = 0$; cuja solução ótima é dada por $x^* = 1$. Pede-se:

i. Escreva a função de penalidade que transforma o problema restrito original num problema irrestrito.
ii. Calcule a solução do problema com $u = 1, 10, 100$.
iii. Faça $u \to \infty$ e mostre que a solução converge para $x^* = 1$.

Exercício 20

Seja a função-objetivo $f(\mathbf{x}) = 6x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2$ a ser minimizada, sujeito à restrição $h(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 = 5$.

i. Escreva a função Lagrangeana aumentada do problema.
ii. Fazendo $u_0 = 2$ e $\lambda_0 = 0$, faça 3 iterações do método da Langrangeana Aumentada, encontrando o mínimo da função Lagrangeana aumentada a partir da condição de 1a ordem.
iii. Fazendo $u_0 = 20$ e $\lambda_0 = 0$, faça 3 iterações do método da Langrangeana Aumentada, encontrando o mínimo da função Lagrangeana aumentada a partir da condição de 1a ordem.

Exercício 21

Responda às questões a seguir:

i. Mostre que o método da soma ponderada (formulação P_w) pode não produzir todas as soluções eficientes em alguns casos.
ii. Discuta desvantagens do Método ϵ-restrito;
iii. Mostre que é possível haver casos em que as condições de Karush-Kuhn-Tucker para eficiência são satisfeitas em pontos não pertencentes ao conjunto de soluções Pareto-ótimas.

Exercício 22

Determine o conjunto de soluções Pareto-ótimas do problema multiobjetivo a seguir:

$$\min \begin{array}{l} f_1(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 \\ f_2(\mathbf{x}) = x_1^2 \end{array}$$

$$\text{sujeito a} \begin{cases} g_1(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 \le 4 \\ g_2(\mathbf{x}) = x_2 \le 1 \\ g_3(\mathbf{x}) = x_1 - x_2 - 2 \le 0 \end{cases}$$

Exercício 23

Determine o conjunto de soluções Pareto-ótimas do problema multiobjetivo a seguir:

$$\min \begin{array}{l} f_1(\mathbf{x}) = -x_1^2 - x_2^2 \\ f_2(\mathbf{x}) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2 \end{array}$$

Exercício 24

Suponha que você planeje comprar um “smartphone” e, para tal, elencou quatro alternativas (SP1, SP2, SP3 e SP4) e cinco critérios principais (custo, resolução do display, duração da bateria, tamanho da tela, e memória interna). Considerando os dados apresentados na Tabela 1, faça sua escolha empregando os seguintes métodos de auxílio à tomada de decisão (SMARTER, Electre I, Promethee II, e AHP). No caso de incomparabilidade entre alternativas no final do processo, estabeleça um critério adicional e tome sua decisão. É importante notar que nesse problema você representa a unidade de decisão e, portanto, é responsável pela definição dos pesos dos critérios e demais parâmetros.

	custo	resolução	bateria	tela	memória
SP_1	$ 664,00	1920 x 1080 pixels	25h	5.7”	32 GB
SP_2	$ 550,00	1920 x 1080 pixels	14h	5.0”	16 GB
SP_3	$ 400,00	1280 x 720 pixels	22h	4.8”	16 GB
SP_4	$ 540,00	1136 x 640 pixels	8h	4.0”	16 GB

Tabela 1: Alternativas e critérios usados no processo de seleção do “smart phone”