A transformada de Laplace inversa

- **Nos exemplos anteriores calculamos F(s) → mas como determinar f(t), que é a grandeza de interesse?**
- **Transformada de Laplace inversa → permite retornar do domínio da frequência para o domínio do tempo.**

Problema no domínio do tempo:
Equações integro-diferenciais.

$\downarrow$ **TL**

Problema no domínio da frequência:
Equações algébricas.

$\downarrow$ **TL^{-1}**

Solução no domínio do tempo.

A transformada de Laplace inversa

- **Problema → as expressões no domínio da frequência são *funções racionais* → não possuem TL inversa trivial.**
- **Solução → “fragmentar” em um conjunto de subfunções mais simples com TL inversa conhecida → expansão em *frações parciais*.**

$$F(s)=\frac{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}$$

Se m>n → função racional PRÓPRIA.
Se m<=n → função racional IMPRÓPRIA.

Obs.: somente funções PRÓPRIAS podem ser expandidas em frações parciais.

$$=\frac{K_1}{s}+\frac{K_2}{s+a}+\frac{K_3}{(s+b)^2}+\cdots$$

Frações parciais com TL inversa conhecida

Expansão em frações parciais

- **Processo sistemático:**

  1. O denominador da função deve estar na forma fatorada.

  Raízes distintas → 1 termo na expansão.
  Raiz com multiplicidade *r* → *r* termos na expansão.

  2. Cada termo deve ser associado a uma transformada inversa conhecida.

  3. Os numeradores de cada termo (coeficientes) são determinados por substituições → dependem dos tipos das raízes associadas.

- **Exemplo:**

Coeficientes (resíduos) de F(s)

$$F(s)=\frac{s+6}{s^4+5s^3+7s^2+3s}=\frac{s+6}{s(s+3)(s+1)^2}=\frac{K_1}{s}+\frac{K_2}{s+3}+\frac{K_3}{(s+1)^2}+\frac{K_4}{(s+1)}$$

Denominador fatorado **Raízes distintas** **Raiz de multiplicidade 2**

Expansão em frações parciais

- **Note que os termos da expansão são facilmente invertíveis por consulta à tabela:**

Tipo	$f(t)\ (t > 0^-)$	$F(s)$
(impulso)	$\delta(t)$	1
(degrau)	$\boxed{u(t)}$	$\boxed{\frac{1}{s}}$
(rampa)	t	$\frac{1}{s^2}$
(exponencial)	$\boxed{e^{-at}}$	$\boxed{\frac{1}{s+a}}$
(seno)	$\mathrm{sen}\ \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
(co–seno)	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
(rampa amortecida)	$\boxed{te^{-at}}$	$\boxed{\frac{1}{(s+a)^2}}$
(seno amortecido)	$e^{-at}\ \mathrm{sen}\ \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
(co–seno amortecido)	$e^{-at}\cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

$$F(s)=\frac{s+6}{s(s+3)(s+1)^2}$$

$$=\frac{K_1}{s}+\frac{K_2}{s+3}+\frac{K_3}{(s+1)^2}+\frac{K_4}{(s+1)}$$

$$\Big\downarrow\ \mathbf{TL^{-1}}$$

$$f(t)=K_1u(t)+K_2e^{-3t}u(t)+K_3te^{-t}u(t)+K_4e^{-t}u(t)$$

$$=\{K_1+K_2e^{-3t}+K_3te^{-t}+K_4e^{-t}\}u(t)$$

Determinação dos coeficientes da expansão – método dos resíduos

- Existem 2 situações a considerar:
  - 1o caso: raízes distintas, reais ou complexas.
  - 2o caso: raízes repetidas, reais ou complexas.
- Em todos os casos o procedimento é composto de duas etapas:
  - Utilize algum método matemático válido para isolar o coeficiente desejado.
  - Elimine os termos associados aos outros coeficientes.

Exemplo: raízes distintas e reais.

- **Para isolar o coeficiente desejado → multiplica-se ambos os lados pelo denominador do coeficiente.**
- **Para eliminar termos dos outros coeficientes → faz-se *s* tender à raiz do denominador do termo desejado → pólo da função.**
  - **Ex.:**

$$F(s)=\frac{96s^2+1632s+5760}{s^3+14s^2+48s}$$

$$=\frac{96s^2+1632s+5760}{s(s+8)(s+6)}=\frac{K_1}{s}+\frac{K_2}{s+8}+\frac{K_3}{s+6}$$

$$\downarrow$$

$$f(t)=?$$

Exemplo: raízes distintas e reais

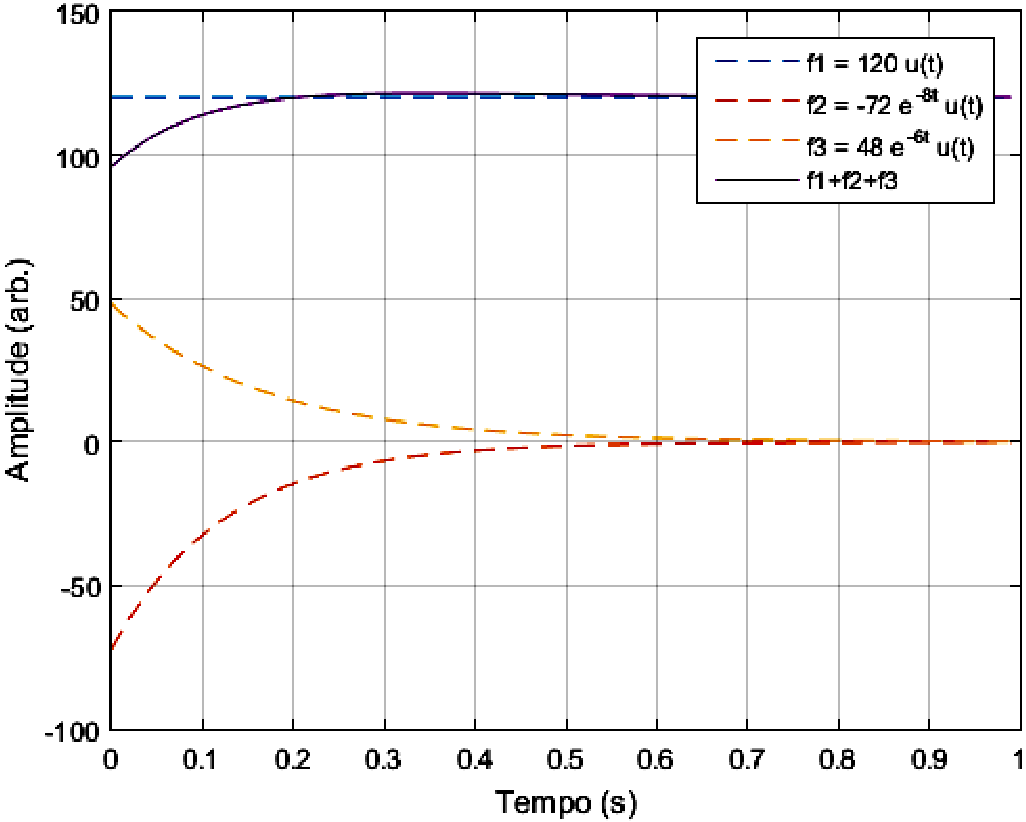
$$K_1 = 120$$

$$K_2 = -72$$

$$K_3 = 48$$

$$f(t) = \left(120 - 72\,e^{-8t} + 48\,e^{-6t}\right)u(t)$$

Cada raíz real distinta gera uma exponencial amortecida.



Exemplo: raízes distintas e complexas

- **Ex.:**

$$F(s)=\frac{100(s+3)}{(s+6)(s^2+6s+25)}$$

$$=\frac{100(s+3)}{(s+6)(s+3-j4)(s+3+j4)}=\frac{K_1}{s+6}+\frac{K_2}{s+3-j4}+\frac{K_3}{s+3+j4}$$

1 raiz distinta e real

1 par de raízes distintas e complexas!

$$f(t)=?$$

Exemplo: raízes distintas e complexas

- **Ex.:**

SEMPRE serão complexos conjugados

$$K_1 = -12$$

$$K_2 = \frac{j400}{-32+j24} = 10\,e^{-j53,13^o}$$

$$K_3 = K_2^* = \frac{-j\,400}{-32-j\,24} = 10\,e^{j\,53,13^o}$$

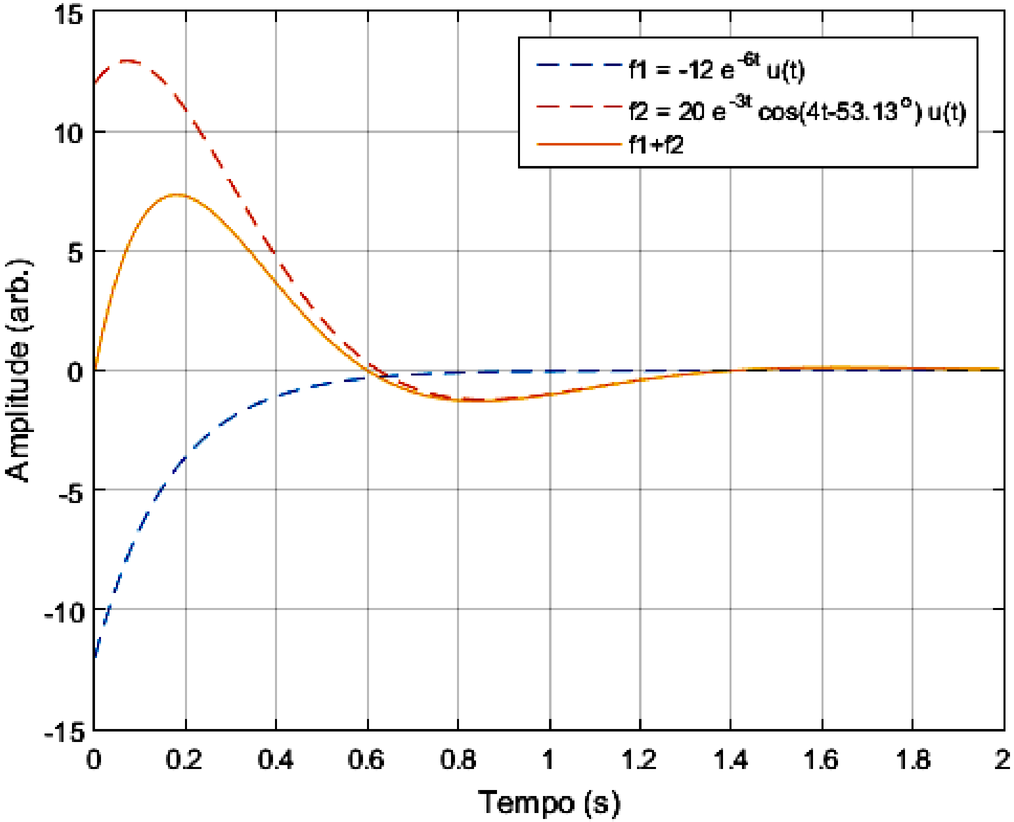
$$F(s) = \frac{100\,(s+3)}{(s+6)(s+3-j4)(s+3+j4)} = -\frac{12}{s+6} + \frac{10\,e^{-j53,13^o}}{s+3-j4} + \frac{10\,e^{j\,53,13^o}}{s+3+j4}$$

$$f(t) = \left\{-12\,e^{-6t} + 10\,e^{-j\,53,13^o}\,e^{-(3-j\,4)t} + 10\,e^{j\,53,13^o}\,e^{-(3+j\,4)t}\right\}u(t)$$

$$\boxed{f(t) = \left[-12\,e^{-6t} + 20\,e^{-3t}\cos(4\,t - 53,13^o)\right]u(t)}$$

Exemplo: raízes distintas e complexas

$$f(t)=\left[-12\,e^{-6t}+20\,e^{-3t}\cos\left(4t-53{,}13^{o}\right)\right]u(t)$$



Novo par de transformadas

- **Para cada par de raízes distintas e complexas:**

$$F(S)=\frac{\cdots}{\cdots(s+\alpha-j\beta)(s+\alpha+j\beta)}=\cdots+\boxed{\frac{K_x}{s+\alpha-j\beta}+\frac{K_x^*}{s+\alpha+j\beta}}$$

onde $K_x=|K_x|e^{j\theta}$

$K_x^*=|K_x|e^{-j\theta}$

IMPORTANTE: notar que Kx é o coeficiente correspondente à parte imaginária NEGATIVA!

$$\boxed{L^{-1}\left\{\frac{K_x}{s+\alpha-j\beta}+\frac{K_x^*}{s+\alpha+j\beta}\right\}\overset{L}{\Leftrightarrow}2|K_x|e^{-\alpha t}\cos(\beta t+\theta)}$$

Cada par de raízes complexas distintas gera uma cossenoide amortecida.

Exemplo: raízes repetidas e reais

- **Isolar o coeficiente desejado:**
  - **Multiplica-se ambos os lados pelo denominador do coeficiente.**
  - **Diferencia-se *m*-*k* vezes, onde *m* é a multiplicidade da raiz e *k* é a ordem do denominador associado ao termo desejado.**
  - **Faz-se *s* tender à raiz do denominador do termo desejado**
- **Eliminar termos dos outros coeficientes → faz-se s = raiz do termo desejado.**
  - **Ex.:**

$$F(S)=\frac{100(s+25)}{s(s+5)^3}=\frac{K_1}{s}+\frac{K_2}{(s+5)^3}+\frac{K_3}{(s+5)^2}+\frac{K_4}{(s+5)}$$

$$\downarrow$$

$$f(t)=?$$

Exemplo: raízes repetidas e reais

$$F(S)=\frac{K_1}{s}+\frac{K_2}{(s+5)^3}+\frac{K_3}{(s+5)^2}+\frac{K_4}{(s+5)} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} K_1=20 \\ K_2=-400 \end{array}}$$

Tentando isolar K3: multiplicar por (s+5)²:

$$(s+5)^2\cdot\frac{100(s+25)}{s(s+5)^3}=(s+5)^2\cdot\frac{K_1}{s}+(s+5)^2\cdot\frac{K_2}{(s+5)^3}+(s+5)^2\cdot\frac{K_3}{(s+5)^2}+(s+5)^2\cdot\frac{K_4}{(s+5)}$$

$$\frac{100(s+25)}{s(s+5)}=(s+5)^2\cdot\frac{K_1}{s}+\frac{K_2}{(s+5)}+K_3+(s+5)\cdot K_4$$

Eliminar os outros termos → fazer s = -5:

$$\cancelto{\infty}{\left[\frac{100(s+25)}{s(s+5)}\right]_{s=-5}}=(s+5)^2\cdot\frac{K_1}{s}+\cancelto{\infty}{\left[\frac{K_2}{(s+5)}\right]_{s=-5}}+K_3+(s+5)\cdot K_4$$

NÃO ADIANTA → gera termos infinitos!

Exemplo: raízes repetidas e reais

Solução → multiplicar por $(s+5)^3$, DIFERENCIAR 1 vez e fazer s → -5.

$$F(S)=\frac{100(s+25)}{s(s+5)^3}=\frac{K_1}{s}+\frac{K_2}{(s+5)^3}+\frac{K_3}{(s+5)^2}+\frac{K_4}{(s+5)}$$

Multiplicar por $(s+5)^3$ →

$$\frac{100(s+25)}{s}=(s+5)^3\cdot\frac{K_1}{s}+K_2+(s+5)\cdot K_3+(s+5)^2\cdot K_4$$

Diferenciar 1 vez em relação a *s*:

$$\frac{100s-100(s+25)}{s^2}=3(s+5)^2\cdot\frac{K_1}{s}-(s+5)^3\cdot\frac{K_1}{s^2}+0+K_3+2(s+5)K_4$$

$$\frac{-2500}{s^2}=3(s+5)^2\cdot\frac{K_1}{s}-(s+5)^3\cdot\frac{K_1}{s^2}+K_3+2(s+5)K_4$$

Eliminando os outros termos: s → -5

$$\frac{-2500}{(-5)^2}=3(\cancel{-5+5})^2\cdot\frac{K_1}{-5}-(\cancel{-5+5})^3\cdot\frac{K_1}{(-5)^2}+K_3+2(\cancel{-5+5})K_4 \longrightarrow \boxed{K_3=-100}$$

Exemplo: raízes repetidas e reais

Isolando K_4:

$$F(S)=\frac{100(s+25)}{s(s+5)^3}=\frac{K_1}{s}+\frac{K_2}{(s+5)^3}+\frac{K_3}{(s+5)^2}+\frac{K_4}{(s+5)}$$

Multiplicar por $(s+5)^3$:

$$\frac{100(s+25)}{s}=(s+5)^3\cdot\frac{K_1}{s}+K_2+(s+5)\cdot K_3+(s+5)^2\cdot K_4$$

Diferenciar 2 vezes em relação a *s*:

1ª derivada → $$\frac{-2500}{s^2}=3(s+5)^2\cdot\frac{K_1}{s}-(s+5)^3\cdot\frac{K_1}{s^2}+K_3+2(s+5)K_4$$

2ª derivada → $$\frac{5000}{s^3}=6(s+5)\cdot\frac{K_1}{s}-3(s+5)^2\cdot\frac{K_1}{s^2}-3(s+5)^2\cdot\frac{K_1}{s^2}+2(s+5)^3\cdot\frac{K_1}{s^3}+2K_4$$

Eliminando os outros termos: s = -5

$$\frac{5000}{-5^3}=2K_4 \longrightarrow \boxed{K_4=-20}$$

Exemplo: raízes repetidas e reais

Retornando à equação original:

$$F(S)=\frac{100(s+25)}{s(s+5)^3}$$

$$=\frac{20}{s}-\frac{400}{(s+5)^3}-\frac{100}{(s+5)^2}-\frac{20}{(s+5)}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{K}{(s+a)^r}\right\}=\frac{K}{(r-1)!}t^{r-1}\mathrm{e}^{-at}u(t)$$

Cada termo da raiz múltipla gera um polinômio vezes uma exponencial

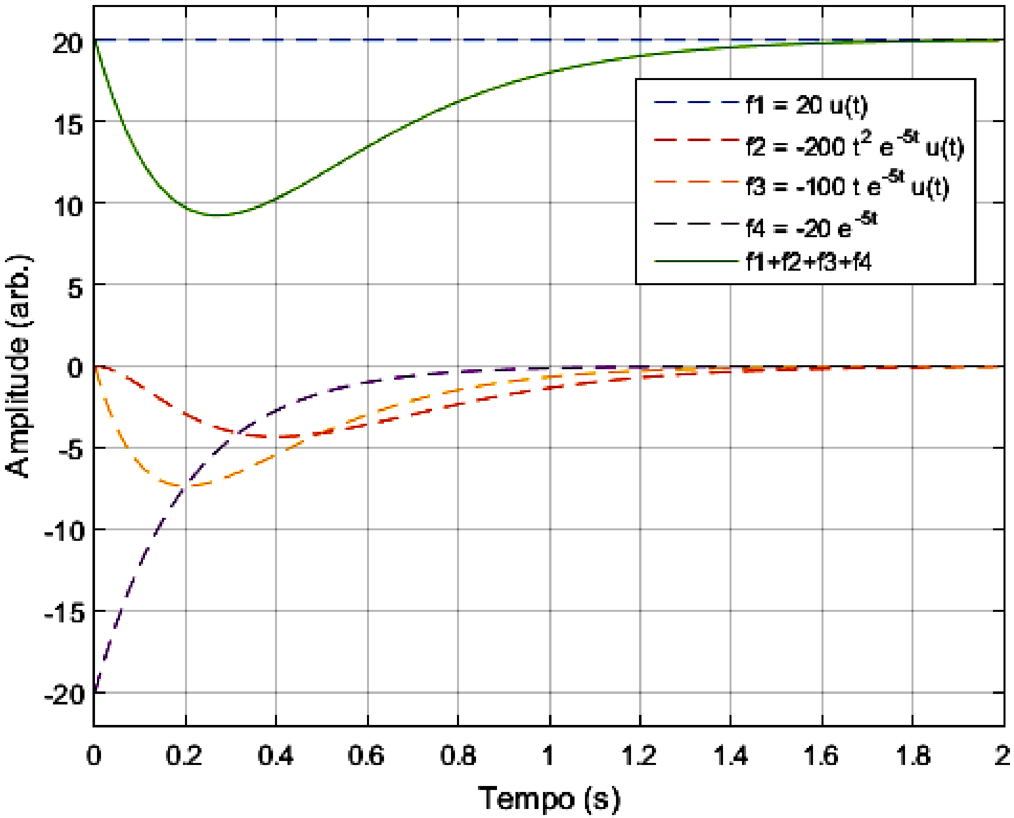
Retornando ao domínio do tempo:

$$f(t)=20u(t)-200t^2\mathrm{e}^{-5t}u(t)-100t\mathrm{e}^{-5t}u(t)-20\mathrm{e}^{-5t}u(t)$$

$$\boxed{f(t)=\left[20-200t^2\mathrm{e}^{-5t}-100t\mathrm{e}^{-5t}-20\mathrm{e}^{-5t}\right]u(t)}$$

Exemplo: raízes repetidas e reais

$$f(t)=\left[20-200\,t^2\,e^{-5t}-100\,t\,e^{-5t}-20\,e^{-5t}\right]u(t)$$



Exemplo: raízes repetidas e complexas

- **MESMA COISA! Exceto que raízes complexas aparecem em pares conjugados.**
- **Isolar o coeficiente desejado:**
  - **Multiplica-se ambos os lados pelo denominador do coeficiente.**
  - **Diferencia-se *m*-*k* vezes, onde *m* é a multiplicidade da raiz e *k* é a ordem do denominador associado ao termo desejado.**
- **Eliminar termos dos outros coeficientes → faz-se s = raiz do termo desejado.**
  - **Ex.:**

$$F(S)=\frac{768}{(s^2+6s+25)^2}=\frac{768}{[(s+3-j4)(s+3+j4)]^2}=\frac{768}{(s+3-j4)^2(s+3+j4)^2}$$

Raízes repetidas e complexas

$$F(S)=\frac{768}{(s+3-j4)^2(s+3+j4)^2} \longrightarrow \begin{array}{l} K_1=12\,e^{-j180^o} \\ K_2=3\,e^{-j90^o} \end{array}$$

$$F(s)=\frac{12\,e^{-j180}}{(s+3-j4)^2}+\frac{12\,e^{j180}}{(s+3+j4)^2}+\frac{3\,e^{-j90}}{(s+3-j4)}+\frac{3\,e^{j90}}{(s+3+j4)}$$

Usando:

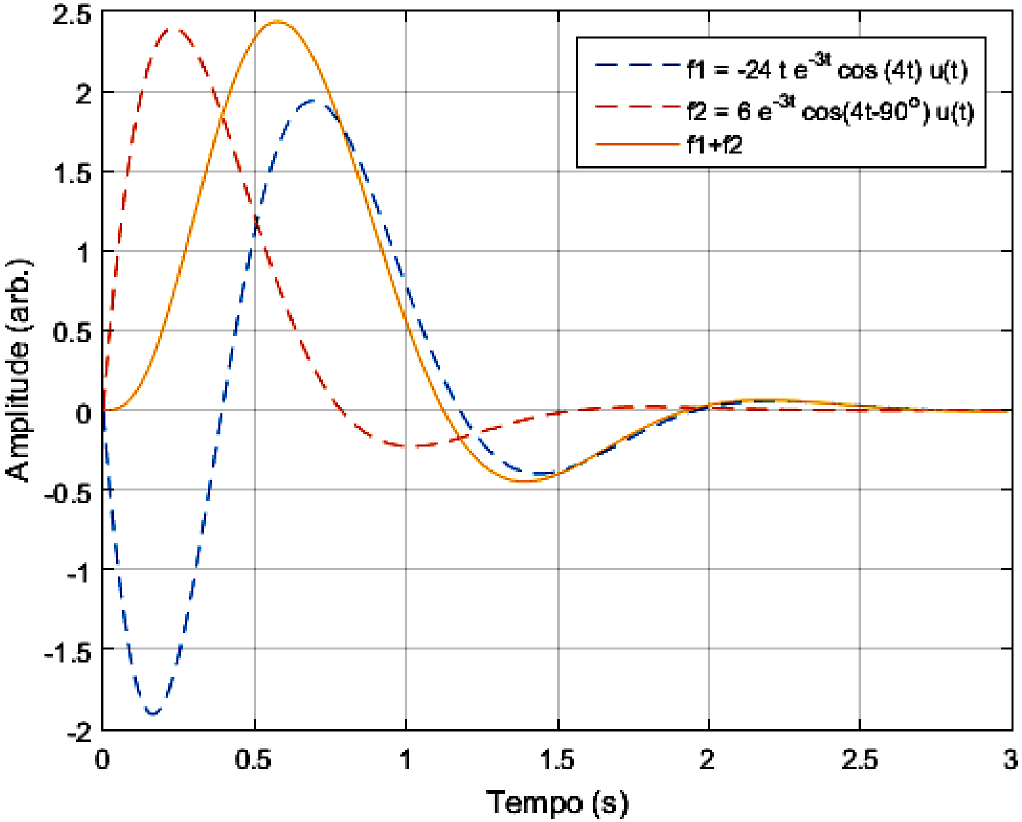
$$\boxed{L^{-1}\left\{\frac{K}{(s+\alpha-j\beta)^r}+\frac{K^*}{(s+\alpha+j\beta)^r}\right\}=\left[\frac{2|K|t^{r-1}}{(r-1)!}e^{-\alpha t}\cos(\beta t+\theta)\right]u(t)}$$

Temos:

$$f(t)=[24\,t\,e^{-3t}\cos(4t-180^o)+6\,e^{-3t}\cos(4t-90^o)]u(t)$$

Raízes repetidas e complexas

$$f(t)=[24\,t\,e^{-3t}\cos(4t-180^{o})+6\,e^{-3t}\cos(4t-90^{o})]\,u(t)$$



Novos pares de transformadas

- **Considerando que na maioria dos problemas de circuitos *r* <= 2:**

Cada polo real distinto Gera uma exponencial decrescente

Cada polo real múltiplo de 2 gera uma exponencial decrescente multiplicada por uma rampa.

Número do par	Natureza das raízes	$F(s)$	$f(t)$
1	Reais e distintas	$\frac{K}{s+a}$	$Ke^{-at}u(t)$
2	Reais e repetidas	$\frac{K}{(s+a)^2}$	$Kte^{-at}u(t)$
3	Complexas e distintas	$\frac{K}{s+\alpha-j\beta}+\frac{K^*}{s+\alpha+j\beta}$	$2\lvert K\rvert e^{-at}\cos(\beta t+\theta)u(t)$
4	Complexas e repetidas	$\frac{K}{(s+\alpha-j\beta)^2}+\frac{K^*}{(s+\alpha+j\beta)^2}$	$2t\lvert K\rvert e^{-at}\cos(\beta t+\theta)u(t)$

Cada polo complexo múltiplo de 2 gera uma cossenoide amortecida multiplicada por uma rampa.

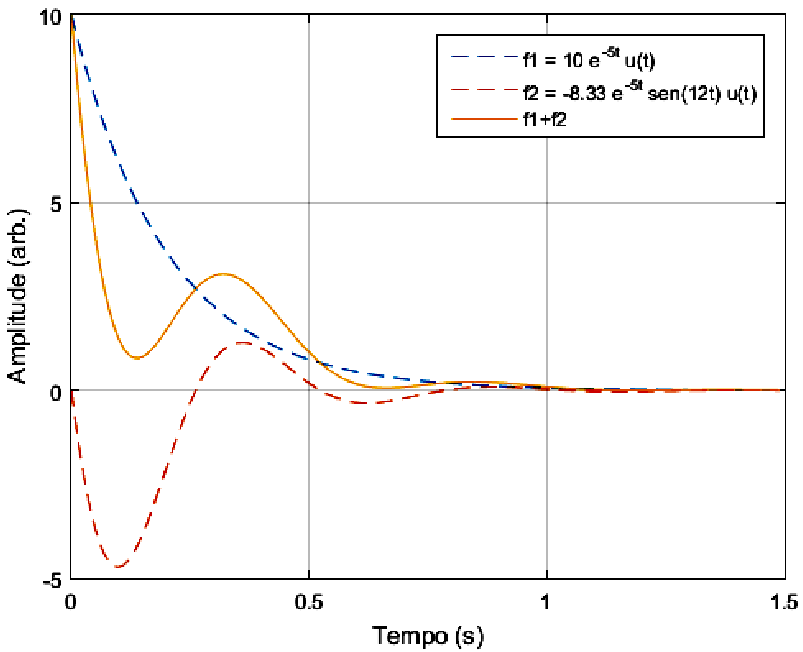
Cada polo complexo gera uma cossenoide amortecida.

Exercício:

- **Determine a função no domínio do tempo correspondente à função em S abaixo:**

$$F(S)=\frac{10(s^2+119)}{(s+5)(s^2+10s+169)}$$

$$f(t)=(10\,e^{-5t}-8{,}33\,e^{-5t}\,sen\,12t)\,u(t)$$



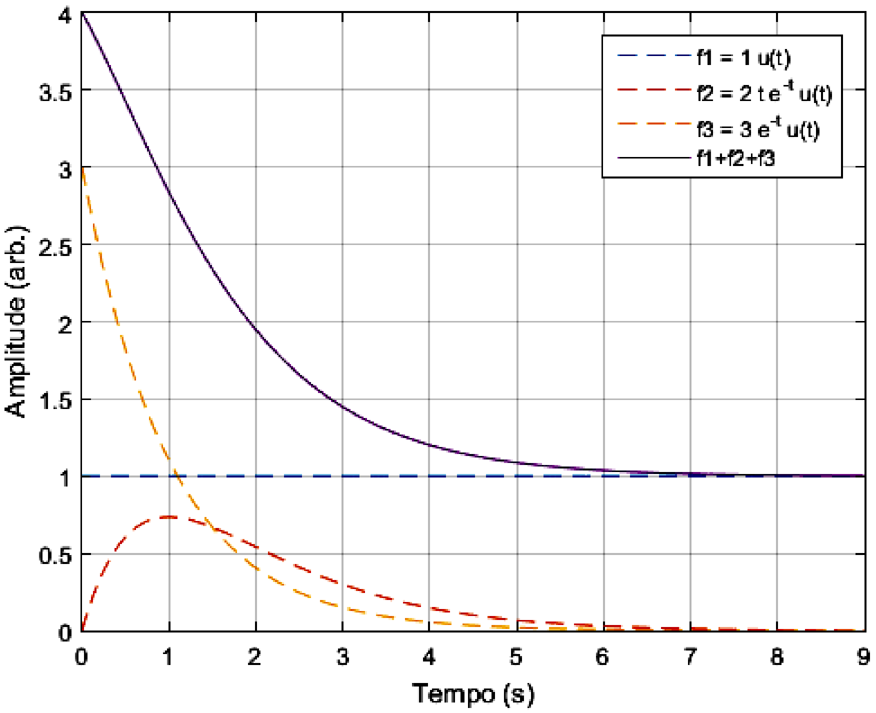
Exercício:

- **Determine a função no domínio do tempo correspondente à função em S abaixo:**

$$F(S)=\frac{4s^2+7s+1}{s(s+1)^2}$$

$$\Downarrow$$

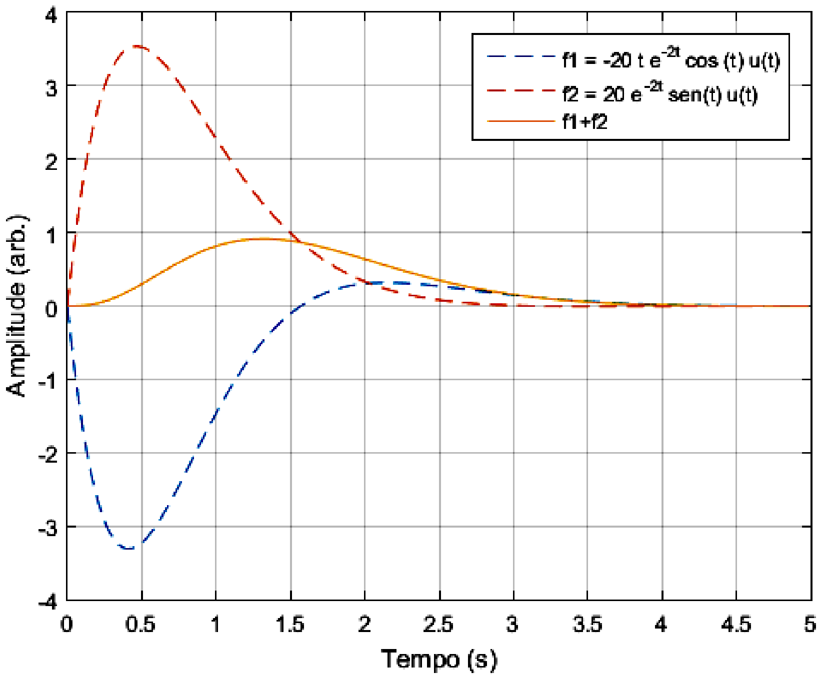
$$f(t)=(1+2t\,e^{-t}+3\,e^{-t})u(t)$$



Exercício

- **Determine a função no domínio do tempo correspondente à função em S abaixo:**

$$F(S)=\frac{40}{(s^2+4s+5)^2} \quad \Rightarrow \quad f(t)=(-20\,t\,e^{-2t}\cos t+20\,e^{-2t}\sin t)\,u(t)$$



Funções racionais impróprias

- **Se a equação de Laplace for uma função racional *imprópria* → não é possível expandir em frações parciais.**
- **Neste caso:**
  - **Expandir na soma de um *polinômio* com uma função racional *própria* → divisão longa.**
  - **Transformar o polinômio utilizando a transformada de função impulso e suas derivadas.**
  - **Transformar a função *própria* por meio de frações parciais.**

Funções racionais impróprias

- **Exemplo:**

$$F(S)=\frac{s^4+13s^3+66s^2+200s+300}{s^2+9s+20}$$ → **m<=n → função racional IMPRÓPRIA.**

Expandindo: $$F(s)=s^2+4s+10+\frac{30s+100}{s^2+9s+20}=s^2+4s+10+\frac{30s+100}{(s+4)(s+5)}$$

$$=s^2+4s+10+\frac{K_1}{(s+4)}+\frac{K_2}{(s+5)}=s^2+4s+10-\frac{20}{(s+4)}+\frac{50}{(s+5)}$$

Utilizando as transformadas do impulso e derivadas: → $\delta^{(n)}(t)\overset{L}{\Leftrightarrow}s^n$ $\quad\delta'(t)\overset{L}{\Leftrightarrow}s$ $\quad K\cdot\delta(t)\overset{L}{\Leftrightarrow}K$

$$f(t)=\frac{d^2}{dt^2}\delta(t)+4\cdot\frac{d}{dt}\delta(t)+10\,\delta(t)-\left(20\,e^{-4t}-50\,e^{-5t}\right)u(t)$$

Exemplo

- **Determine as funções no domínio do tempo correspondentes às funções em S abaixo:**

$$F_1(S)=\frac{5s^2+29s+32}{s^2+6s+8}$$

$$F_2(S)=\frac{2s^3+8s^2+2s-4}{s^2+5s+4}$$

$$f_1(t)=5\delta(t)-\left(3e^{-2t}-2e^{-4t}\right)u(t)$$

$$f_2(t)=2\frac{d}{dt}\delta(t)-2\delta(t)+4e^{-4t}u(t)$$

Polos, zeros e estabilidade

- **Zeros → valores de *s* que anulam a equação de Laplace.**
- **Polos → valores de *s* que levam a equação a infinito.**
- **Expressando o numerador e o denominador na forma fatorada:**

$$F(s)=\frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0} = K \cdot \frac{(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_n)}{(s+p_1)(s+p_1)\cdots(s+p_m)}$$

$$K=\frac{a_n}{b_m}$$

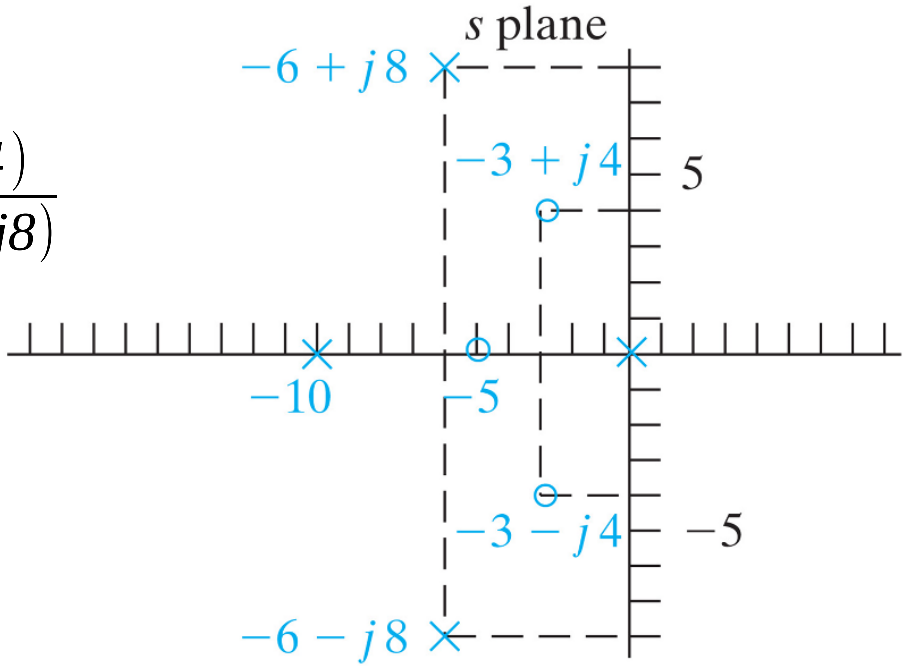
$-z_1, -z_2, \cdots, -z_n$ → **zeros de F(s)**

$-p_1, -p_2, \cdots, -p_n$ → **polos de F(s)**

Plano complexo

- **O plano complexo → representação gráfica dos polos e zeros de uma função.**
  - **Eixo horizontal → parte real.**
  - **Eixo vertical → parte imaginária.**
- **Exemplo:**

$$F(s) = 10 \cdot \frac{(s+5)(s+3-j4)(s+3+j4)}{s(s+10)(s+6-j8)(s+6+j8)}$$



- **Sistema estável → todos os polos no semiplano esquerdo → parte real negativa.**

Teoremas do valor inicial e final

- **Permitem identificar o comportamento de f(t) a partir de F(s).**
- **Úteis para verificar se os cálculos estão corretos.**
- **Teorema do valor inicial:**

$$\lim_{t \to 0^+} f(t) = \lim_{s \to \infty} s \cdot F(s)$$

→ **Restrição: f(t) não contém impulsos.**

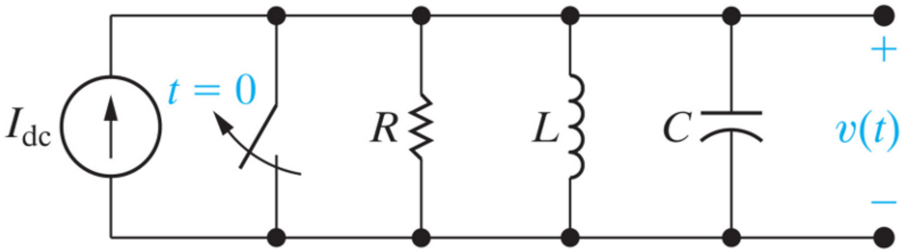
- **Teorema do valor final:**

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot F(s)$$

→ **Restrição: F(s) é estável.**

Exemplo: teoremas do valor final e inicial

- **Considere o exemplo do circuito RLC avaliado anteriormente. A energia armazenada no sistema era inicialmente nula. A equação para V(s) foi determinada como:**



$$V(s)=\frac{I_{DC}/C}{s^2+(1/RC)s+1/LC}$$

Energia inicial é nula → $\lim_{t\to 0^+} v(t)=v(0^+)=0$

$$\lim_{s\to\infty} sV(s)=\lim_{s\to\infty} s\cdot\frac{I_{DC}/C}{s^2+(1/RC)s+1/LC}=\lim_{s\to\infty} s\cdot\frac{I_{DC}/C}{s^2[1+(1/RCs)+1/LCs^2]}$$

$$=\lim_{s\to\infty}\frac{I_{DC}/C}{s[1+(1/RCs)+1/LCs^2]}=0$$

$$\lim_{t\to 0^+} v(t)=\lim_{s\to\infty} s\cdot V(s)$$

Exemplo

- **Continuando...**

A tensão final é 0: indutor em curto. → $\lim_{t \to \infty} v(t) = v(\infty) = 0$

$$\lim_{s \to 0} sV(s) = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{I_{DC}/C}{s^2 + (1/RC)s + 1/LC} = 0$$

→ $\lim_{t \to \infty} v(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot V(s)$

Exemplos

- **Verifique os teoremas do valor inicial e final, considerando os seguintes pares de transformadas resolvidas anteriormente.**

$$F(s)=\frac{96(s+5)(s+12)}{s(s+8)(s+6)} \overset{L}{\Leftrightarrow} f(t)=\left(120-72\,\mathrm{e}^{-8\mathrm{t}}+48\,\mathrm{e}^{-6\mathrm{t}}\right)u(t)$$

$$F(S)=\frac{100(s+25)}{s(s+5)^3} \overset{L}{\Leftrightarrow} f(t)=\left[20-200\,t^2\mathrm{e}^{-5t}-100\,t\,\mathrm{e}^{-5t}-20\,\mathrm{e}^{-5t}\right]u(t)$$

$$F(S)=\frac{768}{\left(s^2+6\mathrm{s}+25\right)^2} \overset{L}{\Leftrightarrow} f(t)=\left[-24\,t\,\mathrm{e}^{-3\mathrm{t}}\cos(4\mathrm{t})+6\,\mathrm{e}^{-3\mathrm{t}}\cos\left(4\mathrm{t}-90^o\right)\right]u(t)$$