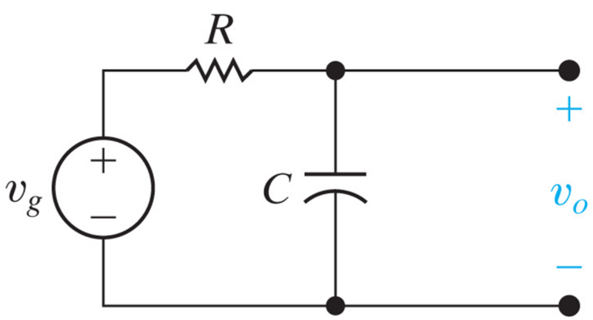
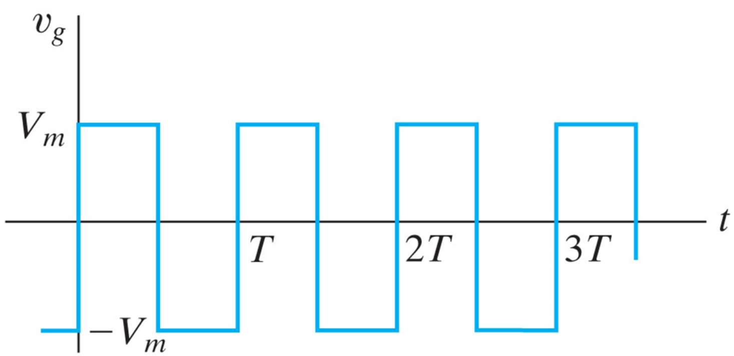
Cálculo das respostas de circuitos a funções periódicas genéricas

- Pode ser feita de duas formas:
  - Análise por regime permanente senoidal → representação fasorial.
  - Análise por resposta de frequência.
- Exemplo: análise por regime permanente senoidal.



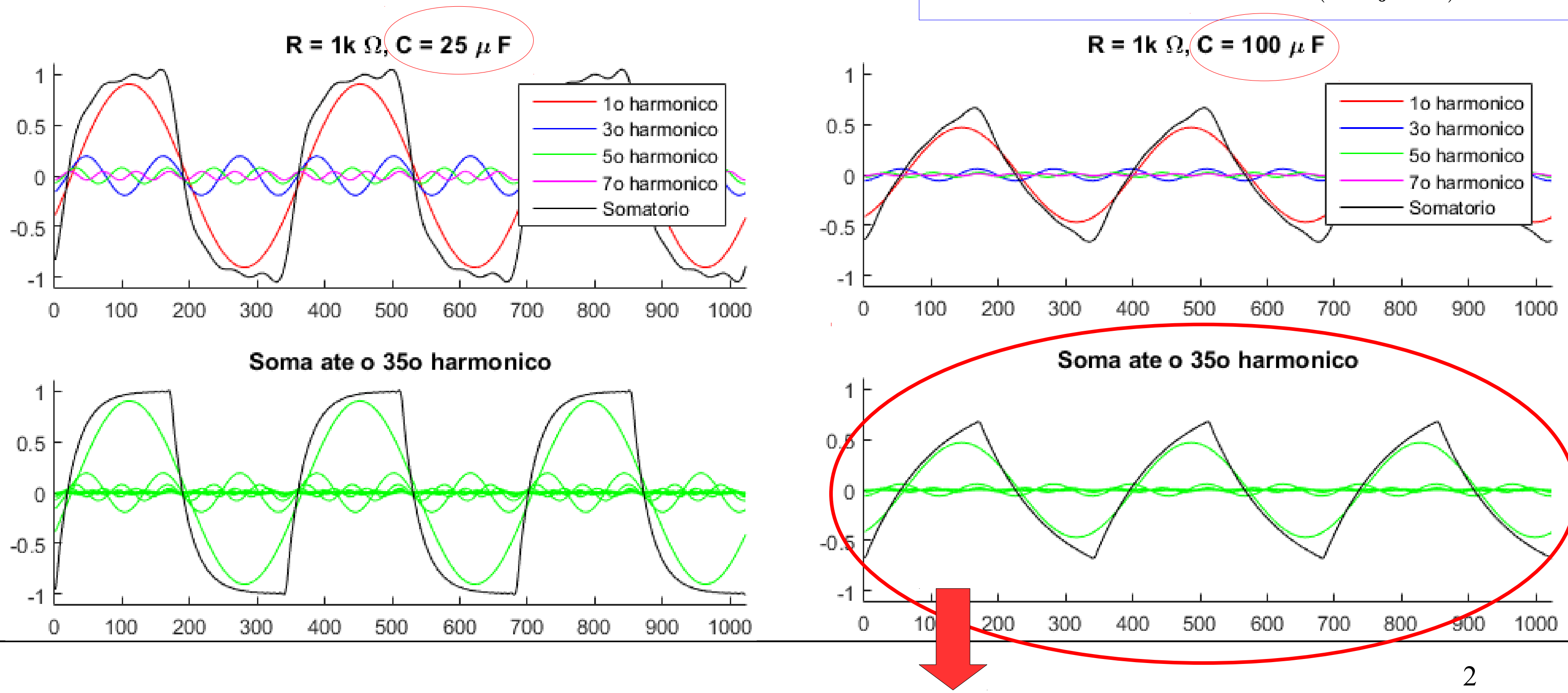


Análise por regime permanente senoidal

$$\boxed{v_g(t)=\frac{4V_m}{\pi}\sum_{n=1,\text{ímpar}}^{\infty}\frac{sen(n\omega_0 t)}{n}} =\frac{4V_m}{\pi}sen(\omega_0 t)+\frac{4V_m}{3\pi}sen(3\omega_0 t)+\frac{4V_m}{5\pi}sen(5\omega_0 t)+\cdots =v_{g1}(t)+v_{g3}(t)+\cdots$$

A resposta do circuito será a soma das respostas individuais:

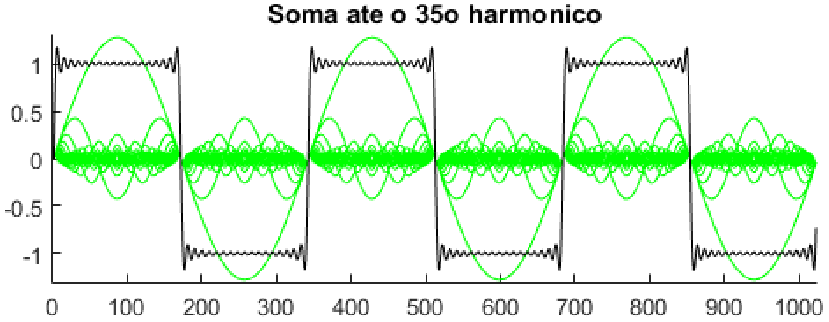
$$v_o(t)=v_{o1}(t)+v_{o3}(t)+\cdots \boxed{=\frac{4V_m}{\pi}\sum_{n=1,\text{ímpar}}^{\infty}\frac{sen[n\omega_0 t-\arctan(n\omega_0 RC)]}{n\sqrt{1+(n\omega_0 RC)^2}}}$$

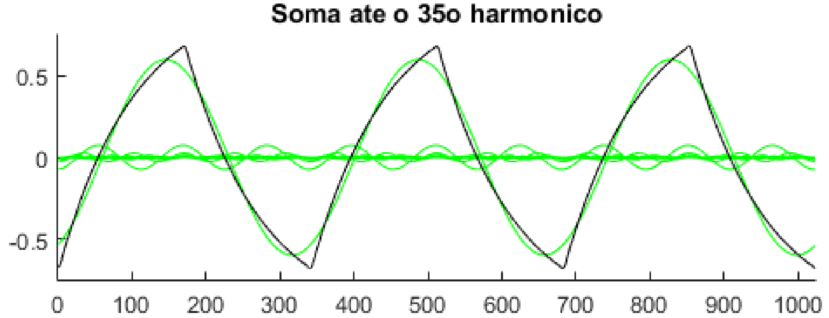


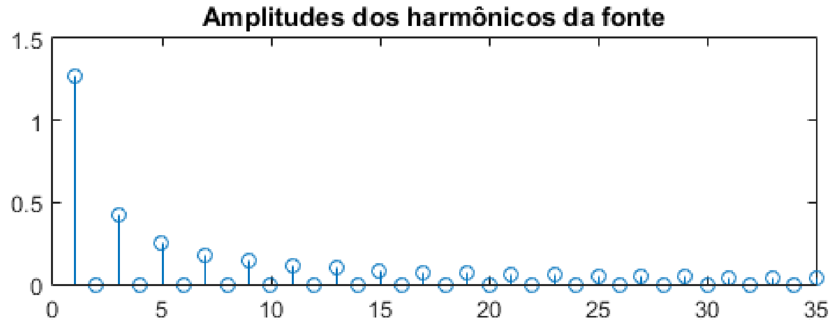
Análise por regime permanente senoidal

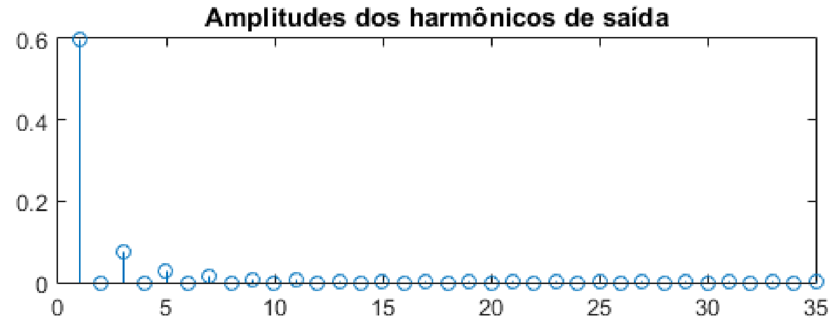
$$v_g(t)=\frac{4V_m}{\pi}\sum_{n=1,\acute{\imath}mpar}^{\infty}\frac{sen(n\omega_0 t)}{n}$$

$$v_o(t)=\frac{4V_m}{\pi}\sum_{n=1,\acute{\imath}mpar}^{\infty}\frac{sen[n\omega_0 t-\arctan(n\omega_0 RC)]}{n\sqrt{1+(n\omega_0 RC)^2}}$$









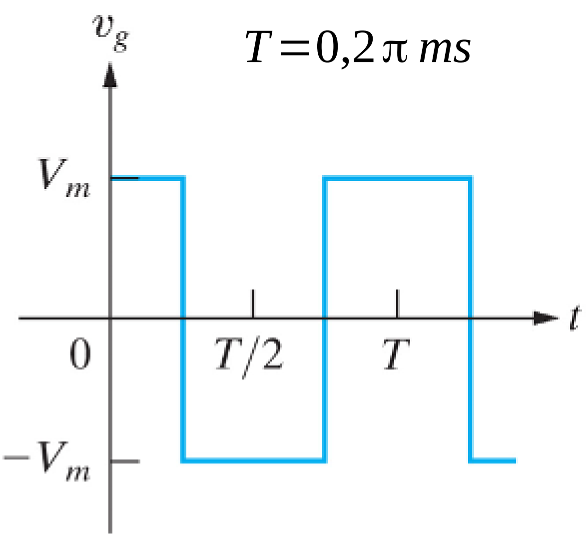
FILTRO PASSA-BAIXAS

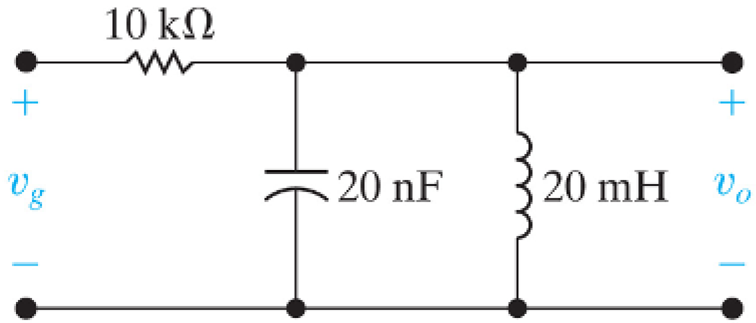
Análise por função de transferência

- **Determine a resposta do circuito RLC à onda quadrada mostrada na figura abaixo, considerando:**

$$V_m = 210\pi\, V$$

$$T = 0{,}2\pi\, ms$$





Análise por função de transferência

Decomposição de vg(t):

$$v_g(t) = \frac{4V_m}{\pi}\sum_{n=1,\text{ímpar}}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\cos(n\omega_0 t) = a_v+\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos(n\omega_0 t+\theta_n)\right]$$

Função de transferência do circuito:

$$H(s)=\frac{(1/RC)s}{s^2+(1/RC)s+1/LC}$$

Resposta em frequência:

$$|H(j\omega)|=\frac{\omega/RC}{\sqrt{(1/LC-\omega^2)^2+(\omega/RC)^2}}$$

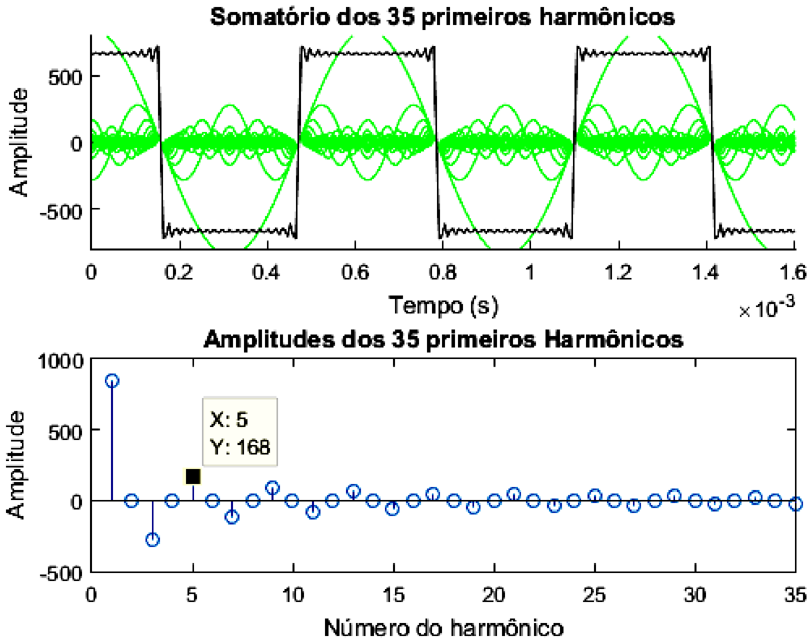
$$\theta(\omega)=\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{\omega/RC}{1/LC-\omega^2}\right)$$

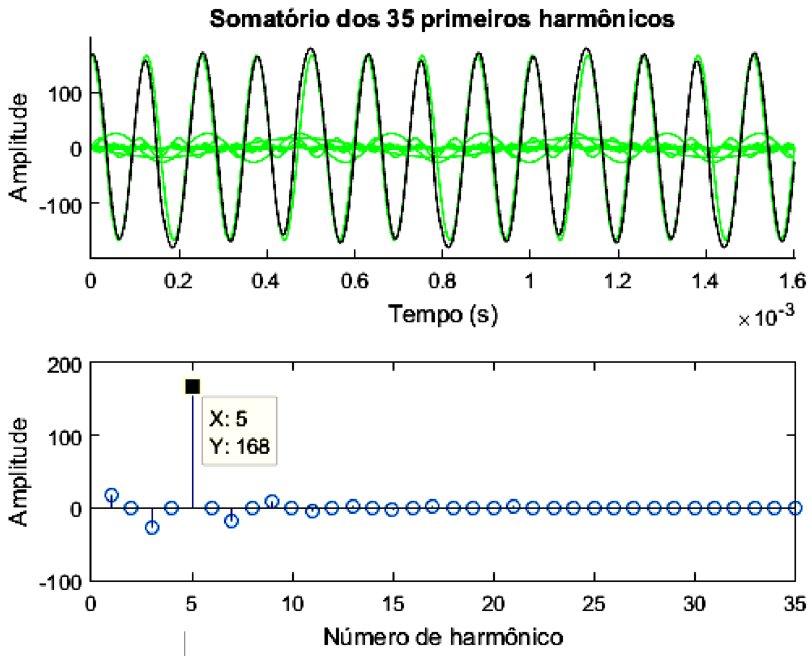
Considerando que o sistema é LIT:

$$x(t)=A\cos(\omega t+\phi) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)=A\,|H(j\omega)|\cos[\omega t+\phi+\theta(\omega)]$$

$$v_o(t)=\frac{4V_m}{\pi}\sum_{n=1,\text{impar}}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\frac{n\omega_0/RC}{\sqrt{\left[1/LC-(n\omega_0)^2\right]^2+(n\omega_0/RC)^2}}\cos\left\{n\omega_0 t+\left[\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{n\omega_0/RC}{1/LC-(n\omega_0)^2}\right)\right]\right\}$$

Análise por função de transferência





FILTRO PASSA-FAIXA

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} = 50000\, rad/s$$

Potência média com funções periódicas não senoidais

Considere a forma trigonométrica alternativa da série de Fourier:

$$f(t)=a_v+\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos\left(n\omega_0 t-\theta_n\right)\right] \longrightarrow \text{onde: } \quad A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$$

$$\theta_n=\arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

Tensão e corrente em um circuito na forma alternativa:

$$v(t)=Vcc+\sum_{n=1}^{\infty}V_n\cos\left(n\omega_0 t-\theta v_n\right)$$

$$i(t)=Icc+\sum_{n=1}^{\infty}I_n\cos\left(n\omega_0 t-\theta i_n\right)$$

Vcc, Icc → Componentes contínuas.

V_n, I_n → Amplitudes dos n-ésimos harmônicos.

$\theta v_n, \theta i_n$ → Fases dos n-ésimos harmônicos.

Potência instantânea

$$p(t)=v(t)\cdot i(t) \;=Vcc\,Icc+Vcc\sum_{n=1}^{\infty}I_n\cos\left(n\omega_0 t-\theta i_n\right)+Icc\sum_{n=1}^{\infty}V_n\cos\left(n\omega_0 t-\theta v_n\right)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[V_n\cos\left(n\omega_0 t-\theta v_n\right)\cdot\sum_{m=1}^{\infty}I_m\cos\left(m\omega_0 t-\theta i_m\right)\right]$$

Continua...

Potência média com funções periódicas não senoidais

$$p(t)=Vcc\,Icc+Vcc\sum_{n=1}^{\infty} I_n\cos(n\omega_0 t-\theta i_n)+Icc\sum_{n=1}^{\infty} V_n\cos(n\omega_0 t-\theta v_n)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[V_n\cos(n\omega_0 t-\theta v_n)\cdot\sum_{m=1}^{\infty} I_m\cos(m\omega_0 t-\theta i_m)\right]$$

A potência média será:

$$P=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} p(t)\,dt=\frac{Vcc\,Icc}{T}\overbrace{[t]_{t_0}^{t_0+T}}^{T}+$$

$$\frac{Vcc}{T}\sum_{n=1}^{\infty} I_n\overbrace{\int_{t_0}^{t_0+T}\cos(n\omega_0 t-\theta i_n)\,dt}^{0}+$$

$$\frac{Icc}{T}\sum_{n=1}^{\infty} V_n\overbrace{\int_{t_0}^{t_0+T}\cos(n\omega_0 t-\theta v_n)\,dt}^{0}+$$

$$\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\sum_{n=1}^{\infty}\left[V_n\cos(n\omega_0 t-\theta v_n)\cdot\sum_{m=1}^{\infty} I_m\cos(m\omega_0 t-\theta i_m)\right]dt$$

Esta integral será:

- 0, se m ≠ n.
- Se m = n $\longrightarrow$ $\frac{1}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{t_0}^{t_0+T}\left[V_n I_n\cos(n\omega_0 t-\theta v_n)\cdot\cos(n\omega_0 t-\theta i_n)\right]dt$

Continua...

Potência média com funções periódicas não senoidais

Portanto:

$$P=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} p(t)\,dt= \; Vcc\,Icc+\frac{1}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{t_0}^{t_0+T}\left[V_n I_n \underbrace{\cos(n\omega_0 t-\theta v_n)\cdot\cos(n\omega_0 t-\theta i_n)}\right]dt$$

Mas:

$$\cos(n\omega_0 t-\theta v_n)\cdot\cos(n\omega_0 t-\theta i_n)=\frac{1}{2}\cos(\theta v_n-\theta i_n)+\frac{1}{2}\cos(2n\omega_0 t-\theta v_n-\theta i_n)$$

Assim:

$$P=Vcc\,Icc+\frac{1}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_n I_n}{2}\int_{t_0}^{t_0+T}\left[\cos(\theta v_n-\theta i_n)+\underbrace{\cos(2n\omega_0 t-\theta v_n-\theta i_n)}_{0}\right]dt$$

$$P=Vcc\,Icc+\frac{1}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_n I_n}{2}\cos(\theta v_n-\theta i_n)\underbrace{\int_{t_0}^{t_0+T}dt}_{T}$$

$$\boxed{P=Vcc\,Icc+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_n I_n}{2}\cos(\theta v_n-\theta i_n)} \rightarrow P=Vcc\,Icc+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_n}{\sqrt{2}}\frac{I_n}{\sqrt{2}}\cos(\theta v_n-\theta i_n)$$

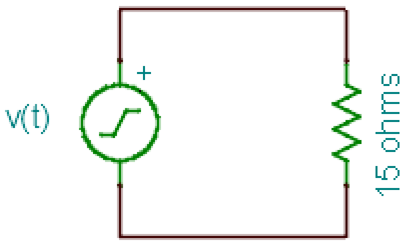
$$\boxed{P=Vcc\,Icc+\sum_{n=1}^{\infty}Vrms_n\,Irms_n\cos(\theta v_n-\theta i_n)}$$

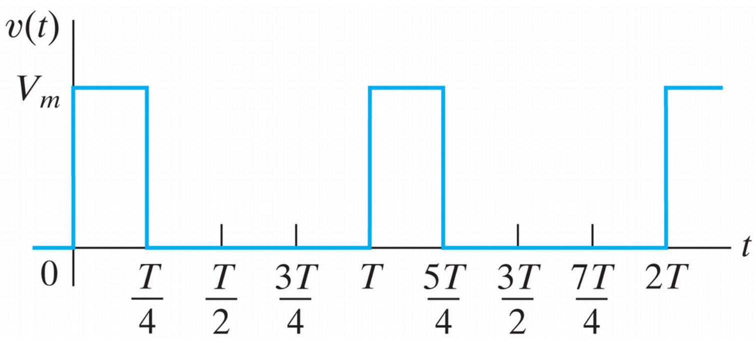
→ Tensões e correntes de diferentes frequências não interagem para produzir potência média (ativa)!

Potência média total = Potência média da componente contínua + Potências médias de cada harmônico → A potência média total é igual à soma das potências médias de cada harmônico.

Exemplo:

- **A onda quadrada mostrada na figura abaixo é aplicada a um resistor de 15 Ω. Determine:**
  - **As expressões para os coeficientes de Fourier.**
  - **Os cinco primeiros termos não nulos da série de Fourier.**
  - **A porcentagem da potência associada aos cinco primeiros termos da série.**





$$V_m = 60\,V$$
$$T = 5\,ms$$

Valores eficazes de funções periódicas não senoidais

Valor eficaz: $$F_{RMS}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f^2(t)\,dt}$$

Utilizando a forma trigonométrica alternativa: $$F_{RMS}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\left[a_v+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\omega_0 t-\theta_n)\right]^2 dt}$$

Mas: $$\left[a_v+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\omega_0 t-\theta_n)\right]^2=a_v^2+2a_v\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\omega_0 t-\theta_n)+\left[\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\omega_0 t-\theta_n)\right]^2=$$

$$=a_v^2+2a_v\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\omega_0 t-\theta_n)+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\omega_0 t-\theta_n)\sum_{m=1}^{\infty}A_m\cos(m\omega_0 t-\theta_m)$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T}\left[a_v^2+2a_v\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\omega_0 t-\theta_n)+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\omega_0 t-\theta_n)\sum_{m=1}^{\infty}A_m\cos(m\omega_0 t-\theta_m)\right]dt=\begin{cases}0, m\neq n\\ \frac{T}{2}\sum_{n=1}^{\infty}A_n^2, m=n\end{cases}$$

$$=a_v^2\overset{T}{\int_{t_0}^{t_0+T}dt}+2a_v\overset{0}{\int_{t_0}^{t_0+T}\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\omega_0 t-\theta_n)\,dt}+\int_{t_0}^{t_0+T}\left[\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\omega_0 t-\theta_n)\sum_{m=1}^{\infty}A_m\cos(m\omega_0 t-\theta_m)\right]dt$$

Valores eficazes de funções periódicas não senoidais

Retornando à equação:

$$F_{RMS}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\left[a_v+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\left(n\omega_0 t-\theta_n\right)\right]^2 dt}=\sqrt{\frac{1}{\cancel{T}}\left(a_v^2\cancel{T}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n^2\frac{\cancel{T}}{2}\right)}$$

$$\boxed{F_{RMS}=\sqrt{a_v^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_n}{\sqrt{2}}\right)^2}}$$

Valor eficaz total = Quadrado do valor eficaz da componente contínua + Soma dos quadrados dos valores eficazes de cada harmônico

Exemplo: $v(t)=10+30\cos(\omega_0 t-\theta_1)+20\cos(2\omega_0 t-\theta_2)+5\cos(3\omega_0 t-\theta_3)+\cdots$

$$V_{RMS}=\sqrt{10^2+\left(\frac{30}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{20}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2+\cdots}$$

Valores eficazes de funções periódicas não senoidais

- **Valor eficaz em termos dos coeficientes complexos:**

$$F_{RMS}=\sqrt{a_v^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_n}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{a_v^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n^2}{2}}$$

Mas, como foi visto anteriormente: $a_v=C_0$

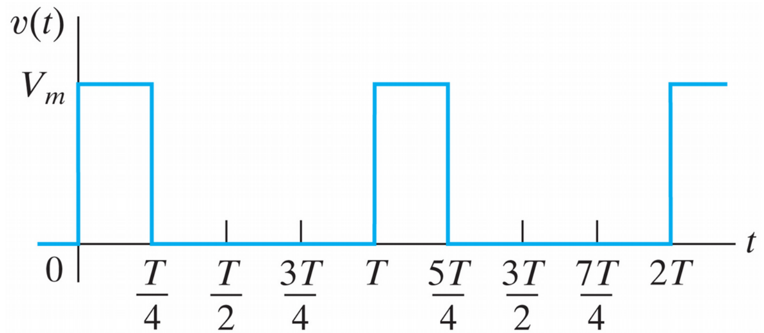
$$\left.\begin{array}{l} A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2} \\ C_n=\dfrac{a_n-jb_n}{2} \end{array}\right\} A_n=2\cdot|C_n|$$

Substituindo: $F_{RMS}=\sqrt{C_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2\cdot|C_n|)^2}{2}} \longrightarrow \boxed{F_{RMS}=\sqrt{C_0^2+2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}|C_n|^2}}$

Quadrado do valor eficaz da componente contínua + Soma dos quadrados dos valores eficazes de cada harmônico

Exemplo:

- **Use a equação do valor RMS para estimar o valor eficaz da tensão do exemplo anterior, considerando novamente os cinco primeiros componentes da decomposição por Fourier.**



$$V_m = 60\,V$$

$$T = 5\,ms$$