# Análise de circuitos em resposta em frequência

# Sumário

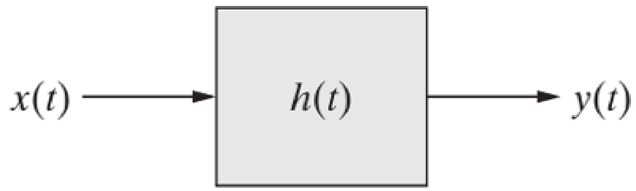
- Introdução e motivação.
- Seleção de frequências e funções de transferência.
- Filtros ideais.
- Filtros passa-baixas RL e RC.
- Filtros passa-altas RL e RC.
- Filtros passa-faixa RLC série e paralelo.
- Filtros rejeita-faixa RLC série e paralelo.

# Introdução

- **Resposta em frequência → o que acontece ao variar a *<u>frequência</u>* da fonte de estímulo.**
  - **Considerando sempre <u>regime permanente senoidal</u> (RPS).**
- **Inicialmente → uma senoide com frequência variável.**
- **Outros estímulos → análise estendida por meio da transformada de Fourier e o princípio da superposição.**
- **Podemos utilizar estas características para controlar como o circuito deverá responder a certos estímulos. Ex.:**
  - **Circuitos que impeçam a passagem de sinais muito rápidos:**
    - **Supressores de surtos, eliminadores de ruídos.**
  - **Circuitos que permitam a passagem de uma faixa limitada de frequências:**
    - **Sintonizadores de rádio, filtros de linha.**
  - **Circuitos que eliminem sinais de baixas frequências:**
    - **Eliminadores de ruído de rede (hum cancelling).**

# Resposta em frequência

- **A resposta em frequência:**




$$x(t)=A\cos(\omega t+\varphi) \longrightarrow y(t)=A|H(j\omega)|\cos[\omega t+\varphi+\theta(\omega)]$$

**Resposta de amplitude**

**Resposta de fase**

- **Pode ser obtida de duas formas:**
  - **Utilizando os modelos de regime permanente senoidal dos componentes.**
  - **Utilizando a função de transferência em RPS.**

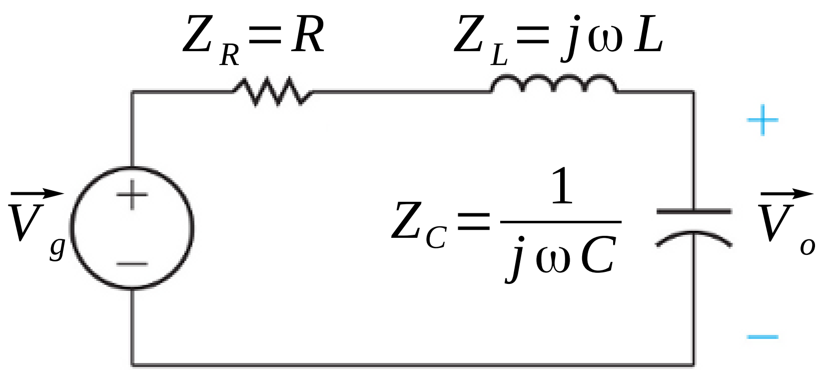
# Resposta em frequência considerando modelos de componentes em RPS

- **Modelos de componentes em RPS → ao variar a frequência da fonte:**
  - **Resistores → não se alteram:** $Z_R = R$
  - **Indutores → impedância diretamente proporcional à frequência:**

$$Z_L = j\omega L$$

  - **Capacitores → impedância inversamente proporcional à frequência:**

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$$



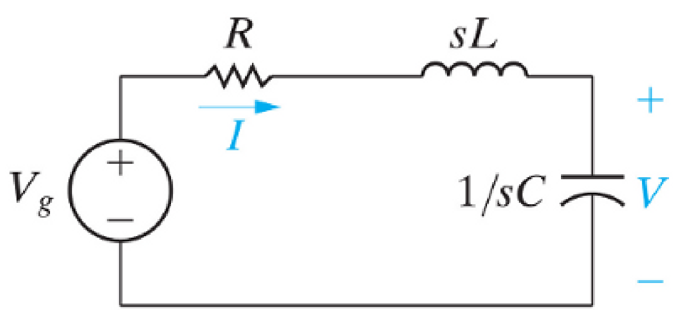

$$\frac{\vec{V}_o}{\vec{V}_g} = \frac{1/j\omega C}{R + j\omega L + 1/j\omega C}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{1/LC}{\sqrt{(1/LC - \omega^2)^2 + (\omega R/L)^2}}$$

$$\theta(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega R/L}{1/LC - \omega^2}\right)$$

# Resposta em frequência e a função de transferência

- **Função de transferência em RPS → substitui-se *s* por *jω* (por quê?):**




$$H(s)=\frac{V(s)}{V_g(s)}=\frac{1/LC}{s^2+R/L\,s+1/LC}$$

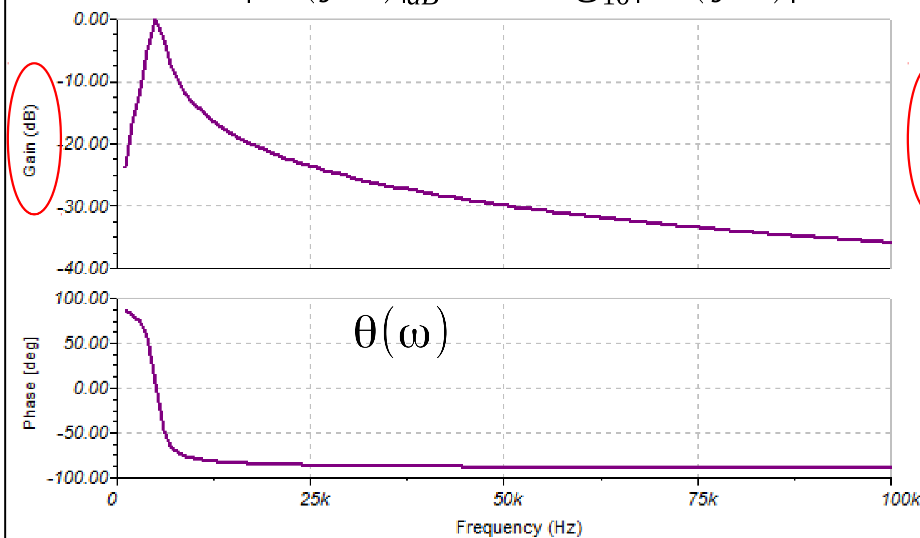
$$|H(j\omega)|=\frac{1/LC}{\sqrt{(1/LC-\omega^2)^2+(\omega R/L)^2}}$$ → **Resposta de amplitude**

$$\theta(\omega)=-\arctan\left(\frac{\omega R/L}{1/LC-\omega^2}\right)$$ → **Resposta de fase**

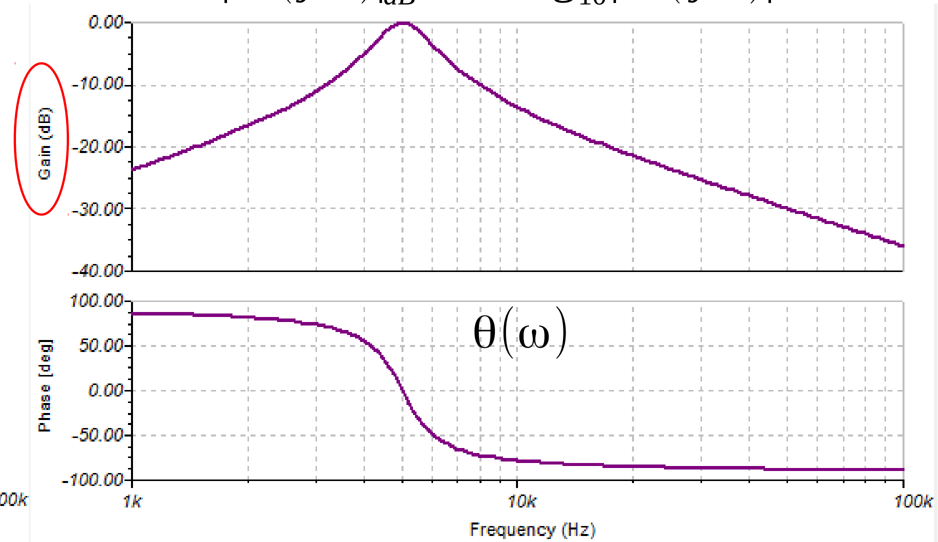
# Resposta em frequência e diagramas de Bode

- **Gráficos de resposta em frequência:**
  - **Divididos em gráficos de amplitude e de fase.**
  - **Escala horizontal: linear ou <u>logarítmica</u>.**
  - **Escala vertical: linear ou <u>decibéis</u> → diagramas de Bode.**

$$|H(j\omega)|_{dB}=20\log_{10}|H(j\omega)|$$




$$|H(j\omega)|_{dB}=20\log_{10}|H(j\omega)|$$

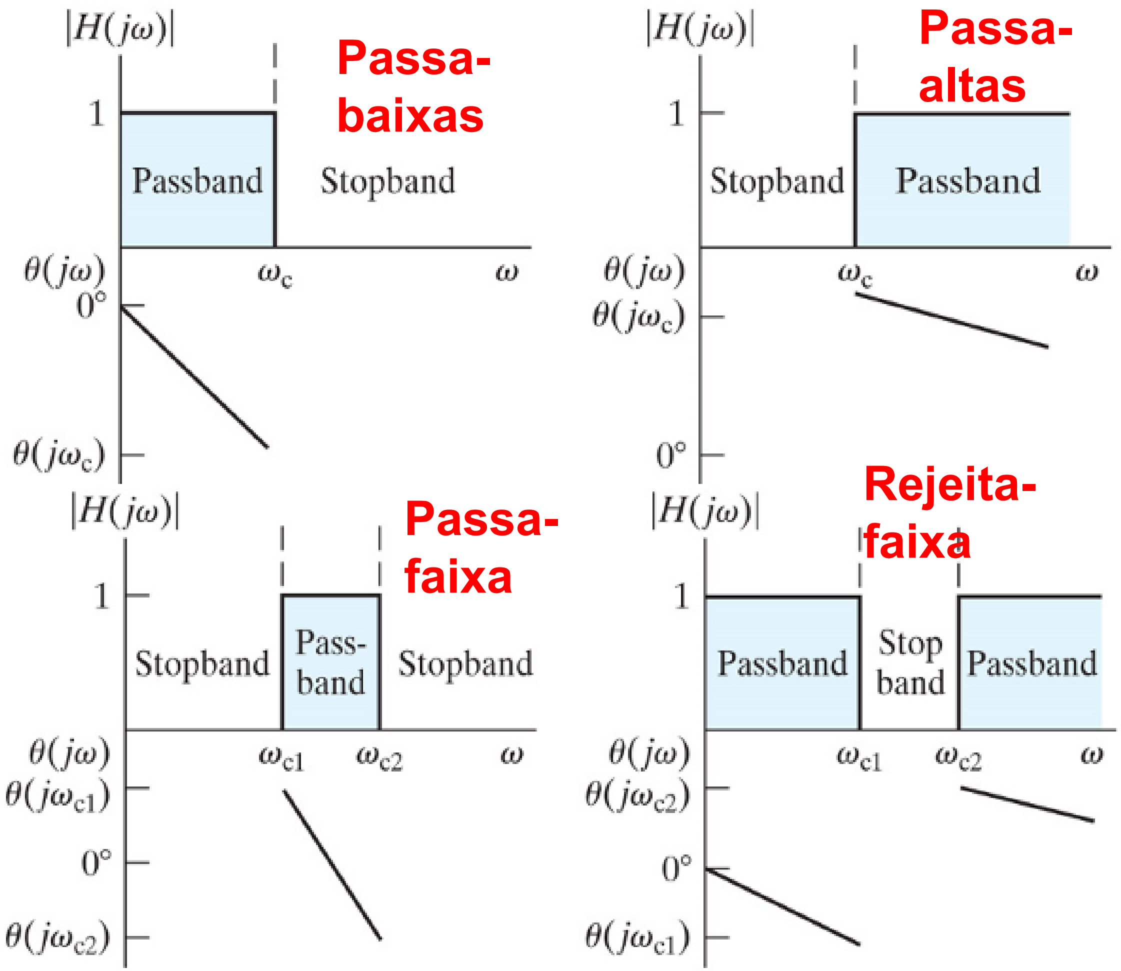


# Filtros

- Circuitos de seleção de frequências → *Filtros*.
  - Idealmente:
    - Deixam passar (sem distorções) todos os sinais com frequências em uma determinada faixa → faixa de *passagem*.
    - Eliminam (totalmente) todos os sinais com frequências fora da faixa → faixa de *rejeição*.


  - Na prática:
    - Sinais na faixa de passagem sofrem distorções de amplitude e fase!
    - Sinais na faixa de rejeição são *atenuados* mas não totalmente eliminados.
    - Não há um limite bem definido entre as faixas de passagem e de rejeição → faixa de *transição*.

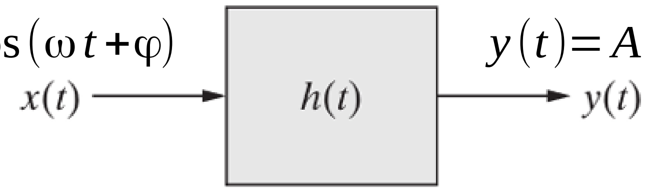
# Resposta em frequência de filtros ideais




- **Resposta de amplitude ideal → tipo "parede" (brick wall).**
- **Resposta de fase ideal → linear e decrescente na faixa de passagem (derivada negativa).**
- **Passa-baixas e passa-altas → uma frequência de corte** $\omega_c$
- **Passa-faixa e rejeita-faixa → duas frequências de corte** $\omega_{c1}, \omega_{c2}$

# Fase linear → por quê?

$$x(t)=A\cos(\omega t+\varphi) \qquad y(t)=A|H(j\omega)|\cos[\omega t+\varphi+\theta(\omega)]$$




- **Supondo:**

$|H(j\omega)|=1$ → **Ganho unitário**

$\theta(\omega)=-\omega\frac{\pi}{2}$ → **Fase linear**

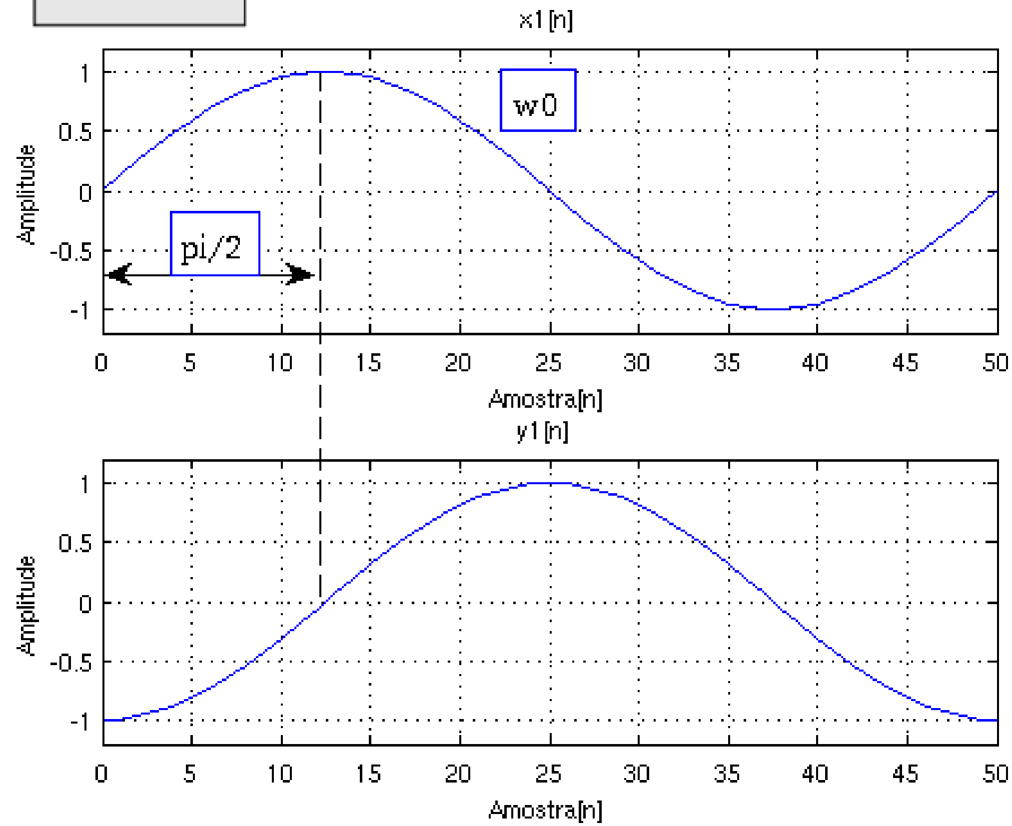
$$\omega=1 \rightarrow \theta(\omega)=-\frac{\pi}{2}$$

$$\downarrow$$

$$x_0[n]=A\,sen(1t)$$

$$\downarrow$$

$$y_0[n]=A\cdot 1\,sen\left(1t-\frac{\pi}{2}\right)$$

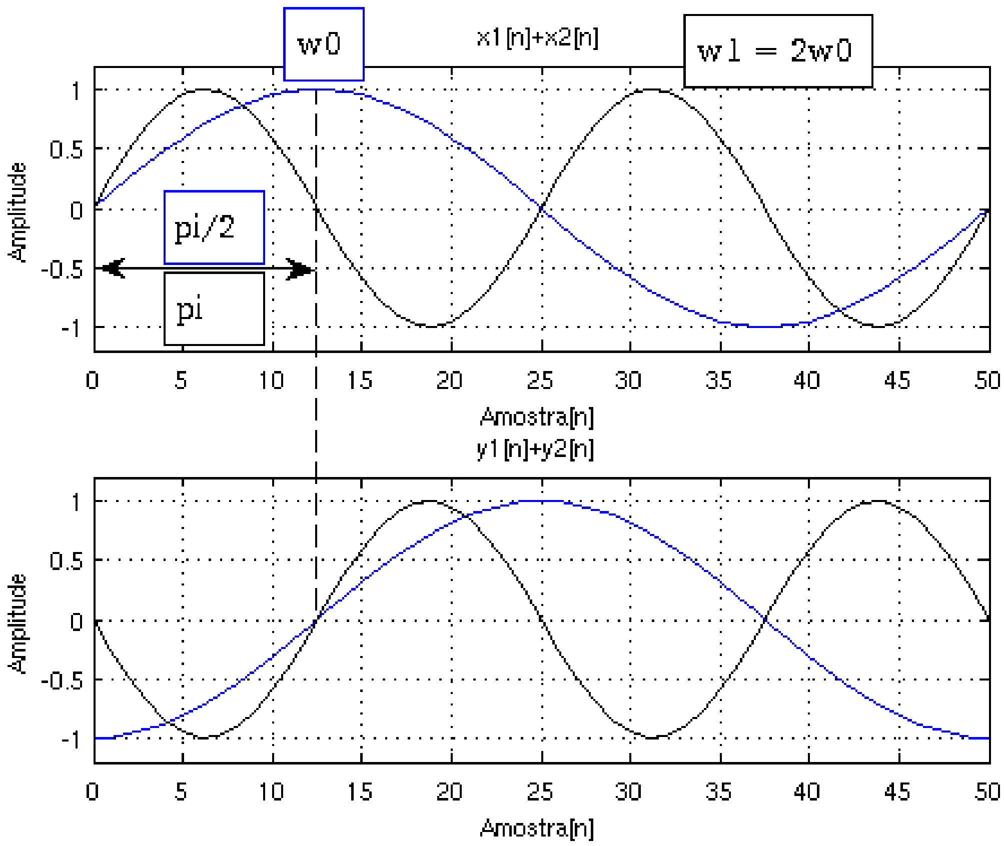


# Fase linear → por quê?

$$\omega = 2 \;\rightarrow\; \theta(\omega) = -2\cdot\frac{\pi}{2} = -\pi$$

$$x_0[n] = A\,sen(2t)$$

$$y_0[n] = A\cdot 1\,sen(2t-\pi)$$

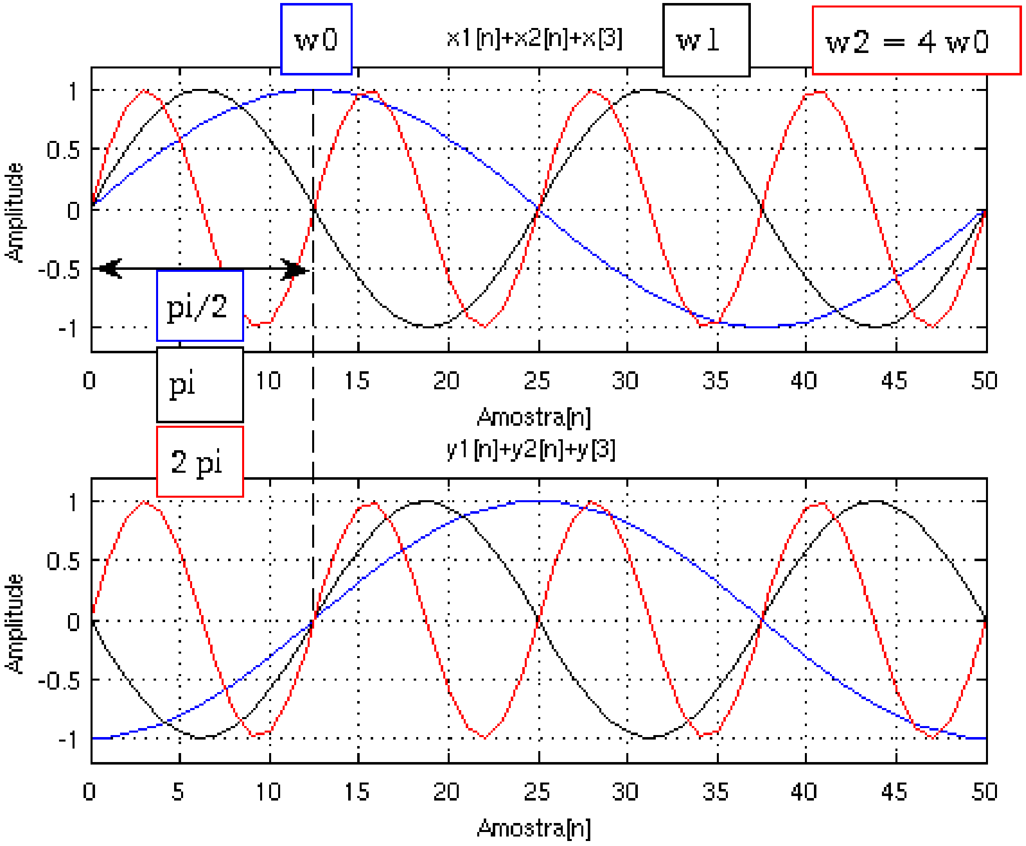


# Fase linear → por quê?

$$\omega = 4 \rightarrow \theta(\omega) = -4 \cdot \frac{\pi}{2} = -2\pi$$

$$x_0[n] = A\, sen(4t)$$

$$y_0[n] = A \cdot 1\, sen(4t - 2\pi)$$



# Fase linear

- **Portanto**

$$\omega = 1 \;\rightarrow\; \theta(\omega) = -\frac{\pi}{2}$$

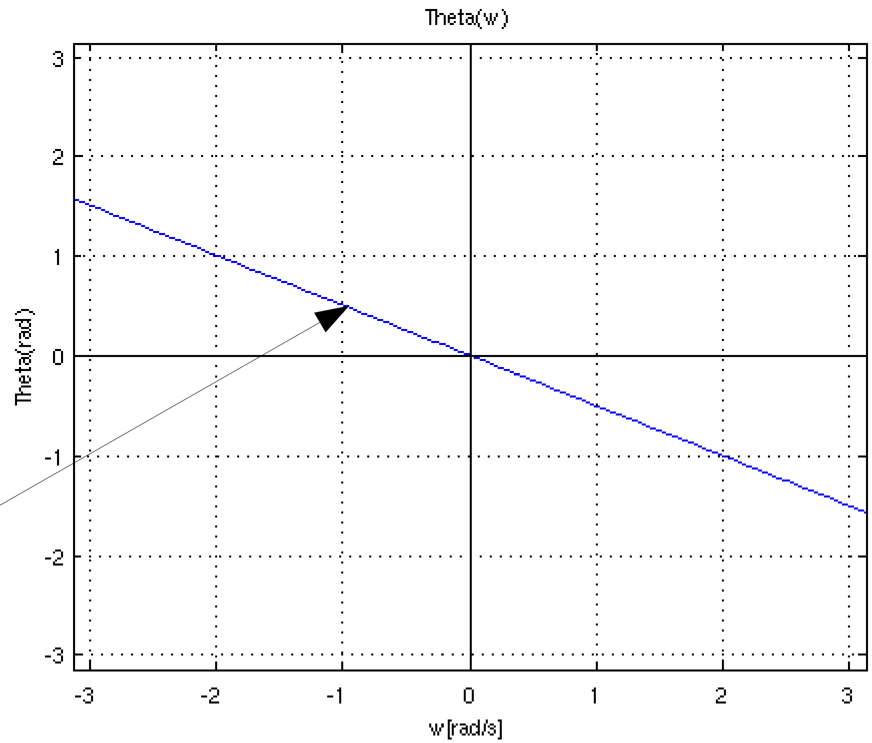
$$\omega = 2 \;\rightarrow\; \theta(\omega) = -\pi$$

$$\omega = 4 \;\rightarrow\; \theta(\omega) = -2\pi$$

$$\downarrow$$

$$\theta(\omega) = -\omega\frac{\pi}{2} = A\,\omega + B$$

**FASE LINEAR**



# Atrasos de fase e de grupo

- **Sistemas com fase linear atrasam TODAS as senóides:**
  - **da mesma forma (no tempo);**
  - **de forma linear (em relação ao ângulo de fase);**
- **O atraso linear evita distorções no sinal de saída devido ao desalinhamento das senóides/cossenóides.**
- **O atraso total do sinal é chamado de ATRASO DE GRUPO e é dado por:**

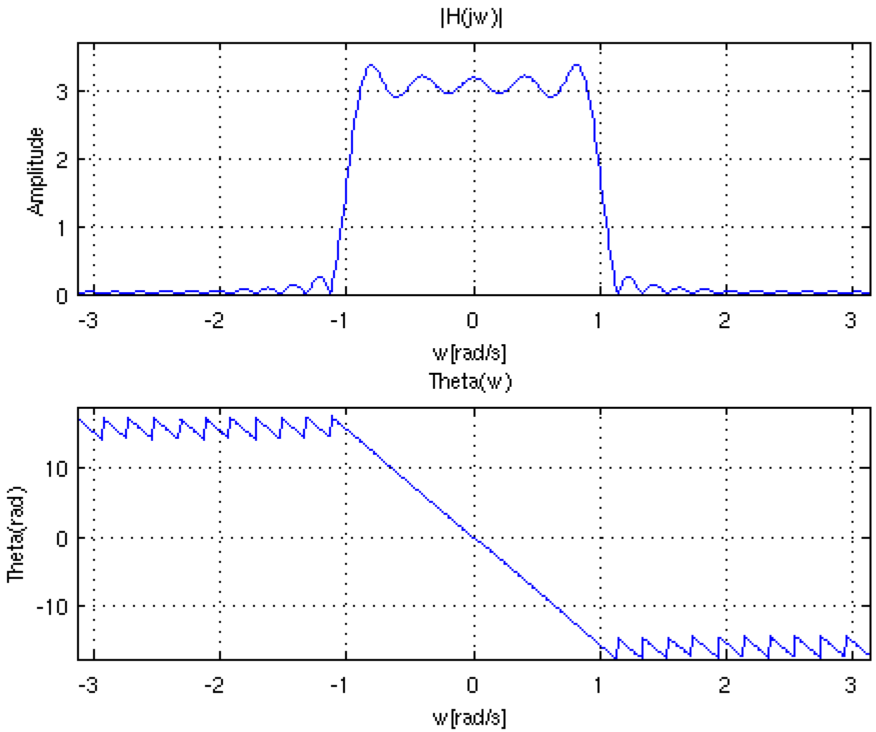
$$\tau_g(\omega) = -\frac{d\,\theta(\omega)}{d\omega} \quad (segundos)$$

- **Em sistemas com fase linear**

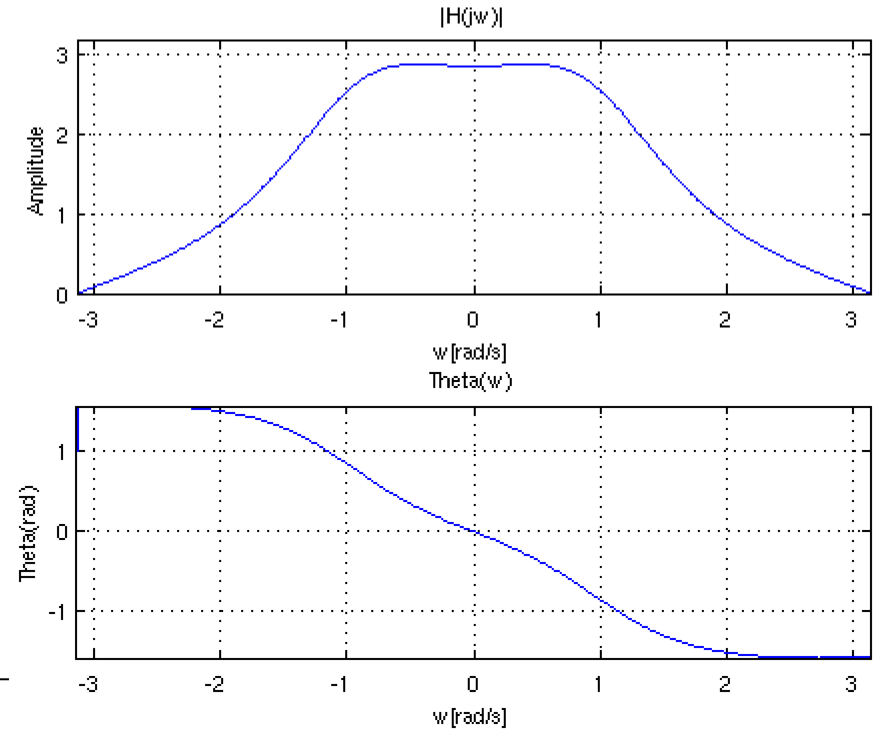
$$\theta(\omega) = A \cdot \omega + B \;\Rightarrow\; \tau_g(\omega) = -\frac{d\,\theta(\omega)}{d\omega} = -A \quad (constante)$$

# Atrasos de fase e de grupo

- Em sistemas reais é impossível obter fase linear sobre todo o espectro de frequências.
  - Entretanto, é suficiente obter fase linear somente sobre a faixa de passagem do sistema.
- Ex.: filtro FIR com fase linear ideal:

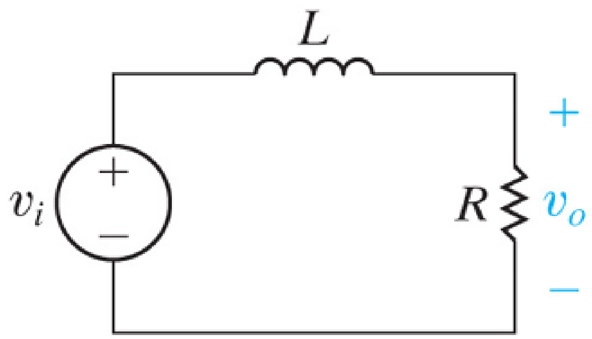



- Ex.: filtro IIR com fase quase-linear:



# Filtros passa-baixas

- **Circuito RL série:**




**Entrada** $\rightarrow \; v_i(t)$

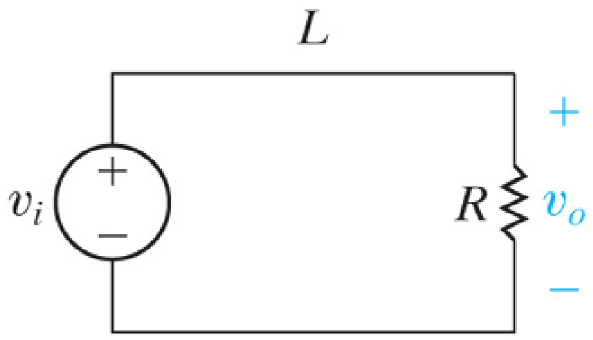
**Saída** $\rightarrow \; v_o(t)$

$$Z_R = R$$

$$Z_L = j\omega L$$

# Filtros passa-baixas

**Quando** $\omega \rightarrow 0$

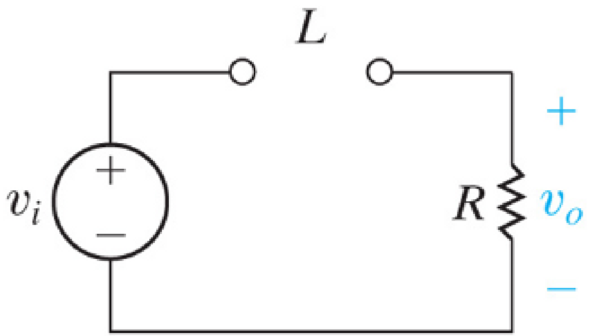



$$Z_L = j\omega L \rightarrow 0$$

$v_o \rightarrow v_i$ ⟶ **Sinais com baixas frequências passam e aparecem na saída.**

$\theta_{v_o} \rightarrow \theta_{v_i}$ ⟶ **Saída e entrada tendem a permanecer em fase.**

**Quando** $\omega \rightarrow \infty$



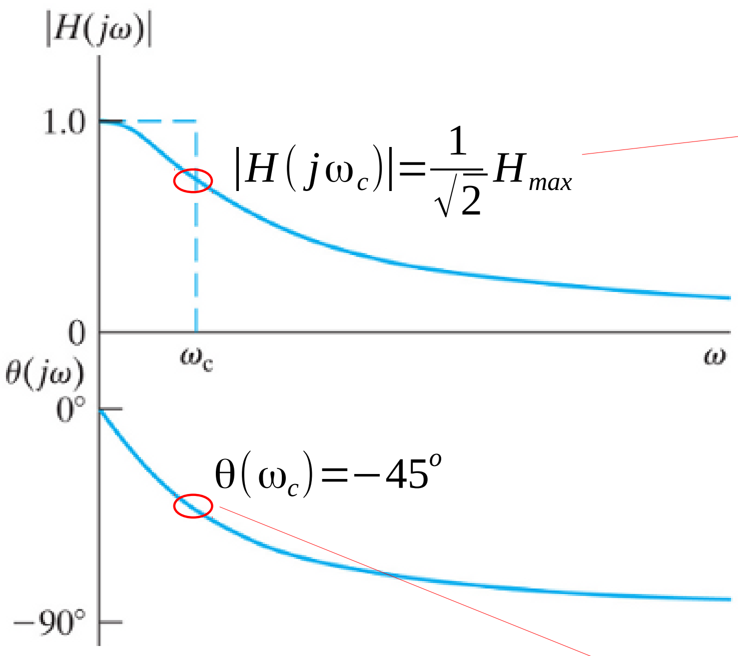

$$Z_L = j\omega L \rightarrow \infty$$

$v_o \rightarrow 0$ ⟶ **Sinais com altas frequências não passam e a saída tende a zero.**

$\theta_{v_o} \rightarrow -90^o$ ⟶ **A saída tende a se atrasar em relação à entrada.**

# Filtros passa-baixas

- **Resposta em frequência:**




**Como definir a frequência de corte?**

$$|H(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}} H_{max} \approx 0.707\, H_{max}$$

$$|H(j\omega_c)|_{dB} = 20\log_{10}\frac{1}{\sqrt{2}} H_{max} =$$

$$\approx 20\log_{10} H_{max} - 3.01\, dB$$

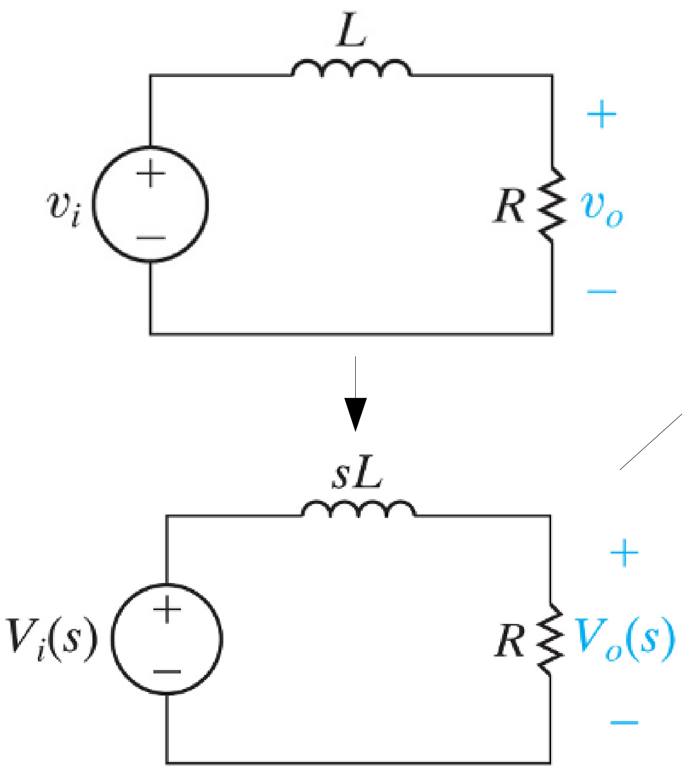
$$P(j\omega_c) = \frac{1}{2} P_{max}$$ **(Frequência de ½ potência)**

**Frequência correspondente ao polo da FT.**

**Frequência correspondente a** $\theta(\omega_c) = -45^o$

# Análise quantitativa

- **Utilizando Laplace (energia inicial nula):**




$$H(s)=\frac{V_o(s)}{V_i(s)}=\frac{R/L}{s+R/L}$$

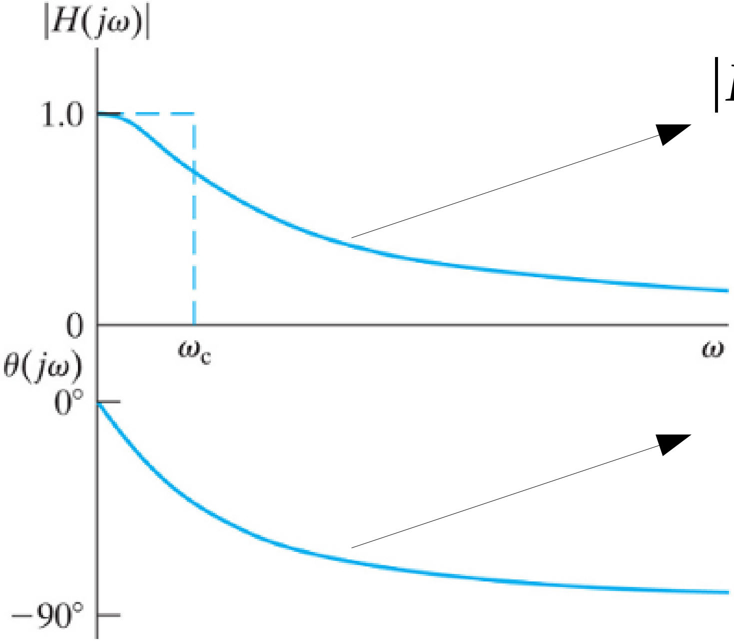
**Em regime permanente.**

$$H(j\omega)=\frac{R/L}{j\omega+R/L}=\frac{R/L\,e^{j0}}{\sqrt{\omega^2+(R/L)^2}\,e^{j\arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)}}$$

$$=\frac{R/L}{\sqrt{\omega^2+(R/L)^2}}e^{-j\arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)}$$

$$|H(j\omega)|=\frac{R/L}{\sqrt{\omega^2+(R/L)^2}} \qquad \theta(\omega)=-\arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

# Análise quantitativa




$$|H(j\omega)| = \frac{R/L}{\sqrt{\omega^2 + (R/L)^2}}$$

$$\theta(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

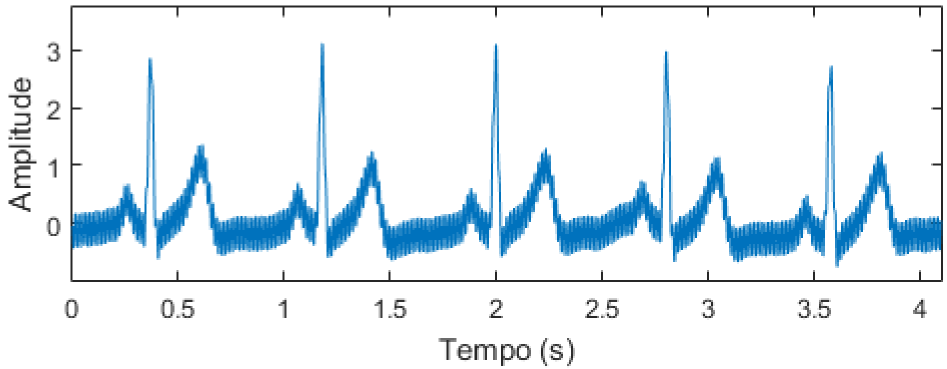
**R e L determinam o comportamento do circuito.**

- **Em:** $\omega = \omega_c$ $\longrightarrow$ $|H(j\omega_c)| = \frac{R/L}{\sqrt{\omega_c^2 + (R/L)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\longrightarrow$ $\boxed{\omega_c = \frac{R}{L}}$

$$\theta(\omega_c) = -\arctan\left(\frac{\omega_c L}{R}\right) = -\arctan(1) \qquad \boxed{\theta(\omega_c) = -45^o}$$

# Exemplo.

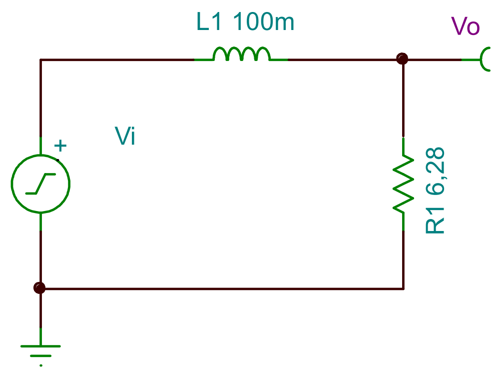
- **Exemplo 14.1 – pág. 392:**
  - **Sinal de eletrocardiograma, frequência aproximadamente 1 Hz.**
  - **Presença de ruído senoidal (harmônico) gerado pela rede elétrica, frequência de 60Hz.**
  - **Determine:**
    - **Parâmetros de um filtro passa-baixas a ser usado para eliminar o ruído de 60 Hz. Considere uma frequência de corte de 10 Hz.**
    - **A amplitude da tensão de saída se a entrada tem 1 $V_{pico}$ e frequências de 1 Hz, 10 Hz e 60 Hz.**



# Exemplo

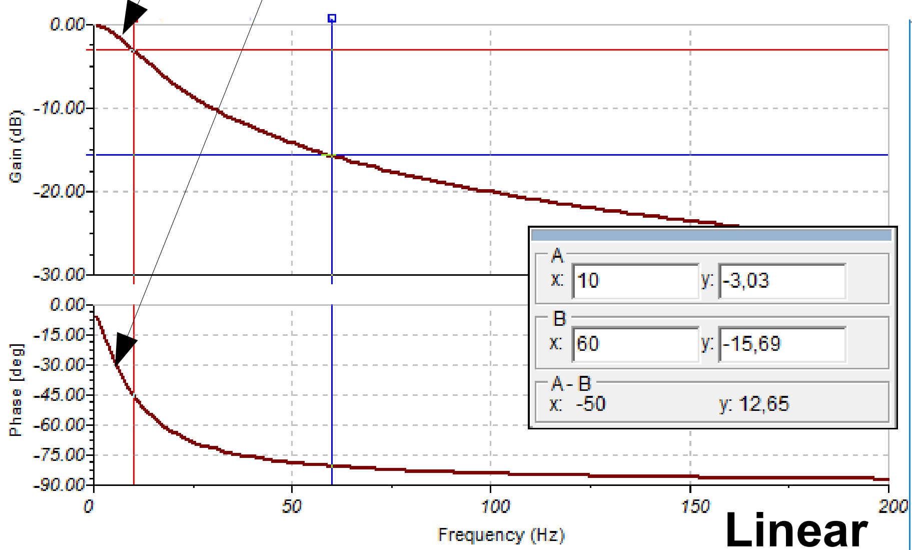
$$\omega_c = 2\pi 10 = 20\pi \quad rad/s$$

$$Se\ L = 100\,mH \rightarrow R = 6{,}28\,\Omega$$

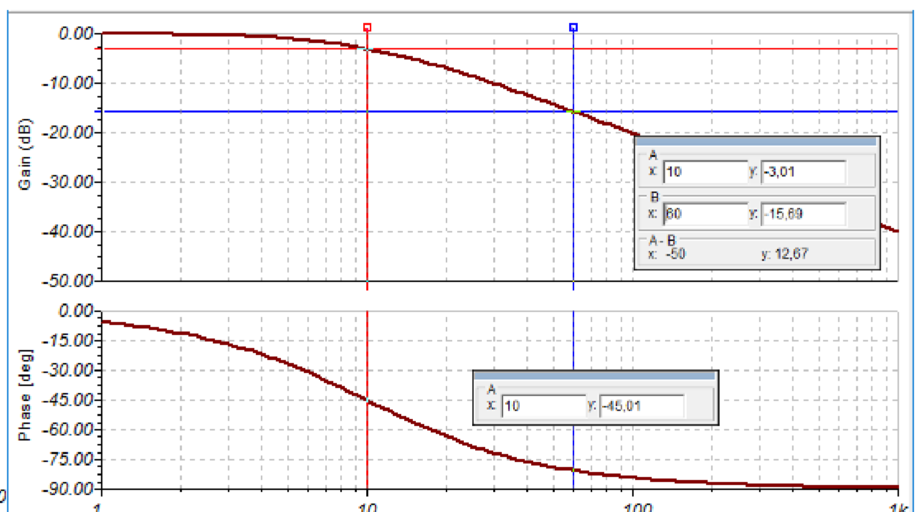



**Distorção de amplitude**

**Distorção de fase**

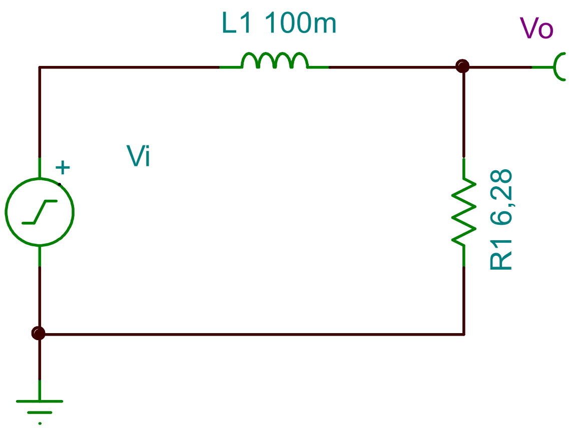



**Linear**

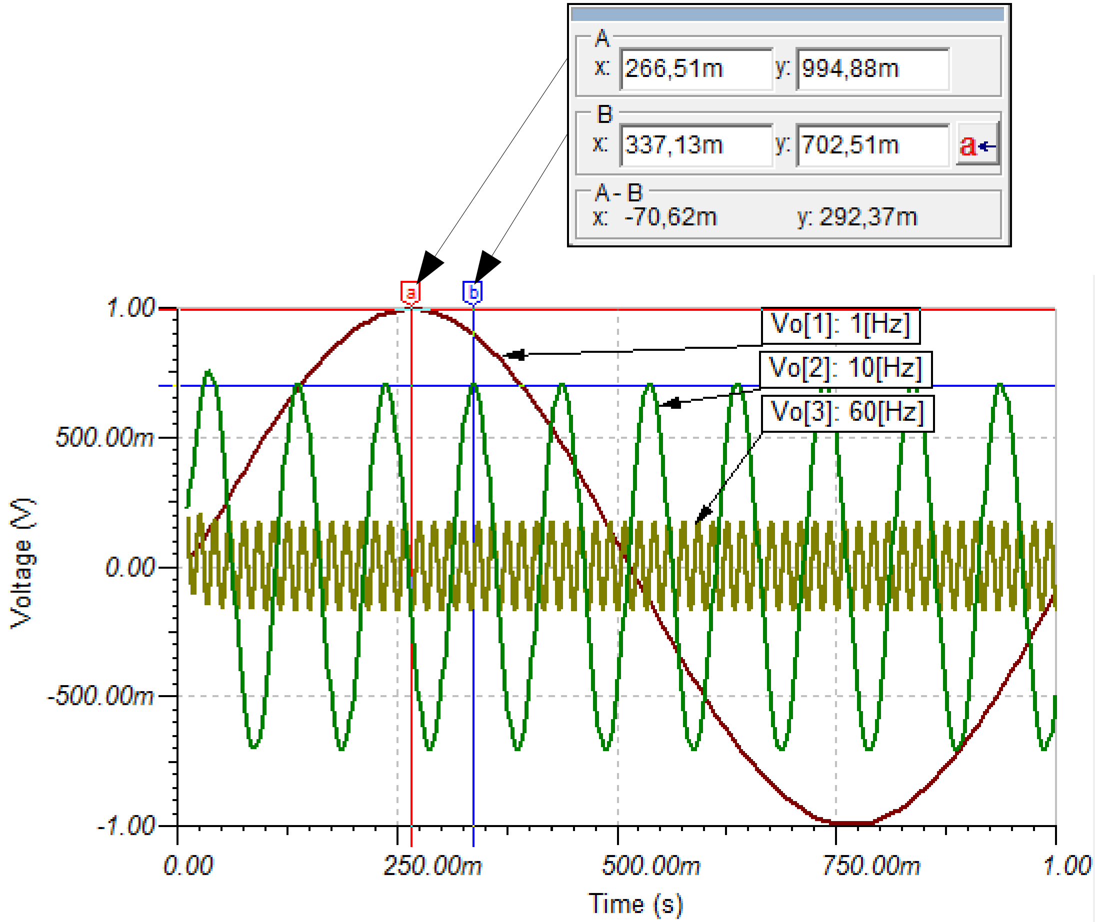



**Logarítmico**

# Exemplo.

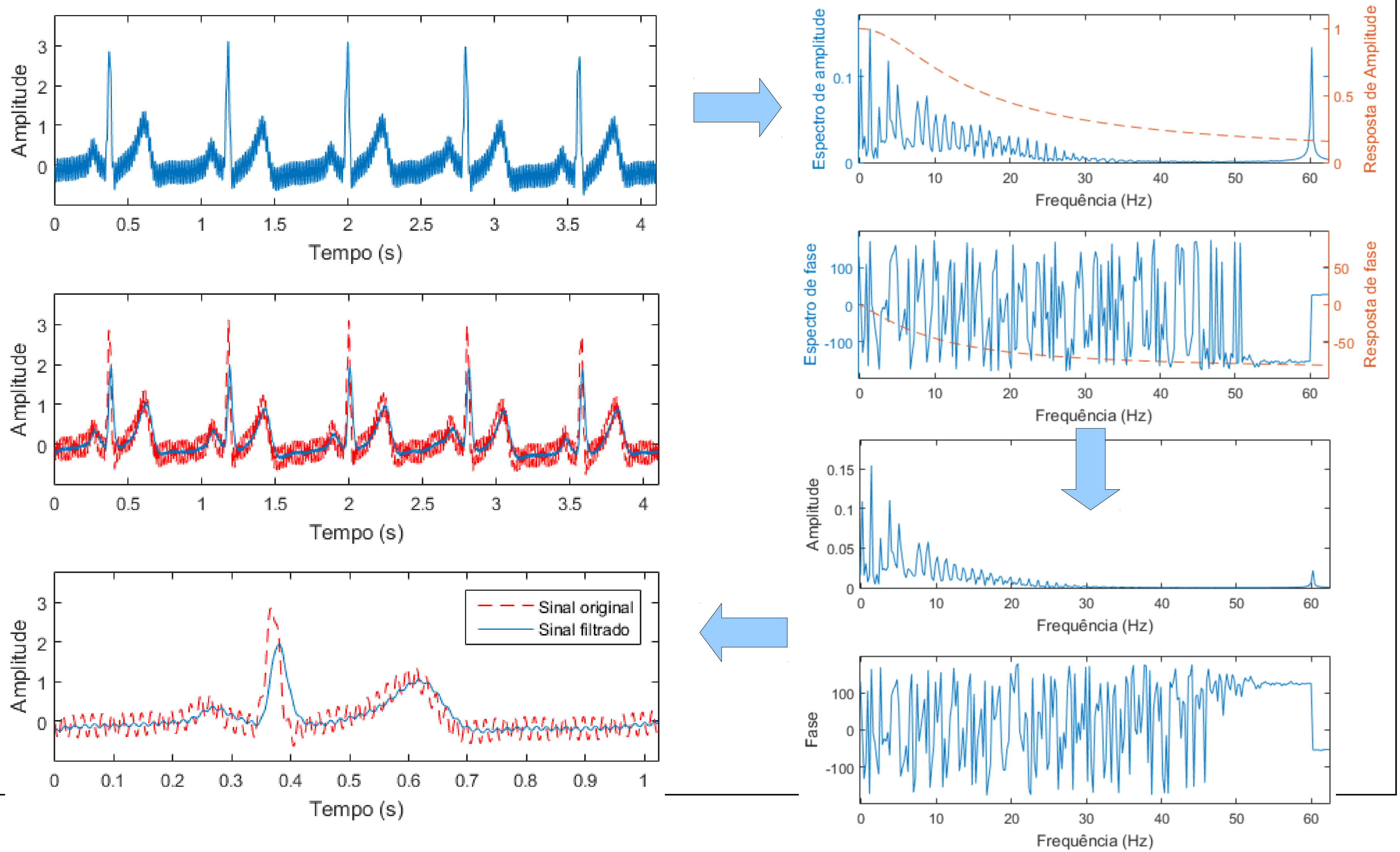



| $f(Hz)$ | $\|V_i\|(V)$ | $\|V_o\|(V)$ |
|---|---|---|
| 1 | 1.0 | 0.995 |
| 10 | 1.0 | 0.707 |
| 60 | 1.0 | 0.164 |




- **O que há de “errado” neste exemplo????**

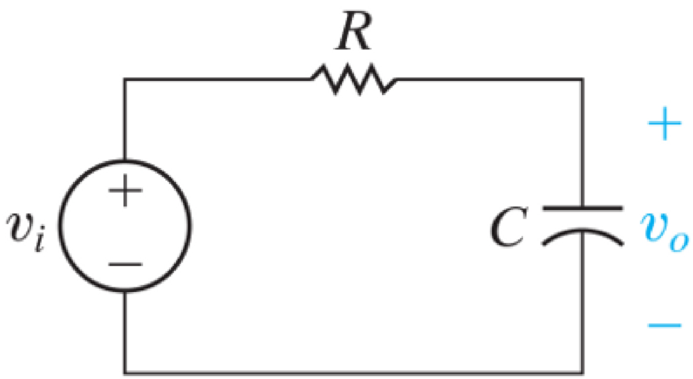
# Exemplo



Amplitude
Tempo (s)
Espectro de amplitude
Resposta de Amplitude
Frequência (Hz)
Espectro de fase
Resposta de fase
Frequência (Hz)
Amplitude
Frequência (Hz)
Fase
Frequência (Hz)
Amplitude
Tempo (s)
Amplitude
Tempo (s)
Sinal original
Sinal filtrado

# Filtros passa-baixas RC

- **Um filtro passa-baixas também pode ser obtido a partir de um circuito RC série.**




**Entrada** → $v_i(t)$

**Saída** → $v_o(t)$ ► **tensão sobre o CAPACITOR!**

$$Z_R = R$$

$$Z_c = \frac{1}{j\omega C}$$

**Quando** $\omega \rightarrow 0$

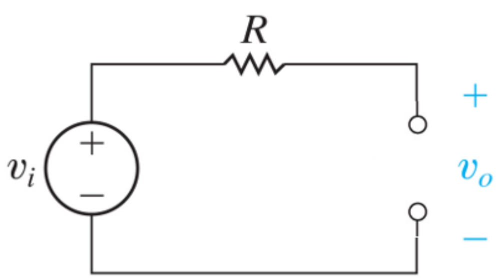



Figure: 14-07

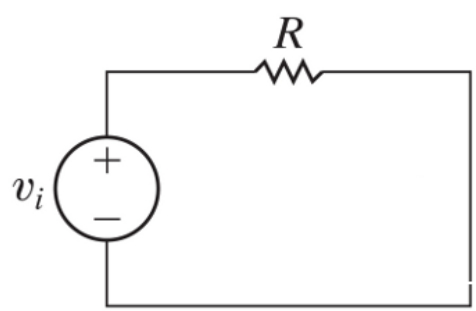


$Z_C \rightarrow \infty$

$v_o \rightarrow v_i$

$\theta_{v_o} \rightarrow \theta_{v_i}$

**Quando** $\omega \rightarrow \infty$



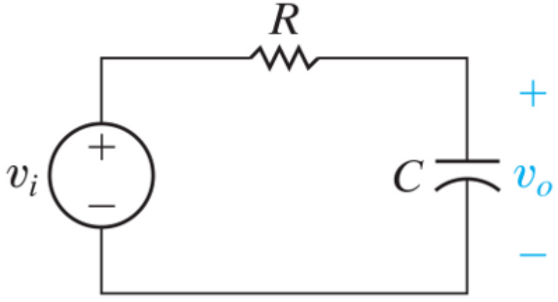

$Z_C \rightarrow 0$

$v_o \rightarrow 0$

$\theta_{v_o} \rightarrow -90^o$

# Exemplo

- **Dado o circuito RC série mostrado abaixo com energia inicial nula. Determine:**
  - **A função de transferência.**
  - **A equação para a frequência de corte.**
  - **Se C=1μF, determine R para uma frequência de corte de 3 kHz.**

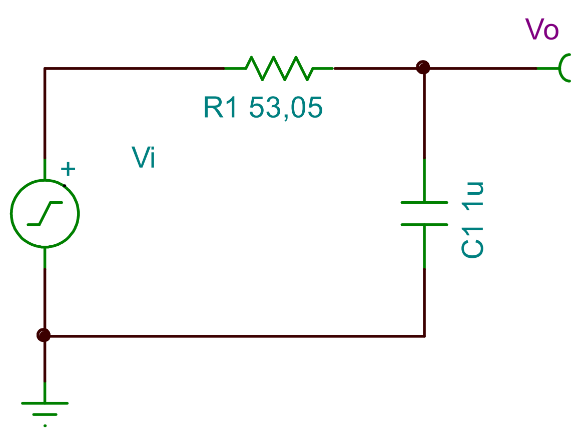


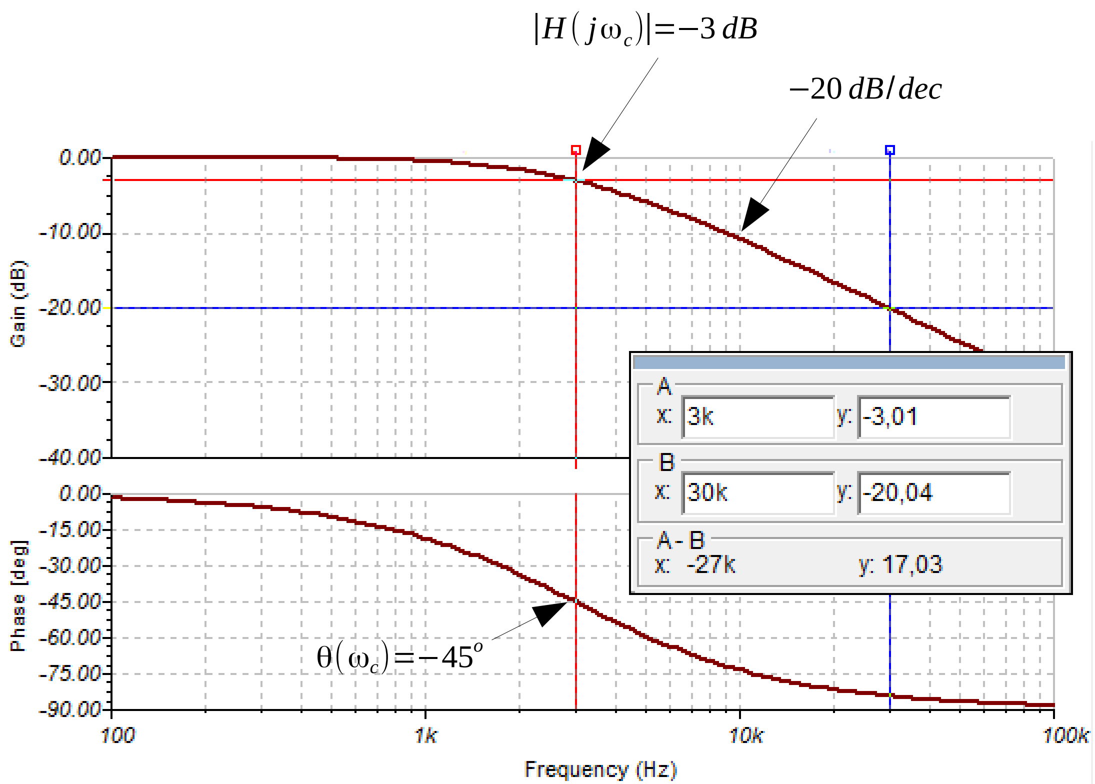
# Exemplo

$$H(s)=\frac{1/(RC)}{s+1/(RC)}$$

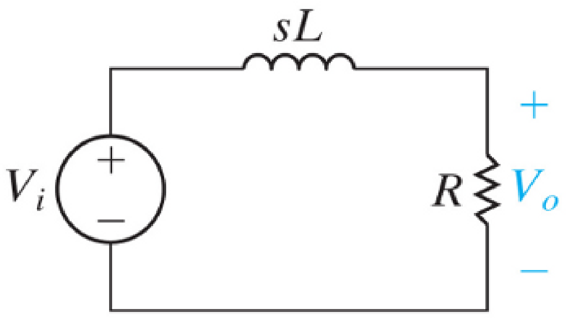
$$\omega_c=\frac{1}{RC}$$

$$C=1\mu F,\quad R=53{,}05\Omega$$



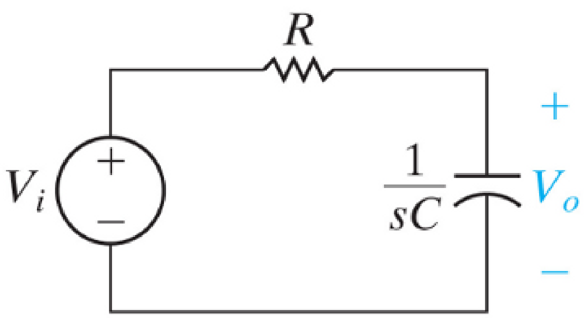



# Forma genérica para filtros passa-baixas




$$H(s) = \frac{R/L}{s + R/L}$$

$$\omega_c = R/L$$




$$H(s) = \frac{1/RC}{s + 1/RC}$$

$$\omega_c = 1/RC$$

$$\boxed{H(s) = \frac{\omega_c}{s + \omega_c}}$$

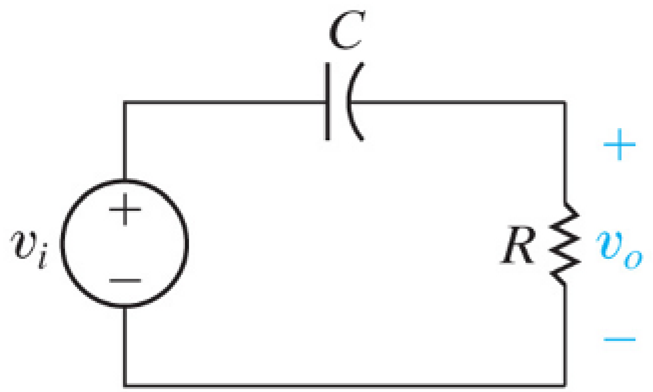
**Qualquer circuito com função de transferência neste formato se comporta como um filtro passa-baixas!**

- **Relação entre domínios do tempo e frequência:**

$$\boxed{\tau = \frac{1}{\omega_c}}$$

# Filtros passa-altas

- **Circuito RC série:**



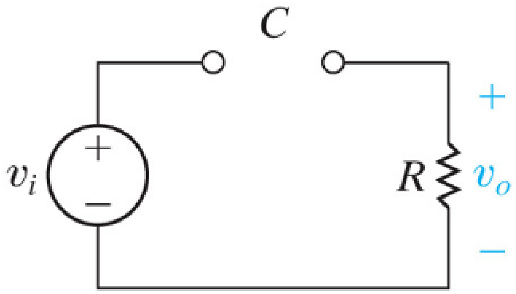

**Entrada** → $v_i(t)$

**Saída** → $v_o(t)$ → **tensão sobre o RESISTOR!**

$$Z_R = R$$

$$Z_c = \frac{1}{j\omega C}$$

**Quando** $\omega \rightarrow 0$

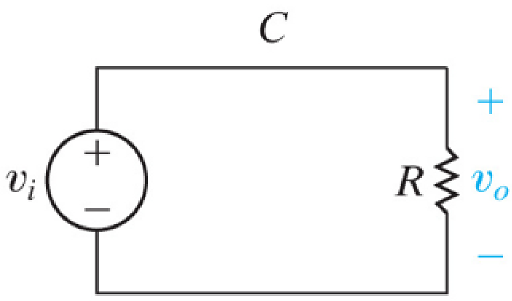



$$Z_C \rightarrow \infty$$

$$v_o \rightarrow 0$$

$$\theta_{v_o} \rightarrow +90^O$$

**Quando** $\omega \rightarrow \infty$



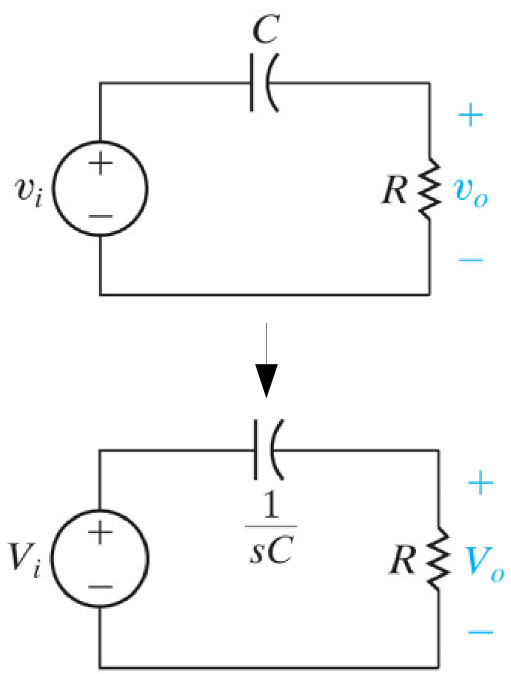

$$Z_C \rightarrow 0$$

$$v_o \rightarrow v_i$$

$$\theta_{v_o} \rightarrow \theta_{v_i}$$

# Análise quantitativa

- **Considerando condições iniciais nulas:**




$$H(s)=\frac{s}{s+1/(RC)}$$

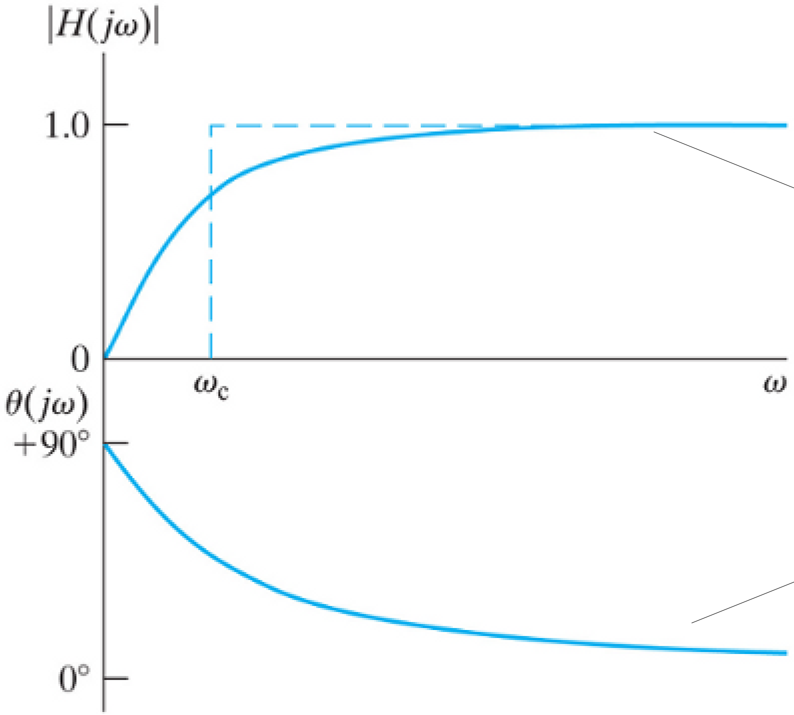
**Em regime permanente.**

$$H(j\omega)=\frac{j\omega}{j\omega+1/(RC)}=\frac{\omega\, e^{j90^o}}{\sqrt{\omega^2+[1/(RC)]^2}\, e^{j\arctan(\omega RC)}}$$

$$=\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2+[1/(RC)]^2}}\, e^{j[90^o-\arctan(\omega RC)]}$$

$$|H(j\omega)|=\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2+[1/(RC)]^2}} \qquad \theta(\omega)=90^o-\arctan(\omega RC)$$

# Resposta em frequência




$$|H(j\omega)| = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + [1/(RC)]^2}}$$

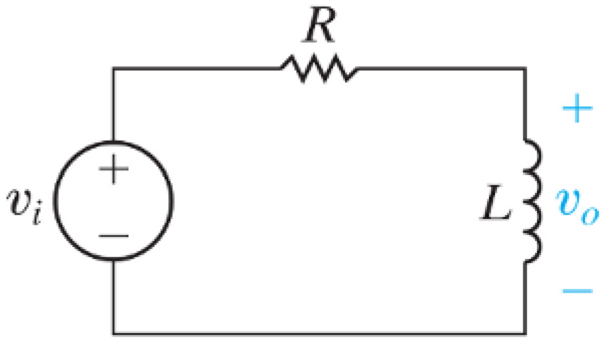
$$\theta(\omega) = 90^o - \arctan(\omega RC)$$

- **Em:** $\omega = \omega_c \longrightarrow |H(j\omega_c)| = \frac{\omega_c}{\sqrt{\omega_c^2 + [1/(RC)]^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \longrightarrow \boxed{\omega_c = \frac{1}{RC}}$

$$\theta(\omega_c) = 90^o - \arctan(\omega_c RC) = 90^o - \arctan(1) \qquad \boxed{\theta(\omega_c) = 45^o}$$

# Exemplo

- Prove que o circuito RL série mostrado abaixo se comporta como um filtro passa-altas, determinando:
  - A função de transferência.
  - A equação para a frequência de corte.
  - Valores para R e L que resultem em uma frequência de corte de 15 kHz.



# Exemplo

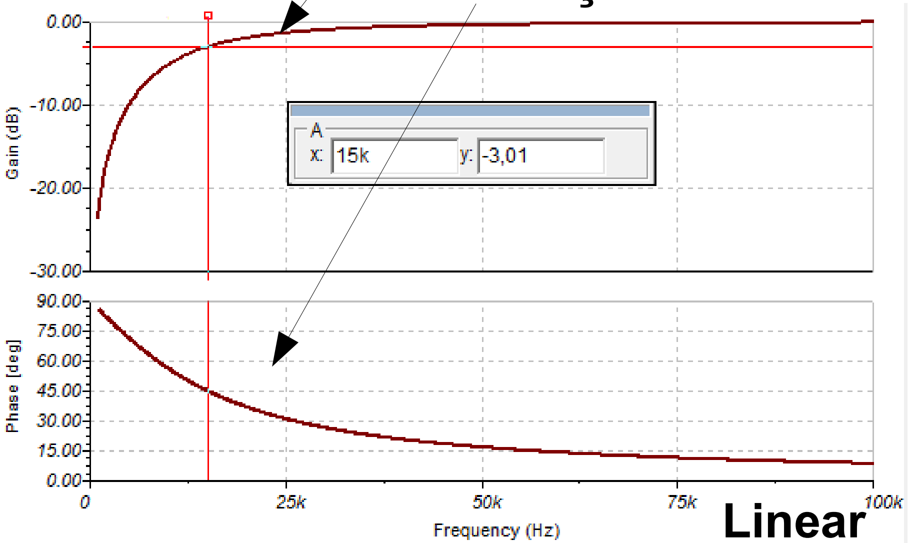
$$H(s)=\frac{s}{s+R/L}$$

$$\omega_c=\frac{R}{L}$$

$$R=500\,\Omega,\quad L=5{,}31\,mH$$

**Distorção de amplitude**

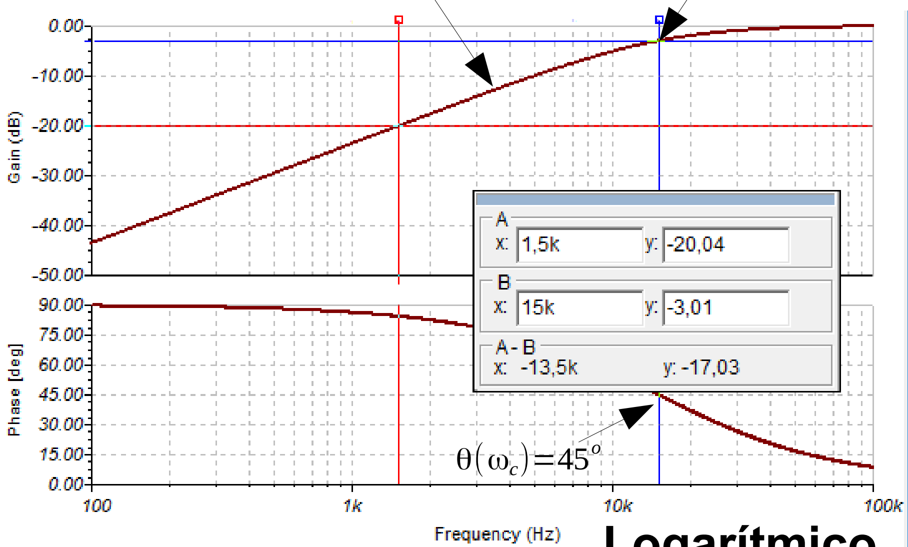
**Distorção de fase**




**Linear**

$20\,dB/dec$

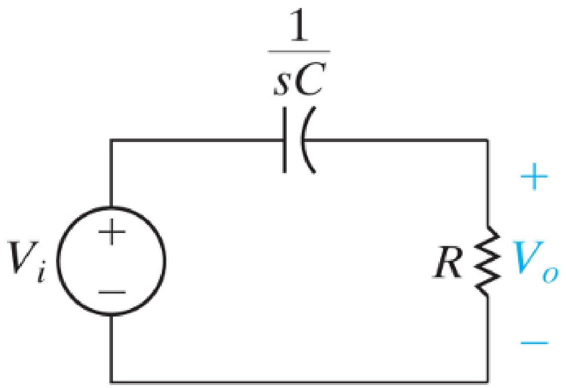
$|H(j\omega_c)|=-3\,dB$




$\theta(\omega_c)=45^o$

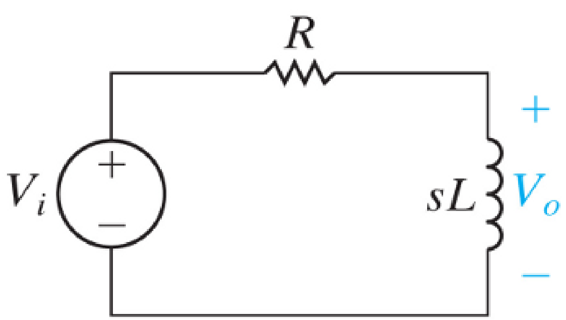
**Logarítmico**

# Forma genérica para filtros passa-altas




$$H(s) = \frac{s}{s + 1/RC}$$

$$\omega_c = 1/RC$$




$$H(s) = \frac{s}{s + R/L}$$

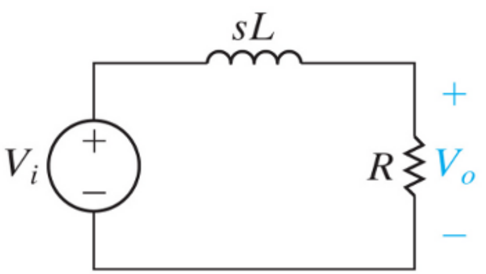
$$\omega_c = R/L$$

$$\boxed{H(s) = \frac{s}{s + \omega_c}}$$

**Qualquer circuito com função de transferência neste formato se comporta como um filtro passa-altas!**

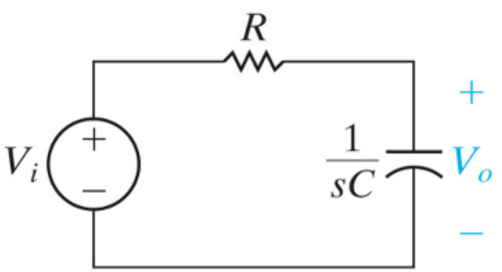
# Resumindo

- **Filtros passa-baixas:**




$$H(s) = \frac{R/L}{s + R/L}$$

$$\omega_c = R/L$$



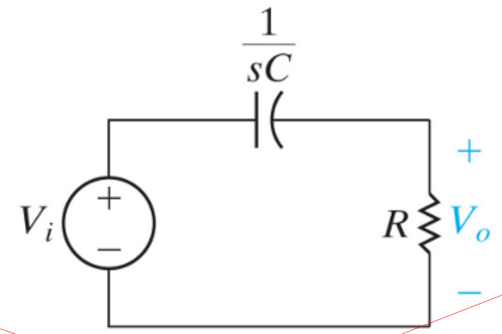

$$H(s) = \frac{1/RC}{s + 1/RC}$$

$$\omega_c = 1/RC$$

$$H(s) = \frac{\omega_c}{s + \omega_c} \qquad \tau = \frac{1}{\omega_c}$$

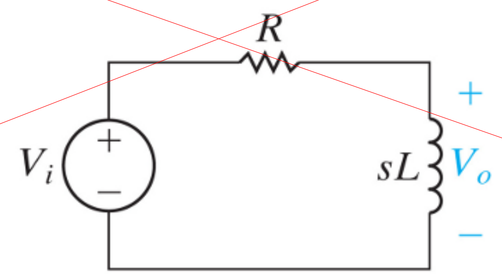
$$\theta(\omega_c) = -45^o$$

- **Filtros passa-altas:**




$$H(s) = \frac{s}{s + 1/RC}$$

$$\omega_c = 1/RC$$




$$H(s) = \frac{s}{s + R/L}$$

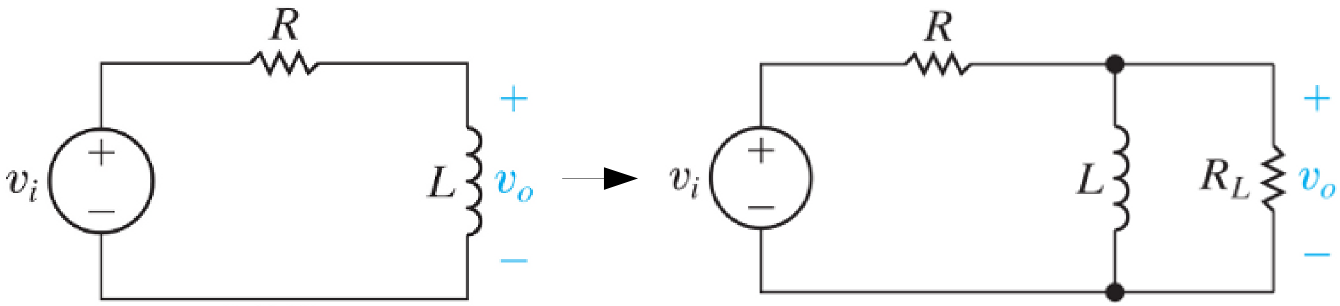
$$\omega_c = R/L$$

$$H(s) = \frac{s}{s + \omega_c} \qquad \tau = \frac{1}{\omega_c}$$

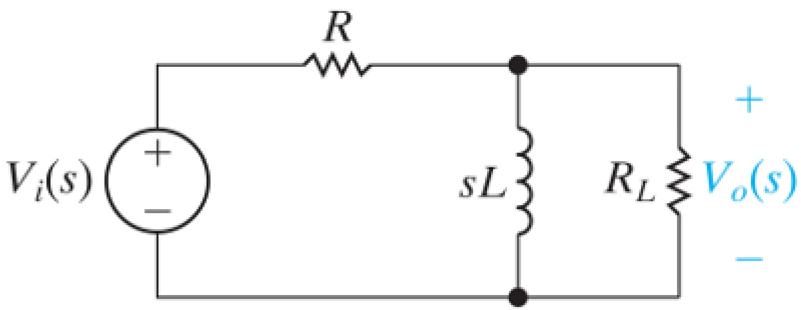
$$\theta(\omega_c) = +45^o$$

# Exemplo

- **Considere o filtro passa-altas RL série mostrado abaixo. Caracterize o efeito de carga ao se conectar um resistor $R_L$ na saída do circuito.**
  - **Determine a função de transferência para o circuito carregado.**
  - **Faça um gráfico das respostas de amplitude para os circuitos carregado e não carregado, considerando $R = R_L = 500\ \Omega$ e $L = 5{,}31mH$.**
  - **Explique o que acontece com a amplitude e a frequência de corte.**



# Exemplo




$$H_1(s)=\frac{s}{s+R/L}$$

$$H_2(s)=\frac{Ks}{s+K\,R/L}, \qquad K=\frac{R_L}{R+R_L}=\frac{1}{2}$$

**Amplitude cai pela metade.**

**Frequência de corte cai pela metade.**