Capítulo 18

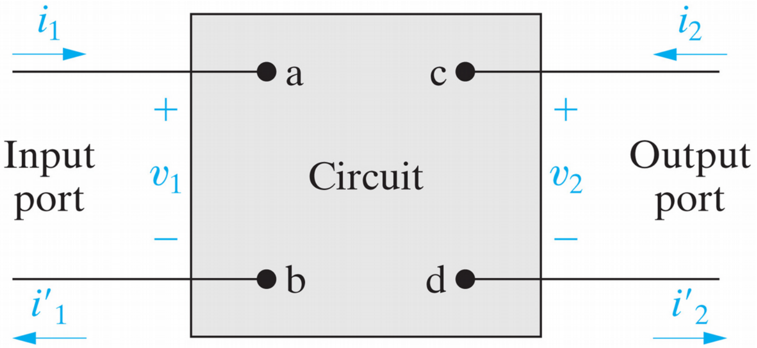
Quadripolos

Sumário

- Introdução e motivação.
- Equações terminais.
- Determinação dos parâmetros do quadripolo.
- Relações entre os parâmetros.
- Quadripolos recíprocos e simétricos.
- Quadripolos com cargas.
- Interconexões de quadripolos.

Introdução e motivação

- **Quadripolos → "visão" de sistemas a quatro terminais → duas portas.**



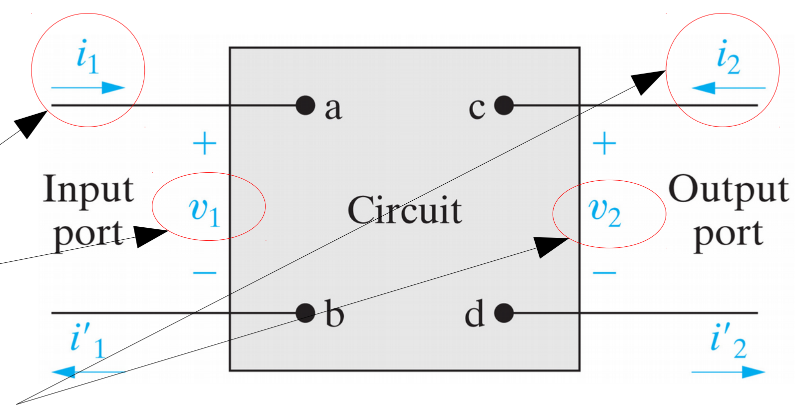
- **Restrições:**
  - **Não pode haver energia armazenada no circuito.**
  - **Não podem haver fontes independentes no circuito.**
  - **A corrente que entra em um terminal deve sair pelo seu par.**

$$i_1 = i_1' \qquad i_2 = i_2'$$

  - **Não podem ocorrer conexões externas entre as portas.**

Introdução e motivação

- **Vantagens do modelo por quadripolo → modelagem do sistema por variáveis externas:**
  - **Somente as variáveis externas são de interesse.**
  - **Possibilidade de uso de modelos “caixa preta”.**



Notar polaridades de referência para tensões e correntes.

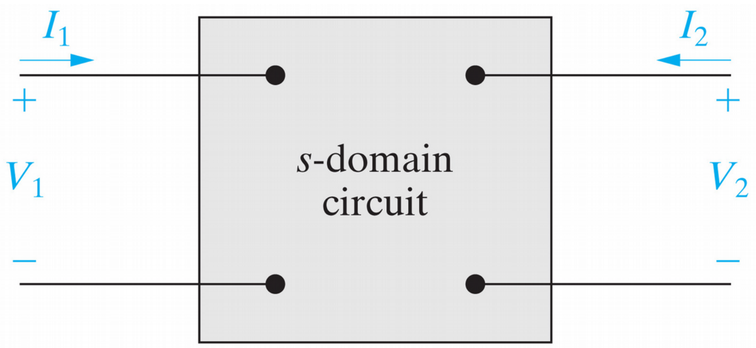
Equações terminais

- **Objetivo:**
  - Obter relações de tensões e/ou correntes em uma das portas em função de tensões e/ou correntes na outra porta.
- **Para generalizar, trabalha-se no domínio da frequência (Laplace).**
  - Permite a análise de qualquer circuito sob qualquer fonte de estímulo.
  - Casos particulares → circuitos puramente resistivos e análises em regime permanente senoidal.
- **Das 4 variáveis externas:**
  - Duas são escolhidas como independentes (arbitrariamente).
  - As outras duas tornam-se incógnitas.
  - Descrições por sistemas de duas equações.

Equações terminais

- **Por exemplo:**
  - **Conhecendo-se V1, V2 e o circuito interno, determina-se I1 e I2.**

$$\begin{cases} I_1 = F_1(V_1, V_2) \\ I_2 = F_2(V_1, V_2) \end{cases}$$



- **Há 6 maneiras diferentes de combinar as 4 variáveis:**

Equações terminais

$$\begin{cases} V_1 = z_{11} I_1 + z_{12} I_2 \\ V_2 = z_{21} I_1 + z_{22} I_2 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Tensões em funções das correntes.

z_{ik} → Impedâncias do quadripolo.

$$\begin{cases} I_1 = y_{11} V_1 + y_{12} V_2 \\ I_2 = y_{21} V_1 + y_{22} V_2 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Correntes em funções das tensões.

y_{ik} → Admitâncias do quadripolo.

$$\begin{cases} V_1 = a_{11} V_2 - a_{12} I_2 \\ I_1 = a_{21} V_2 - a_{22} I_2 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & -a_{12} \\ a_{21} & -a_{22} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Porta 1 em funções da porta 2.

a_{ik} → Transmitância saída → entrada.

$$\begin{cases} V_2 = b_{11} V_1 - b_{12} I_1 \\ I_2 = b_{21} V_1 - b_{22} I_1 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & -b_{12} \\ b_{21} & -b_{22} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix}$$

Porta 2 em funções da porta 1.

b_{ik} → Transmitância entrada → saída.

$$\begin{cases} V_1 = h_{11} I_1 + h_{12} V_2 \\ I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} V_2 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Híbridos *h*

h_{ik} → Parâmetros híbridos.

$$\begin{cases} I_1 = g_{11} V_1 + g_{12} I_2 \\ V_2 = g_{21} V_1 + g_{22} I_2 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Híbridos *g*

g_{ik} → Parâmetros híbridos.

Determinação dos parâmetros do quadripolo

- **Os parâmetros podem ser determinados por:**
  - **Análise → quando se conhece a estrutura interna do quadripolo.**
  - **Medições → análise do tipo “caixa preta”.**
  - **Em ambos os casos → podem ser determinados forçando-se condições conhecidas em uma das portas e analisando-se ou medindo-se na outra.**
- **Exemplo: considerando as equações de impedâncias.**

$$\begin{cases} V_1 = z_{11} I_1 + z_{12} I_2 \\ V_2 = z_{21} I_1 + z_{22} I_2 \end{cases} \longrightarrow z_{11} = \left[\frac{V_1}{I_1} \right]_{I_2=0} \longrightarrow$$

Abre-se a porta 2 (I2=0), alimenta-se a porta 1 com V1 e mede-se I1 (ou ao contrário).

$$z_{12} = \left[\frac{V_1}{I_2} \right]_{I_1=0} \longrightarrow$$

Abre-se a porta 1 (I1=0), alimenta-se a porta 2 com I2 e mede-se V1.

Determinação dos parâmetros do quadripolo

- **Continuando...**

$$\begin{cases} V_1 = z_{11} I_1 + z_{12} I_2 \\ V_2 = z_{21} I_1 + z_{22} I_2 \end{cases} \longrightarrow z_{21} = \left[\frac{V_2}{I_1}\right]_{I_2=0} \longrightarrow$$

Abre-se a porta 2 (I2=0), alimenta-se a porta 1 com I1 e mede-se V2.

$$z_{22} = \left[\frac{V_2}{I_2}\right]_{I_1=0} \longrightarrow$$

Abre-se a porta 1 (I1=0), alimenta-se a porta 2 com V2 e mede-se I2 (ou ao contrário).

- **Portanto:**

z_{11} → Impedância da entrada quando a saída está em aberto.

z_{22} → Impedância da saída quando a entrada está em aberto.

z_{12} → Impedância de transferência entrada → saída.

z_{21} → Impedância de transferência saída → entrada.

Exemplo

- **Utilizando o mesmo raciocínio, mostre como determinar os outros parâmetros de um quadripolo.**

$$\begin{cases} I_1 = y_{11} V_1 + y_{12} V_2 \\ I_2 = y_{21} V_1 + y_{22} V_2 \end{cases} \longrightarrow$$

$$y_{11} = \left[\frac{I_1}{V_1}\right]_{V_2=0}$$ Curto na porta 2.

$$y_{12} = \left[\frac{I_1}{V_2}\right]_{V_1=0}$$ Curto na porta 1.

$$y_{21} = \left[\frac{I_2}{V_1}\right]_{V_2=0}$$ Curto na porta 2.

$$y_{22} = \left[\frac{I_2}{V_2}\right]_{V_1=0}$$ Curto na porta 1.

$$\begin{cases} V_1 = a_{11} V_2 - a_{12} I_2 \\ I_1 = a_{21} V_2 - a_{22} I_2 \end{cases} \longrightarrow$$

$$a_{11} = \left[\frac{V_1}{V_2}\right]_{I_2=0}$$ Porta 2 aberta.

$$a_{12} = \left[-\frac{V_1}{I_2}\right]_{V_2=0}$$ Curto na porta 2.

$$a_{21} = \left[\frac{I_1}{V_2}\right]_{I_2=0}$$ Porta 2 aberta.

$$a_{22} = \left[-\frac{I_1}{I_2}\right]_{V_2=0}$$ Curto na porta 2.

$$\begin{cases} V_2 = b_{11} V_1 - b_{12} I_1 \\ I_2 = b_{21} V_1 - b_{22} I_1 \end{cases} \longrightarrow$$

$$b_{11} = \left[\frac{V_2}{V_1}\right]_{I_1=0}$$ Porta 1 aberta.

$$b_{12} = \left[-\frac{V_2}{I_1}\right]_{V_1=0}$$ Curto na porta 1.

$$b_{21} = \left[\frac{I_2}{V_1}\right]_{I_1=0}$$ Porta 1 aberta.

$$b_{22} = \left[-\frac{I_2}{I_1}\right]_{V_1=0}$$ Curto na porta 1.

$$\begin{cases} V_1 = h_{11} I_1 + h_{12} V_2 \\ I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} V_2 \end{cases} \longrightarrow$$

$$h_{11} = \left[\frac{V_1}{I_1}\right]_{V_2=0}$$ Curto na porta 2.

$$h_{12} = \left[\frac{V_1}{V_2}\right]_{I_1=0}$$ Porta 1 aberta.

$$h_{21} = \left[\frac{I_2}{I_1}\right]_{V_2=0}$$ Curto na porta 2.

$$h_{22} = \left[\frac{I_2}{V_2}\right]_{I_1=0}$$ Porta 1 aberta.

$$\begin{cases} I_1 = g_{11} V_1 + g_{12} I_2 \\ V_2 = g_{21} V_1 + g_{22} I_2 \end{cases} \longrightarrow$$

$$g_{11} = \left[\frac{I_1}{V_1}\right]_{I_2=0}$$ Porta 2 aberta.

$$g_{12} = \left[\frac{I_1}{I_2}\right]_{V_1=0}$$ Curto na porta 1.

$$g_{21} = \left[\frac{V_2}{V_1}\right]_{I_2=0}$$ Porta 2 aberta.

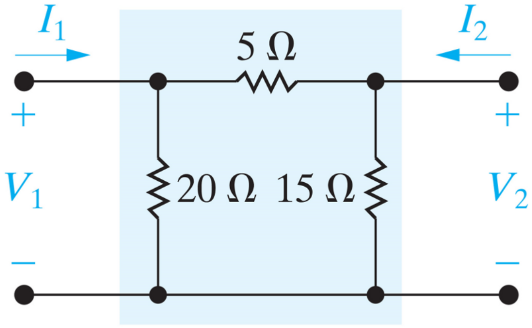
$$g_{22} = \left[\frac{V_2}{I_2}\right]_{V_1=0}$$ Curto na porta 1.

Dimensões

- **Os parâmetros podem ser:**
  - **Impedâncias → razões entre tensões e correntes → ohms (Ω).**
  - **Admitâncias → razões entre correntes e tensões → Siemens (S).**
  - **Adimensionais → razões entre mesmas grandezas.**

Exemplo

- **Determine os parâmetros "z" do quadripolo formado por cargas resistivas mostrado abaixo.**



Exemplo

- **Considere que as seguintes medições foram realizadas em um circuito desconhecido operando em regime permanente senoidal.**
  - **Com a porta 2 em aberto e** $v_1(t)=150\cos(4000t)\,V$

    $i_1(t)=25\cos(4000t-45^o)\,A$

    $v_2(t)=100\cos(4000t+15^o)\,V$
  - **Com a porta 2 em curto-circuito e** $v_1(t)=30\cos(4000t)\,V$

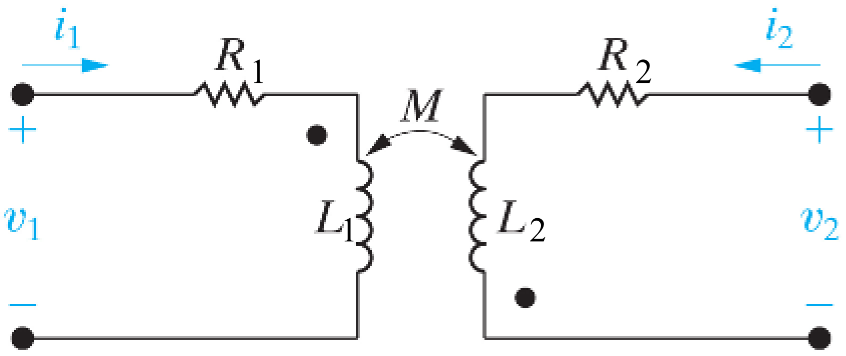
    $i_1(t)=1{,}5\cos(4000t+30^o)\,A$

    $i_2(t)=0{,}25\cos(4000t+150^o)\,A$

- **Determine os parâmetros "*a*" deste circuito.**

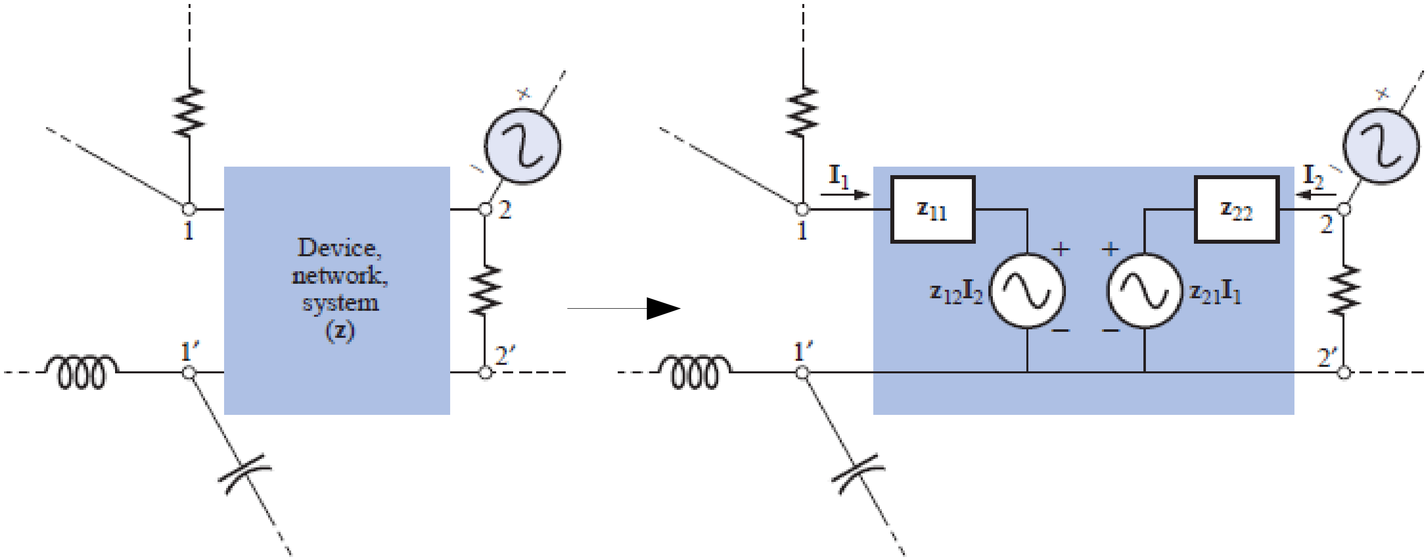
Exemplo

- **Determine o modelo *h* para o circuito acoplado magneticamente mostrado na figura abaixo.**



Circuitos equivalentes

- **Quadripolos permitem representar sistemas complexos por meio de circuitos equivalentes.**



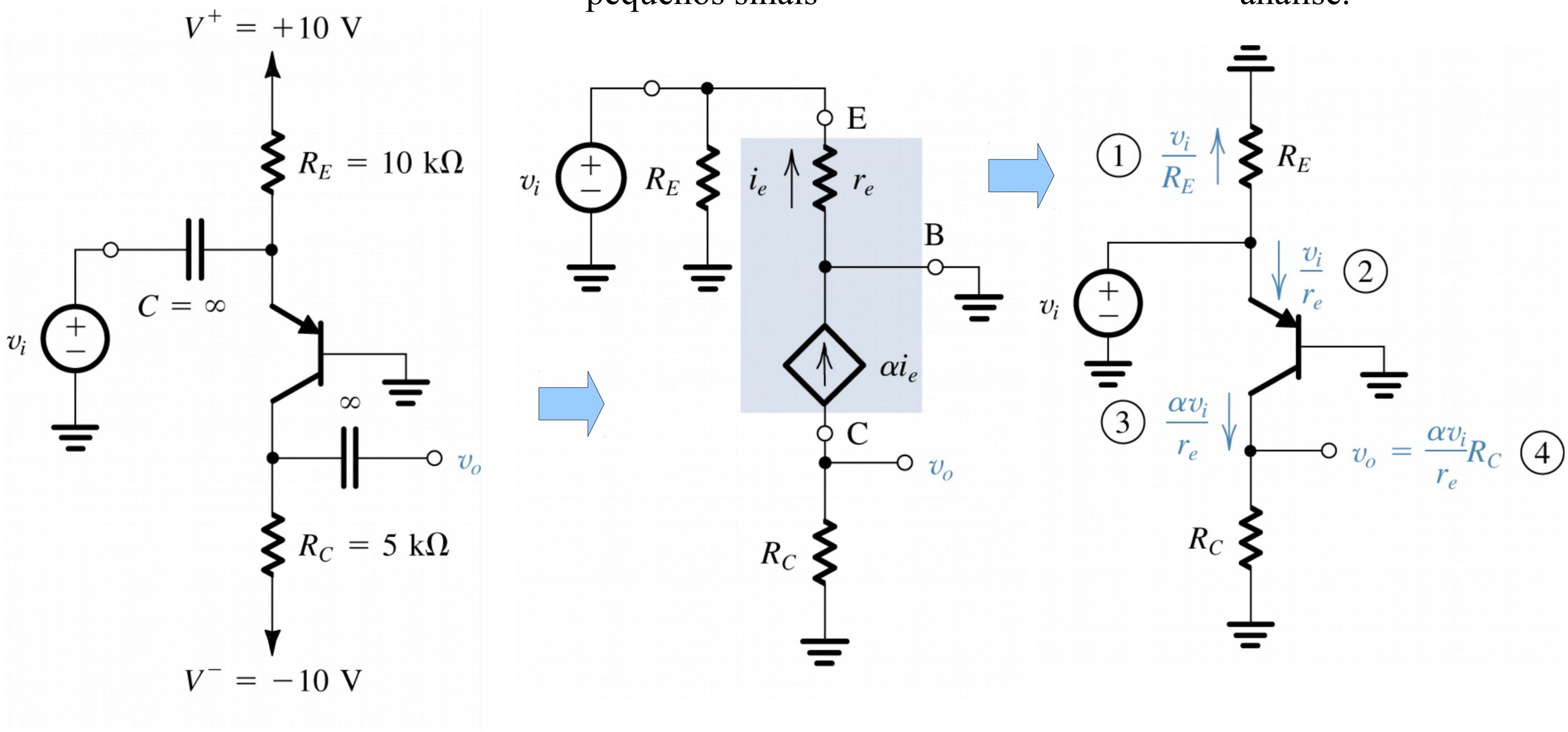
- **VANTAGEM? → Todos os métodos de análise se aplicam (nós, malhas, superposição, etc.).**

Exemplo: modelo de um transistor NPN para pequenos sinais (região linear)

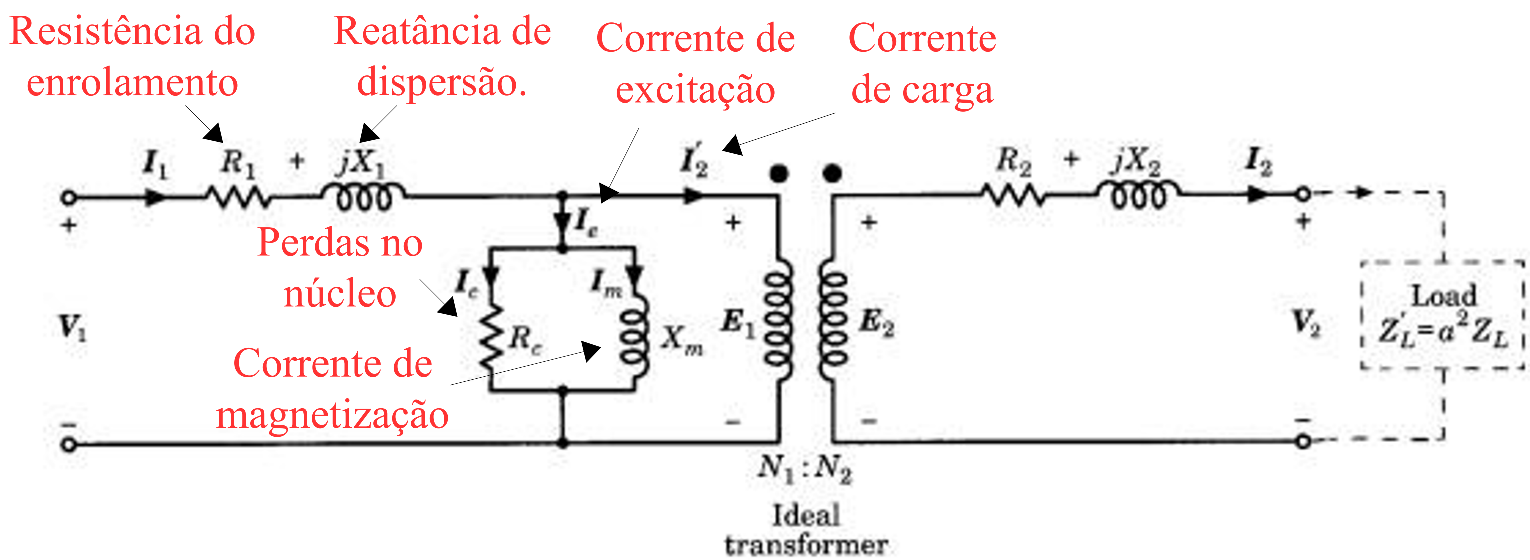
Circuito original

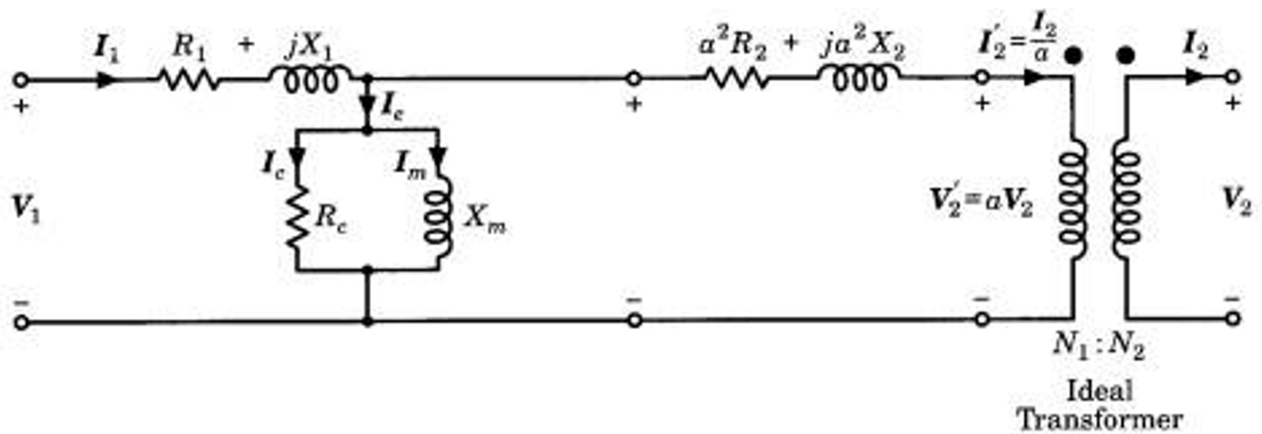
Modelo para pequenos sinais

Resultado da análise.



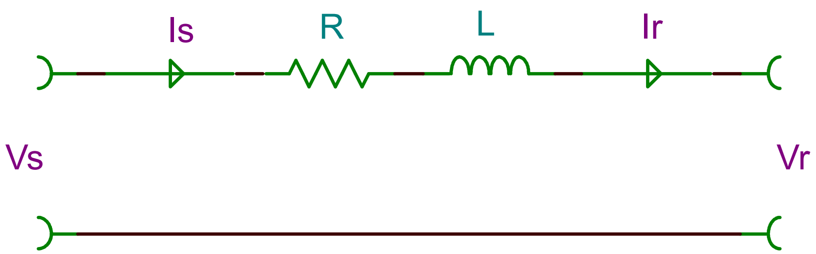
Exemplo: modelo de quadripolo T para um transformador não-ideal





Usado em sistemas "por unidade" (p. u.)

Exemplo: modelo de quadripolo para linhas de transmissão curtas (< 80 km)



Considera somente a impedância série

Admitância paralela é ignorada

$$z_l = R + j\omega L \quad (\Omega / m) \qquad \longrightarrow \qquad Z_T = z_l \cdot l \quad (\Omega)$$

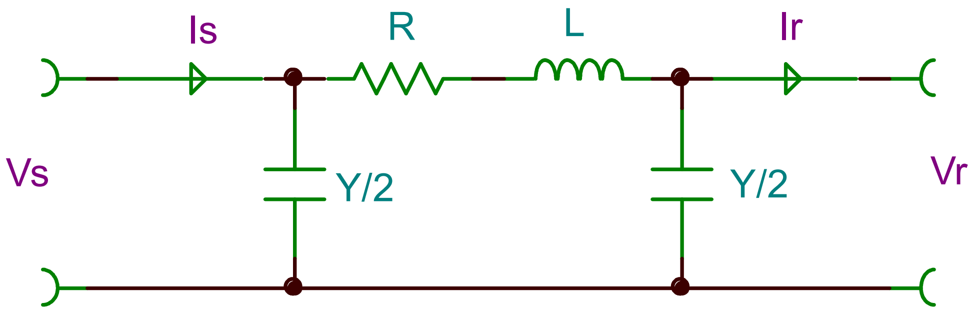
$$y_l = G + j\omega C \quad (S / m) \qquad \qquad Y_T = y_l \cdot l \quad (S)$$

Aplicando a LTK:

$$\begin{Bmatrix} Vs = Vr + Z_T \cdot Ir \\ Is = Ir \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Vs = a_{11} Vr - a_{12} Ir \\ Is = a_{21} Vr - a_{22} Ir \end{Bmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} a_{11} = 1 & a_{12} = -Z_T \\ a_{21} = 0 & a_{22} = -1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} Vs \\ Is \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Z_T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} Vr \\ Ir \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} Vr \\ Ir \end{bmatrix}$$

Exemplo: modelo de quadripolo para linhas médias (80 a 250 km)

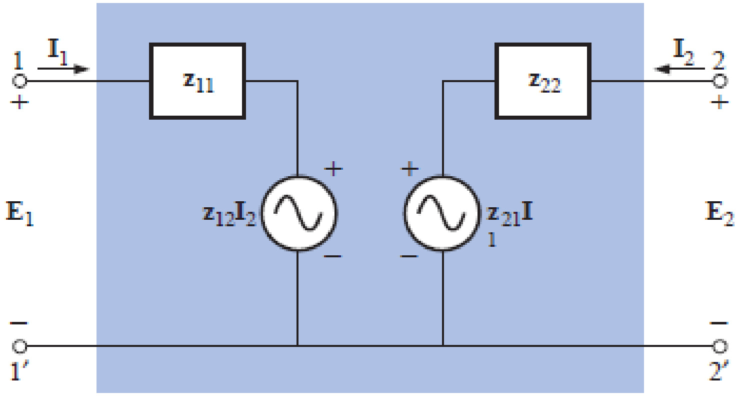


$$\begin{bmatrix} Vs \\ Is \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + Y_T Z_T/2 & Z_T \\ Y_T\left(1 + Y_T Z_T/4\right) & 1 + Y_T Z_T/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Vr \\ Ir \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Vr \\ Ir \end{bmatrix}$$

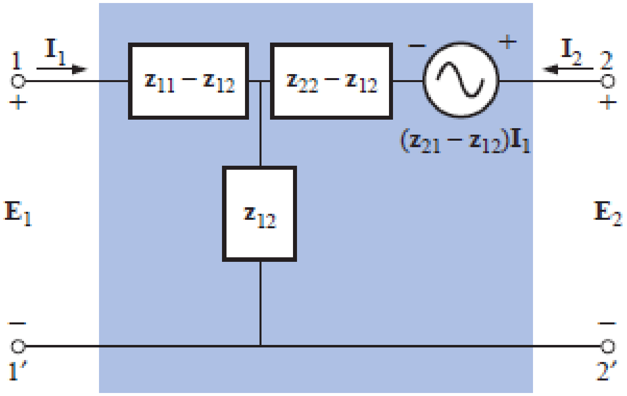
Circuitos equivalentes

- **Circuitos equivalentes *z***

$$\begin{Bmatrix} V_1 = z_{11} I_1 + z_{12} I_2 \\ V_2 = z_{21} I_1 + z_{22} I_2 \end{Bmatrix} \longrightarrow \begin{Bmatrix} V_1 - z_{11} I_1 - z_{12} I_2 = 0 \\ V_2 - z_{21} I_1 - z_{22} I_2 = 0 \end{Bmatrix}$$



ou

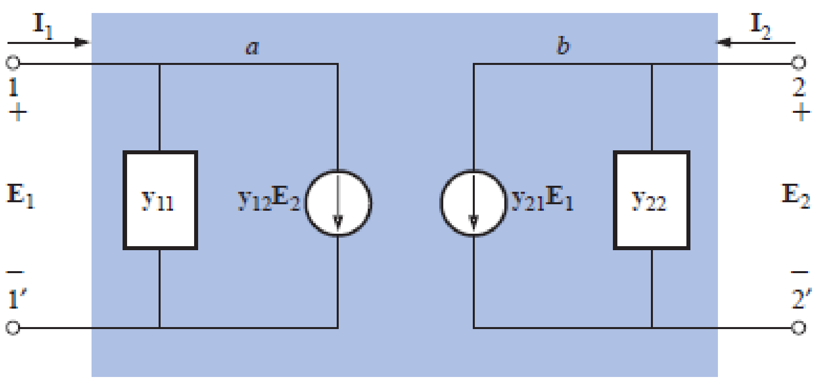


Circuitos equivalentes

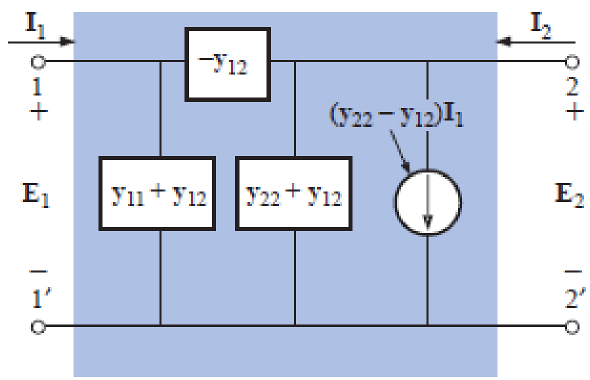
- **Circuitos equivalentes *y***

$$\begin{cases} I_1 = y_{11} V_1 + y_{12} V_2 \\ I_2 = y_{21} V_1 + y_{22} V_2 \end{cases}$$

$$\downarrow$$



ou

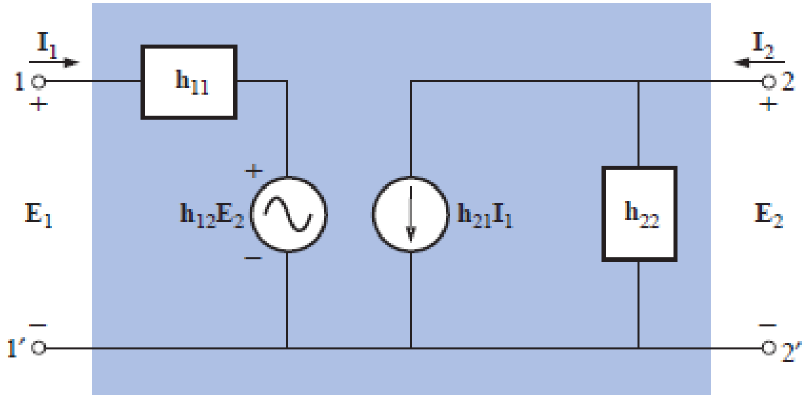


Circuitos equivalentes

- **Circuitos equivalentes *h***

$$\begin{Bmatrix} V_1 = h_{11} I_1 + h_{12} V_2 \\ I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} V_2 \end{Bmatrix}$$

$$\downarrow$$



Relações entre os parâmetros do quadripolo

- **Seis conjuntos, quatro variáveis → os parâmetros não são independentes.**
  - **Conhecendo um conjunto de parâmetros pode-se determinar todos os outros.**
- **Exemplo: relação entre parâmetros *z* e *y*:**

$$\begin{cases} I_1 = y_{11} V_1 + y_{12} V_2 \\ I_2 = y_{21} V_1 + y_{22} V_2 \end{cases} \longrightarrow \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \longrightarrow \vec{I} = Y \cdot \vec{V}$$

$$\vec{V} = Y^{-1} \cdot \vec{I}$$

Relações entre os parâmetros do quadripolo

- **Continuando...**

$$\vec{V} = Y^{-1} \cdot \vec{I}$$

Aplicando-se o método de Cramer:

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} I_1 & y_{12} \\ I_2 & y_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix}} = \frac{y_{22}}{\Delta y^*} I_1 - \frac{y_{12}}{\Delta y} I_2 \qquad V_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_{11} & I_1 \\ y_{21} & I_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix}} = -\frac{y_{21}}{\Delta y} I_1 + \frac{y_{11}}{\Delta y} I_2$$

$$* \; \Delta y = y_{11} y_{22} - y_{12} y_{21}$$

$$V_1 = \frac{y_{22}}{\Delta y} I_1 - \frac{y_{12}}{\Delta y} I_2 \qquad V_2 = -\frac{y_{21}}{\Delta y} I_1 + \frac{y_{11}}{\Delta y} I_2$$

- **Mas as relações de impedância são:**

$$\begin{Bmatrix} V_1 = z_{11} I_1 + z_{12} I_2 \\ V_2 = z_{21} I_1 + z_{22} I_2 \end{Bmatrix} \longrightarrow \quad z_{11} = \frac{y_{22}}{\Delta y} \qquad z_{12} = -\frac{y_{12}}{\Delta y}$$

$$z_{21} = -\frac{y_{21}}{\Delta y} \qquad z_{22} = \frac{y_{11}}{\Delta y}$$

Tabela de conversões entre parâmetros

$$z_{11} = \frac{y_{22}}{\Delta y} = \frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{b_{22}}{b_{21}} = \frac{\Delta h}{h_{22}} = \frac{1}{g_{11}}$$
$$z_{12} = -\frac{y_{12}}{\Delta y} = \frac{\Delta a}{a_{21}} = \frac{1}{b_{21}} = \frac{h_{12}}{h_{22}} = -\frac{g_{12}}{g_{11}}$$
$$z_{21} = \frac{-y_{21}}{\Delta y} = \frac{1}{a_{21}} = \frac{\Delta b}{b_{21}} = -\frac{h_{21}}{h_{22}} = \frac{g_{21}}{g_{11}}$$
$$z_{22} = \frac{y_{11}}{\Delta y} = \frac{a_{22}}{a_{21}} = \frac{b_{11}}{b_{21}} = \frac{1}{h_{22}} = \frac{\Delta g}{g_{11}}$$

$$a_{11} = \frac{z_{11}}{z_{21}} = -\frac{y_{22}}{y_{21}} = \frac{b_{22}}{\Delta b} = -\frac{\Delta h}{h_{21}} = \frac{1}{g_{21}}$$
$$a_{12} = \frac{\Delta z}{z_{21}} = -\frac{1}{y_{21}} = \frac{b_{12}}{\Delta b} = -\frac{h_{11}}{h_{21}} = \frac{g_{22}}{g_{21}}$$
$$a_{21} = \frac{1}{z_{21}} = -\frac{\Delta y}{y_{21}} = \frac{b_{21}}{\Delta b} = -\frac{h_{22}}{h_{21}} = \frac{g_{11}}{g_{21}}$$
$$a_{22} = \frac{z_{22}}{z_{21}} = -\frac{y_{11}}{y_{21}} = \frac{b_{11}}{\Delta b} = -\frac{1}{h_{21}} = \frac{\Delta g}{g_{21}}$$

$$h_{11} = \frac{\Delta z}{z_{22}} = \frac{1}{y_{11}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{b_{12}}{b_{11}} = \frac{g_{22}}{\Delta g}$$
$$h_{12} = \frac{z_{12}}{z_{22}} = -\frac{y_{12}}{y_{11}} = \frac{\Delta a}{a_{22}} = \frac{1}{b_{11}} = -\frac{g_{12}}{\Delta g}$$
$$h_{21} = -\frac{z_{21}}{z_{22}} = \frac{y_{21}}{y_{11}} = -\frac{1}{a_{22}} = -\frac{\Delta b}{b_{11}} = -\frac{g_{21}}{\Delta g}$$
$$h_{22} = \frac{1}{z_{22}} = \frac{\Delta y}{y_{11}} = \frac{a_{21}}{a_{22}} = \frac{b_{21}}{b_{11}} = \frac{g_{11}}{\Delta g}$$

$$y_{11} = \frac{z_{22}}{\Delta z} = \frac{a_{22}}{a_{12}} = \frac{b_{11}}{b_{12}} = \frac{1}{h_{11}} = \frac{\Delta g}{g_{22}}$$
$$y_{12} = -\frac{z_{12}}{\Delta z} = -\frac{\Delta a}{a_{12}} = -\frac{1}{b_{12}} = -\frac{h_{12}}{h_{11}} = \frac{g_{12}}{g_{22}}$$
$$y_{21} = -\frac{z_{21}}{\Delta z} = -\frac{1}{a_{12}} = -\frac{\Delta b}{b_{12}} = \frac{h_{21}}{h_{11}} = -\frac{g_{21}}{g_{22}}$$
$$y_{22} = \frac{z_{11}}{\Delta z} = \frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{b_{22}}{b_{12}} = \frac{\Delta h}{h_{11}} = \frac{1}{g_{22}}$$

$$b_{11} = \frac{z_{22}}{z_{12}} = -\frac{y_{11}}{y_{12}} = \frac{a_{22}}{\Delta a} = \frac{1}{h_{12}} = -\frac{\Delta g}{g_{12}}$$
$$b_{12} = \frac{\Delta z}{z_{12}} = -\frac{1}{y_{12}} = \frac{a_{12}}{\Delta a} = \frac{h_{11}}{h_{12}} = -\frac{g_{22}}{g_{12}}$$
$$b_{21} = \frac{1}{z_{12}} = -\frac{\Delta y}{y_{12}} = \frac{a_{21}}{\Delta a} = \frac{h_{22}}{h_{12}} = -\frac{g_{11}}{g_{12}}$$
$$b_{22} = \frac{z_{11}}{z_{12}} = \frac{y_{22}}{y_{12}} = \frac{a_{11}}{\Delta a} = \frac{\Delta h}{h_{12}} = -\frac{1}{g_{12}}$$

$$g_{11} = \frac{1}{z_{11}} = \frac{\Delta y}{y_{22}} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{b_{21}}{b_{22}} = \frac{h_{22}}{\Delta h}$$
$$g_{12} = -\frac{z_{12}}{z_{11}} = \frac{y_{12}}{y_{22}} = -\frac{\Delta a}{a_{11}} = -\frac{1}{b_{22}} = -\frac{h_{12}}{\Delta h}$$
$$g_{21} = \frac{z_{21}}{z_{11}} = -\frac{y_{21}}{y_{22}} = \frac{1}{a_{11}} = \frac{\Delta b}{b_{22}} = -\frac{h_{21}}{\Delta h}$$
$$g_{22} = \frac{\Delta z}{z_{11}} = \frac{1}{y_{22}} = \frac{a_{12}}{a_{11}} = \frac{b_{12}}{b_{22}} = \frac{h_{11}}{\Delta h}$$

$$\Delta z = z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}$$
$$\Delta y = y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}$$
$$\Delta a = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\Delta b = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}$$
$$\Delta h = h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}$$
$$\Delta g = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}$$

Exemplo

- **Dois conjuntos de medições são realizados em um quadripolo resistivo trabalhando em tensão contínua:**

Com a saída em aberto (i2=0):

$$v_1 = 10\,mV$$
$$i_1 = 10\,\mu A$$
$$v_2 = -40\,V$$

Com a saída em curto (v2=0):

$$v_1 = 24\,mV$$
$$i_1 = 20\,\mu A$$
$$i_2 = 1\,mA$$

Determine os parâmetros *h*.

$$\begin{cases} V_1 = h_{11} I_1 + h_{12} V_2 \\ I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} V_2 \end{cases}$$

Exemplo

i2 = 0: $v_1 = 10\,mV$

$i_1 = 10\,\mu A$

$v_2 = -40\,V$

v2 = 0: $v_1 = 24\,mV$

$i_1 = 20\,\mu A$

$i_2 = 1\,mA$

$$\begin{cases} V_1 = h_{11} I_1 + h_{12} V_2 \\ I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} V_2 \end{cases}$$

Com estas informações, somente os parâmetros *h11* e *h21* podem ser calculados diretamente:

$$\boxed{h_{11} = \left[\frac{V_1}{I_1}\right]_{V_2=0} = \frac{24\,mV}{10\,\mu A} = 1{,}2\,k\Omega}$$

$$\boxed{h_{21} = \left[\frac{I_2}{I_1}\right]_{V_2=0} = \frac{1\,mA}{20\,\mu A} = 50}$$

Os parâmetros *h12* e *h22* deverão ser calculados indiretamente.

Exemplo

Com as informações pode-se calcular todos os parâmetros *a*:

$$a_{11}=\left[\frac{V_1}{V_2}\right]_{I_2=0}=\frac{10\,mV}{-40\,V}=-0.25\times10^{-3} \qquad a_{12}=\left[-\frac{V_1}{I_2}\right]_{V_2=0}=-\frac{24\,mV}{1\,mA}=-24\,\Omega$$

$$a_{21}=\left[\frac{I_1}{V_2}\right]_{I_2=0}=\frac{10\mu\,A}{-40\,V}=-0.25\times10^{-6}\,S \qquad a_{22}=\left[-\frac{I_1}{I_2}\right]_{V_2=0}=-\frac{20\,\mu\,A}{1\,mA}=-20\times10^{-3}$$

Determinando *h12* e *h22*:

$$h_{11}=\frac{\Delta z}{z_{22}}=\frac{1}{y_{11}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}=\frac{b_{12}}{b_{11}}=\frac{g_{22}}{\Delta g}$$

$$h_{12}=\frac{z_{12}}{z_{22}}=-\frac{y_{12}}{y_{11}}=\frac{\Delta a}{a_{22}}=\frac{1}{b_{11}}=-\frac{g_{12}}{\Delta g}$$

$$h_{21}=-\frac{z_{21}}{z_{22}}=\frac{y_{21}}{y_{11}}=-\frac{1}{a_{22}}=-\frac{\Delta b}{b_{11}}=-\frac{g_{21}}{\Delta g}$$

$$h_{22}=\frac{1}{z_{22}}=\frac{\Delta y}{y_{11}}=\frac{a_{21}}{a_{22}}=\frac{b_{21}}{b_{11}}=\frac{g_{11}}{\Delta g}$$

$$\boxed{\Delta a = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$$\Delta a=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=-1\times10^{-6}$$

$$\boxed{h_{12}=\frac{\Delta a}{a_{22}}=5\times10^{-5}}$$

$$\boxed{h_{22}=\frac{a_{21}}{a_{22}}=12.5\,\mu\,S}$$

Modelo do circuito:

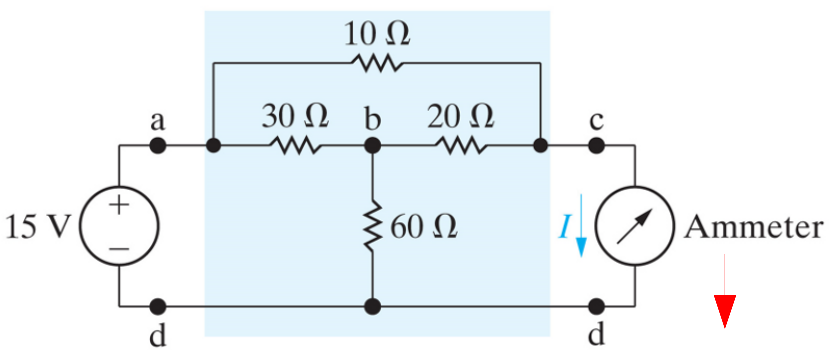
$$\begin{Bmatrix} V_1=h_{11}I_1+h_{12}V_2 \\ I_2=h_{21}I_1+h_{22}V_2 \end{Bmatrix}$$

$$\downarrow$$

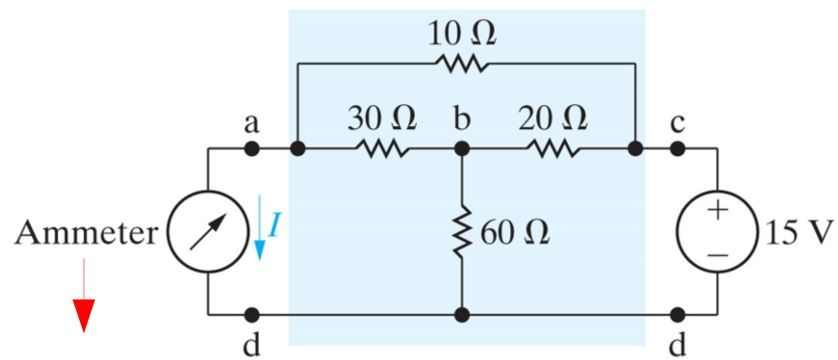
$$\boxed{\begin{Bmatrix} V_1=1200\,I_1+50\mu\,V_2 \\ I_2=50\,I_1+12.5\,\mu\,V_2 \end{Bmatrix}}$$

Quadripolos recíprocos

- **Quadripolos recíprocos:**
  - **Uma fonte de tensão colocada em qualquer de suas portas produz a mesma corrente na outra porta quando em curto-circuito.**
  - **Uma fonte de corrente colocada em qualquer de suas portas produz a mesma tensão na outra porta quando em circuito aberto.**



$I = 1{,}75\ A$



$I = 1{,}75\ A$

Quadripolos recíprocos

- **Neste caso:**
  - **São necessários apenas 3 cálculos ou medições para determinar os parâmetros.**
  - **Os parâmetros de *transferência* são iguais:**

$$z_{12} = z_{21}$$

$$y_{12} = y_{21}$$

$$\Delta a = 1$$

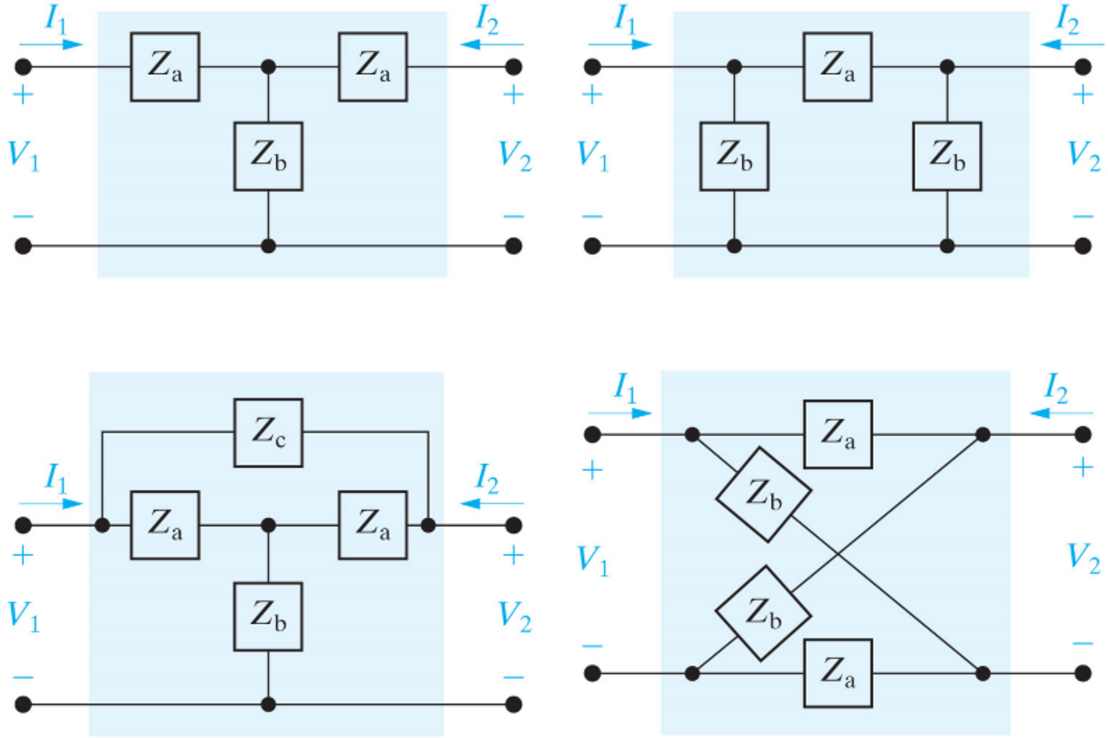
$$\Delta b = 1$$

$$h_{12} = -h_{21}$$

$$g_{12} = -g_{21}$$

Quadripolos simétricos

- **Um quadripolo é simétrico quando a entrada e a saída puderem ser permutadas sem que o comportamento externo se altere.**



Quadripolos simétricos

- **Neste caso:**
  - **São necessário apenas 2 cálculos ou medições para determinar os parâmetros.**
  - **Os parâmetros de *entrada*, *saída* e *transferência* são iguais:**

$z_{11}=z_{22}$	$z_{12}=z_{21}$
$y_{11}=y_{22}$	$y_{12}=y_{21}$
$a_{11}=a_{22}$	$\Delta a=1$
$b_{11}=b_{22}$	$\Delta b=1$
$\Delta h=1$	$h_{12}=-h_{21}$
$\Delta g=1$	$g_{12}=-g_{21}$

Exemplo

- **As seguintes medições foram realizadas em um quadripolo simétrico e recíproco. Com base nestas, calcule os parâmetros *z*.**

Com a saída em aberto:

$$v_1 = 95\,V$$
$$i_1 = 5\,A$$

Com a saída em curto:

$$v_1 = 11{,}52\,V$$
$$i_2 = -2{,}72\,A$$

Como o quadripolo é simétrico e recíproco: $z_{11} = z_{22} \quad z_{12} = z_{21}$

Utilizando as informações da saída em aberto → I2 = 0

$$z_{11} = \left[\frac{V_1}{I_1}\right]_{I_2=0} = \frac{95\,V}{5\,A} \longrightarrow \boxed{z_{11} = 19\,\Omega} \longrightarrow \boxed{z_{22} = 19\,\Omega}$$

$$z_{12} = \left[\frac{V_1}{I_2}\right]_{I_1=0}, \quad z_{21} = \left[\frac{V_2}{I_1}\right]_{I_2=0} \longrightarrow$$ Não dá para calcular diretamente...

Exemplo

Utilizando as relações originais de tensões:

$$\begin{cases} V_1 = z_{11} I_1 + z_{12} I_2 \\ V_2 = z_{21} I_1 + z_{22} I_2 \end{cases}$$

Com a saída em curto → $v_1 = 11{,}52\,V$, $i_2 = -2{,}72\,A$, $v_2 = 0\,V$ →

$$\begin{cases} 11{,}52 = 19 \cdot I_1 + z_{12} \cdot (-2{,}72) \\ 0 = z_{21} I_1 + 19 \cdot (-2{,}72) \end{cases}$$

Como → $z_{12} = z_{21}$ →

$$\begin{cases} 11{,}52 = 19 \cdot I_1 + z_{12} \cdot (-2{,}72) \\ 0 = z_{12} I_1 + 19 \cdot (-2{,}72) \end{cases}$$

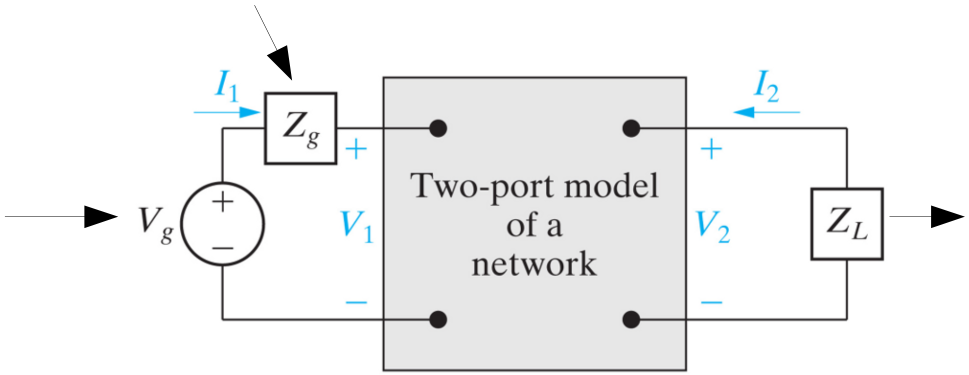
Resolvendo o sistema: $\boxed{z_{12} = 17\,\Omega}$ → $\boxed{z_{21} = 17\,\Omega}$

Quadripolos com cargas

- **Conexão do quadripolo a circuito externos → efeito de carga → alteração no comportamento.**

Impedância interna da fonte

Tensão interna da fonte



Impedância da carga

- **Além disso → como utilizar os parâmetros do quadripolo para caracterizar o circuito completo?**

Quadripolos com cargas

- **Caracteriza-se o efeito da conexão externa por meio de:**

$$Z_{ent} = \frac{V_1}{I_1}, \quad y_{ent} = \frac{I_1}{V_1}$$ → Impedância ou admitância da entrada.

$$Z_{out} = g_{22} = \left[\frac{V_2}{I_2}\right]_{V_1=0}$$ → Impedância de saida.

V_{TH}, Z_{TH} → Circuito de Thévenin nos terminais de saída.

$$Av_{NL} = \frac{V_2}{V_1}$$ → Ganho de tensão sem carga.

$$Av = \left[\frac{V_2}{V_1}\right]_{Com\ Z_L}$$ → Ganho de tensão com carga.

$$Av_T = \frac{V_2}{V_g}$$ → Ganho de tensão total.

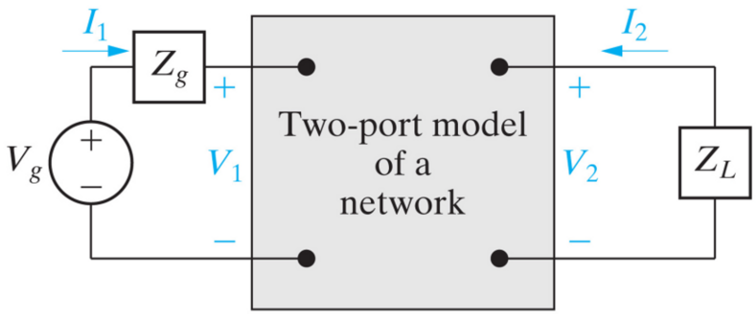
$$A_I = \frac{I_2}{I_1}$$ → Ganho de corrente.

Quadripolos com cargas

- **Exemplo: dedução utilizando os parâmetros z.**

Partindo das equações originais:

$$\begin{cases} V_1 = z_{11} I_1 + z_{12} I_2 \rightarrow 1 \\ V_2 = z_{21} I_1 + z_{22} I_2 \rightarrow 2 \end{cases}$$



Mas, pelas conexões externas:

$$\begin{cases} V_1 = V_g - I_1 Z_g \rightarrow 3 \\ V_2 = -I_2 Z_L \rightarrow 4 \end{cases}$$

Substituindo 4 em 2:

$$-I_2 Z_L = z_{21} I_1 + z_{22} I_2 \longrightarrow I_2 = \frac{-z_{21} I_1}{z_{22} + Z_L} \rightarrow 5$$

Substituindo 5 em 1: $V_1 = z_{11} I_1 + z_{12} \dfrac{-z_{21} I_1}{z_{22} + Z_L}$

$$V_1 = \left[z_{11} - \frac{z_{12} z_{21}}{z_{22} + Z_L} \right] I_1$$

$$\frac{V_1}{I_1} = \boxed{Z_{ent} = \left[z_{11} - \frac{z_{12} z_{21}}{z_{22} + Z_L} \right]}$$

Reflexo da impedância
de carga para a entrada!

Quadripolos com cargas

- **Da mesma forma...**

$$I_2 = V_g \cdot \left[-\frac{z_{21}}{(z_{22}+Z_L)(z_{11}+Z_g)-z_{12}z_{21}} \right]$$ → Reflexo da fonte de tensão na corrente de saída.

$$\begin{Bmatrix} V_{TH} = V_g \cdot \dfrac{z_{21}}{Z_g+z_{11}} \\ Z_{TH} = z_{22} - \dfrac{z_{12}z_{21}}{Z_g+z_{11}} \end{Bmatrix}$$ → Circuito equivalente de Thevenin na saída.

$$A_I = \frac{I_2}{I_1} = \frac{-z_{21}}{z_{22}+Z_L}$$ → Ganho de corrente

$$A_V = \frac{V_2}{V_1} = \frac{z_{21}Z_L}{z_{11}Z_L+\Delta z}$$ → Ganho de tensão com carga.

$$A_T = \frac{V_2}{V_g} = \frac{z_{21}Z_L}{(z_{11}+Z_g)(z_{22}+Z_L)-z_{12}z_{21}}$$ → Ganho de tensão total.

Tabela de relações

z Parameters	y Parameters
$Z_{\text{in}} = z_{11} - \dfrac{z_{12}z_{21}}{z_{22} + Z_L}$	$Y_{\text{in}} = y_{11} - \dfrac{y_{12}y_{21}Z_L}{1 + y_{22}Z_L}$
$I_2 = \dfrac{-z_{21}V_g}{(z_{11} + Z_g)(z_{22} + Z_L) - z_{12}z_{21}}$	$I_2 = \dfrac{y_{21}V_g}{1 + y_{22}Z_L + y_{11}Z_g + \Delta y Z_g Z_L}$
$V_{\text{Th}} = \dfrac{z_{21}}{z_{11} + Z_g}V_g$	$V_{\text{Th}} = \dfrac{-y_{21}V_g}{y_{22} + \Delta y Z_g}$
$Z_{\text{Th}} = z_{22} - \dfrac{z_{12}z_{21}}{z_{11} + Z_g}$	$Z_{\text{Th}} = \dfrac{1 + y_{11}Z_g}{y_{22} + \Delta y Z_g}$
$\dfrac{I_2}{I_1} = \dfrac{-z_{21}}{z_{22} + Z_L}$	$\dfrac{I_2}{I_1} = \dfrac{y_{21}}{y_{11} + \Delta y Z_L}$
$\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{z_{21}Z_L}{z_{11}Z_L + \Delta z}$	$\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{-y_{21}Z_L}{1 + y_{22}Z_L}$
$\dfrac{V_2}{V_g} = \dfrac{z_{21}Z_L}{(z_{11} + Z_g)(z_{22} + Z_L) - z_{12}z_{21}}$	$\dfrac{V_2}{V_g} = \dfrac{y_{21}Z_L}{y_{12}y_{21}Z_g Z_L - (1 + y_{11}Z_g)(1 + y_{22}Z_L)}$

Tabela de relações

a Parameters

$$Z_{\text{in}} = \frac{a_{11}Z_L + a_{12}}{a_{21}Z_L + a_{22}}$$

$$I_2 = \frac{-V_g}{a_{11}Z_L + a_{12} + a_{21}Z_g Z_L + a_{22}Z_g}$$

$$V_{\text{Th}} = \frac{V_g}{a_{11} + a_{21}Z_g}$$

$$Z_{\text{Th}} = \frac{a_{12} + a_{22}Z_g}{a_{11} + a_{21}Z_g}$$

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{-1}{a_{21}Z_L + a_{22}}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{Z_L}{a_{11}Z_L + a_{12}}$$

$$\frac{V_2}{V_g} = \frac{Z_L}{(a_{11} + a_{21}Z_g)Z_L + a_{12} + a_{22}Z_g}$$

b Parameters

$$Z_{\text{in}} = \frac{b_{22}Z_L + b_{12}}{b_{21}Z_L + b_{11}}$$

$$I_2 = \frac{-V_g\Delta b}{b_{11}Z_g + b_{21}Z_g Z_L + b_{22}Z_L + b_{12}}$$

$$V_{\text{Th}} = \frac{V_g\Delta b}{b_{22} + b_{21}Z_g}$$

$$Z_{\text{Th}} = \frac{b_{11}Z_g + b_{12}}{b_{21}Z_g + b_{22}}$$

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{-\Delta b}{b_{11} + b_{21}Z_L}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\Delta b Z_L}{b_{12} + b_{22}Z_L}$$

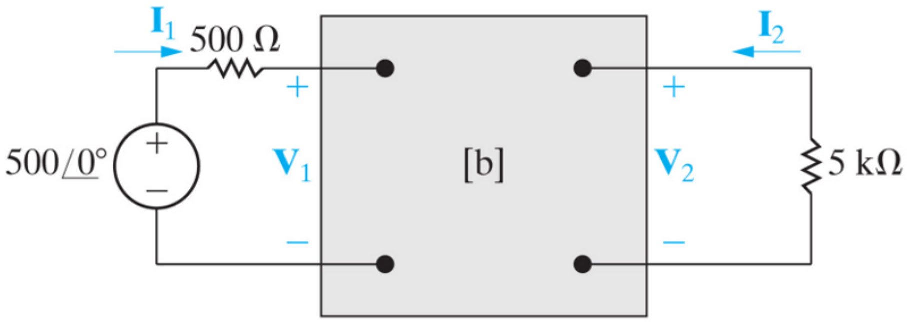
$$\frac{V_2}{V_g} = \frac{\Delta b Z_L}{b_{12} + b_{11}Z_g + b_{22}Z_L + b_{21}Z_g Z_L}$$

Tabela de relações

***h* Parameters**	***g* Parameters**
$Z_{in} = h_{11} - \dfrac{h_{12}h_{21}Z_L}{1 + h_{22}Z_L}$	$Y_{in} = g_{11} - \dfrac{g_{12}g_{21}}{g_{22} + Z_L}$
$I_2 = \dfrac{h_{21}V_g}{(1 + h_{22}Z_L)(h_{11} + Z_g) - h_{12}h_{21}Z_L}$	$I_2 = \dfrac{-g_{21}V_g}{(1 + g_{11}Z_g)(g_{22} + Z_L) - g_{12}g_{21}Z_g}$
$V_{Th} = \dfrac{-h_{21}V_g}{h_{22}Z_g + \Delta h}$	$V_{Th} = \dfrac{g_{21}V_g}{1 + g_{11}Z_g}$
$Z_{Th} = \dfrac{Z_g + h_{11}}{h_{22}Z_g + \Delta h}$	$Z_{Th} = g_{22} - \dfrac{g_{12}g_{21}Z_g}{1 + g_{11}Z_g}$
$\dfrac{I_2}{I_1} = \dfrac{h_{21}}{1 + h_{22}Z_L}$	$\dfrac{I_2}{I_1} = \dfrac{-g_{21}}{g_{11}Z_L + \Delta g}$
$\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{-h_{21}Z_L}{\Delta h Z_L + h_{11}}$	$\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{g_{21}Z_L}{g_{22} + Z_L}$
$\dfrac{V_2}{V_g} = \dfrac{-h_{21}Z_L}{(h_{11} + Z_g)(1 + h_{22}Z_L) - h_{12}h_{21}Z_L}$	$\dfrac{V_2}{V_g} = \dfrac{g_{21}Z_L}{(1 + g_{11}Z_g)(g_{22} + Z_L) - g_{12}g_{21}Z_g}$

Exemplo

- **O quadripolo da figura é descrito em termos de seus parâmetros *b*. Determine:**
  - **A tensão fasorial V2.**
  - **A potência média fornecida à carga.**
  - **A potência média fornecida aos terminais de entrada.**
  - **A impedância da carga para máxima transferência de potência.**
  - **A máxima potência média no caso de MTP.**



$$b_{11} = -20$$

$$b_{12} = -3000\,\Omega$$

$$b_{21} = -0{,}002\,S$$

$$b_{22} = -0{,}2$$

Exemplo

Tensão fasorial na carga:

Pela tabela: $$\frac{V_2}{V_g}=\frac{\Delta b\cdot Z_L}{b_{12}+b_{11}Z_g+B_{22}Z_L+b_{21}Z_gZ_L},\quad \Delta b=b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}$$

Assim, a tensão na saída será: $$\vec{V}_2=\frac{\Delta b\cdot Z_L}{b_{12}+b_{11}Z_g+B_{22}Z_L+b_{21}Z_gZ_L}\cdot\vec{V}_g=\boxed{263{,}16\,\mathrm{e}^{j0^o}\,V}$$

Potência média fornecida à carga: $$P_L=\frac{V_{2\mathrm{RMS}}^2}{R_L}=\frac{\left(263{,}13/\sqrt{2}\right)^2}{5000}=\boxed{6{,}93\,W}$$

Potência média na entrada do quadripolo:

$$Z_{ent}=\frac{b_{22}Z_L+b_{12}}{b_{21}Z_L+b_{11}}=133{,}33\,\Omega$$

$$I_1=\frac{V_g}{Z_g+Z_{ent}}=784{,}47\,mA$$

$$P_{ent}=I_{1\mathrm{RMS}}^2\cdot Z_{ent}=\boxed{41{,}55\,W}$$

Exemplo

Impedância da carga para MTP: $Z_{L,MTP} = Z^*_{TH}$

Pela tabela: $Z_{TH} = \dfrac{b_{11} Z_g + b_{12}}{b_{21} Z_g + b_{22}} = 10.833{,}33\,\Omega$

$Z_{L,MTP} = \boxed{10.833{,}33\,\Omega}$

Potência máxima na carga:

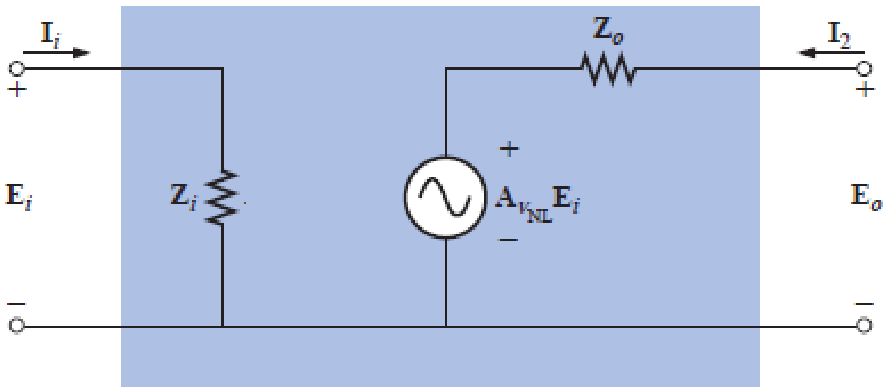
Quando $Z_L = Z_{L,MTP} = 10.833{,}33\,\Omega \longrightarrow$

$$V_2 = \frac{\Delta b \cdot Z_L}{b_{12} + b_{11} Z_g + B_{22} Z_L + b_{21} Z_g Z_L} \cdot V_g = 0{,}8333 \cdot 500\,e^{j0^o} = 416{,}67\,e^{j0^o}\,V$$

Portanto, $P_{LMAX} = \dfrac{V^2_{2RMS}}{Z_L} = \dfrac{\left(416{,}67/\sqrt{2}\right)^2}{10.833{,}33} = \boxed{8{,}01\,W}$

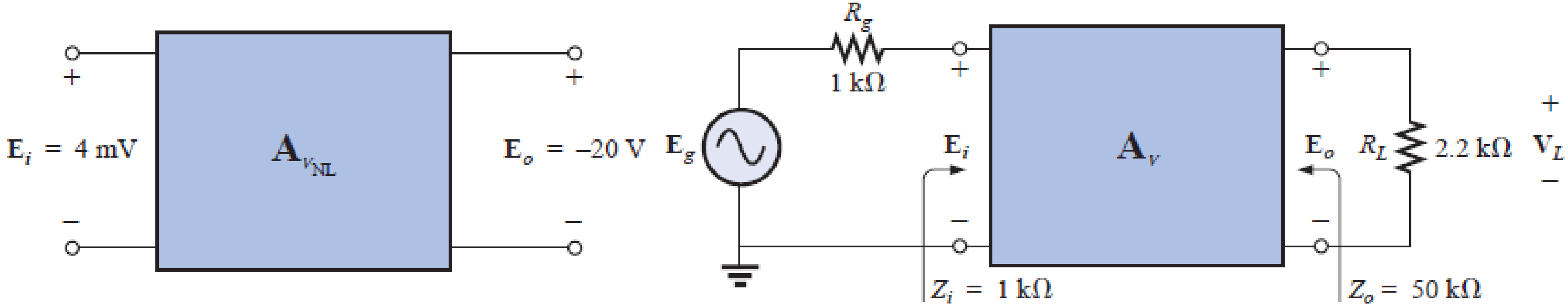
Exemplo

- **A figura abaixo é a representação em quadripolo de um amplificador trabalhando na região linear. Determine:**
  - **A impedância de entrada.**
  - **A impedância de saída.**
  - **O ganho de tensão com carga *Av*.**



Exemplo

- **Considere ainda o modelo de quadripolo do exemplo anterior. As seguintes medições foram realizadas.**

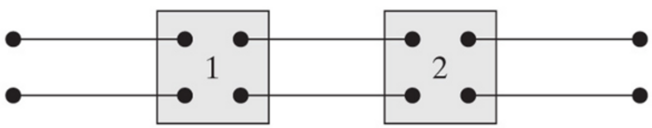


Determine:

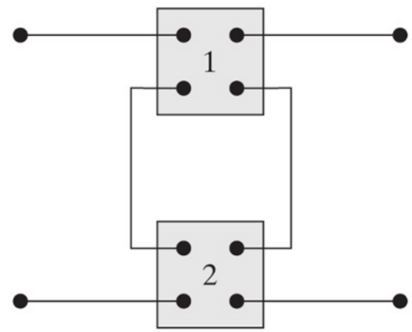
- **O ganho de tensão sem carga Av_{NL}.**
- **O ganho de tensão com carga Av.**
- **O ganho de tensão total Av_T.**

Interconexões de quadripolos

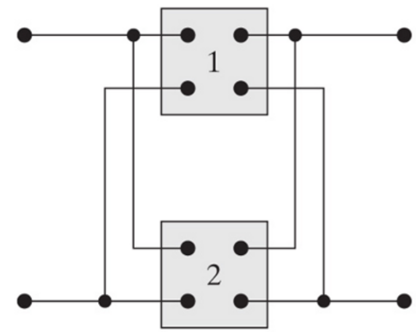
- **Objetivo → projetar sistemas grandes e complexos por meio de interconexões de partes menores → modelos por quadripolos.**
- **Modos de conexão:**



Cascata

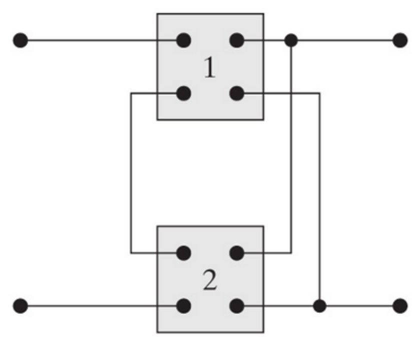


Série

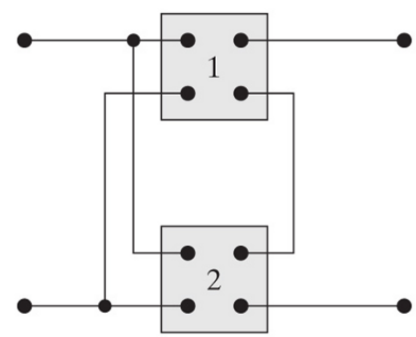


Paralelo

- **Ideia:**
  - **Como obter os parâmetros do circuito completo a partir dos parâmetros individuais?**



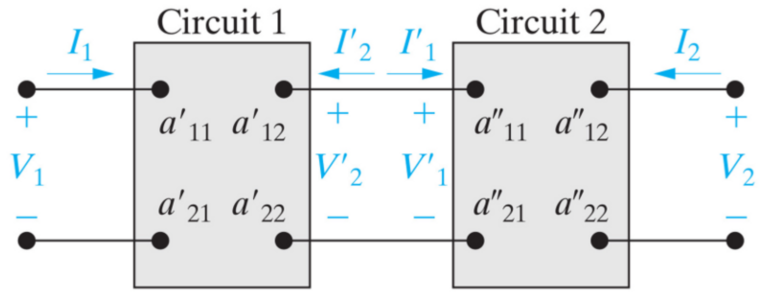
Série-paralelo



Paralelo-série

Interconexões de quadripolos

- **Exemplo: análise da ligação em cascata → parâmetros *a*.**



Como determinar $\begin{cases} V_1 = a_{11} V_2 - a_{12} I_2 \\ I_1 = a_{21} V_2 - a_{22} I_2 \end{cases}$ a partir de $\begin{matrix} a'_{11}, a'_{12} \\ a'_{21}, a'_{22} \end{matrix}$ e $\begin{matrix} a''_{11}, a''_{12} \\ a''_{21}, a''_{22} \end{matrix}$?

Interconexões de quadripolos

Para o 1º quadripolo, temos: $\left\{\begin{array}{l} V_1 = a'_{11} V'_2 - a'_{12} I'_2 \\ I_1 = a'_{21} V'_2 - a'_{22} I'_2 \end{array}\right\}$

Mas: $\begin{array}{l} V'_2 = V'_1 \\ I'_2 = -I'_1 \end{array} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} V_1 = a'_{11} V'_1 + a'_{12} I'_1 \\ I_1 = a'_{21} V'_1 + a'_{22} I'_1 \end{array}\right\}$

Para o 2º quadripolo, temos: $\left\{\begin{array}{l} V'_1 = a''_{11} V_2 - a''_{12} I_2 \\ I'_1 = a''_{21} V_2 - a''_{22} I_2 \end{array}\right\}$

Substituindo na equação anterior:

$$\left\{\begin{array}{l} V_1 = a'_{11}(a''_{11} V_2 - a''_{12} I_2) + a'_{12}(a''_{21} V_2 - a''_{22} I_2) \\ I_1 = a'_{21}(a''_{11} V_2 - a''_{12} I_2) + a'_{22}(a''_{21} V_2 - a''_{22} I_2) \end{array}\right\}$$

Interconexões de quadripolos

Continuando...
$$\begin{cases} V_1 = a'_{11}(a''_{11}V_2 - a''_{12}I_2) + a'_{12}(a''_{21}V_2 - a''_{22}I_2) \\ I_1 = a'_{21}(a''_{11}V_2 - a''_{12}I_2) + a'_{22}(a''_{21}V_2 - a''_{22}I_2) \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} V_1 = (a'_{11}a''_{11} + a'_{12}a''_{21})V_2 - (a'_{11}a''_{12} + a'_{12}a''_{22})I_2 \\ I_1 = (a'_{21}a''_{11} + a'_{22}a''_{21})V_2 - (a'_{21}a''_{12} + a'_{22}a''_{22})I_2 \end{cases}$$

Portanto, os parâmetros *a* do sistema completo são:

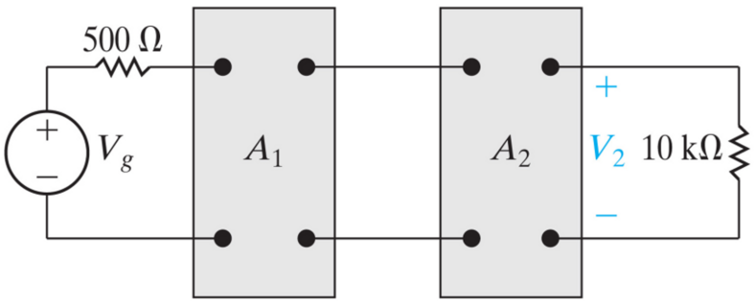
$$a_{11} = (a'_{11}a''_{11} + a'_{12}a''_{21}),\ a_{12} = (a'_{11}a''_{12} + a'_{12}a''_{22})$$
$$a_{21} = (a'_{21}a''_{11} + a'_{22}a''_{21}),\ a_{22} = (a'_{21}a''_{12} + a'_{22}a''_{22})$$

Notação matricial:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a''_{11} & -a''_{12} \\ a''_{21} & -a''_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Exemplo

- **A figura abaixo representa a conexão em cascata de dois amplificadores idênticos. Cada amplificador é especificado pelos parâmetros *h*. Determine o ganho de tensão V_2/Vg.**



$$h_{11} = 1.000\,\Omega$$

$$h_{12} = 0{,}0015$$

$$h_{21} = 100$$

$$h_{22} = 100\,\mu S$$

Convertendo os parâmetros *h* para *a*:

$$a_{11} = -\frac{\Delta h}{h_{21}} = 5\times 10^{-4} = a'_{11} = a''_{11} \qquad a_{12} = -\frac{h_{11}}{h_{21}} = -10\,\Omega = a'_{12} = a''_{12}$$

$$a_{21} = -\frac{h_{22}}{h_{21}} = 1\times 10^{-6}\,S = a'_{21} = a''_{21} \qquad a_{22} = -\frac{1}{h_{21}} = -1\times 10^{-2} = a'_{22} = a''_{22}$$

Exemplo

Continuando... $a'_{11} = a''_{11} = 5 \times 10^{-4}$ $a'_{12} = a''_{12} = -10\Omega$

$a'_{21} = a''_{21} = 1 \times 10^{-6} S$ $a'_{22} = a''_{22} = -1 \times 10^{-2}$

Calculando os parâmetros da cascata:

$$a_{11} = (a'_{11} a''_{11} + a'_{12} a''_{21}) = 10{,}25 \times 10^{-6}$$

$$a_{12} = (a'_{11} a''_{12} + a'_{12} a''_{22}) = 0{,}095\,\Omega$$

$$a_{21} = (a'_{21} a''_{11} + a'_{22} a''_{21}) = 9{,}5 \times 10^{-9}\ S$$

$$a_{22} = (a'_{21} a''_{12} + a'_{22} a''_{22}) = 1{,}1 \times 10^{-4}$$

Pela tabela, o ganho de tensão V_2/Vg é dado por:

$$\frac{V_2}{V_g} = \frac{Z_L}{(a_{11} + a_{21} Z_g) Z_L + a_{12} + a_{22} Z_g} = \boxed{33.333{,}33}$$