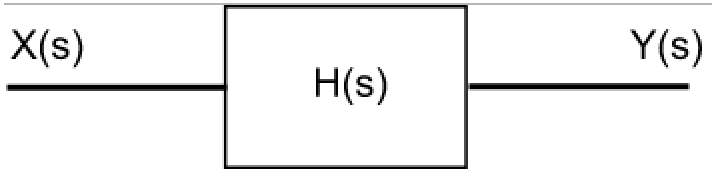
Funções de transferência

- **Função de transferência de um sistema dinâmico linear e invariante no tempo (LIT):**
  - **Caracterização matemática do comportamento dinâmico do sistema.**
  - **Definida como a transformada de Laplace da saída dividida pela transformada de Laplace da entrada.**

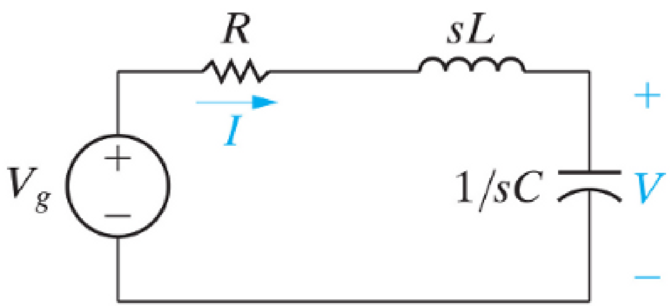
$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}$$



  - **Depende do que se define como entrada e saída!**
    - **Um mesmo sistema pode ter várias funções de transferência.**
  - **Análise válida somente para condições iniciais nulas!**

Funções de transferência

- **Exemplo:**



Se entrada $\rightarrow$ V_g

e saída $\rightarrow$ I

$$\longrightarrow H(s) = \frac{s/L}{s^2 + R/L\,s + 1/LC}$$

Se entrada $\rightarrow$ V_g

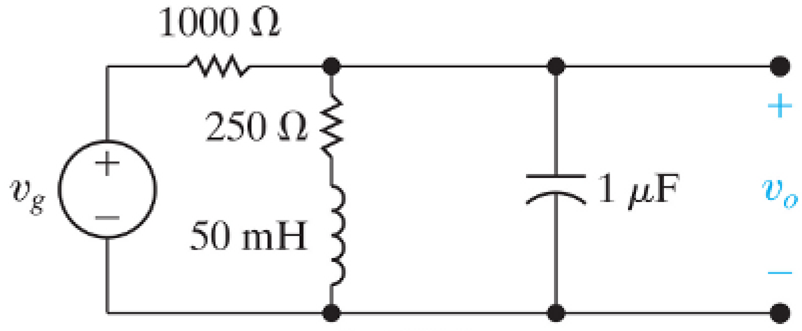
e saída $\rightarrow$ V

$$\longrightarrow H(s) = \frac{1/LC}{s^2 + R/L\,s + 1/LC}$$

Exemplo

- **Dado o circuito abaixo, determine:**
  - **Função de transferência.**
  - **Polos e zeros.**
  - **Sendo:** Entrada $\rightarrow v_g$

    Saída $\rightarrow v_o$



Funções de transferência e a resposta do circuito

- **Considere novamente a equação da função de transferência:**

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)} \longrightarrow Y(s)=H(s)\cdot X(s)$$

Função racional

Função racional

A função de transferência é um *modelo* do circuito → sistema linear invariante no tempo.

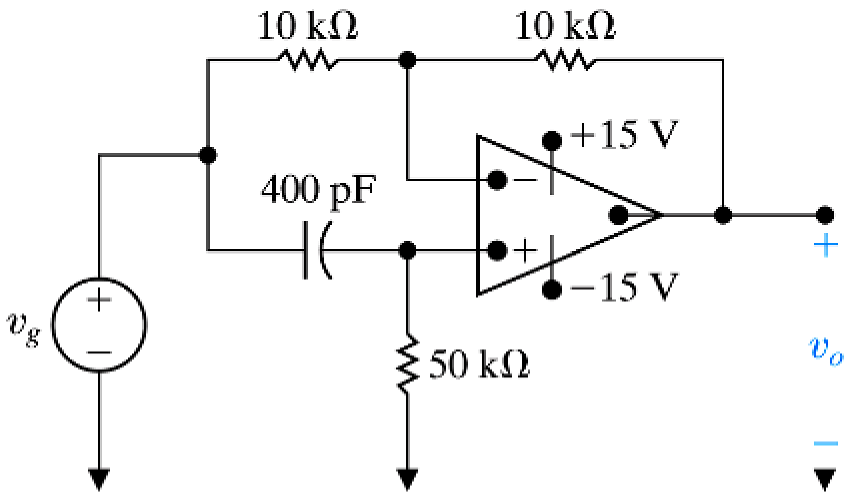
↓

Para cada nova entrada pode-se obter a saída correspondente.

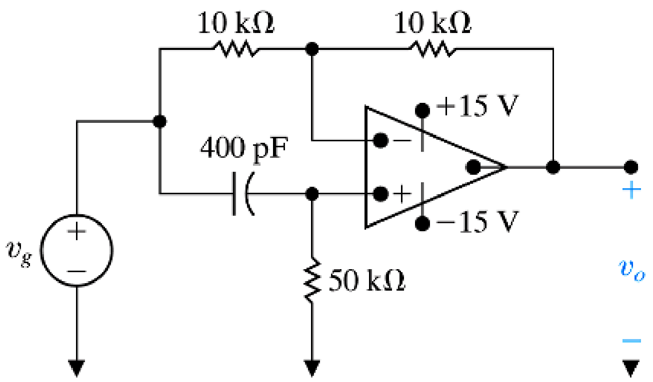
- **A resposta do circuito é resultado do produto de duas funções racionais de s.**
  - **Também será um função racional de s.**
- **Com foi estudado, a saída *y*(*t*) é obtida por meio de uma expansão em frações parciais...**

Exemplo

- **Dado o circuito abaixo, determine:**
  - **A função de transferência, considerando vg como entrada e vo como saída.**
  - **A resposta, se** $v_g(t) = 10\,u(t)\,V$
  - **A resposta, se** $v_g(t) = 10\cos(50.000\,t)\,u(t)\,V$



Exemplo

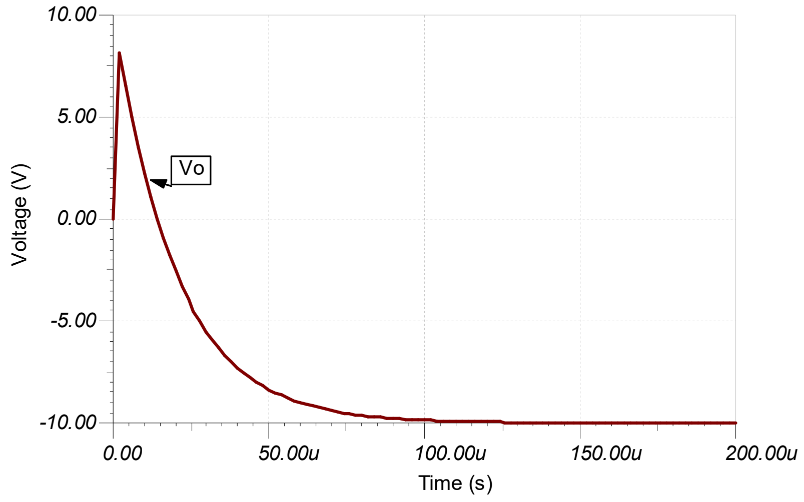


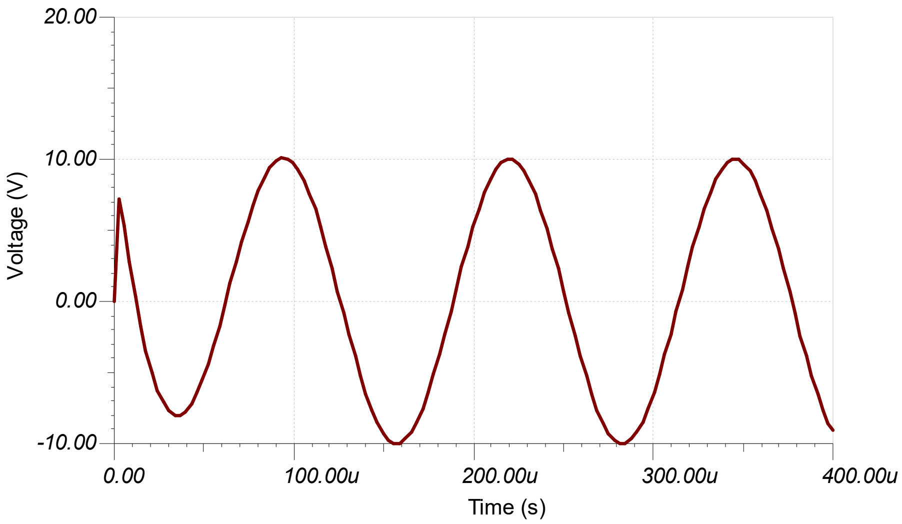
$$H(s)=\frac{s-50000}{s+50000}$$

$$v_g(t)=10u(t)V \longrightarrow v_o(t)=\left(20e^{-50000t}-10\right)u(t)V$$

$$v_g(t)=10\cos(50.000t)u(t)V \longrightarrow$$

$$v_o(t)=\left[10e^{-50000t}+10\cos(50000t+90^o)\right]u(t)V$$





Funções de transferência e a resposta do circuito

$$Y(s)=H(s)\cdot X(s)$$

$$=\underbrace{\frac{K_{H1}}{s}+\frac{K_{H2}}{s+a}+\frac{K_{H3}}{(s+b)^2}+}_{\text{Conjunto de polos associados a H(s)}}\ \cdots\ \underbrace{+\frac{K_{X1}}{s+\alpha}+\frac{K_{X2}}{s+\beta}+\frac{K_{X3}}{s+\lambda}}_{\text{Conjunto de polos associados a X(s)}}+\cdots$$

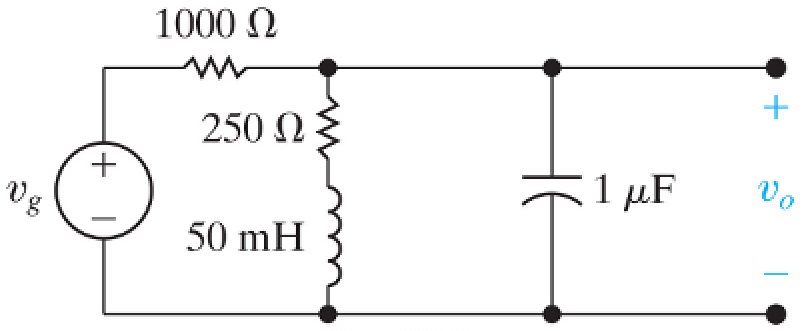
Conjunto de polos associados a H(s) → Determinam como será a resposta transitória.

Conjunto de polos associados a X(s) → Determinam como será a resposta permanente.

Resposta total = Parte transitória + parte permanente!

Exemplo

- **Considerando novamente o exemplo anterior:**



$$\frac{V_o}{V_g} = H(s) = \frac{1000(s+5000)}{s^2+6000s+25\times10^6}$$

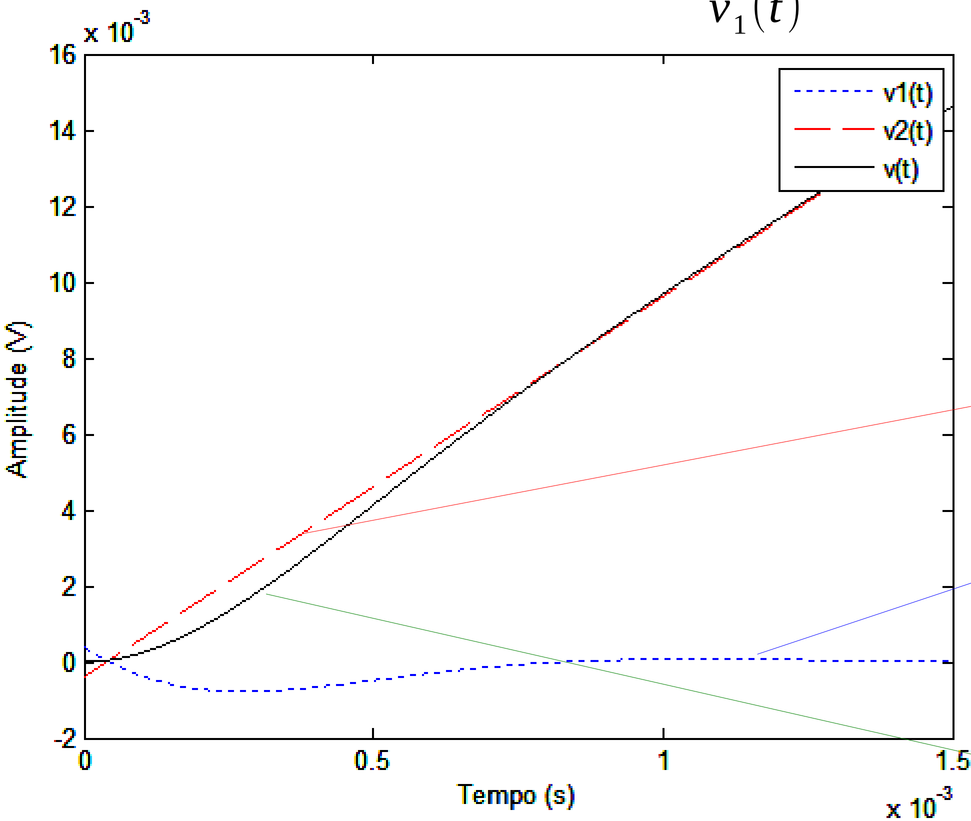
Suponha que o circuito será estimulado por uma tensão em rampa:

$$v_g(t) = 50t \cdot u(t) \overset{L}{\Leftrightarrow} V_g(s) = \frac{50}{s^2}$$

- **Determinar:**
  - **v_0(t).**
  - **As componentes transitória e permanente.**

Exemplo

$$v_o(t)=\Big[\underbrace{10\sqrt{5}\times10^{-4}\,\mathrm{e}^{-3000\,t}\cos\left(4000\mathrm{t}+79{,}70^{o}\right)}_{v_1(t)}+\underbrace{10\,t-4\times10^{-4}}_{v_2(t)}\Big]u(t)$$



Resposta em regime permanente.

Resposta transitória, natural ou ao impulso.

Resposta total.

Outras considerações sobre funções de transferência

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)} \longrightarrow Y(s)=H(s)\cdot X(s)$$

- **Se x(t) for um impulso unitário:**

$$x(t)=\delta(t) \overset{L}{\Leftrightarrow} X(s)=1$$

Portanto, a resposta ao impulso será:

$$Y(s)=H(s)\cdot X(s)=H(s)\cdot 1=H(s)$$

$$Y(s)=H(s)$$

$$\big\downarrow \mathscr{L}^{-1}$$

$$\boxed{y(t)=h(t)}$$

A função de transferência é a transformada de Laplace da resposta ao impulso (resposta natural)!

Tipo	$f(t)\ (t > 0^-)$	$F(s)$
(impulso)	$\delta(t)$	1
(degrau)	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
(rampa)	t	$\frac{1}{s^2}$
(exponencial)	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
(seno)	sen ωt	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
(co–seno)	cos ωt	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
(rampa amortecida)	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
(seno amortecido)	e^{-at} sen ωt	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
(co–seno amortecido)	e^{-at} cos ωt	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

Outras considerações sobre funções de transferência

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)} \longrightarrow Y(s)=H(s)\cdot X(s)$$

Se atrasarmos a entrada *a* segundos:

$$x(t)u(t) \longrightarrow x(t-a)u(t-a)$$

$$\Big\downarrow \mathscr{L}$$

$$X_a(s) \longrightarrow e^{-as}X(s)$$

A resposta do circuito será:

$$Y_a(s)=H(s)\cdot X(s)e^{-as}=Y(s)e^{-as}$$

$$\Big\downarrow \mathscr{L}^{-1}$$

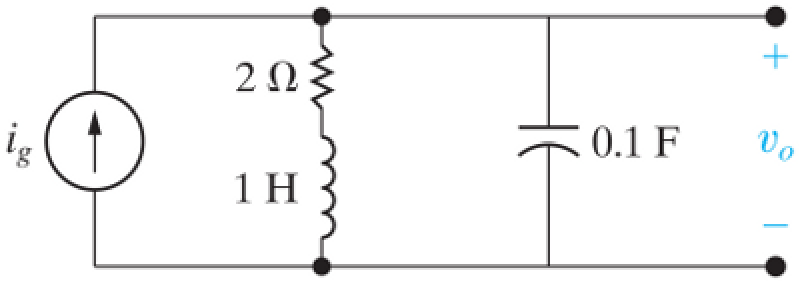
$$y_a(t)=y(t-a)u(t-a)$$

A resposta também se atrasa → sistema invariante no tempo!

Operação	$f(t)$	$F(s)$
Multiplicação por uma constante	$Kf(t)$	$KF(s)$
Adição/subtração	$f_1(t)+f_2(t)-f_3(t)+\ldots$	$f_1(s)+f_2(s)-f_3(s)+\ldots$
Derivada de primeira ordem (tempo)	$\frac{df(t)}{dt}$	$sF(s)-f(0^-)$
Derivada de segunda ordem (tempo)	$\frac{d^2f(t)}{dt^2}$	$s^2F(s)-sf(0^-)-\frac{df(0^-)}{dt}$
Derivada de ordem n (tempo)	$\frac{d^nf(t)}{dt^n}$	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0^-)-s^{n-2}\frac{df(0^-)}{dt}-s^{n-3}\frac{df^2(0^-)}{dt^2}-\ldots-\frac{d^{n-1}f(0^-)}{dt^{n-1}}$
Integral em relação ao tempo	$\int_0^t f(x)\,dx$	$\frac{F(s)}{s}$
Deslocamento no tempo	$f(t-a)u(t-a),\ a>0$	$e^{-as}F(s)$
Deslocamento na freqüência	$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$
Mudança de escala	$f(at),\ a>0$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
Derivada de primeira ordem (em s)	$tf(t)$	$-\frac{dF(s)}{ds}$
Derivada de ordem n (em s)	$t^nf(t)$	$(-1)^n\frac{d^nF(s)}{ds^n}$
Integral (em s)	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(u)\,du$

Exemplo

- **Dado o circuito abaixo, considere ig(t) como entrada e v0(t) como saída. Determine:**
  - **A resposta ao impulso.**
  - **A resposta ao degrau unitário.**

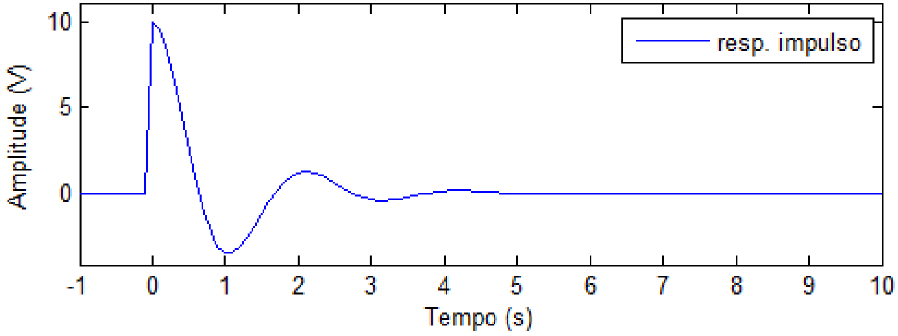


Exemplo

- **Resposta ao impulso:**

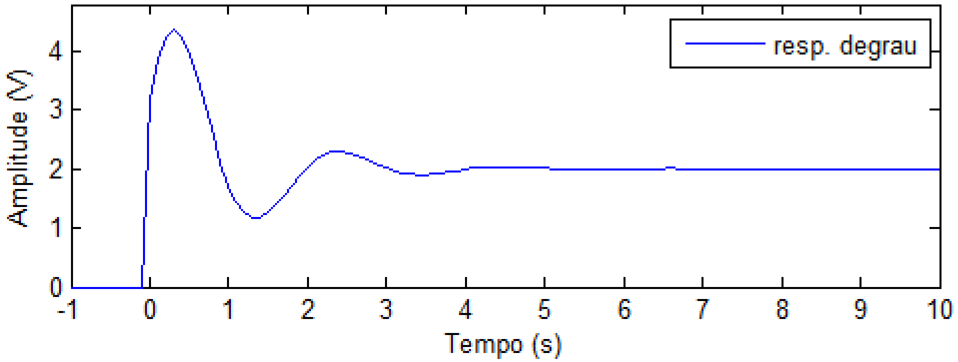
Se $i_g(t)=\delta(t) \longrightarrow$

$$v_o(t)=[10{,}54\,e^{-t}\cos(3t-18{,}43^o)]u(t)V$$



- **Resposta ao degrau:**

Se $i_g(t)=u(t) \longrightarrow$

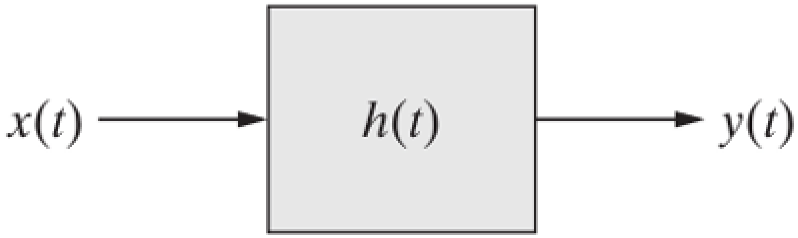


$$v_o(t)=\left[3{,}333\,e^{-t}\cos(3t-126{,}87^o)+2\right]u(t)V$$

Funções de transferência e a resposta em regime permanente senoidal

- **Considere que um circuito desconhecido é estimulado por uma função senoidal**

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$



Determinando a transformada de Laplace da entrada:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \quad = A\cos\varphi\cos\omega t - A\sin\varphi\sin\omega t$$

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned} X(s) &= A\cos\varphi\frac{s}{s^2+\omega^2} - A\sin\varphi\frac{\omega}{s^2+\omega^2} \\ &= \frac{A(s\cos\varphi - \omega\sin\varphi)}{s^2+\omega^2} \\ &= \frac{A(s\cos\varphi - \omega\sin\varphi)}{(s-j\omega)(s+j\omega)} \end{aligned}$$

Funções de transferência e a resposta em regime permanente senoidal

$$X(s)=\frac{A(s\cos\varphi-\omega\sin\varphi)}{(s-j\omega)(s+j\omega)}$$

A resposta ao estímulo senoidal será:

$$Y(s)=H(s)X(s)=$$

$$=H(s)\frac{A(s\cos\varphi-\omega\sin\varphi)}{(s-j\omega)(s+j\omega)}$$

Para voltar ao domínio do tempo → expansão em frações parciais:

$$Y(s)=\underbrace{\sum\left[termos\ de\ H(s)\right]}_{\text{Resposta transitória}}+\underbrace{\frac{K_1}{s-j\omega}+\frac{K_1^*}{s+j\omega}}_{\text{Resposta permanente}}$$

Formato da resposta em regime permanente: SENOIDAL!

Funções de transferência e a resposta em regime permanente senoidal

$$Y(s)=\cancel{\sum[termos\ de\ H(s)]}+\frac{K_1}{s-j\omega}+\frac{K_1^*}{s+j\omega} \xrightarrow{\text{Regime permanente}} Y(s)=\frac{K_1}{s-j\omega}+\frac{K_1^*}{s+j\omega}$$

A resposta em regime permanente reduz-se à determinação de K_1:

$$K_1=\left[H(s)\frac{A(s\cos\varphi-\omega\sin\varphi)}{(s+j\omega)}\right]_{s=j\omega}$$

A resposta em <u>regime permanente senoidal</u> é obtida substituindo-se *s* por *jω* !

$$=H(j\omega)\frac{A(j\omega\cos\varphi-\omega\sin\varphi)}{(j\omega+j\omega)}$$

$$=H(j\omega)\frac{A\,j\omega[\cos\varphi-(\omega/j\omega)\sin\varphi]}{2j\omega}$$

$$=H(j\omega)\frac{A(\cos\varphi+j\sin\varphi)}{2}$$

$$=H(j\omega)\frac{A}{2}e^{j\varphi}\quad=|H(j\omega)|e^{j\theta(\omega)}\frac{A}{2}e^{j\varphi}\quad=|H(j\omega)|\frac{A}{2}e^{j[\theta(\omega)+\varphi]}$$

Funções de transferência e a resposta em regime permanente senoidal

Portanto:

$$Y(j\omega) = \frac{K_1}{s - j\omega} + \frac{K_1^*}{s + j\omega} = \frac{A/2|H(j\omega)|e^{j[\theta(\omega)+\varphi]}}{s - j\omega} + \frac{A/2|H(j\omega)|e^{-j[\theta(\omega)+\varphi]}}{s + j\omega}$$

$$\Big\downarrow \mathscr{L}^{-1}$$

$$\boxed{y(t) = A|H(j\omega)|\cos[\omega t + \varphi + \theta(\omega)]}$$

Mas, considerando que:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\downarrow$$

$$y(t) = A|H(j\omega)|\cos[\omega t + \varphi + \theta(\omega)]$$

Ganho de amplitude

Deslocamento de fase

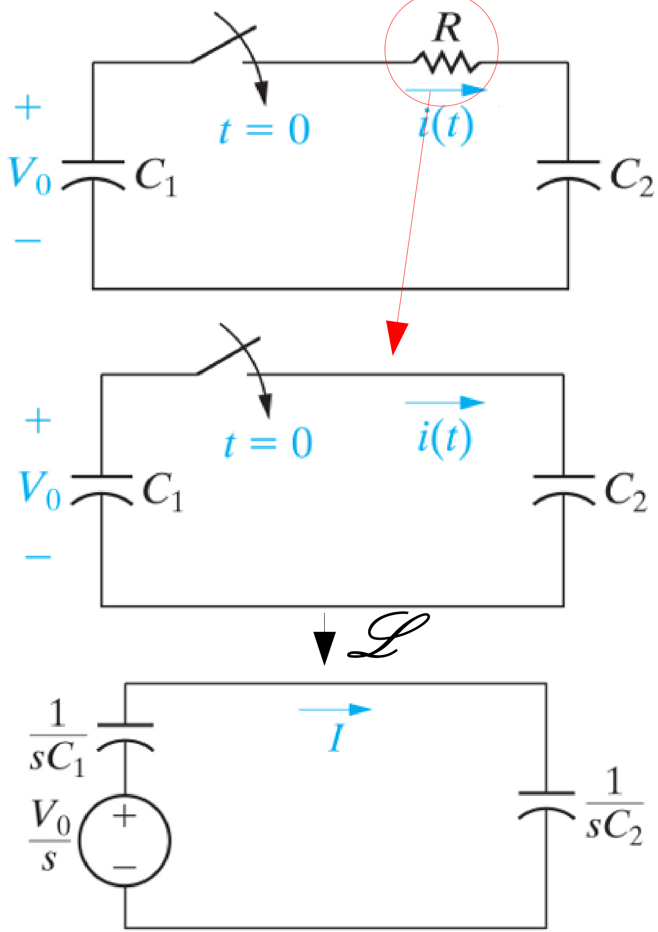
A saída do sistema é igual à entrada multiplicada por um ganho H e defasada θ graus.

Função impulso e operações de chaveamento em circuitos elétricos

- Operações de chaveamento → mudanças bruscas nas condições de operação de um circuito elétrico. Ex.:
  - Ligamento/desligamento de cargas.
  - Curtos-circuitos.
  - Descargas atmosféricas.
  - Descasamento de impedâncias.
  - Terminações de linhas de transmissão.
  - ...
- Chaveamentos geram tensões e/ou correntes impulsivas.
  - Riscos de danos ao sistema e de morte para as pessoas.

Operações de chaveamento

- **Ex.: considerando o circuito abaixo:**



C1 com carga inicial V_0.

C2 descarregado.

Problema: determinar i(t) para R muito pequeno (R → 0) → transferência de carga "instantânea" entre capacitores.

$$I = \frac{V_o/s}{1/sC_1 + 1/sC_2} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} V_o$$

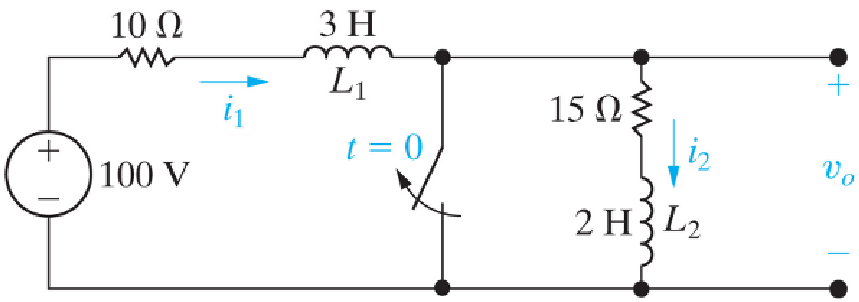
$I = C_e V_o$ → Função racional IMPRÓPRIA!

$\mathscr{L}^{-1}$

$\boxed{i(t) = C_e V_o \delta(t)}$ → Impulso de corrente!

Exemplo: análise de chaveamento de um circuito indutivo.

- Considerando o circuito abaixo, determine o comportamento de $v_o(t)$ e $i_1(t)$ para $t < 0$ e $t > 0$.



Exemplo