Análise de filtros ativos

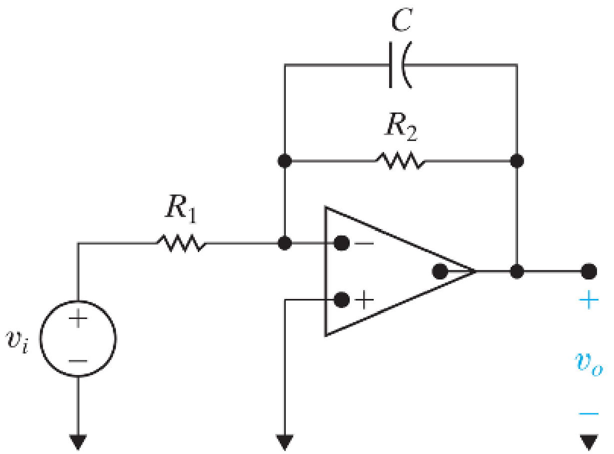
Sumário

- Introdução e motivação.
- Filtros ativos passa-baixas e passa-altas.
- Filtros passa-faixa e rejeita-faixa de faixa larga.
- Projeto de filtros utilizando filtros protótipos e mudanças de escalas.
- Filtros ativos de ordem superior.
- Abordagem por cascata de filtros de 1ª ordem.
- Abordagem por polinômios de ordem superior
- Filtros passa-faixa e rejeita-faixa de faixa estreita.

Introdução

- **Circuitos passivos:**
  - **Contêm somente elementos que *consomem* energia.**
  - **Algumas consequências:**
    - **Limitados a ganhos unitários.**
    - **Grande sensibilidade a efeitos de carga.**
- **Circuitos ativos:**
  - **Elementos que consomem e "fornecem" energia.**
    - **Transistores, amplificadores operacionais.**
    - **Circuitos integrados analógicos e digitais.**
  - **Podem realizar amplificação → ganho > 1.**
  - **Menor sensibilidade a efeitos de carga.**
  - **Elimina-se indutores → VANTAGENS?**
  - **Principal requisito → existência de fontes de energia externas.**

Filtro ativo passa-baixas



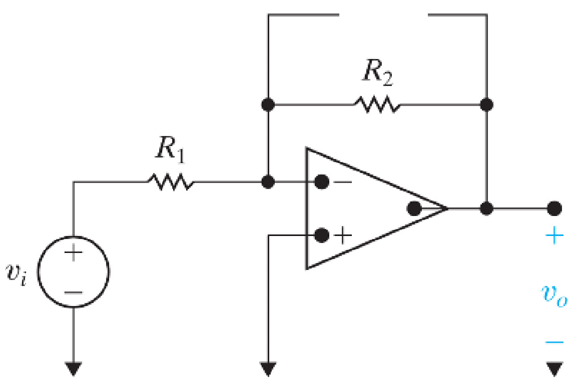
Entrada $\rightarrow \quad v_i(t)$

Saída $\rightarrow \quad v_o(t)$

$$Z_R = R$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$$

Quando $\omega \rightarrow 0$

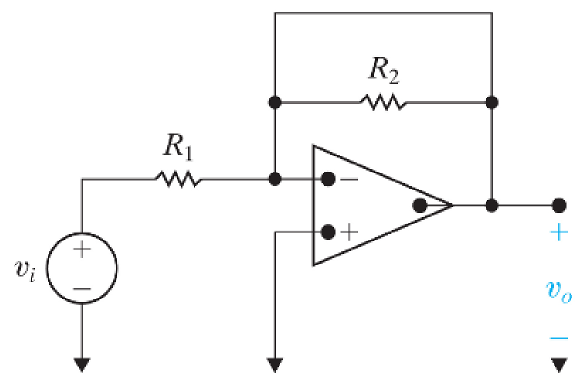


$$Z_C \rightarrow \infty$$

$$v_o \rightarrow -\frac{R_2}{R_1} v_i$$

$$\theta_{v_o} \rightarrow 180^o$$

Quando $\omega \rightarrow \infty$

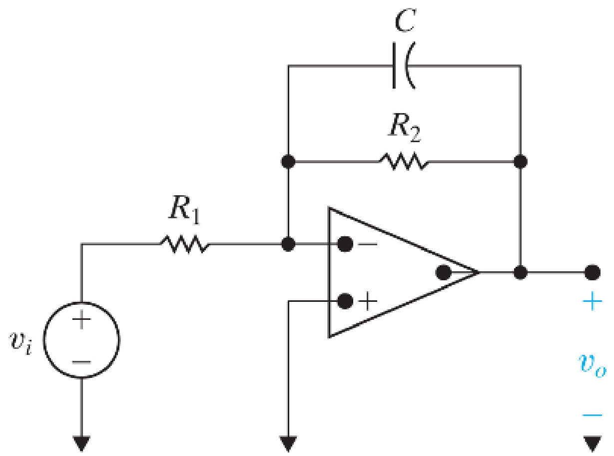


$$Z_C \rightarrow 0$$

$$v_o \rightarrow 0$$

$$\theta_{v_o} \rightarrow 90^o$$

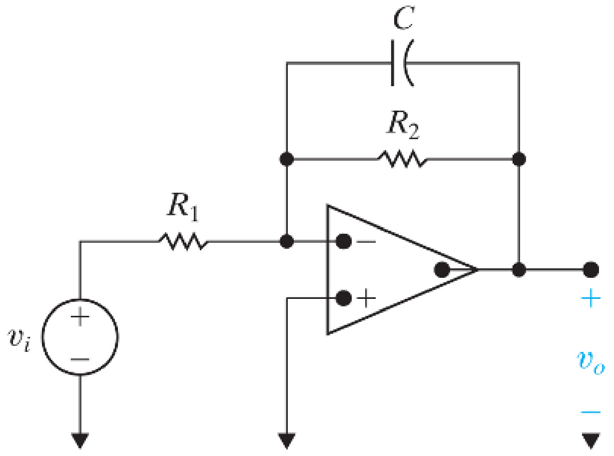
Análise quantitativa



Determine:

- **Função de transferência.**
- **Respostas de amplitude e fase.**

Análise quantitativa



$$H(s) = -K \cdot \frac{\omega_c}{s+\omega_c}$$

Ganho ≥ 1

Forma geral para filtros passa-baixas

$$K = \frac{R_2}{R_1}$$

$$\omega_c = \frac{1}{R_2 C}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1/(R_2 C)}{\sqrt{\omega^2 + 1/(R_2 C)^2}}$$

$$\theta(\omega) = (\pm)180 - \arctan\frac{\omega}{1/(R_2 C)}$$

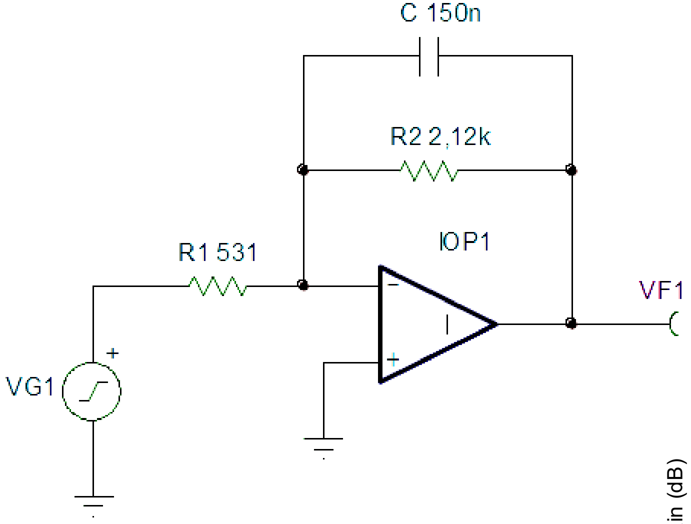
Exemplo

- **Faça o projeto de um filtro ativo passa-baixas com frequência de corte de 500 Hz e ganho de 4x.**
  - **Utilize capacitores de 150 nF.**

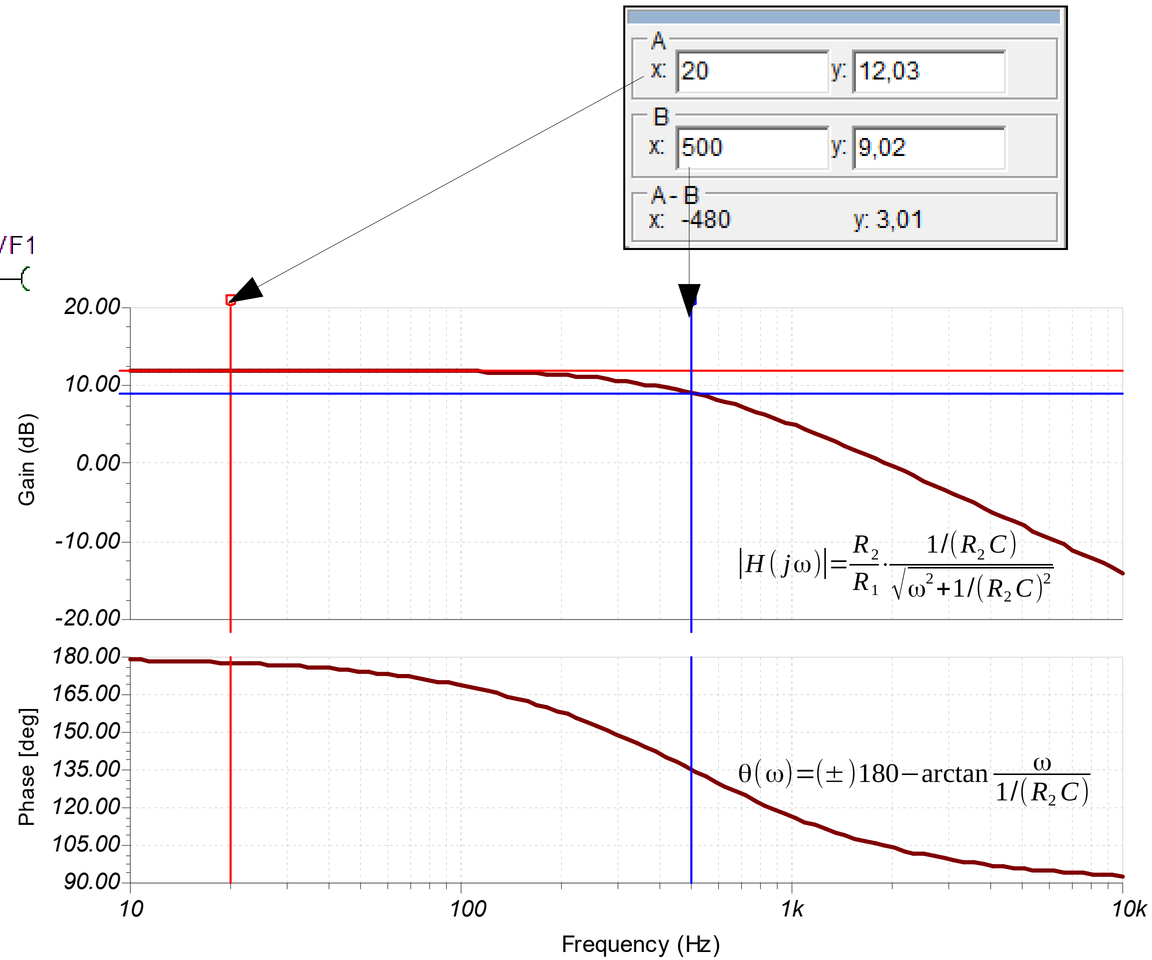
- **Considere que este filtro será utilizado para filtrar um sinal composto de três componentes, conforme especificado abaixo.**
  - **Determine a amplitude e a fase da saída de cada componente.**
  - **Verifique se haverá distorção de amplitude e de fase.**

$$v_i(t) = 50\sin(2\pi 200t) + 25\sin(2\pi 400t - 15^o) - 12.5\sin(2\pi 600t - 30^o)$$

Exemplo



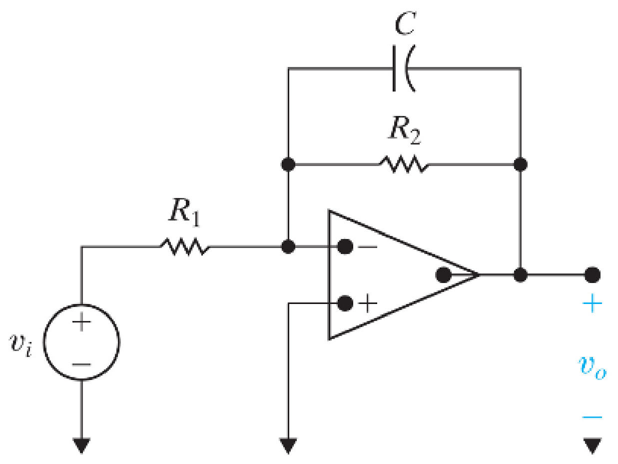
C 150n
R2 2,12k
IOP1
R1 531
VF1
VG1



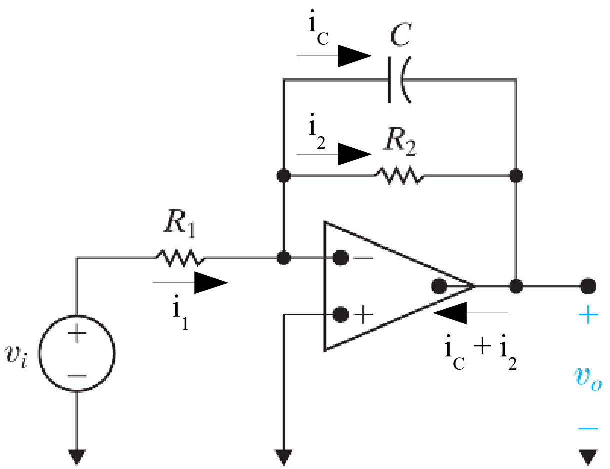
A
x: 20
y: 12,03
B
x: 500
y: 9,02
A - B
x: -480
y: 3,01
Gain (dB)
Phase [deg]
Frequency (Hz)
$|H(j\omega)|=\frac{R_2}{R_1}\cdot\frac{1/(R_2C)}{\sqrt{\omega^2+1/(R_2C)^2}}$
$\theta(\omega)=(\pm)180-\arctan\frac{\omega}{1/(R_2C)}$

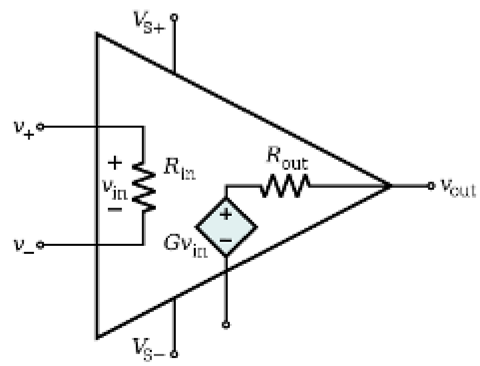
Exemplo

- **Considere o filtro ativo passa-baixas mostrado na figura abaixo. Determine:**
  - **A impedância de entrada.**
  - **A impedância de saída.**



Exemplo





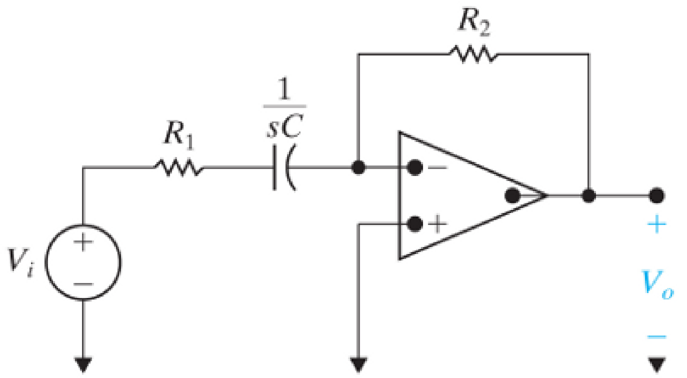
$Z_i = \frac{v_i}{i_i} = \frac{v_i}{i_1}$ **Mas:** $i_1 = \frac{v_i}{R_1}$ ⟶ $Z_i = \frac{v_i}{v_i / R_1}$ ⟶ $\boxed{Z_i = R_1}$

$Z_o = \frac{v_o}{i_o}$

Em um amp. op. ideal → fonte de tensão ideal ⟶ $Z_o = 0$

Em um amp. op. real → limitadores de corrente ⟶ Z_o *nãolinear*

Filtro ativo passa-altas



Entrada $\rightarrow \quad v_i(t)$

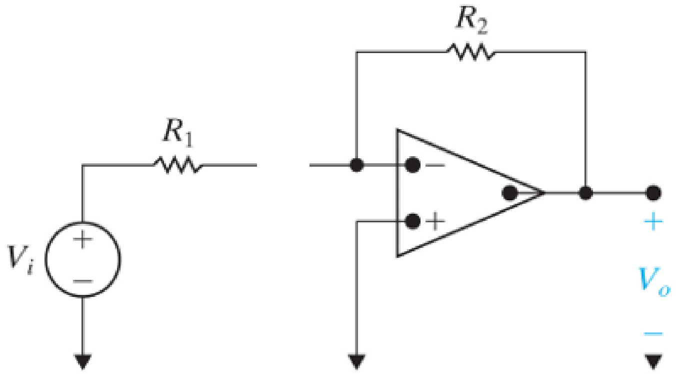
Saída $\rightarrow \quad v_o(t)$

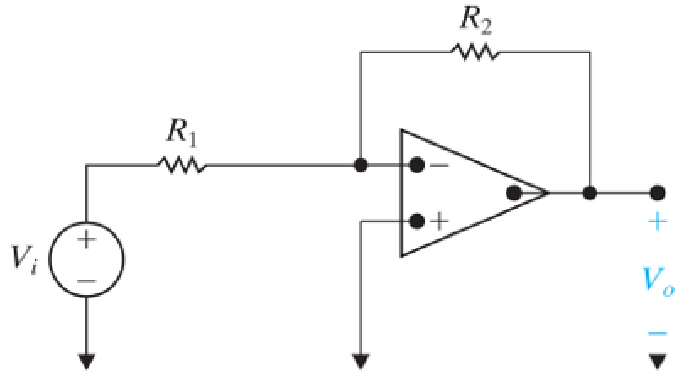
$$Z_R = R$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$$

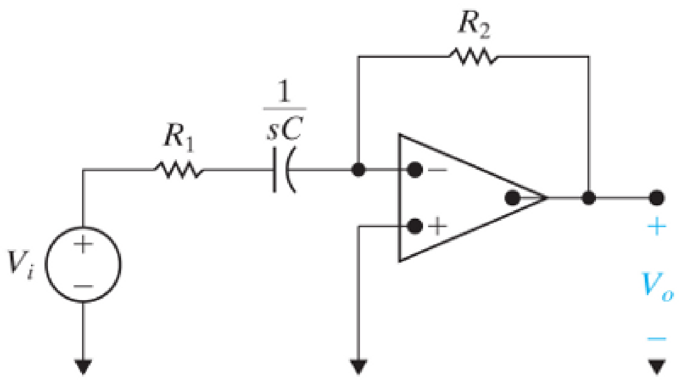
Quando $\omega \rightarrow 0 \longrightarrow v_o(t) \rightarrow 0$

Quando $\omega \rightarrow \infty \longrightarrow v_o \rightarrow -\frac{R_2}{R_1} v_i$



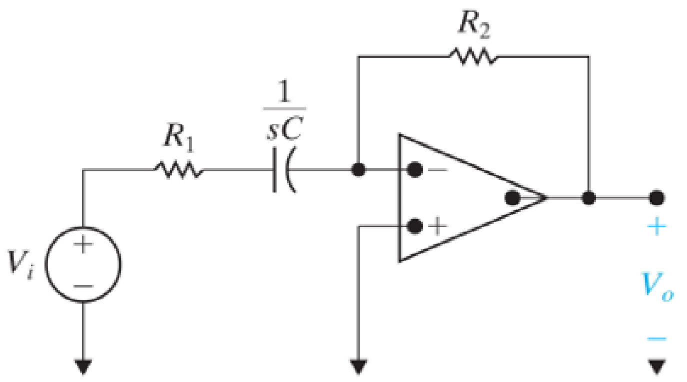


Análise quantitativa



Determine:
- **Função de transferência.**
- **Respostas de amplitude e fase.**

Análise quantitativa



$$H(s) = -K \cdot \frac{s}{s+\omega_c}$$

$$K = \frac{R_2}{R_1}$$

$$\omega_c = \frac{1}{R_1 C}$$

Ganho ≥ 1

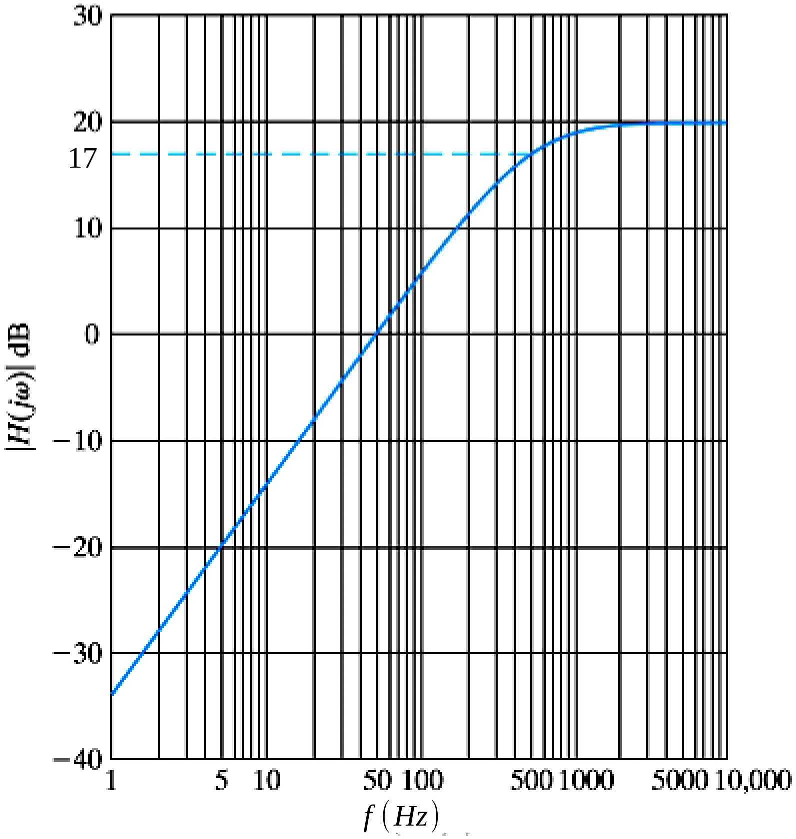
Forma geral para filtros passa-altas

$$|H(j\omega)| = \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + 1/(R_1 C)^2}}$$

$$\theta(\omega) = -90 - \arctan \frac{\omega}{1/(R_1 C)}$$

Exemplo

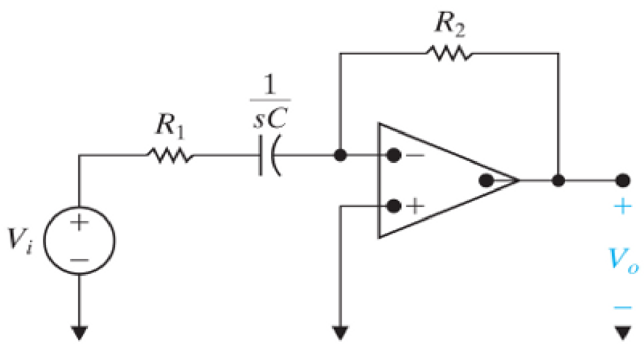
- **Faça o projeto de um filtro passa-altas que atenda ao diagrama de Bode mostrado na figura.**



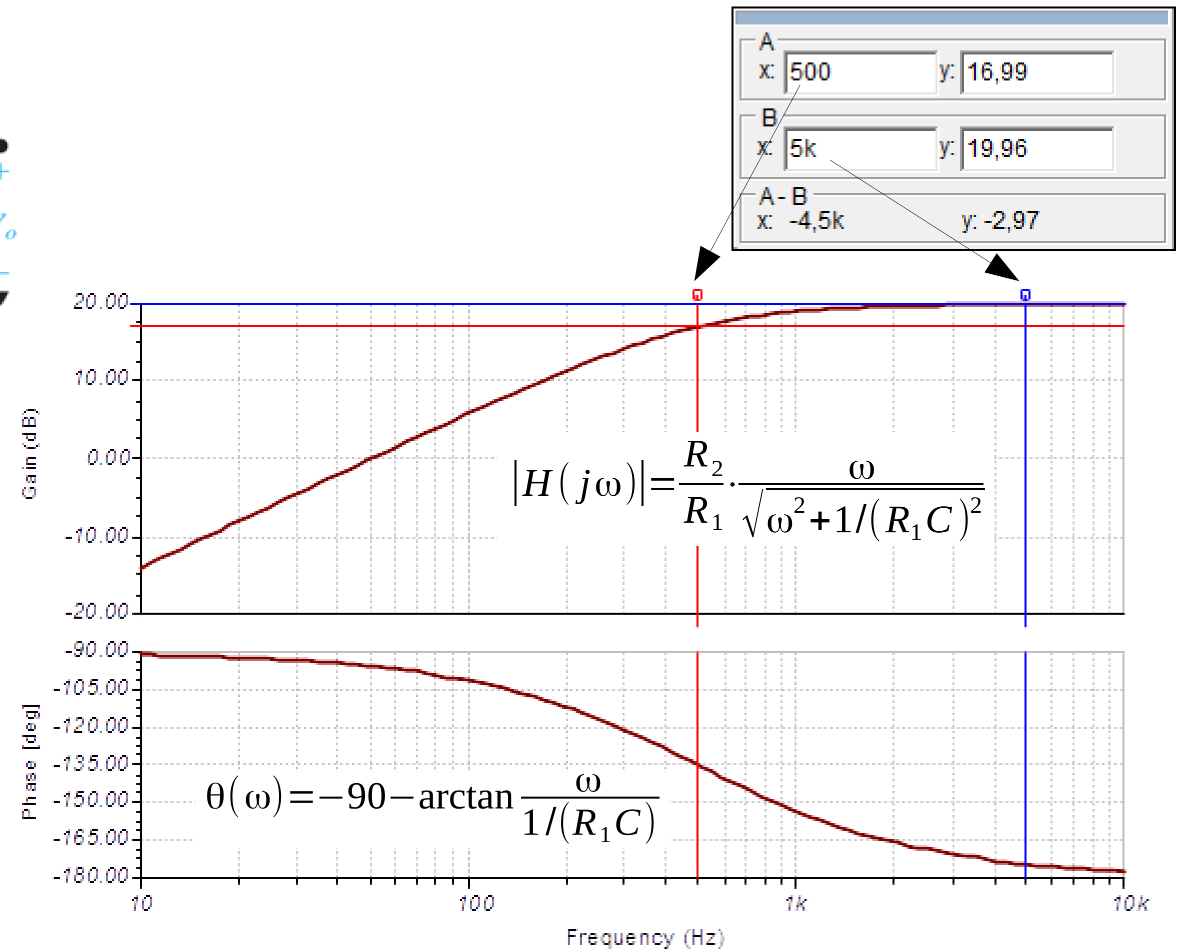
- **Utilize capacitor de 100 nF.**
- **Determine os valores das impedâncias de entrada e saída.**
- **Descreva qual será o efeito de se conectar uma carga com resistência de 10 Ω à saída do filtro.**

$R_1 = 20\,k\Omega, R_2 = 200\,k\Omega$

Exemplo



$$\boxed{\begin{aligned} Z_i &= R_1 + 1/j\omega C \\ Z_o &= 0 \ (ideal) \end{aligned}}$$

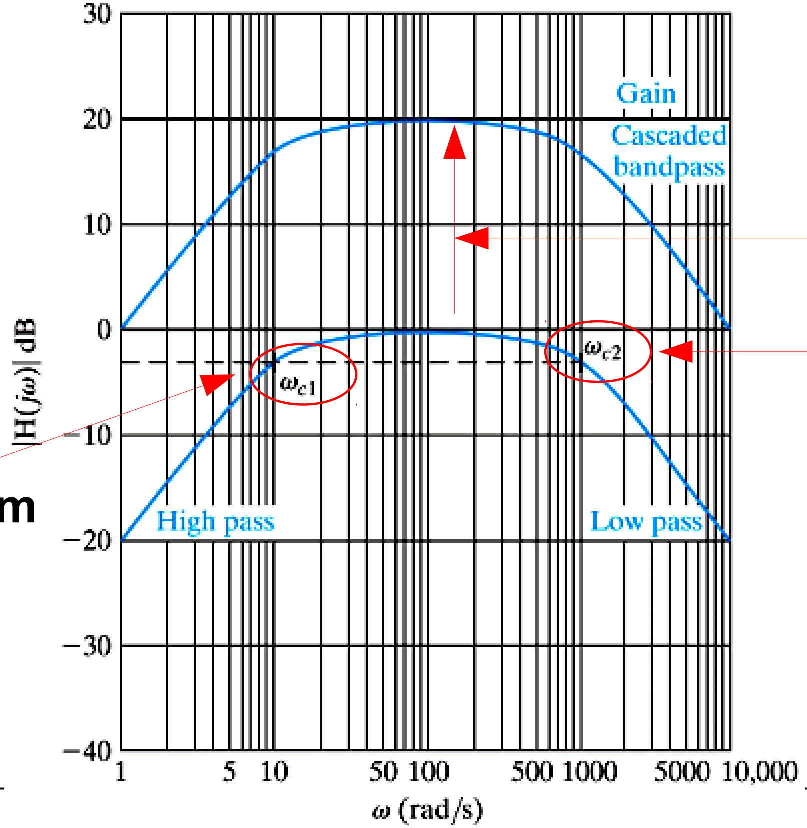


$$|H(j\omega)| = \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + 1/(R_1 C)^2}}$$

$$\theta(\omega) = -90 - \arctan \frac{\omega}{1/(R_1 C)}$$

Filtros ativos passa-faixa e rejeita-faixa

- 1ª abordagem → cascata de filtros de 1ª ordem.



Amplificador

Filtro PB com $\omega_{cL} = \omega_{c2}$

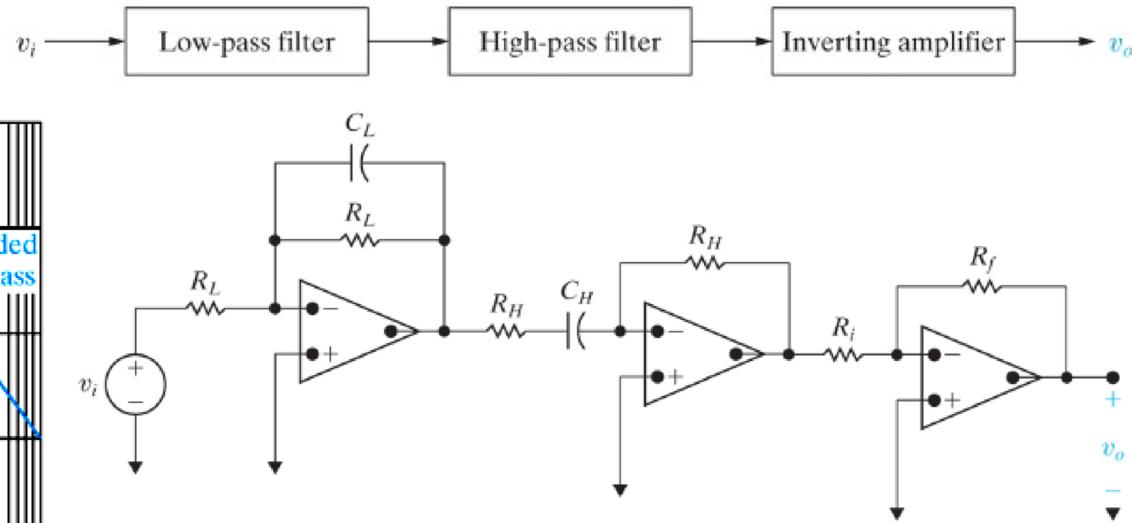
Filtro PA com $\omega_{cH} = \omega_{c1}$

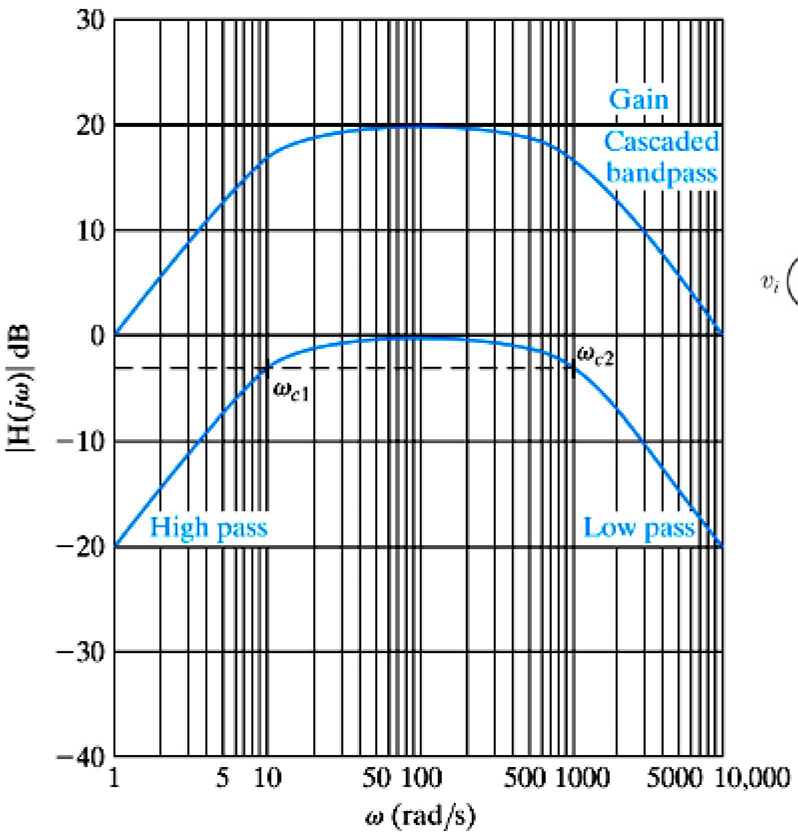
Se $\omega_{c2} \geq 2\omega_{c1}$

↓

Filtro *banda larga*.

Análise quantitativa





$$H(s)=\frac{V_o(s)}{V_i(s)}=\left(-\frac{\omega_{c2}}{s+\omega_{c2}}\right)\left(-\frac{s}{s+\omega_{c1}}\right)\left(-\frac{R_f}{R_i}\right)$$

$$=\left(-\frac{R_f}{R_i}\right)\cdot\frac{\omega_{c2}s}{s^2+(\omega_{c1}+\omega_{c2})s+\omega_{c1}\omega_{c2}}$$

Análise quantitativa

$$H(s)=\left(-\frac{R_f}{R_i}\right)\cdot\frac{\omega_{c2}s}{s^2+(\omega_{c1}+\omega_{c2})s+\omega_{c1}\omega_{c2}}$$

Forma padrão para filtros passa-faixa: $\longrightarrow$ $H_{PF}(s)=K\dfrac{\beta s}{s^2+\beta s+\omega_0^2}$

H(s) se aproximará da forma padrão se:

$$\omega_{c2}\gg\omega_{c1}\longrightarrow\omega_{c1}+\omega_{c2}\approx\omega_{c2}$$

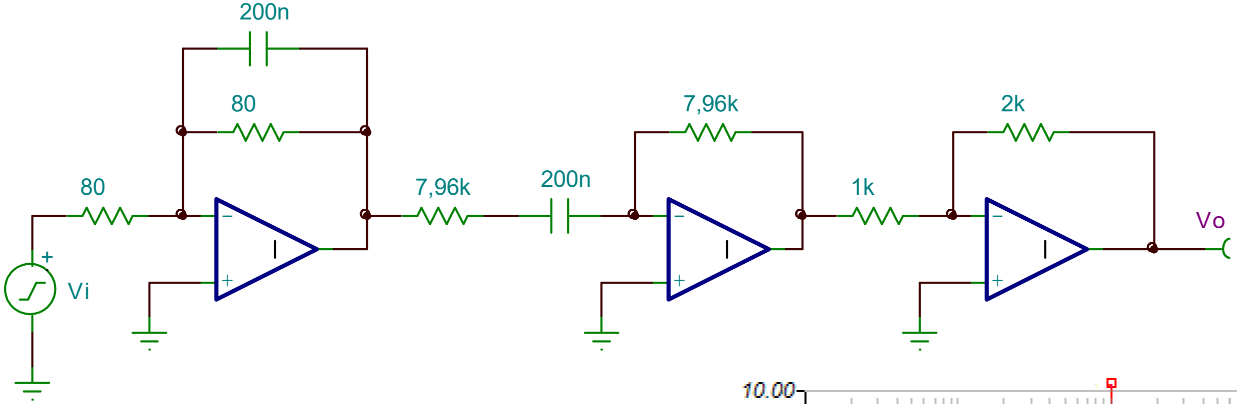
$$\downarrow$$

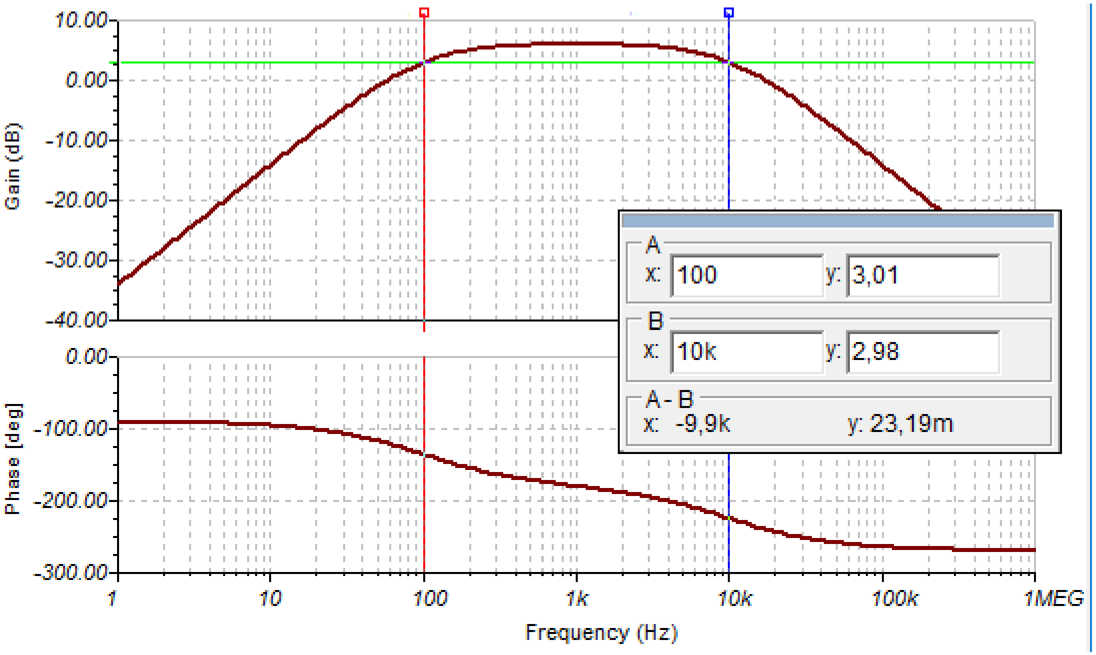
$$H(s)\approx\left(-\frac{R_f}{R_i}\right)\cdot\frac{\omega_{c2}s}{s^2+\omega_{c2}s+\omega_{c1}\omega_{c2}}\longrightarrow\begin{cases}\omega_0\approx\sqrt{(\omega_{c1}\omega_{c2})}\\ \beta=\omega_{c2}-\omega_{c1}\approx\omega_{c2}\end{cases}$$

Exemplo

- **Projeto de um filtro passa-faixa de faixa larga:**
  - **Frequências de corte fcH = 100 Hz e fcL = 10 kHz.**
  - **Ganho na faixa de passagem K = 2;**
  - **Use capacitores de 200 nF.**

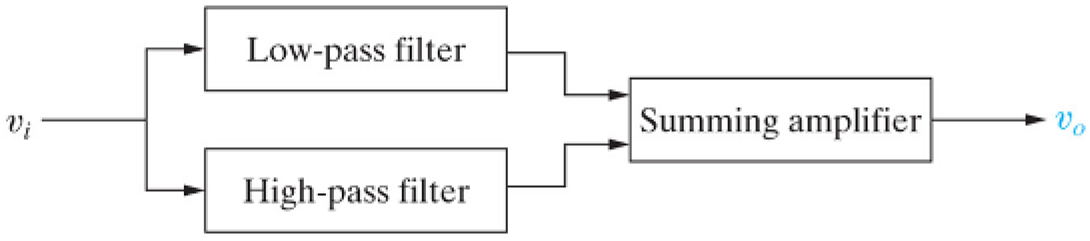
Exemplo


200n
80
80
7,96k
200n
7,96k
1k
2k
Vi
Vo


10.00
0.00
-10.00
-20.00
-30.00
-40.00
Gain (dB)
0.00
-100.00
-200.00
-300.00
Phase [deg]
1
10
100
1k
10k
100k
1MEG
Frequency (Hz)
A
x: 100
y: 3,01
B
x: 10k
y: 2,98
A - B
x: -9,9k
y: 23,19m

Filtros rejeita-faixa

- 1ª abordagem → conjunção de filtros de 1ª ordem.



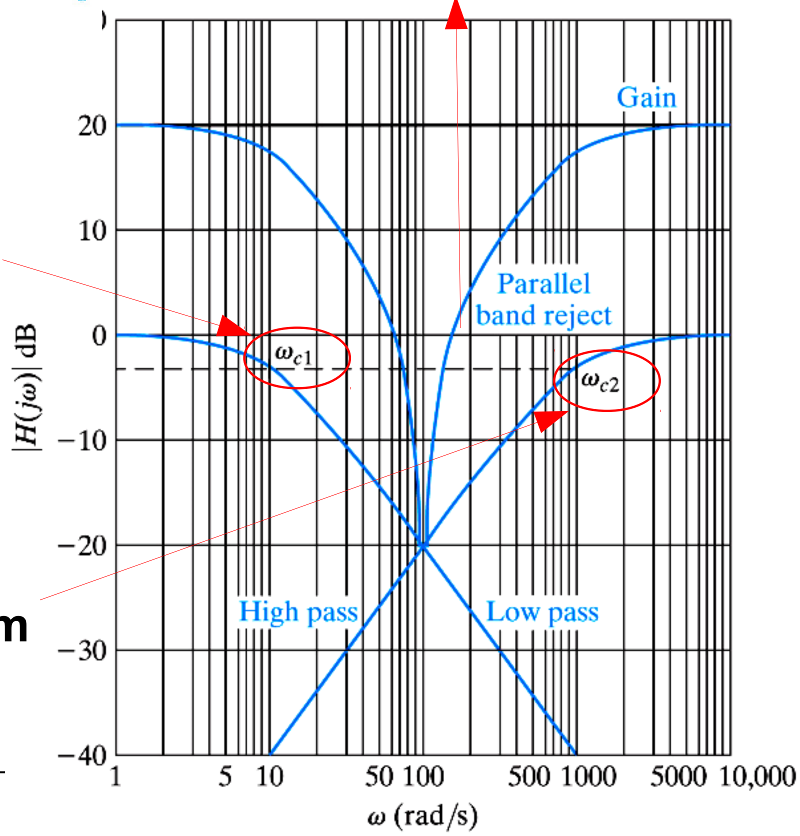
Amplificador

Filtro PB com

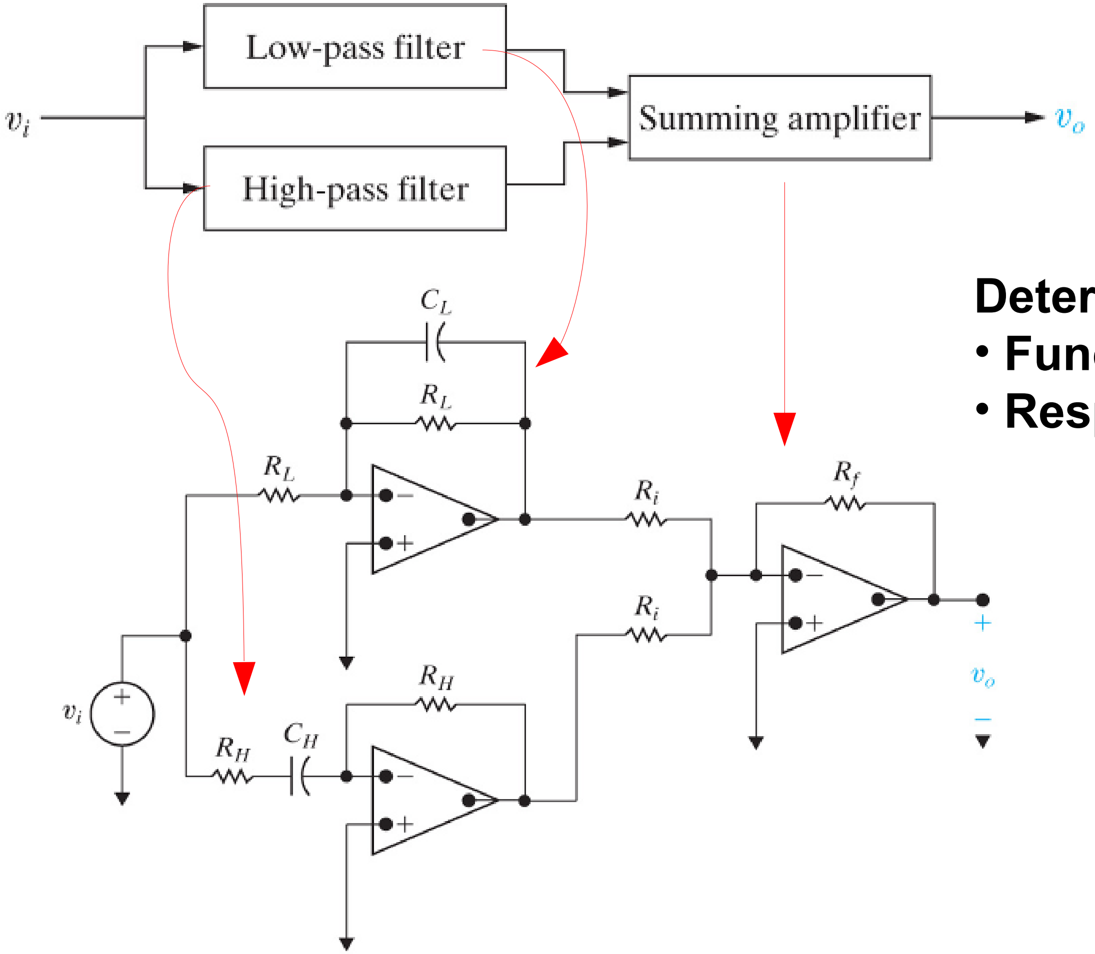
$\omega_{cL} = \omega_{c1}$

Filtro PA com

$\omega_{cH} = \omega_{c2}$



Análise quantitativa



Determine:

- **Função de transferência.**
- **Respostas de amplitude e fase.**

Análise quantitativa

$$H(s)=\left(\frac{R_f}{R_i}\right)\cdot\frac{s^2+2\omega_{c1}s+\omega_{c1}\omega_{c2}}{s^2+(\omega_{c1}+\omega_{c2})s+\omega_{c1}\omega_{c2}}$$

Forma padrão para filtros rejeita-faixa: $\longrightarrow$ $H_{RF}(s)=K\cdot\frac{s^2+\omega_0^2}{s^2+\beta s+\omega_0^2}$

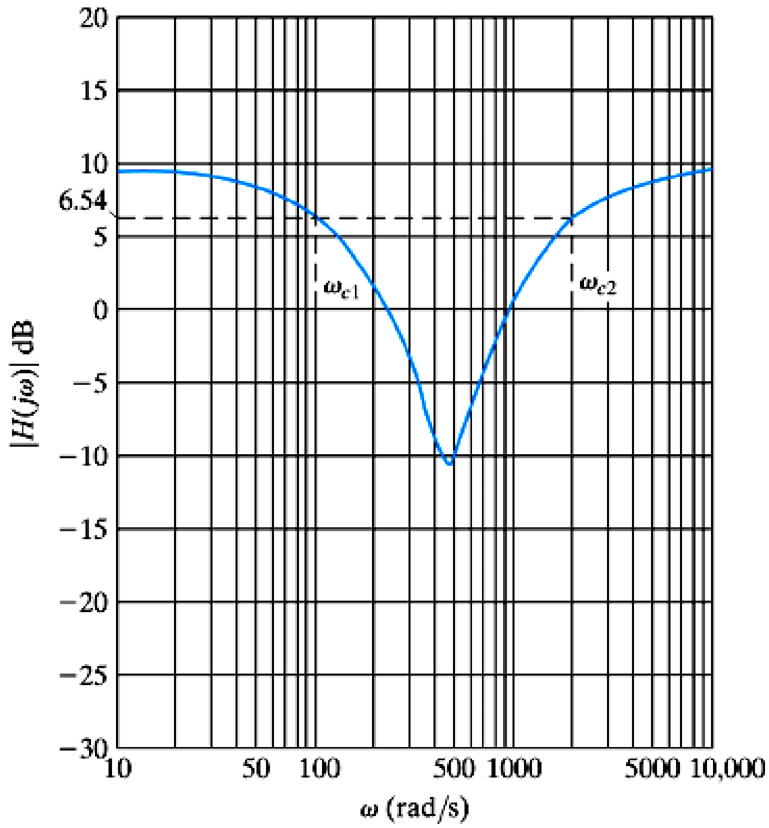
H(s) se aproximará da forma padrão se:

$$\omega_{c2}\gg\omega_{c1}\longrightarrow\omega_{c1}+\omega_{c2}\approx\omega_{c2}$$

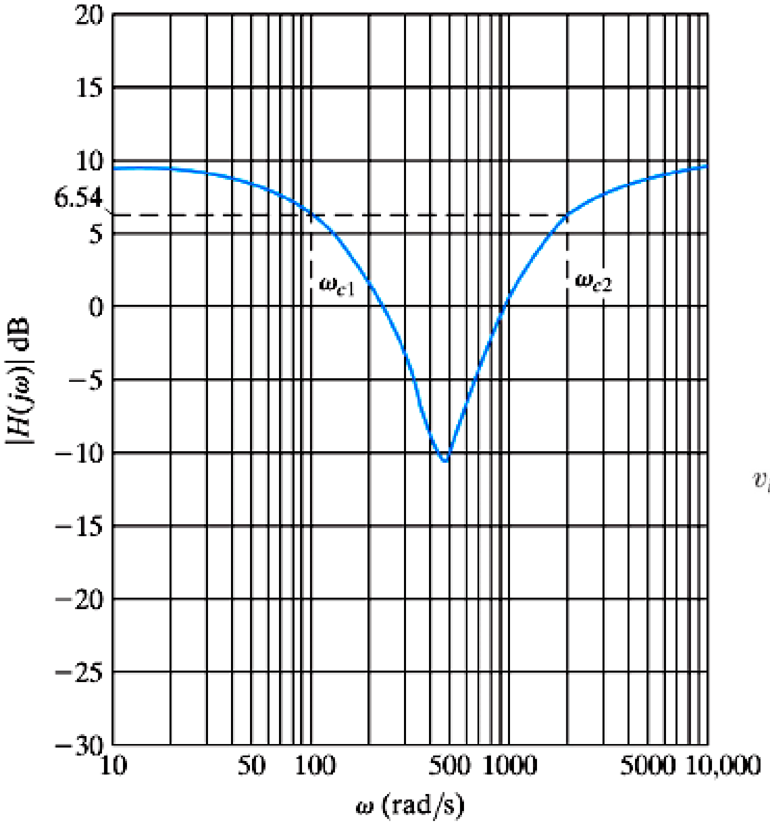
$$H(s)\approx\left(\frac{R_f}{R_i}\right)\cdot\frac{s^2+2\omega_{c1}s+\omega_{c1}\omega_{c2}}{s^2+\omega_{c2}s+\omega_{c1}\omega_{c2}}\longrightarrow\begin{cases}\omega_0\approx\sqrt{(\omega_{c1}\omega_{c2})}\\ \beta=\omega_{c2}-\omega_{c1}\approx\omega_{c2}\end{cases}$$

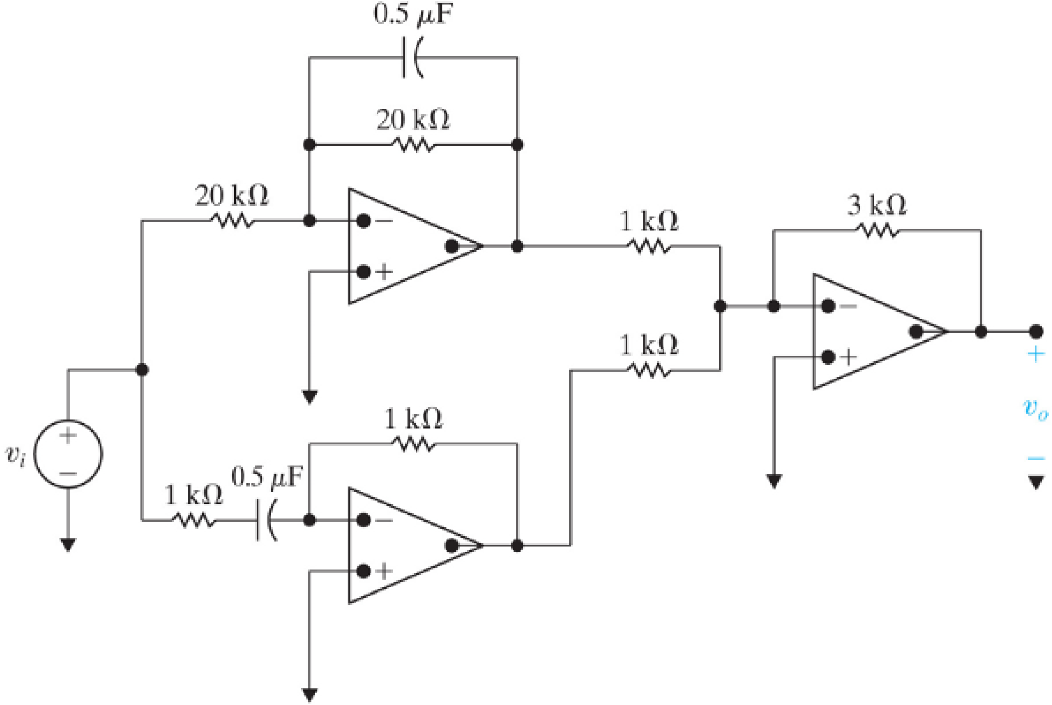
Exemplo

- **Projeto de um filtro rejeita-faixa.**
  - **Utilizar capacitores de 500 nF.**



Exemplo


20
15
10
6.54
5
0
−5
−10
−15
−20
−25
−30
ω_{c1}
ω_{c2}
$|H(j\omega)|$ dB
10
50
100
500
1000
5000
10,000
ω (rad/s)

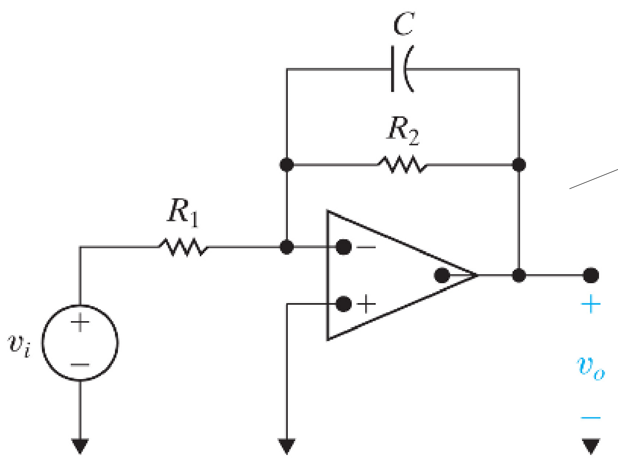

0.5 μF
20 kΩ
20 kΩ
1 kΩ
3 kΩ
1 kΩ
1 kΩ
1 kΩ
0.5 μF
v_i
v_o

Projeto utilizando filtros protótipos e mudança de escalas

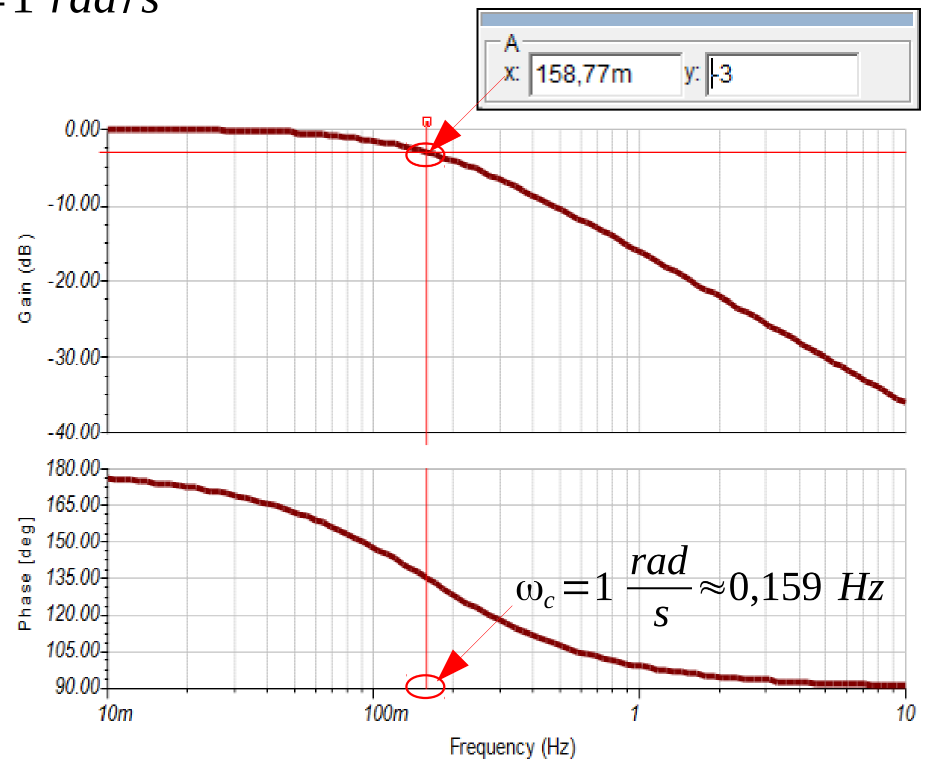
- **Filtros protótipos:**
  - **Construídos a partir de elementos normalizados:**
    R = 1Ω, L = 1H e C = 1F.
  - **Facilitam a realização dos projetos → cálculos mais simples.**
  - **Após o término, ajusta-se os elementos de forma a refletir a resposta em frequência desejada → *mudança de escala*.**

Exemplo

- **Filtro protótipo passa-baixas:**



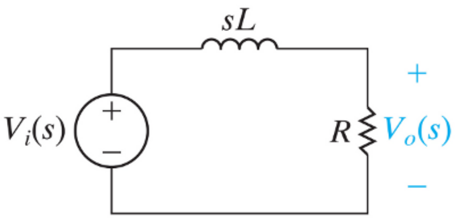
$$|H(0)|=1$$
$$\omega_c=1\ rad/s$$



$$|H(0)|=K=-\frac{R_2}{R_1}=-1 \longrightarrow \boxed{R_1=1\,\Omega} \quad \boxed{R_2=1\,\Omega}$$

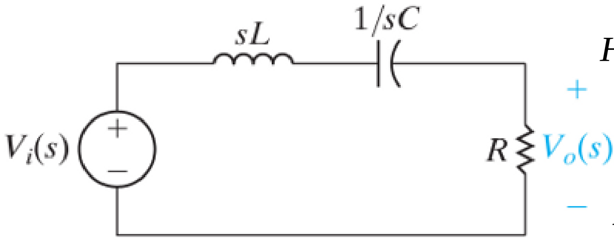
$$\omega_c=\frac{1}{R_2 C}=1\ rad/s \longrightarrow \boxed{C=1\,F}$$

Outros exemplos de filtros normalizados



$$H(s)=\frac{R/L}{s+R/L}=\frac{1}{s+1}$$

$$K=1,\ \ \omega_c=R/L=1$$

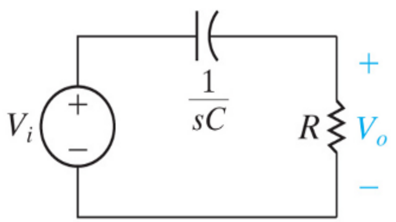


$$H(s)=\frac{(R/L)s}{s^2+(R/L)s+1/LC}$$

$$=\frac{s}{s^2+s+1}$$

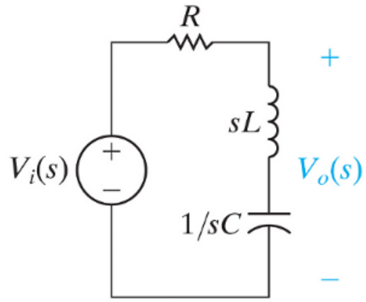
$$K=1\ \ \beta=R/L=1$$

$$\omega_0=\sqrt{1/LC}=1$$



$$H(s)=\frac{s}{s+1/RC}=\frac{s}{s+1}$$

$$K=1,\ \ \omega_c=1/RC=1$$

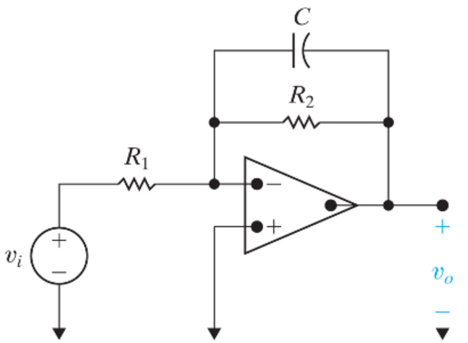


$$H(s)=\frac{s^2+1/(LC)}{s^2+(R/L)s+1/(LC)}$$

$$=\frac{s^2+1}{s^2+s+1}$$

$$K=1,\ \ \beta=R/L=1$$

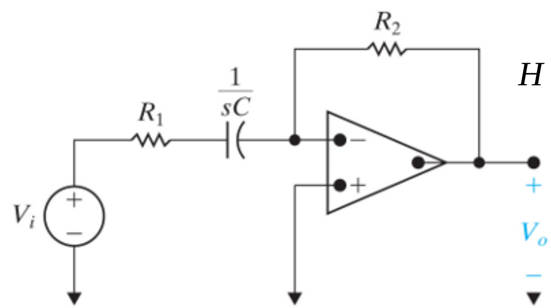
$$\omega_0=\sqrt{1/LC}=1$$



$$H(s)=-\frac{R_2}{R_1}\cdot\frac{1/(R_2C)}{s+1/(R_2C)}$$

$$=-1\frac{1}{s+1}$$

$$K=1,\ \ \omega_c=1$$



$$H(s)=-\frac{R_2}{R_1}\cdot\frac{s}{s+1/(R_1C)}$$

$$=-1\cdot\frac{s}{s+1}$$

$$K=1,\ \ \omega_c=1$$

Mudança de escala

- **Faça a frequência de corte ω_c ou a frequência central ω_0 iguais a 1 rad/s.**
- **Faça o capacitor C = 1F.**
- **Calcule os valores dos resistores e indutores.**
  - **Ganho na faixa de passagem.**
  - **ω_c ou ω_0 permaneçam em 1 rad/s.**
- **Ajuste os valores dos componentes para adequar às frequências desejadas:**
  - **Ganho de amplitude.**
  - **Ganho de frequência.**

Projeto utilizando filtros protótipos e mudanças de escalas

- **Mudança de escala de amplitude:**
  - **Altera-se os componentes de forma que as impedâncias sejam multiplicadas pelo ganho de amplitude ka:**

$$R' = k_a R,$$
$$L' = k_a L,$$
$$C' = \frac{1}{k_a} C \qquad k_a > 0$$

$R, L, C \longrightarrow$ **Elementos originais.**

$R', L', C' \longrightarrow$ **Elementos para a nova amplitude.**

- **Mudança de escala de frequência:**
  - **Altera-se os componentes de forma que tenham *a mesma* impedância na nova frequência.**

$$R' = R, \quad L' = \frac{L}{k_f}$$
$$C' = \frac{C}{k_f} \qquad k_f > 0$$

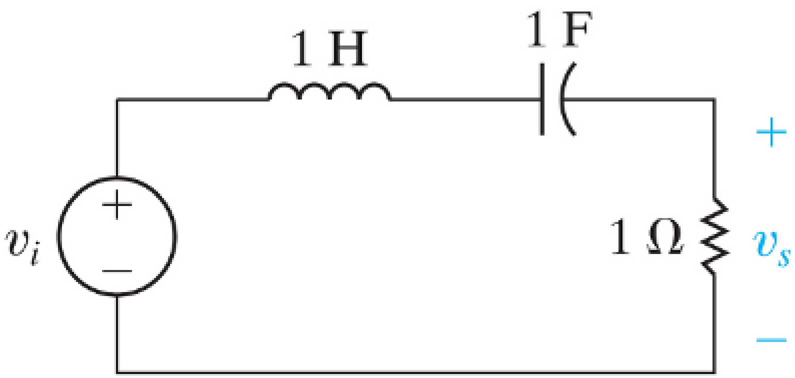
Projeto utilizando filtros protótipos e mudanças de escalas

- **Aplicando ambas mudanças:**

$$\boxed{\begin{aligned} R' &= k_a R, & k_a &> 0 \\ L' &= \frac{k_a}{k_f} L, & k_f &> 0 \\ C' &= \frac{1}{k_a k_f} C & & \end{aligned}}$$

Exemplo

- **Circuito RLC série:**
  - **Circuito protótipo.**
  - **Altere os componente de modo que** $Q'=1,\ f_0'=500\,Hz$
  - **Utilize capacitor de 2 μF.**

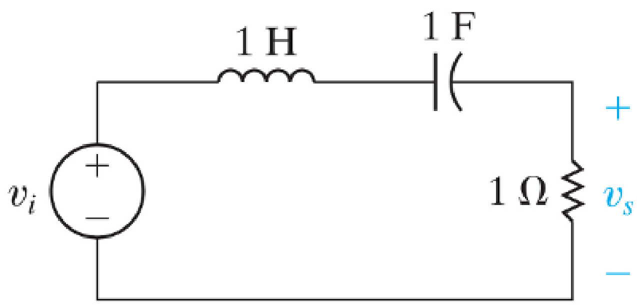


$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}=1\,rad/s,$$

$$\beta=\frac{R}{L}=1\,rad/s,$$

$$Q=\frac{\omega_0}{\beta}=1$$

Exemplo



$$\omega_0 = 1\,rad/s \longrightarrow \omega_0' = 2\pi 500\,rad/s$$

$$k_f = \frac{2\pi 500}{1} = 3.141{,}59$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\beta = \frac{R}{L}$$

$$Q = \frac{\omega_0}{\beta}$$

$$R' = k_a R,$$

$$L' = \frac{k_a}{k_f} L,$$

$$C' = \frac{1}{k_a k_f} C$$

Uma vez que C' foi restrito a $2\mu F$

$$2\mu F = \frac{1}{k_a \cdot 3.141{,}59}\,1 \longrightarrow k_a = 159{,}155$$

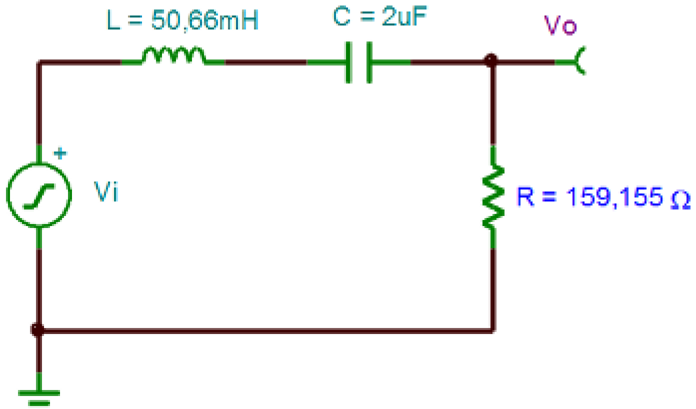
Uma vez que ω_0 foi restrita a $2\pi 500\,rad/s$

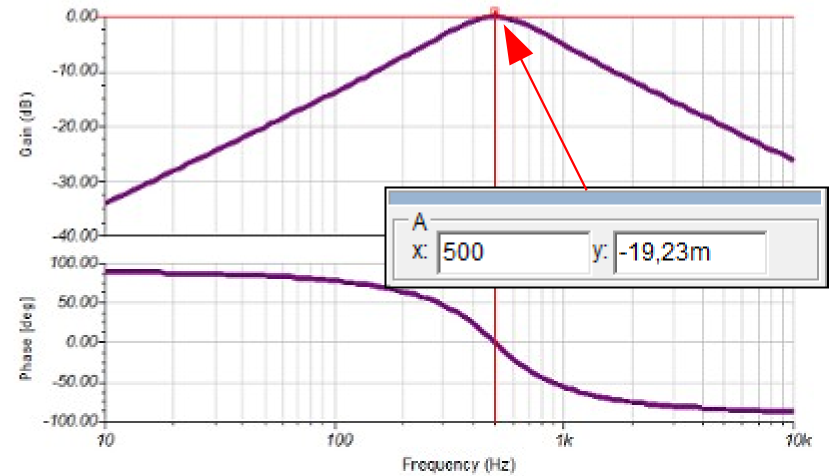
$$L' = \frac{159{,}155}{3.141{,}59} \cdot 1 \longrightarrow L' = 50{,}66\,mH$$

Para manter o mesmo Q:

$$R' = k_a R = 159{,}155 \cdot 1 \longrightarrow R' = 159{,}155\,\Omega$$

Exemplo



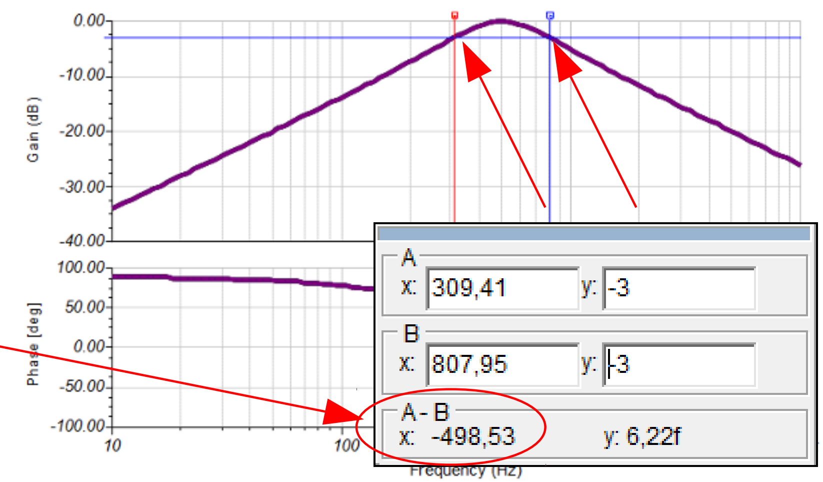


$$\omega_0=\sqrt{\frac{1}{LC}}=3.141{,}59\,\frac{rad}{s}=2\pi\,(500\,Hz)$$

$$f_0=\frac{\omega_0}{2\pi}=500\,Hz$$

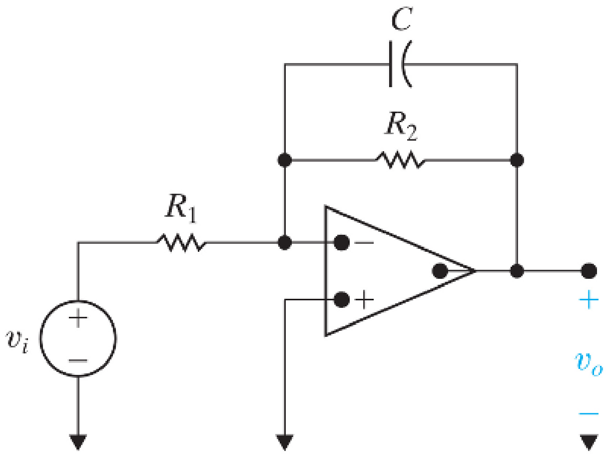
$$\beta=\frac{R}{L}=3.141{,}59\,\frac{rad}{s}=2\pi\,(500\,Hz)$$

$$Q=\frac{\omega_0}{\beta}=1$$



Exemplo

- **Projeto de um filtro ativo passa-baixas:**
  - **Modifique o filtro protótipo passa-baixas visto anteriormente para que tenha um ganho de amplitude de 5 e uma frequência de corte de 1 kHz. Utilize um capacitor de 10 nF.**



Filtro normalizado:

$R_1 = 1\,\Omega$ $\quad K = 1$

$R_2 = 1\,\Omega$ $\quad \omega_c = 1\ rad/s$

$C = 1\,F$

Exemplo

Cálculo do ganho de frequência:

$$f_c = 1\,kHz \longrightarrow \omega_c' = 2\pi 1000 = 2000\pi\, rad/s \longrightarrow k_f = \frac{\omega_c'}{\omega_c} = \frac{2000\pi}{1} = 2000\pi$$

$$R' = k_a R,$$

$$L' = \frac{k_a}{k_f} L,$$

$$C' = \frac{1}{k_a k_f} C$$

Uma vez que C' foi restrito a $C' = 10\,nF$

$$10\,nF = \frac{1}{k_a \cdot 2000\pi}\, 1 \longrightarrow k_a = 15915{,}5$$

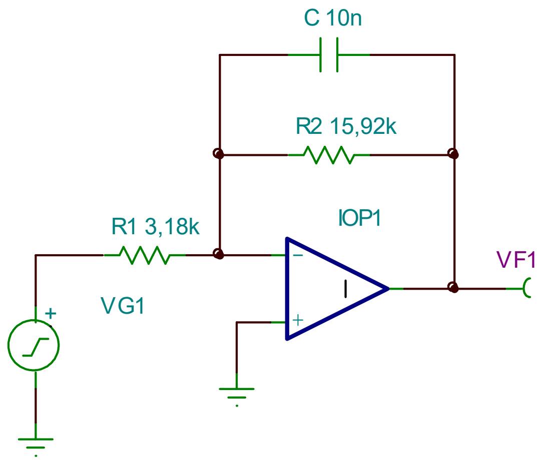
O resistor R2 define a frequência de corte, portanto:

$$R_2' = k_a R_2 = 15.915{,}5 \cdot 1 \longrightarrow R_2' = 15.915{,}5\,\Omega$$

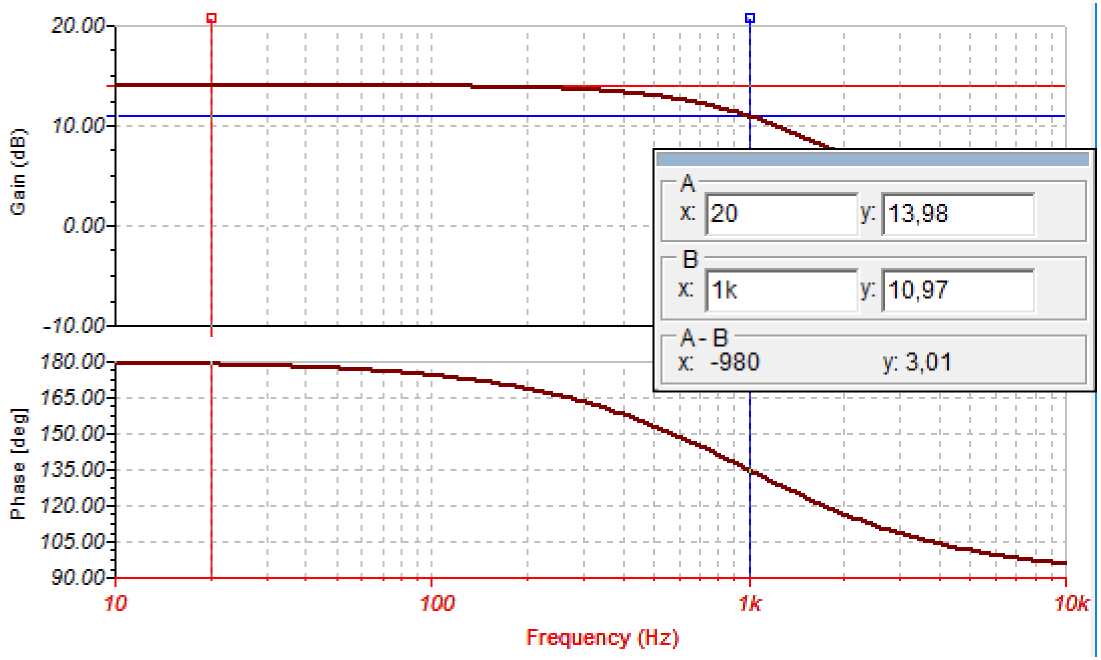
O resistor R1 define o ganho:

$$K = 5 = \frac{R_2'}{R_1'} \longrightarrow R_1' = 3.183{,}1\,\Omega$$

Exemplo



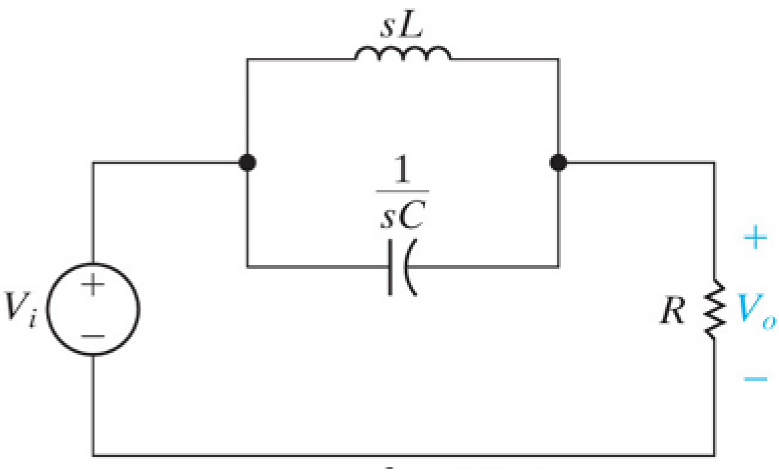
C 10n
R2 15,92k
R1 3,18k
IOP1
VF1
VG1



20.00
10.00
0.00
-10.00
Gain (dB)
180.00
165.00
150.00
135.00
120.00
105.00
90.00
Phase [deg]
10
100
1k
10k
Frequency (Hz)
A
x: 20
y: 13,98
B
x: 1k
y: 10,97
A - B
x: -980
y: 3,01

Exemplo

- **Faça o projeto de um filtro rejeita faixa RLC paralelo, conforme mostrado na figura abaixo, considerando:**
  - **Frequência central de 3 kHz.**
  - **Que o indutor seja de 5 mH.**



$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\beta = \frac{1}{RC}$$

$$Q = \frac{\omega_0}{\beta}$$

Exemplo

Cálculo do ganho de frequência:

$$f_0 = 3\,kHz \longrightarrow \omega_0' = 2\pi 3000 = 6000\pi\, rad/s \longrightarrow k_f = \frac{\omega_c'}{\omega_c} = \frac{6000\pi}{1} = 6000\pi$$

$$R' = k_a R,$$

$$L' = \frac{k_a}{k_f} L,$$

$$C' = \frac{1}{k_a k_f} C$$

Uma vez que L' foi restrito a $L' = 5\,mH$

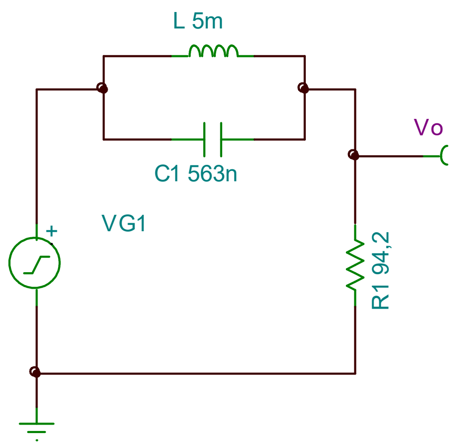
$$5\,mH = \frac{k_a}{6000\pi} \cdot 1 \longrightarrow k_a = 94{,}2$$

Portanto:

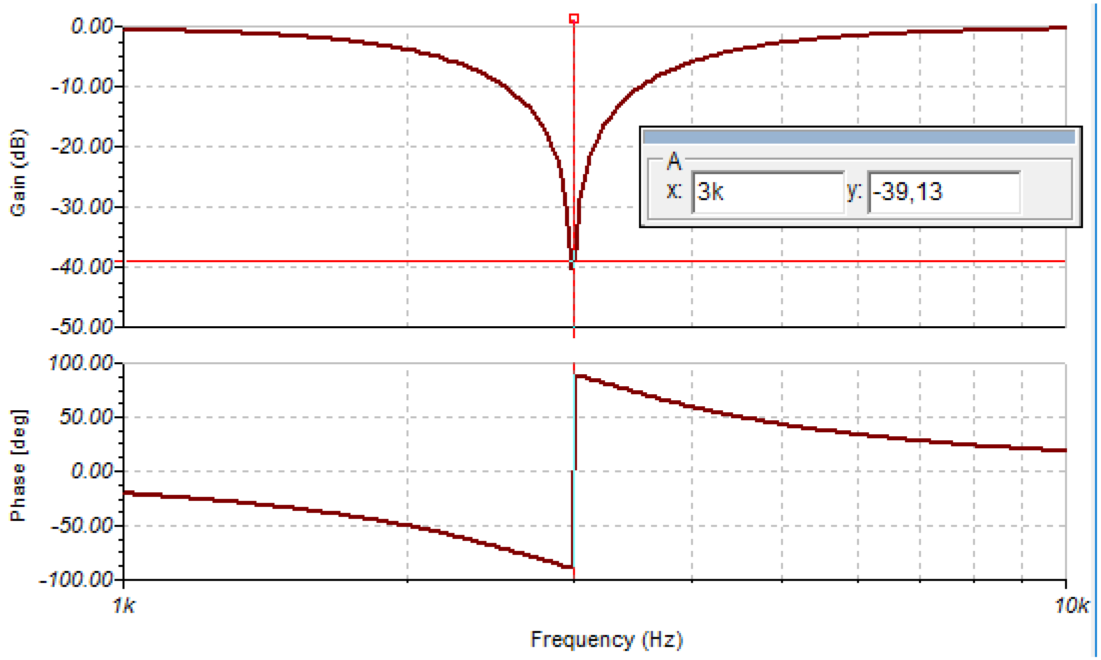
$$R' = 94{,}2 \cdot 1 \longrightarrow R' = 94{,}2$$

$$C' = \frac{1}{94{,}2 \cdot 6000\pi} \cdot 1 \longrightarrow C' = 563\,nF$$

Exemplo



L 5m
C1 563n
Vo
VG1
+
R1 94,2



0.00
-10.00
-20.00
-30.00
-40.00
-50.00
Gain (dB)
A
x: 3k
y: -39,13
100.00
50.00
0.00
-50.00
-100.00
Phase [deg]
1k
10k
Frequency (Hz)