Filtros passa-faixa

- **Permitem passar sinais dentro de uma faixa de frequências.**
- **Caracterizados por:**
  - **Frequências de corte inferior e superior** $\rightarrow \omega_{c1}, \omega_{c2}$
  - **Frequência central (ou de ressonância)** $\rightarrow \omega_0$
  - **Largura de faixa** $\rightarrow \beta$
  - **Fator de qualidade** $\rightarrow Q$
- **Dos cinco parâmetros, apenas dois são independentes.**

Parâmetros de filtros passa-faixa

$\omega_0 \longrightarrow$ **Frequência para a qual** ***H*****(jω) é puramente real.**

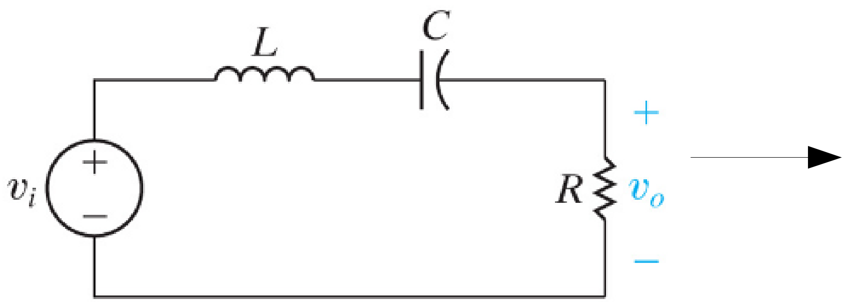
$\omega_{c1}, \omega_{c2} \longrightarrow$ **Frequências para as quais** $|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}} H_{max},\ P(j\omega) = \frac{1}{2} P_{max}$

$$\omega_0 = \sqrt{(\omega_{c1}\omega_{c2})}$$

$$\beta = \omega_{c2} - \omega_{c1}$$

$$Q = \frac{\omega_0}{\beta}$$

Circuito RLC série



Entrada → $v_i(t)$

Saída → $v_o(t)$ → **tensão sobre o RESISTOR!**

$$Z_R = R$$

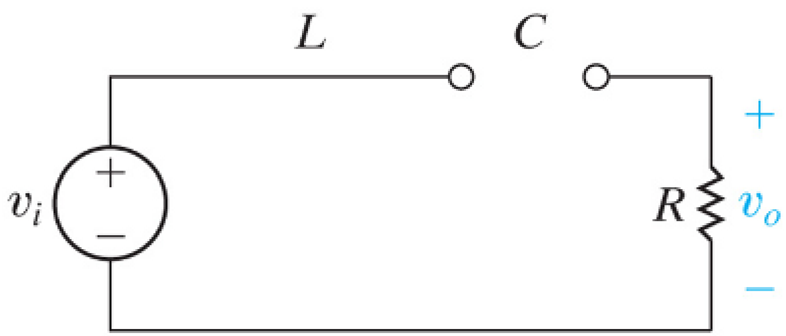
$$Z_L = j\omega L$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$$

Circuito RLC série

- **Análise qualitativa:**

Quando $\omega \to 0$

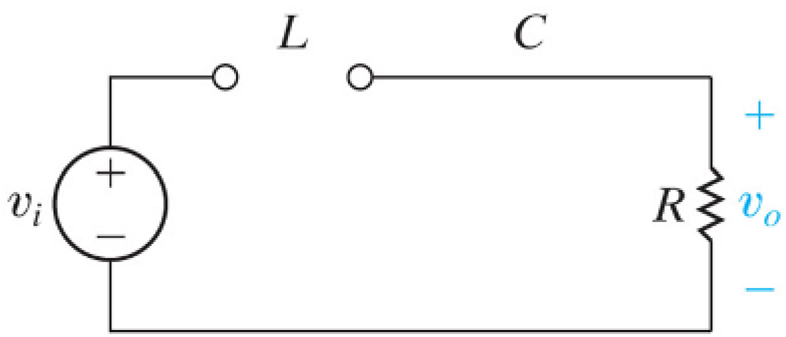


$Z_L \to 0$

$Z_C \to \infty$

$v_o \to 0$ → **Sinais com baixas frequências não passam.**

Quando $\omega \to \infty$



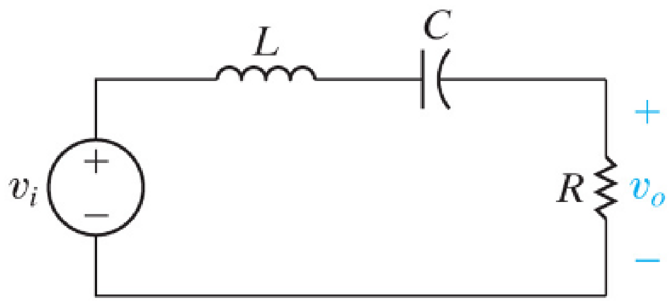
$Z_L \to \infty$

$Z_C \to 0$

$v_o \to 0$ → **Sinais com altas frequências também não passam.**

Circuito RLC série

Quando $0<\omega<\infty$



$$Z_R = R$$

$$Z_L = j\omega L$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C}$$

Z_L e Z_C possuem sinais contrários.

À medida que ω aumenta → **Z_L aumenta.**

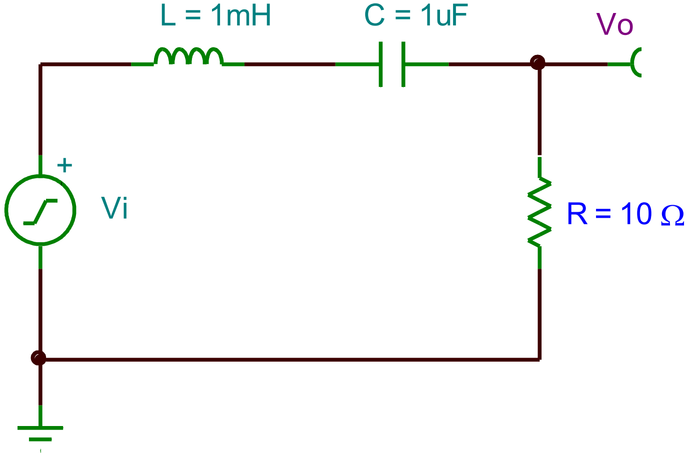
→ **Z_C diminui.**

Para alguma frequência específica teremos:

Ressonância.

$$Z_L = -Z_C \longrightarrow Z_{eq} = \cancel{Z_L} + \cancel{Z_C} + Z_R = R \longrightarrow v_o(t) = v_i(t)$$

Exemplo



$$f = 1\,kHz \longrightarrow Z_L = j\,6.28,\quad Z_C = -j\,159.15$$

$$f = 3\,kHz \longrightarrow Z_L = j\,18.85,\quad Z_C = -j\,53.05$$

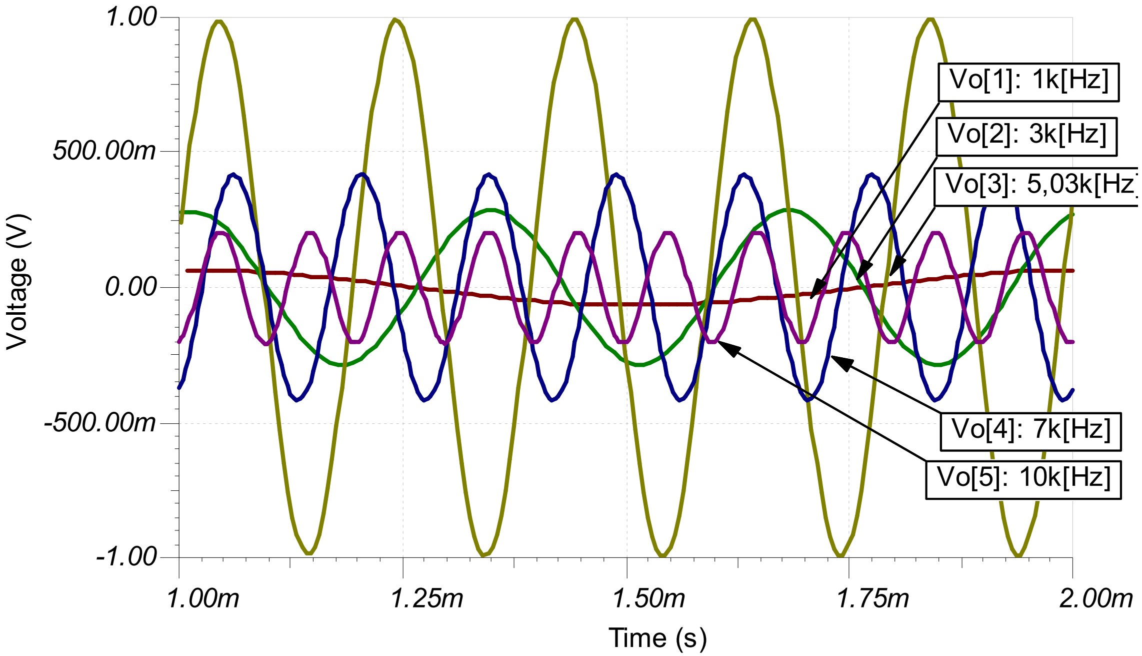
$$f \approx 5033\,Hz \longrightarrow Z_L = j\,31.62,\quad Z_C = -j\,31.62$$

$$f = 7\,kHz \longrightarrow Z_L = j\,43.98$$

$$Z_C = -j\,22.74$$

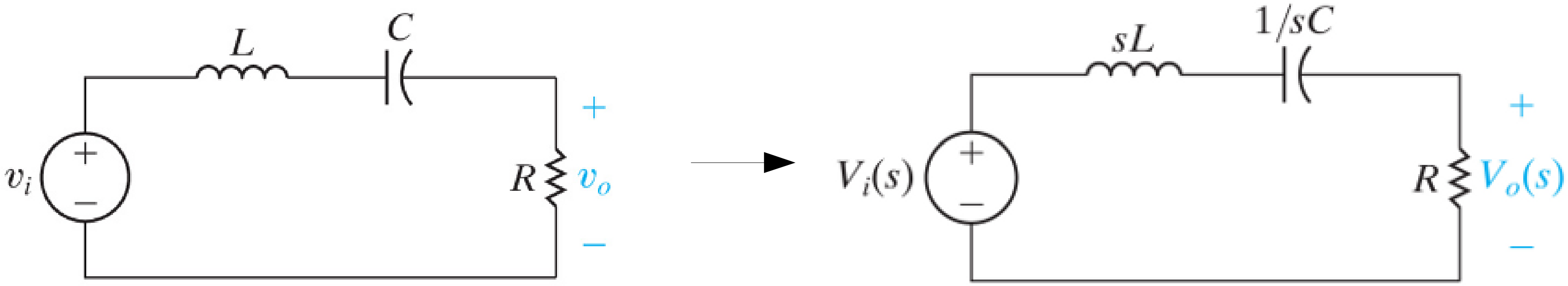
$$f = 10\,kHz \longrightarrow Z_L = j\,62.83$$

$$Z_C = -j\,15.92$$



Análise quantitativa

- **Considerando condições iniciais nulas:**



$$V_o(s) = \frac{V_i(s)}{sL + 1/sC + R} \cdot R \longrightarrow \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = H(s) = \frac{R}{sL + 1/sC + R}$$

$$H(s) = \frac{(R/L)s}{s^2 + (R/L)s + 1/LC}$$

Análise quantitativa

$$H(s)=\frac{(R/L)s}{s^2+(R/L)s+1/LC} \xrightarrow{\text{Em Reg. Perm.}} H(j\omega)=\frac{(R/L)j\omega}{(j\omega)^2+(R/L)j\omega+1/LC}$$

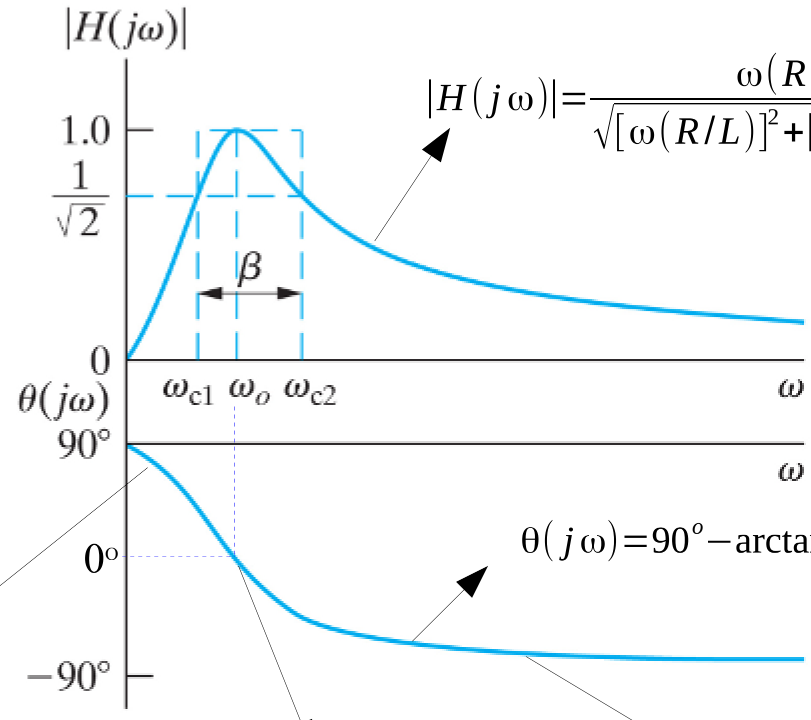
$$=\frac{j\omega(R/L)}{j\omega(R/L)+1/LC-\omega^2}$$

$$=\frac{\omega(R/L)e^{j90^o}}{\sqrt{[\omega(R/L)]^2+[1/LC-\omega^2]^2}\,e^{j\arctan\left[\frac{\omega(R/L)}{1/LC-\omega^2}\right]}}$$

$$=\frac{\omega(R/L)}{\sqrt{[\omega(R/L)]^2+[1/LC-\omega^2]^2}}e^{j\left\{90-\arctan\left[\frac{\omega(R/L)}{1/LC-\omega^2}\right]\right\}}$$

$$|H(j\omega)|=\frac{\omega(R/L)}{\sqrt{[\omega(R/L)]^2+[1/LC-\omega^2]^2}} \qquad \theta(j\omega)=90^o-\arctan\left[\frac{\omega(R/L)}{1/LC-\omega^2}\right]$$

Resposta em frequência



$$|H(j\omega)| = \frac{\omega(R/L)}{\sqrt{[\omega(R/L)]^2 + [1/LC - \omega^2]^2}}$$

$$\theta(j\omega) = 90^o - \arctan\left[\frac{\omega(R/L)}{1/LC - \omega^2}\right]$$

Baixas frequências → capacitor predomina → fase positiva.

Frequência de ressonância → fase nula.

Altas frequências → indutor predomina → fase negativa.

Parâmetros do filtro passa-faixa

$\omega_0 \longrightarrow$ **Frequência para a qual *H*(jω) é real.**

$$H(j\omega)=\frac{j\omega(R/L)}{j\omega(R/L)+1/LC-\omega^2}=\frac{\cancel{j\omega(R/L)}}{\cancel{j\omega(R/L)}\left(1+\frac{1/LC-\omega^2}{j\omega(R/L)}\right)}$$

$$=\frac{1}{1+\frac{1/LC-\omega^2}{j\omega(R/L)}}=\frac{1}{1-j\frac{1/LC-\omega^2}{\omega(R/L)}}$$

Para *H*(jω) real:

$$\frac{1/LC-\omega^2}{\omega(R/L)}=0 \longrightarrow 1/LC=\omega^2 \longrightarrow \boxed{\omega_0=\sqrt{\frac{1}{LC}}}$$

Parâmetros do filtro passa-faixa

$\omega_{c1}, \omega_{c2} \rightarrow$ **Frequências para as quais** $|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}} H_{max},\ P(j\omega) = \frac{1}{2} P_{max}$

Como $H_{max} = H(j\omega_0) = 1 \rightarrow |H(j\omega_{c1,c2})| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$|H(j\omega_c)| = \frac{\omega_c (R/L)}{\sqrt{[\omega_c(R/L)]^2 + (1/LC - \omega_c^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\omega_c (R/L)}{\sqrt{[\omega_c(R/L)]^2 \left\{1 + \frac{(1/LC - \omega_c^2)^2}{[\omega_c(R/L)]^2}\right\}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + [1/(\omega_c RC) - (\omega_c L/R)]^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$1/(\omega_c RC) - (\omega_c L/R) = \pm 1$$

$$\omega_c^2 \pm \frac{R}{L}\omega_c - \frac{1}{LC} = 0$$

$\downarrow$

Quatro raízes, somente duas são positivas:

$$\boxed{\omega_{c1,c2} = \pm \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}}$$

Parâmetros do filtro passa-faixa

β ⟶ **Largura da faixa de passagem**

$$\beta = \omega_{c2} - \omega_{c1} = \left[\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}\right] - \left[-\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}\right] \longrightarrow \boxed{\beta = \frac{R}{L}}$$

Q ⟶ **Fator de qualidade**

$$Q = \frac{\omega_0}{\beta} = \frac{\sqrt{1/LC}}{(R/L)} \longrightarrow \boxed{Q = \sqrt{\frac{L}{CR^2}}}$$

Resumindo

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$$\omega_{c1,c2} = \pm\frac{R}{2\mathrm{L}} + \sqrt{\left(\frac{R}{2\mathrm{L}}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

$$\beta = \frac{R}{L}$$

$$Q = \sqrt{\frac{L}{CR^2}}$$

Exemplo

- **Projeto de um filtro passa-faixa RLC série:**
  - **Faixa de passagem de 1 k a 10 kHz.**

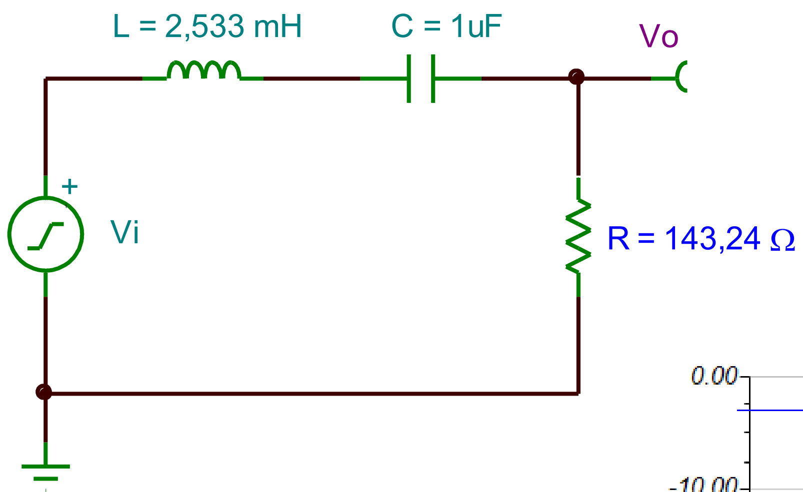
$$\omega_{c1} = 2\pi\ 1.000$$

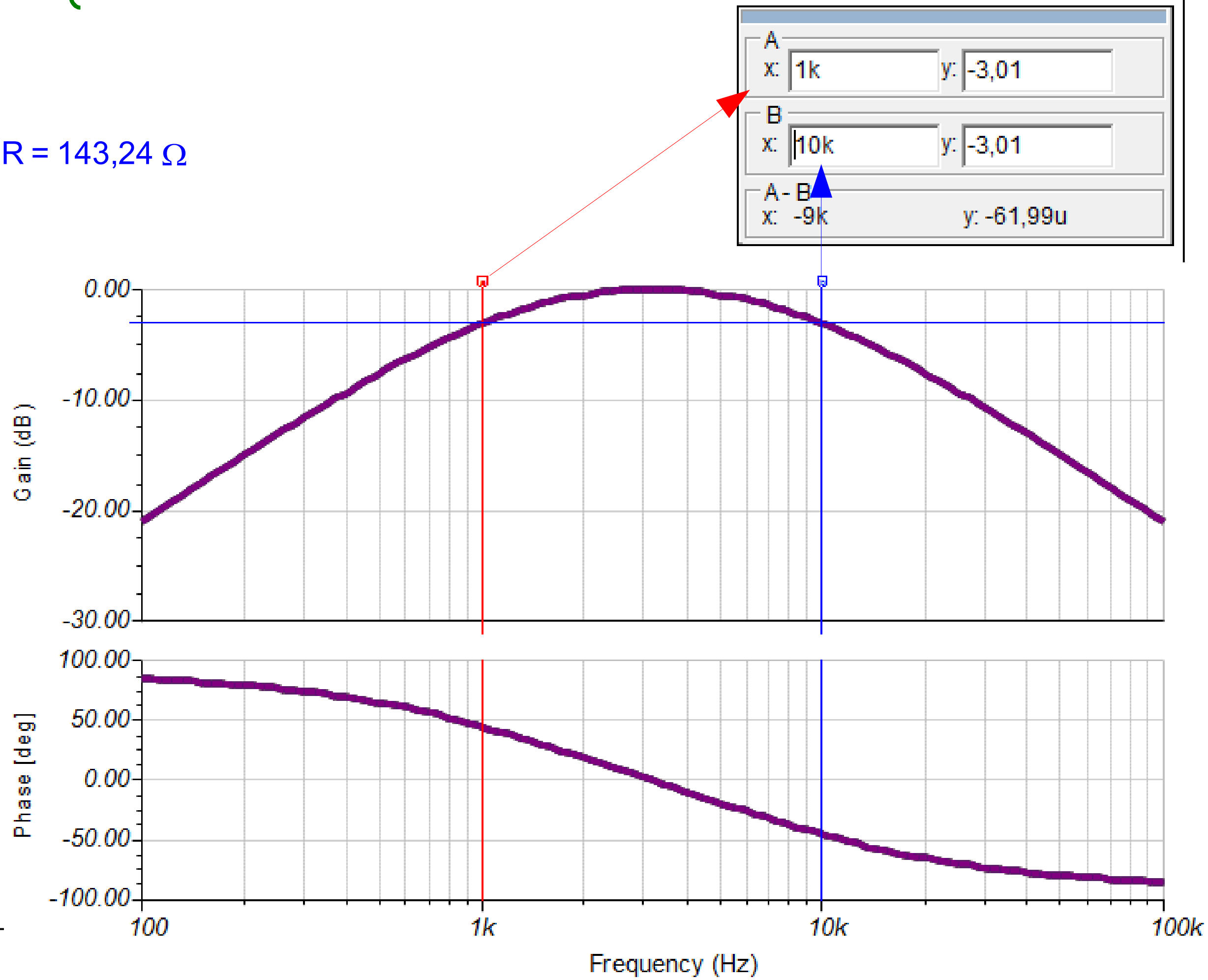
$$\omega_{c2} = 2\pi\ 10.000 \longrightarrow \omega_c = \sqrt{(\omega_{c1}\omega_{c2})} = 2\pi\ 3.162{,}28 \quad rad/s$$

$$\sqrt{\frac{1}{LC}} = 2\pi\ 3.162{,}28 \quad rad/s \longrightarrow C = 1\mu F\,,\ L = 2{,}533\, mH$$

$$\beta = \frac{R}{L} = \omega_{c2} - \omega_{c1} \longrightarrow R = (\omega_{c2} - \omega_{c1})L \longrightarrow R = 143{,}24\,\Omega$$

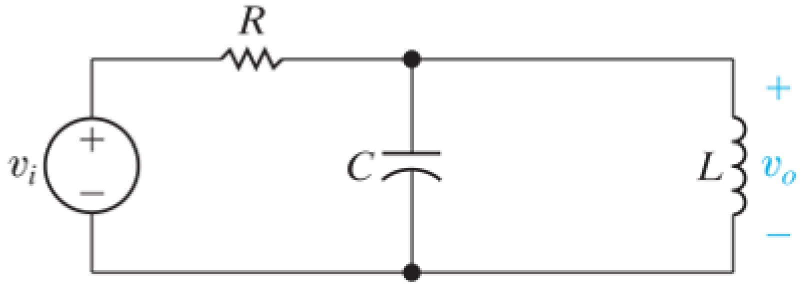
Exemplo


L = 2,533 mH
C = 1uF
Vo
+
Vi
R = 143,24 Ω


A
x: 1k
y: -3,01
B
x: 10k
y: -3,01
A - B
x: -9k
y: -61,99u
0.00
-10.00
-20.00
-30.00
Gain (dB)
100.00
50.00
0.00
-50.00
-100.00
Phase [deg]
100
1k
10k
100k
Frequency (Hz)

Exemplo

- **Dado o circuito mostrado na figura abaixo, determine:**
  - **A função de transferência.**
  - **As respostas de amplitude e fase.**
  - **As expressões para os parâmetros do filtro.**
  - **Os valores de R e L para uma frequência central de 5 kHz e uma largura de faixa de 200 Hz. Considere C = 5 uF.**



Resposta

$$H(s)=\frac{s/RC}{s^2+s/RC+1/LC}$$

$$|H(j\omega)|=\frac{\omega/RC}{\sqrt{(\omega/RC)^2+(1/LC-\omega^2)^2}}$$

$$\theta(\omega)=90^o-\arctan\frac{\omega/RC}{1/LC-\omega^2}$$

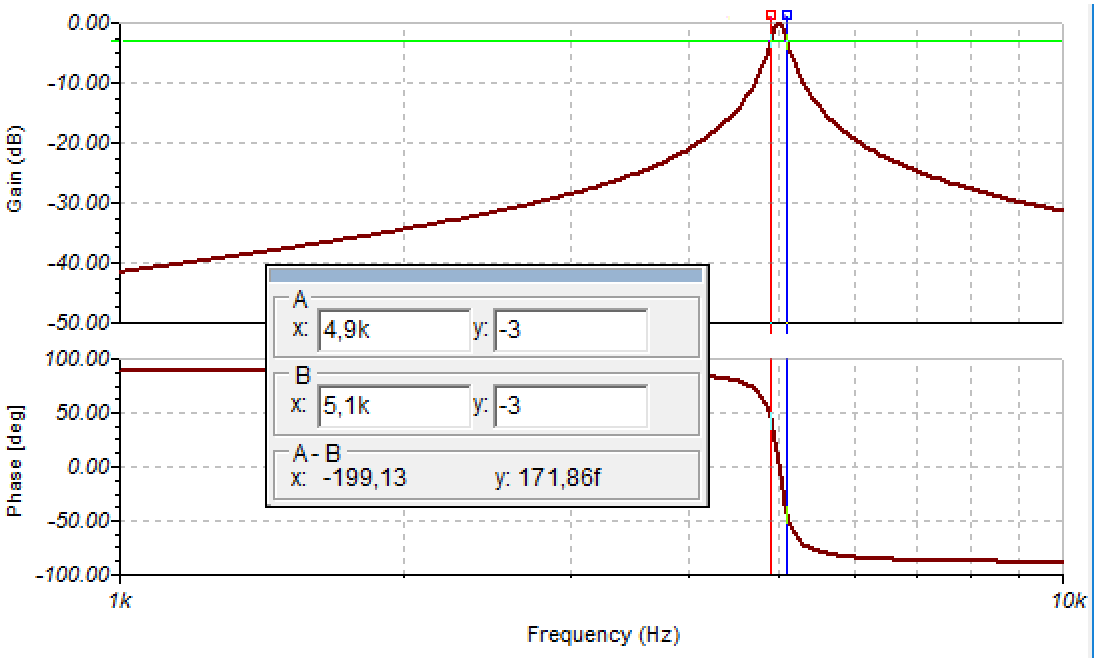
$$\omega_0=\sqrt{\frac{1}{LC}} \qquad \beta=\frac{1}{RC} \qquad Q=\sqrt{\frac{R^2C}{L}}$$

$$\omega_{c1,c2}=\pm\frac{1}{2RC}+\sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2+\frac{1}{LC}}$$

Para fc = 5kHz, *β*= 200 Hz e C = 5 uF:

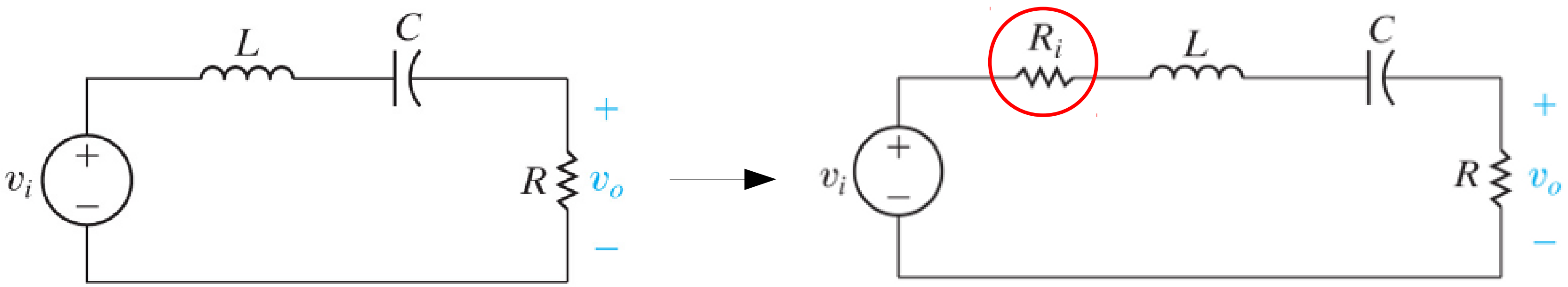
$$R=159{,}15\,\Omega$$

$$L=202{,}64\,\mu H$$



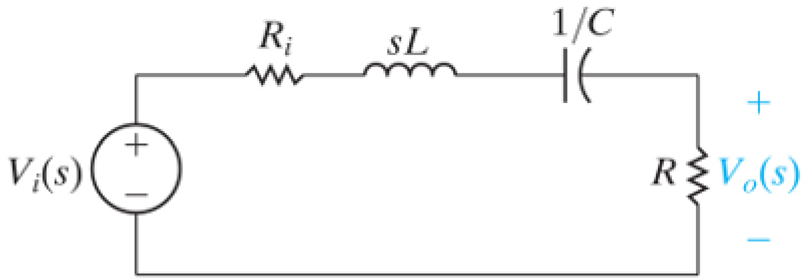
Exemplo

- **Efeito da resistência da fonte de sinal.**
  - **Considerável se os valores das impedâncias de R, L e/ou C forem da mesma ordem de grandeza da resistência da fonte.**



- **Determine:**
  - **A função de transferência do circuito.**
  - **As respostas de amplitude e fase.**
  - **A resposta em frequência para o caso que Ri = R.**

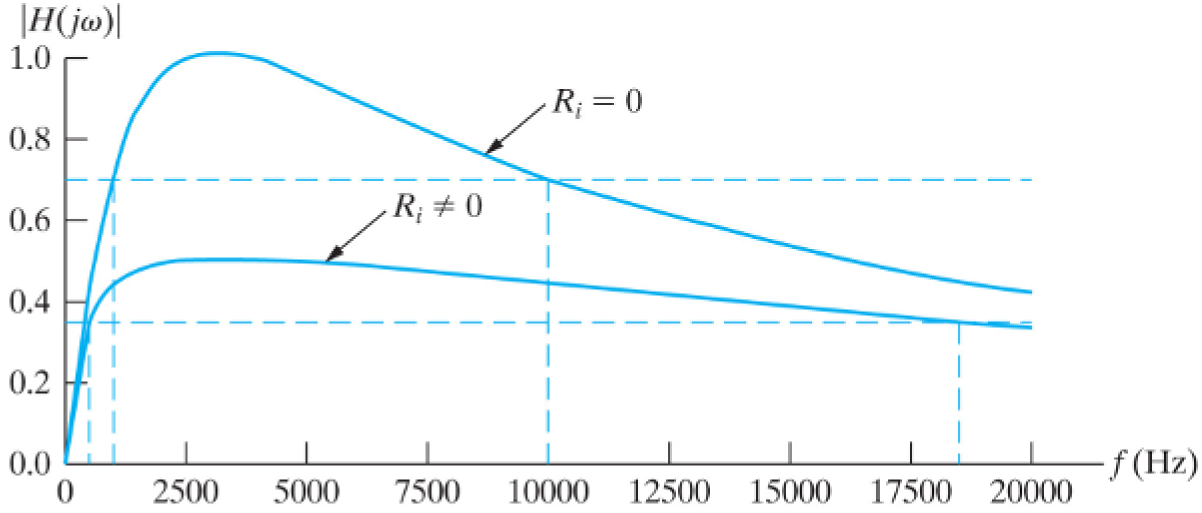
Exemplo



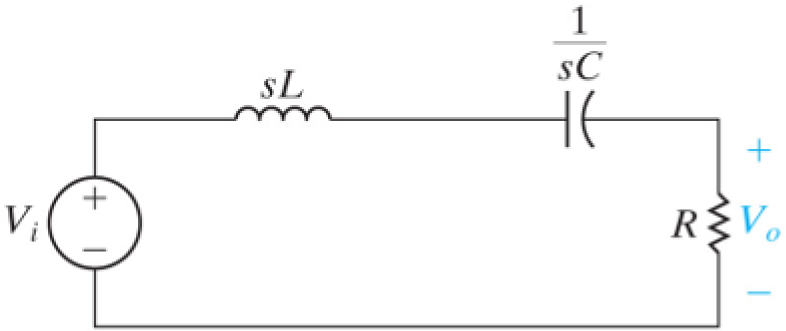
$$H(s)=\frac{(R/L)s}{s^2+[(R+R_i)/L]s+1/LC}$$

$$|H(j\omega)|=\frac{\omega(R/L)}{\sqrt{[\omega(R+R_i)/L]^2+[1/LC-\omega^2]^2}}$$

$$\theta(j\omega)=90^o-\arctan\left[\frac{\omega(R_i+R)/L}{1/LC-\omega^2}\right]$$



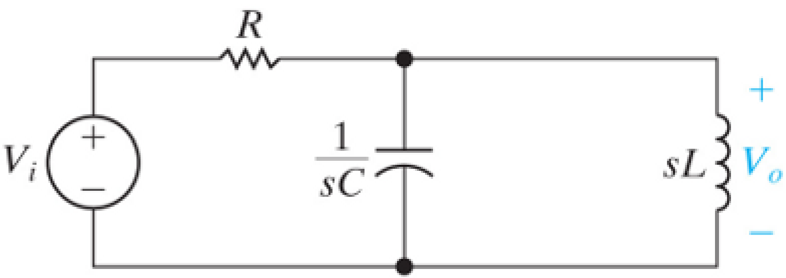
Forma genérica para filtros passa-faixa



$$H(s) = \frac{(R/L)s}{s^2 + (R/L)s + 1/LC}$$

$$\omega_o = \sqrt{1/LC} \qquad \beta = R/L$$

$$H(s) = \frac{K\beta s}{s^2 + \beta s + \omega_0^2}$$

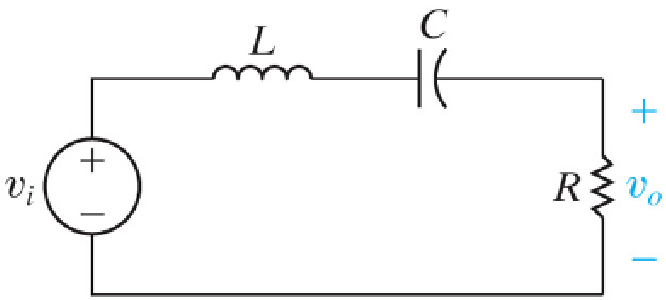


$$H(s) = \frac{s/RC}{s^2 + s/RC + 1/LC}$$

$$\omega_o = \sqrt{1/LC} \qquad \beta = 1/RC$$

Relações entre domínios do tempo e frequência

- **Circuito RLC série → análise no domínio do tempo:**



Frequência de Neper → $\alpha = \frac{R}{2L} \, rad/s$

Frequência angular de ressonância → $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \, rad/s$

- **Análise no domínio da frequência:**

Faixa de passagem → $\beta = \frac{R}{L}$ → $\boxed{\beta = 2\alpha}$

Frequência central → $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \, rad/s$ →

- **A frequência angular de ressonância.**
- **Frequência de ressonância.**
- **Frequência natural.**

Relações entre domínios do tempo e frequência

- **Respostas no tempo:**
- **Respostas em frequência:**

Superamortecida → $\alpha^2 > \omega_0^2$ → $Q = \frac{\omega_0}{\beta} = \frac{\omega_0}{2\alpha} < \frac{1}{2}$ → $Q < \frac{1}{2}$

Criticamente amortecida → $\alpha^2 = \omega_0^2$ → $Q = \frac{\omega_0}{\beta} = \frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{\cancel{\omega_0}}{2\cancel{\omega_0}}$ → $\boxed{Q = \frac{1}{2}}$

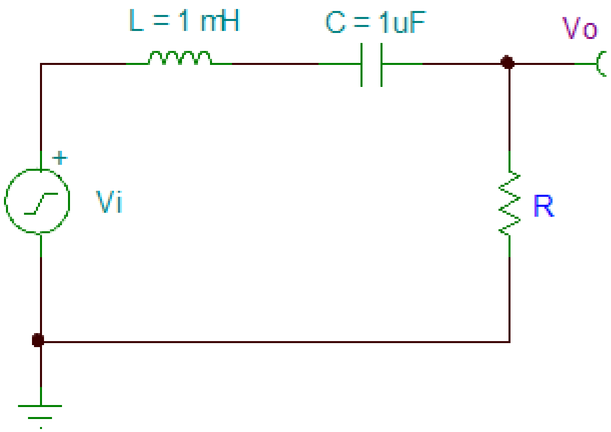
Subamortecida → $\alpha^2 < \omega_0^2$ → $Q = \frac{\omega_0}{\beta} = \frac{\omega_0}{2\alpha} > \frac{1}{2}$ → $Q > \frac{1}{2}$

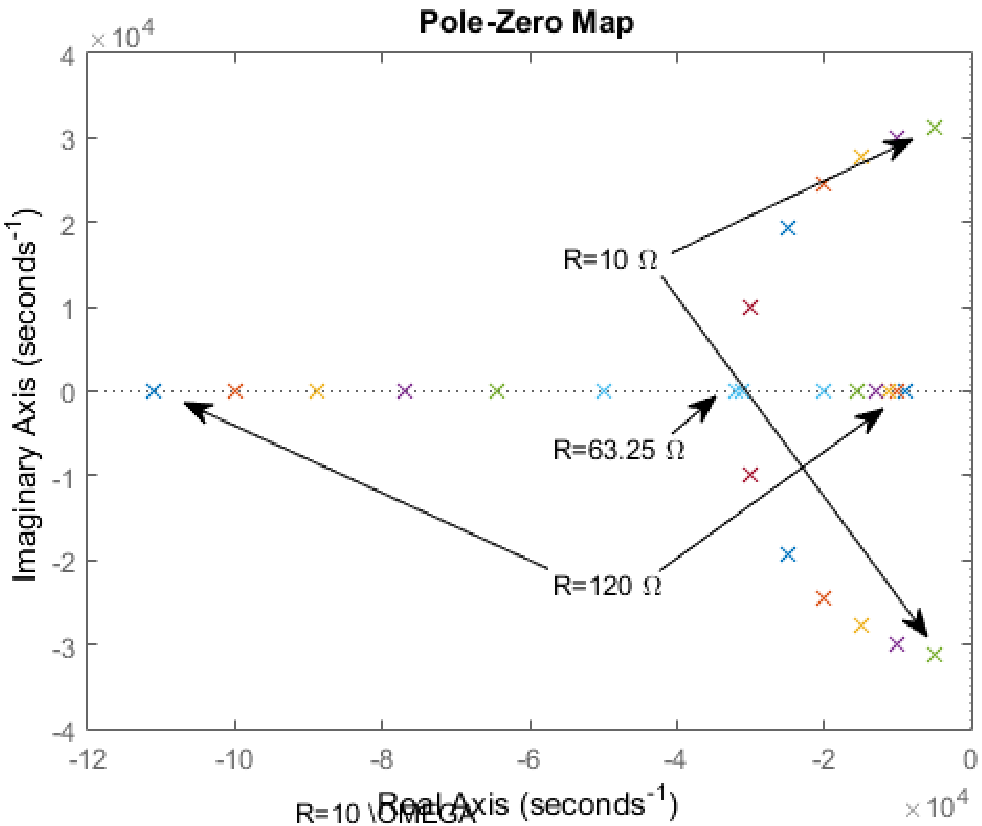
Alto Q → **Faixa estreita** → **Resposta subamortecida**

Faixa estreita ↓ **Alta seletividade em frequência**

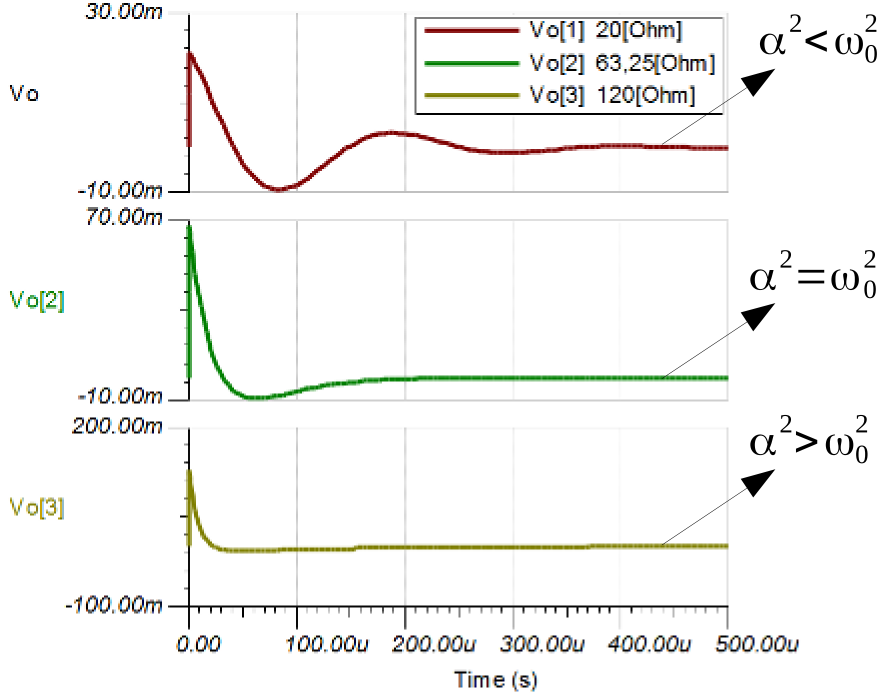
Resposta subamortecida ↓ **Decaimento demorado no tempo**

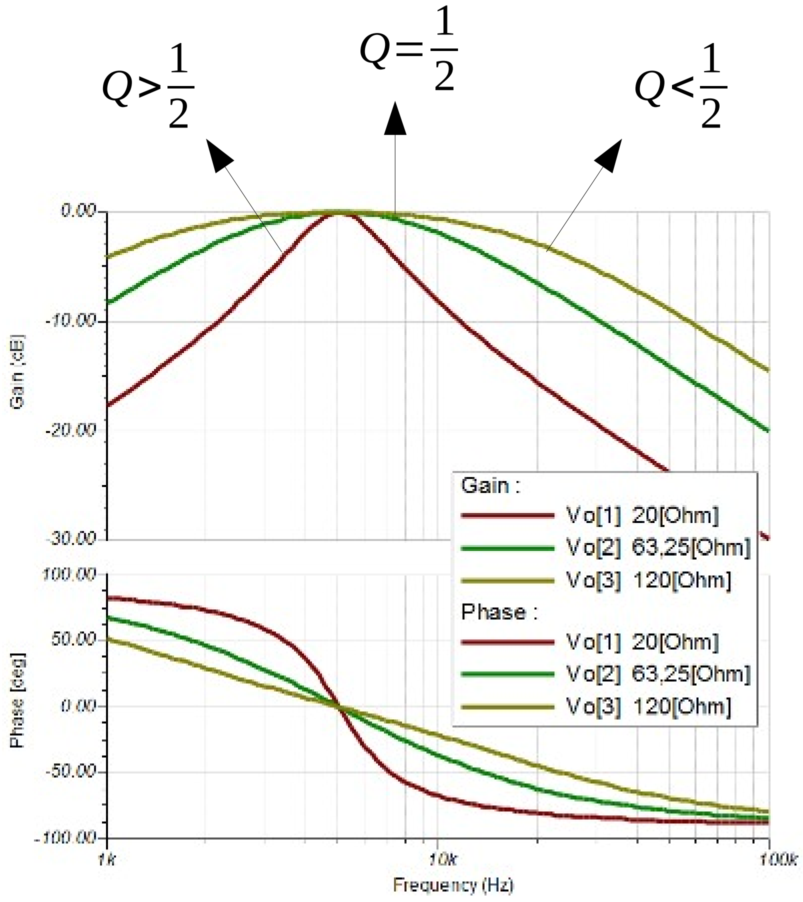
Relações entre domínios do tempo e frequência





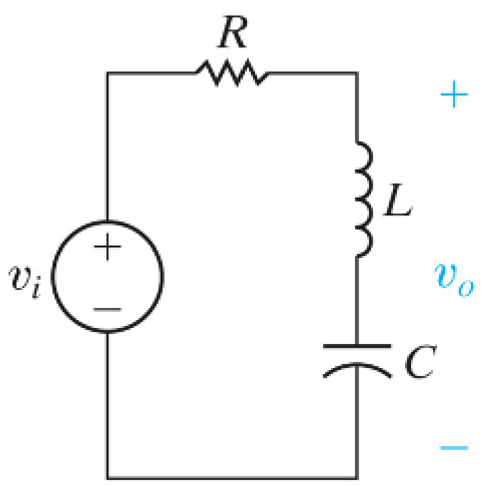
Relações entre domínios do tempo e frequência





Filtros rejeita-faixa

- **Caracterizados pelos mesmos parâmetros dos filtros passa-faixa.**
- **Rejeita-faixa RLC série:**



Entrada → $v_i(t)$

Saída → $v_o(t)$ → **tensão sobre o INDUTOR e o CAPACITOR!**

$$Z_R = R$$

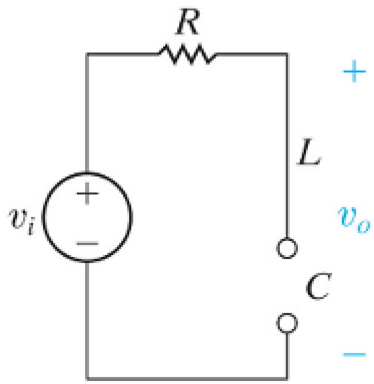
$$Z_L = j\omega L$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$$

Filtros rejeita-faixa

- **Análise qualitativa:**

Quando $\omega \rightarrow 0$

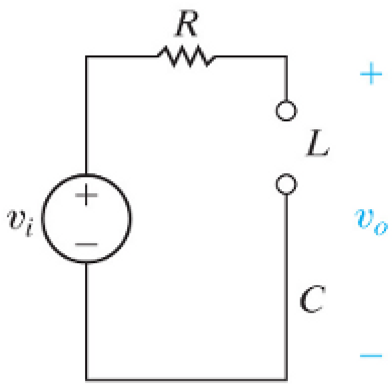


$Z_L \rightarrow 0$

$Z_C \rightarrow \infty$

$v_o \rightarrow v_i$ ► **Sinais com baixas frequências passam.**

Quando $\omega \rightarrow \infty$



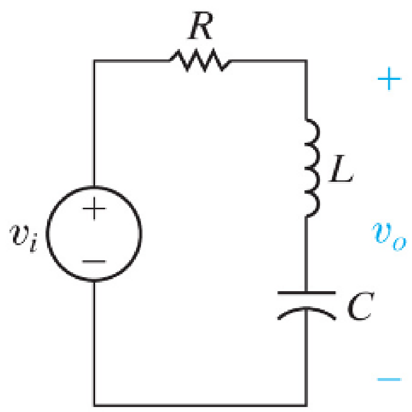
$Z_L \rightarrow \infty$

$Z_C \rightarrow 0$

$v_o \rightarrow v_i$ ► **Sinais com altas frequências também passam.**

Filtros rejeita-faixa

Quando $0<\omega<\infty$



$$Z_R = R$$

$$Z_L = j\omega L$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C}$$

***Z**$_L$* **e** ***Z**$_C$* **possuem sinais contrários.**

À medida que ω aumenta → ***Z**$_L$* **aumenta.**

→ ***Z**$_C$* **diminui.**

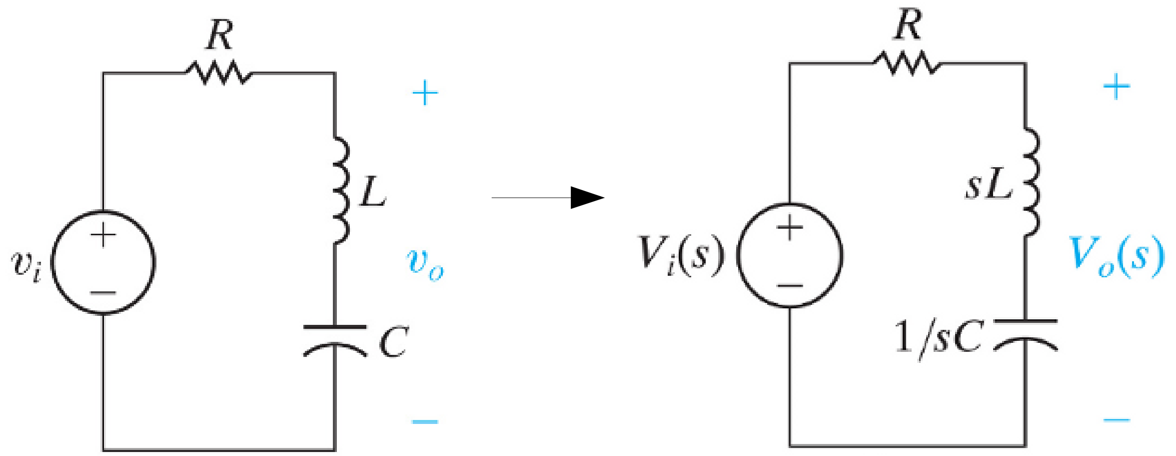
Para alguma frequência específica teremos:

$$Z_L = -Z_C \longrightarrow v_0(t) = i(t)\cdot(\cancel{Z}_L + \cancel{Z}_C) = 0 \longrightarrow v_o(t) = 0$$

→ **Ressonância.**

Análise quantitativa

- **Considerando condições iniciais nulas:**



$$V_o(s) = \frac{V_i(s)}{sL + 1/sC + R} \cdot (sL + 1/sC) \longrightarrow \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = H(s) = \frac{sL + 1/sC}{sL + 1/sC + R}$$

$$H(s) = \frac{s^2 + 1/(LC)}{s^2 + (R/L)s + 1/(LC)}$$

Análise quantitativa

$$H(s)=\frac{s^2+1/(LC)}{s^2+(R/L)s+1/(LC)}$$

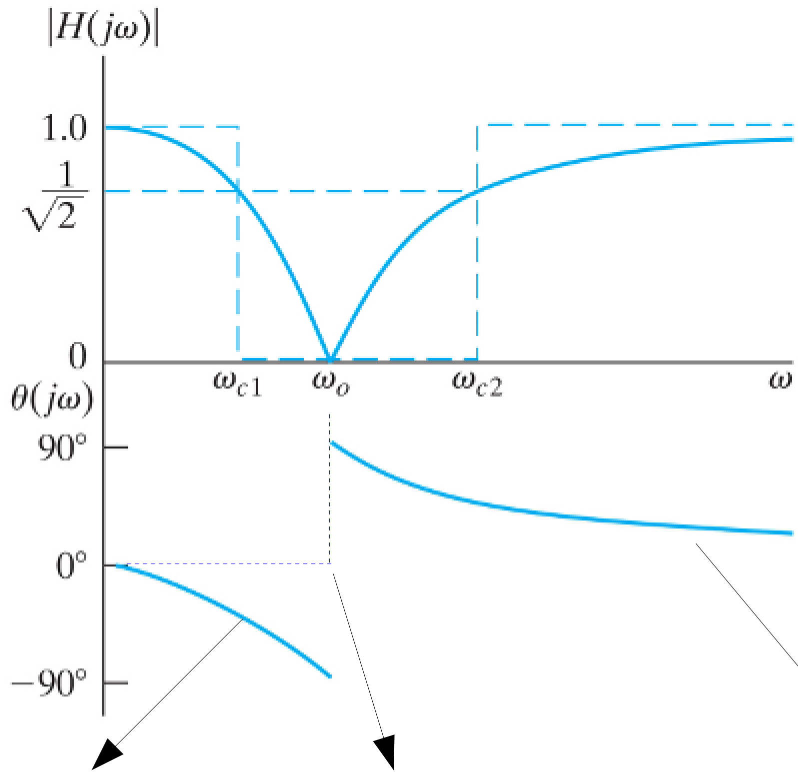
Em regime permanente.

$$H(j\omega)=\frac{(j\omega)^2+1/(LC)}{(j\omega)^2+j\omega(R/L)+1/(LC)} \longrightarrow H(j\omega)=\frac{1/(LC)-\omega^2}{j\omega(R/L)+1/LC-\omega^2}$$

$$=\frac{|1/(LC)-\omega^2|\mathrm{e}^{j0}}{\sqrt{[\omega(R/L)]^2+[1/(LC)-\omega^2]^2}\ \mathrm{e}^{\arctan\left[\frac{\omega(R/L)}{1/(LC)-\omega^2}\right]}}$$

$$|H(j\omega)|=\frac{|1/(LC)-\omega^2|}{\sqrt{[\omega(R/L)]^2+[1/(LC)-\omega^2]^2}} \qquad \theta(j\omega)=-\arctan\left[\frac{\omega(R/L)}{1/(LC)-\omega^2}\right]$$

Resposta em frequência



$$|H(j\omega)| = \frac{|1/(LC)-\omega^2|}{\sqrt{[\omega(R/L)]^2+[1/(LC)-\omega^2]^2}}$$

$$\theta(j\omega) = -\arctan\left[\frac{\omega(R/L)}{1/(LC)-\omega^2}\right]$$

Baixas frequências → fase negativa.

Na ressonância → fase salta de -90° para +90°.

Altas frequências → fase positiva.

Parâmetros do filtro rejeita-faixa

Frequência de ressonância → $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}}$

Frequências de corte → $\boxed{\omega_{c1,c2} = \pm \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}}$

Largura da faixa de rejeição → $\boxed{\beta = \frac{R}{L}}$

Fator de qualidade → $\boxed{Q = \sqrt{\frac{L}{CR^2}}}$

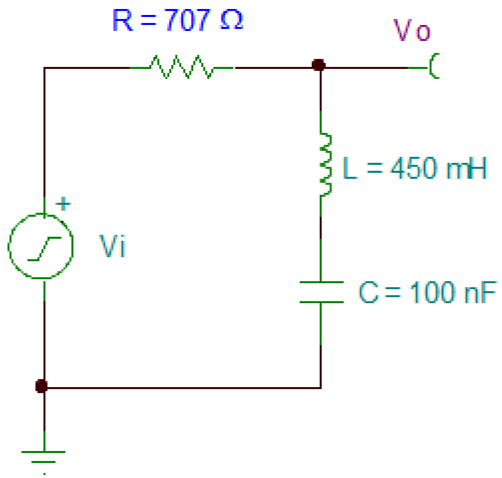
Exemplo

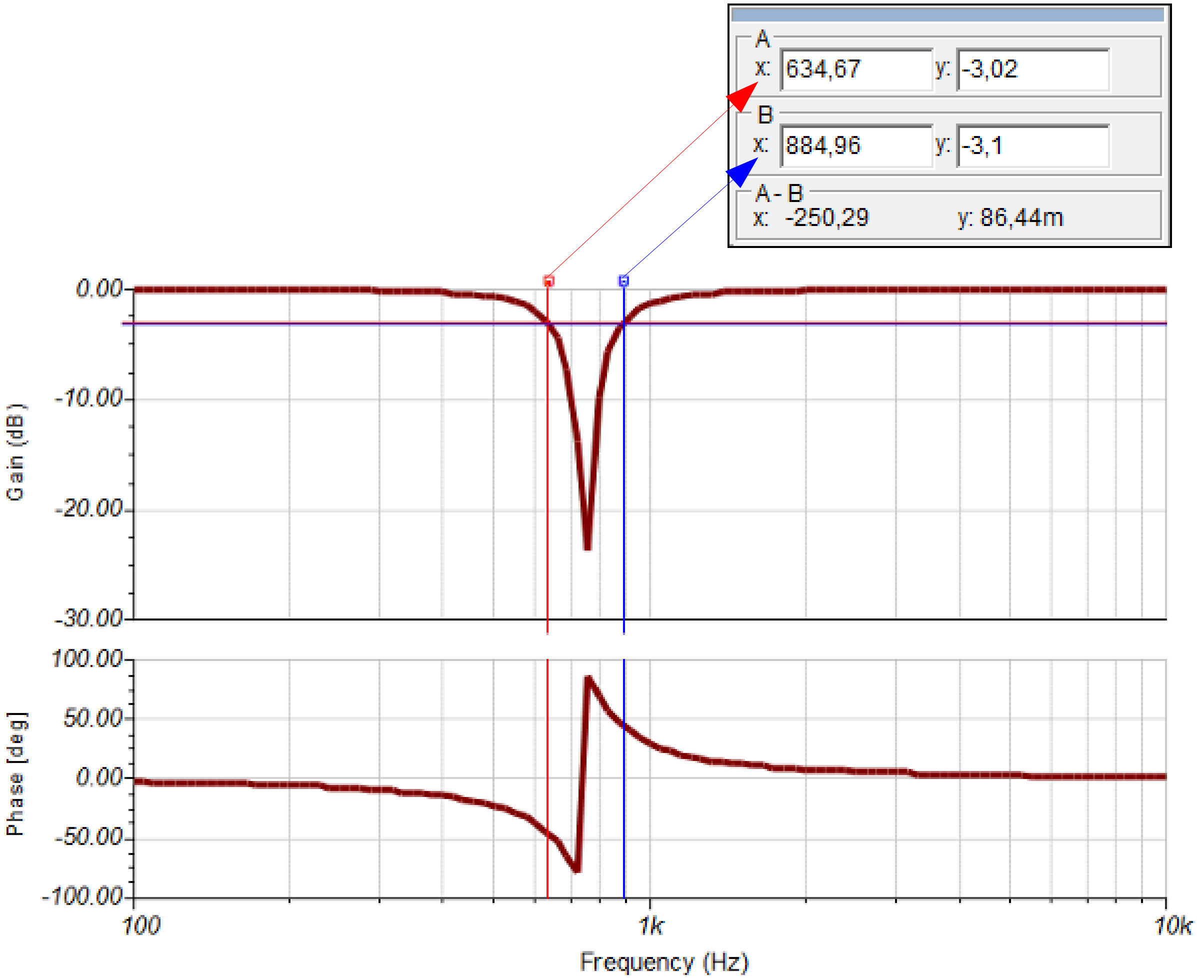
- **Projeto de um filtro rejeita-faixa RLC série:**
  - **Largura de faixa de 250 Hz.**
  - **Frequência central de 750 Hz.**
  - **Capacitor de 100 nF.**

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} = 2\pi\ 750 \quad rad/s \longrightarrow \sqrt{\frac{1}{L \cdot 100\, nF}} = 2\pi\ 750 \longrightarrow L = 450\, mH$$

$$\beta = \frac{R}{L} = 2\pi\ 250\, rad/s \longrightarrow R = 2\pi \cdot 250 \cdot 450\, m \longrightarrow R \approx 707\, \Omega$$

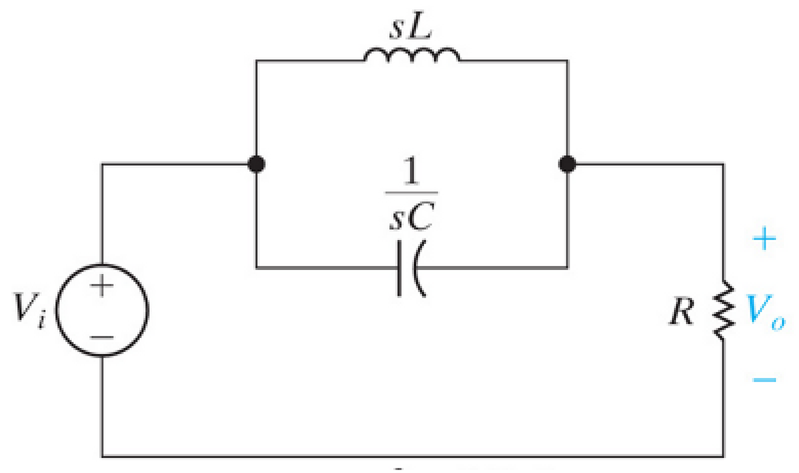
Exemplo


R = 707 Ω
Vo
L = 450 mH
Vi
C = 100 nF

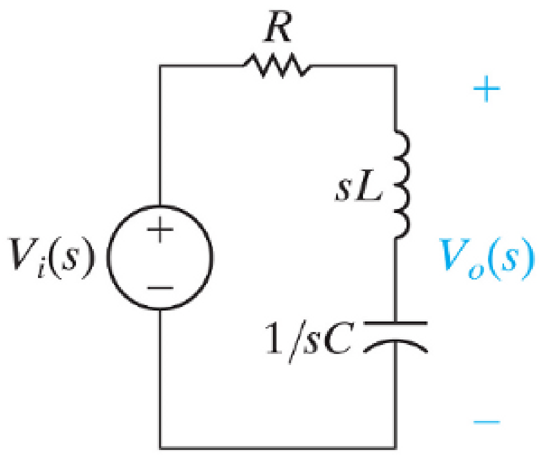

A
x: 634,67
y: -3,02
B
x: 884,96
y: -3,1
A - B
x: -250,29
y: 86,44m
Gain (dB)
0.00
-10.00
-20.00
-30.00
Phase [deg]
100.00
50.00
0.00
-50.00
-100.00
100
1k
10k
Frequency (Hz)

Exemplo

- **Dado o circuito mostrado na figura abaixo, determine:**
  - **A função de transferência.**
  - **As respostas de amplitude e fase.**
  - **As expressões para os parâmetros do filtro.**
  - **Os valores de R e L para uma frequência central de 5 kHz e uma largura de faixa de 200 Hz. Considere C = 5 uF.**



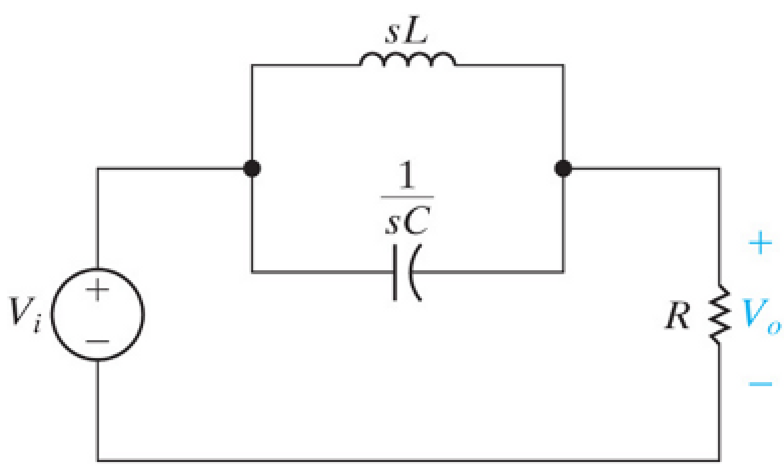
Forma genérica para filtros rejeita-faixa



$$H(s) = \frac{s^2 + 1/LC}{s^2 + (R/L)s + 1/LC}$$

$$\omega_o = \sqrt{1/LC} \qquad \beta = R/L$$

$$\boxed{H(s) = \frac{s^2 + \omega_0^2}{s^2 + \beta s + \omega_0^2}}$$

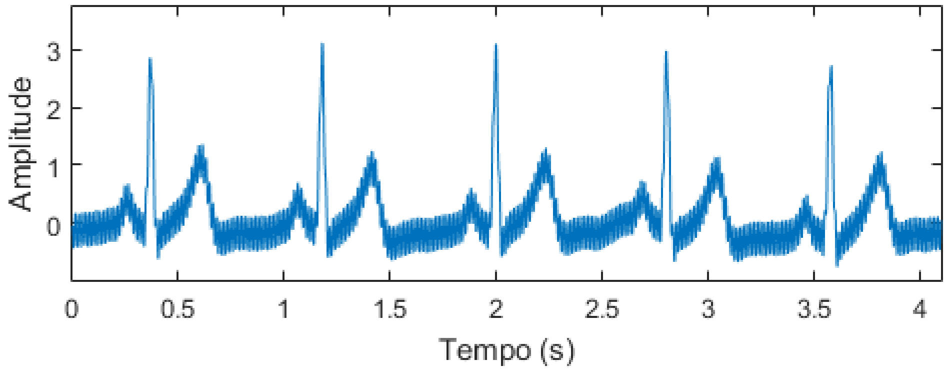


$$H(s) = \frac{s^2 + 1/LC}{s^2 + s/RC + 1/LC}$$

$$\omega_o = \sqrt{1/LC} \qquad \beta = 1/RC$$

Exemplo.

- **Problema do eletrocardiograma “revisitado”:**
  - **Sinal de eletrocardiograma, frequência aproximadamente 1 Hz.**
  - **Presença de ruído senoidal (harmônico) gerado pela rede elétrica, frequência de 60Hz.**
  - **Solução proposta:**
    - **Filtro rejeita-faixa com alto fator de qualidade: Q = 10.**
    - **Frequência de ressonância de 60 Hz.**

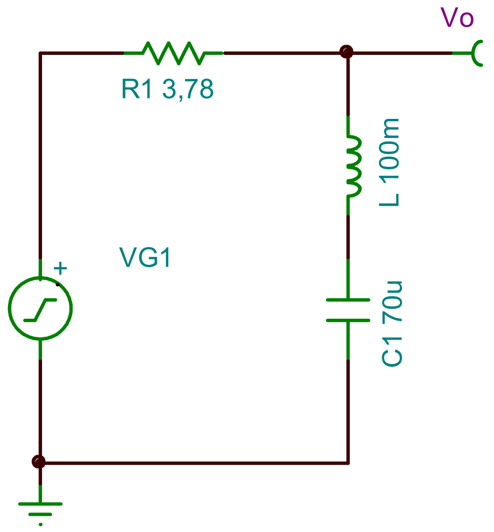


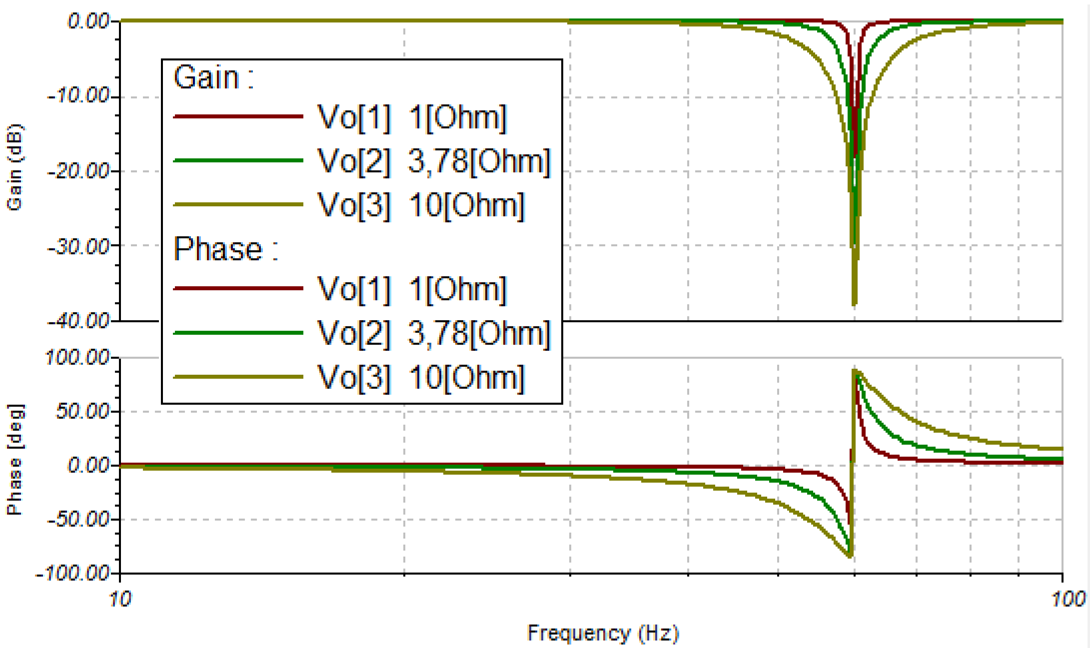
Exemplo

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} = 2\pi 60\, rad/s$$

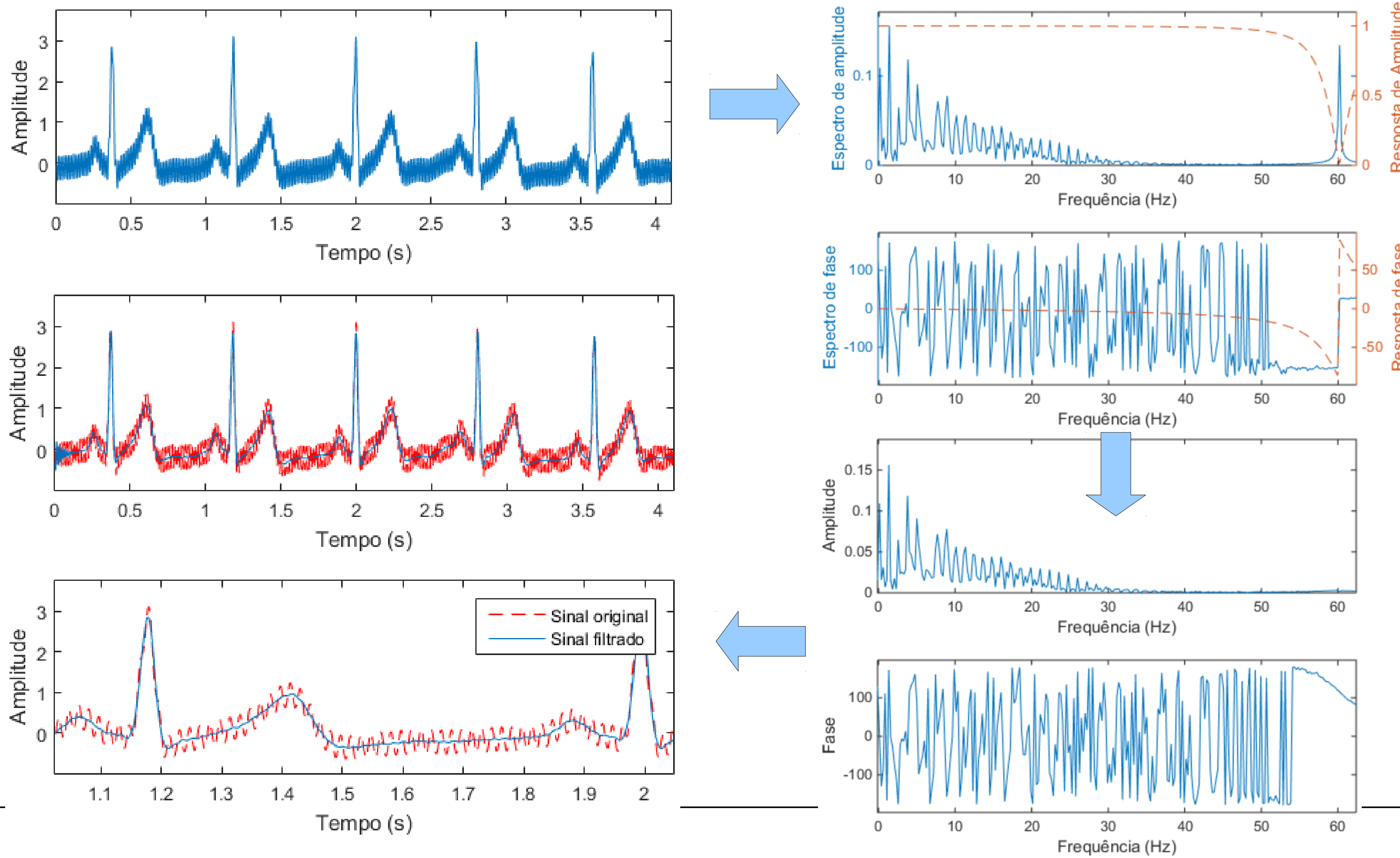
Fazendo: $L = 100\, mH \rightarrow C = 70\mu F$

$$Q = \sqrt{\frac{L}{CR^2}} = 10 \rightarrow R = 3{,}78\Omega$$





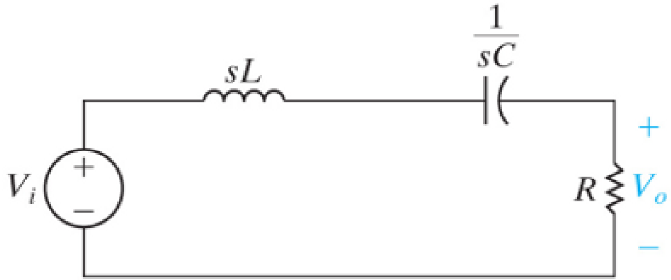
Exemplo



Amplitude
Tempo (s)
Espectro de amplitude
Resposta de Amplitude
Frequência (Hz)
Espectro de fase
Resposta de fase
Fase
Sinal original
Sinal filtrado

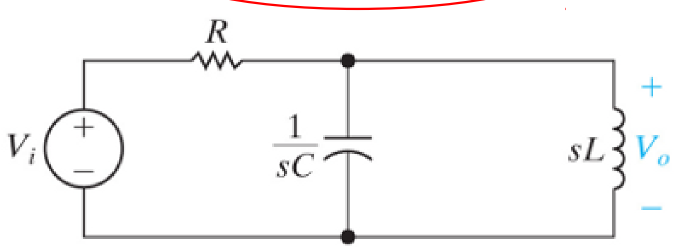
Resumindo

- **Filtros passa-faixa:**



$$H(s) = \frac{(R/L)s}{s^2 + (R/L)s + 1/LC}$$

$$\omega_o = \sqrt{1/LC} \qquad \beta = R/L$$

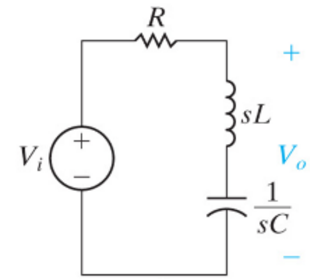


$$H(s) = \frac{s/RC}{s^2 + s/RC + 1/LC}$$

$$\omega_o = \sqrt{1/LC} \qquad \beta = 1/RC$$

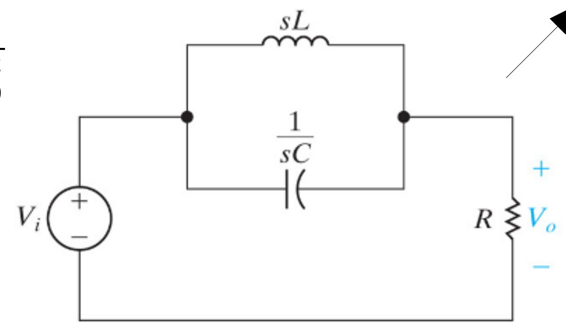
$$H(s) = \frac{K\beta s}{s^2 + \beta s + \omega_0^2}$$

- **Filtros rejeita faixa:**



$$H(s) = \frac{s^2 + 1/LC}{s^2 + (R/L)s + 1/LC}$$

$$\omega_o = \sqrt{1/LC} \qquad \beta = R/L$$



$$H(s) = \frac{s^2 + 1/LC}{s^2 + s/RC + 1/LC}$$

$$\omega_o = \sqrt{1/LC} \qquad \beta = 1/RC$$

$$H(s) = \frac{s^2 + \omega_0^2}{s^2 + \beta s + \omega_0^2}$$