# Análise de circuitos utilizando a série de Fourier

# Introdução e motivação

- **Análise por Fourier → por quê?**
  - **Nós acabamos de estudar *resposta em frequência*:**

$$x(t)=A\cos(\omega t+\phi) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)=A\,\underbrace{|H(j\omega)|}_{\text{Resposta de amplitude}}\cos[\omega t+\phi+\underbrace{\theta(\omega)}_{\text{Resposta de fase}}]$$

**Resposta de amplitude**

**Resposta de fase**

  - **Mas, como calcular a reposta para uma entrada *<u>não senoidal</u>*??**

$x(t)=f(t)$ *qualquer* → **Decompor a entrada em suas *componentes de frequência*** → **Calcula-se a resposta a cada componente.**

**Decompor a entrada em suas *componentes de frequência*** → $\boxed{\textbf{ESPECTRO DE FREQUÊNCIAS}}$

**Calcula-se a resposta a cada componente.** → $\boxed{\textbf{PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO}}$

# Introdução e motivação

- **Além disso, a análise por Fourier nos permitirá entender outros conceitos:**
  - **Como calcular o valor eficaz de funções periódicas genéricas.**
  - **Como é a composição da potência ativa de sinais periódicos genéricos.**
  - **Conceitos de energia e espectro de energia de um sinal.**
- **Estudo em duas partes:**

**Cálculo da série ou da transformada de Fourier → determinação do espectro de frequências de um sinal.**

→

**Cálculo da resposta do circuito com base no espectro de frequências.**

**Utilizando a análise em regime permanente senoidal (Circuitos II).**

**Utilizando funções de transferência / resposta em frequência.**

# Princípio da superposição

- **Princípio da superposição:**

Estímulo periódico "arbitrário"

↓ Série de Fourier

1º harmônico → Resposta ao 1º harmônico

2º harmônico → Resposta ao 2º harmônico

⋮ ⋮

n-ésimo harmônico → Resposta ao n-ésimo harmônico

Transformada fasorial ou função de transferência

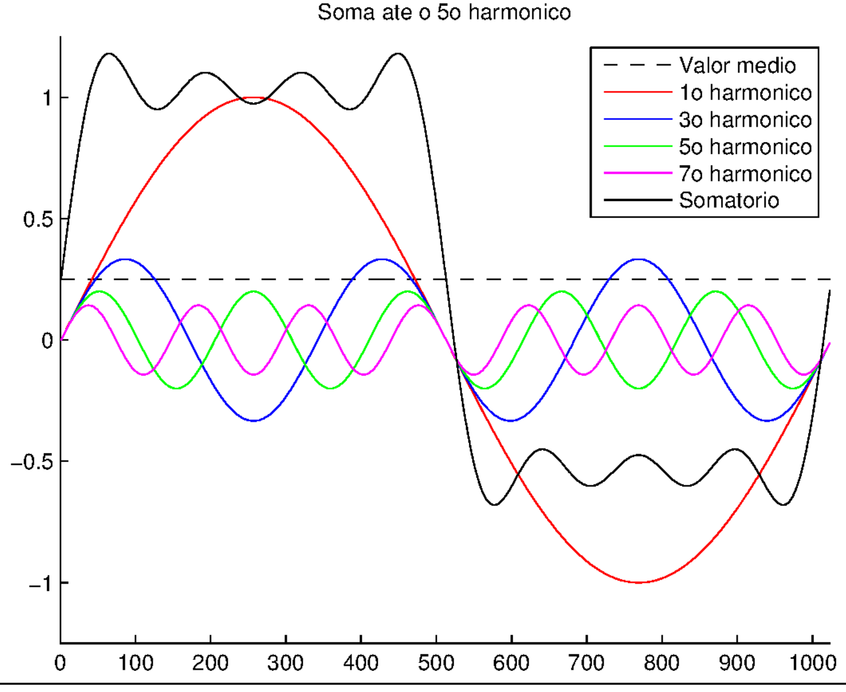
↓ Transformada fasorial inversa

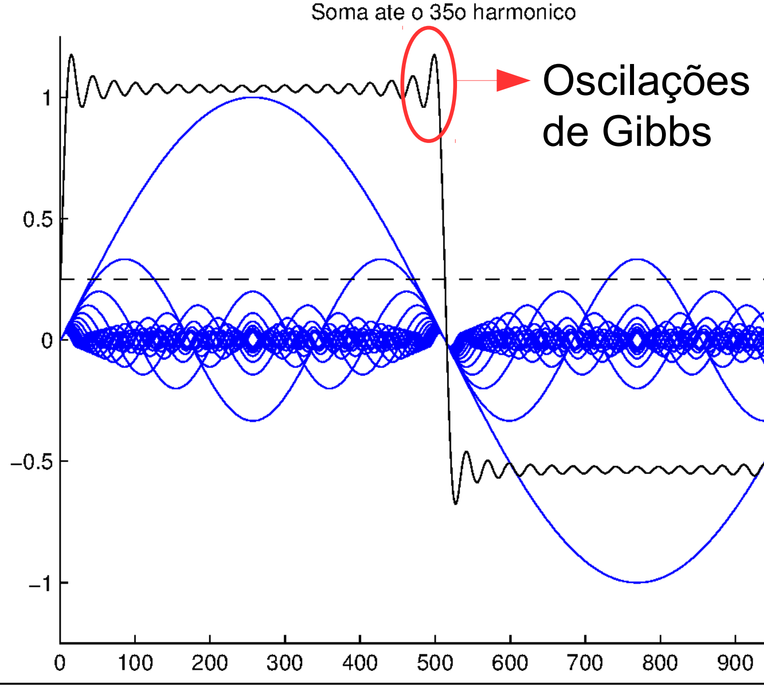
Resposta ao estímulo "arbitrário" ← Soma

# Série de Fourier

- **Funções periódicas → podem ser representadas como uma soma infinita de funções seno e cosseno.**

$$f(t) = a_v + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \, sen(n\omega_0 t) \right], \quad n \in \mathbb{Z}$$



# Série de Fourier

- **Coeficientes de Fourier**

$$f(t)=a_v+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(n\omega_0 t)+b_n sen(n\omega_0 t)\right],\quad n\in\mathbb{Z}$$

$a_v$ → valor médio ou componente contínua.

$a_n$ → amplitude da n-ésima componente cossenoidal.

$b_n$ → amplitude da n-ésima componente senoidal.

$\omega_0$ → frequência fundamental.

$n\omega_0$ → n-ésimo harmônico.

# Condições de Dirichlet

- **A série de Fourier existe se:**
  - ***f*(*t*) é unívoca → para cada elemento do domínio original corresponde um único elemento do contra-domínio.**
  - ***f*(*t*) tem um número finito de descontinuidades no período T.**
  - ***f*(*t*) tem um número finito de máximos e mínimos no período T.**
  - **A integral do valor absoluto no período existe:**

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \left|f(t)\right| dt < \infty$$

# Determinação dos coeficientes de Fourier

- **Coeficientes de Fourier → produtos internos entre f(t) e as funções senoidais e cossenoidais.**
  - **Medida de similaridade entre a função e cada termo senoidal ou cossenoidal.**

$$f(t) = a_v + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n sen(n\omega_0 t) \right], \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{a_v = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\, dt}$$

$$\boxed{a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos(n\omega_0 t)\, dt}$$

$$\boxed{b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\, sen(n\omega_0 t)\, dt}$$

# Deduções

- **Determinação de** $a_v$
  - **Integra-se ambos os lados da equação em um período.**

$$f(t)=a_v+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(n\omega_0 t)+b_n sen(n\omega_0 t)\right]$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,dt=\int_{t_0}^{t_0+T}\left\{a_v+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(n\omega_0 t)+b_n sen(n\omega_0 t)\right]\right\}dt$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,dt=\int_{t_0}^{t_0+T} a_v\,dt+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cancelto{0}{\int_{t_0}^{t_0+T} a_n\cos(n\omega_0 t)\,dt}+\cancelto{0}{\int_{t_0}^{t_0+T} b_n sen(n\omega_0 t)\,dt}\right]$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,dt=a_v\cdot T \longrightarrow \boxed{a_v=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,dt}$$

# Deduções

- **Determinação de** $a_n$
  - **Multiplica-se ambos os lados por** $\cos(k\omega_0 t)$

$$f(t)=a_v+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(n\omega_0 t)+b_n sen(n\omega_0 t)\right]$$

$$f(t)\cdot\cos(k\omega_0 t)=a_v\cdot\cos(k\omega_0 t)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(n\omega_0 t)\cdot\cos(k\omega_0 t)+b_n sen(n\omega_0 t)\cdot\cos(k\omega_0 t)\right]$$

  - **Integra-se ambos os lados da equação.**

Relações trigonométricas.
Funções ortogonais.

$$\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cdot\cos(k\omega_0 t)\,dt=\int_{t_0}^{t_0+T}\cancelto{0}{a_v\cdot\cos(k\omega_0 t)\,dt}+$$

0 se n ≠ k, T/2 se n = k

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_{t_0}^{t_0+T} a_n\cos(n\omega_0 t)\cdot\cos(k\omega_0 t)\,dt+\int_{t_0}^{t_0+T}\cancelto{0}{b_n sen(n\omega_0 t)\cdot\cos(k\omega_0 t)\,dt}\right]$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cdot\cos(k\omega_0 t)\,dt=0+a_k\cdot\frac{T}{2}+0 \longrightarrow \boxed{a_n=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cdot\cos(n\omega_0 t)\,dt}$$

# Deduções

- **Determinação de** $b_n$
  - **Multiplica-se ambos os lados por** $sen(k\omega_0 t)$

$$f(t)=a_v+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(n\omega_0 t)+b_n sen(n\omega_0 t)\right]$$

$$f(t)\cdot sen(k\omega_0 t)=a_v\cdot sen(k\omega_0 t)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(n\omega_0 t)\cdot sen(k\omega_0 t)+b_n sen(n\omega_0 t)\cdot sen(k\omega_0 t)\right]$$

  - **Integra-se ambos os lados da equação.**

Relações trigonométricas.
Funções ortogonais.

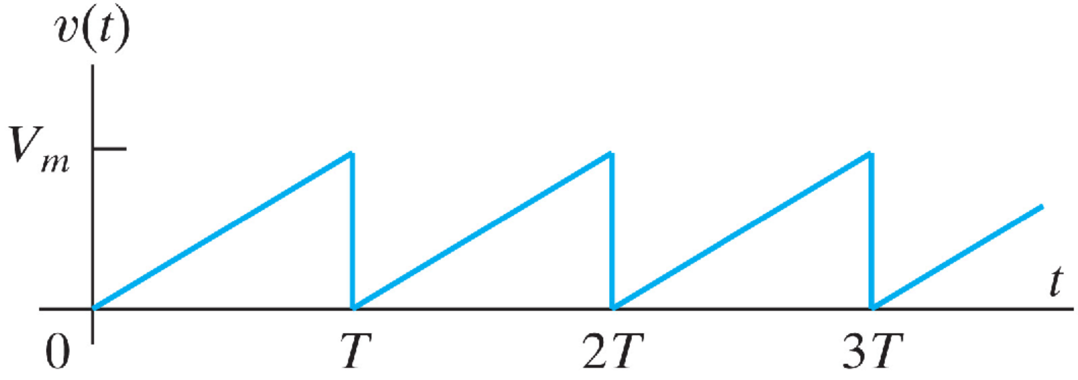
0 se n ≠ k, T/2 se n = k

$$\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cdot sen(k\omega_0 t)\,dt=\cancelto{0}{\int_{t_0}^{t_0+T} a_v\cdot sen(k\omega_0 t)\,dt}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cancelto{0}{\int_{t_0}^{t_0+T} a_n\cos(n\omega_0 t)\cdot sen(k\omega_0 t)\,dt}+\int_{t_0}^{t_0+T} b_n\, sen(n\omega_0 t)\cdot sen(k\omega_0 t)\,dt\right]$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cdot sen(k\omega_0 t)\,dt=0+0+b_k\cdot\frac{T}{2}\longrightarrow\boxed{b_n=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cdot sen(n\omega_0 t)\,dt}$$

# Exemplo

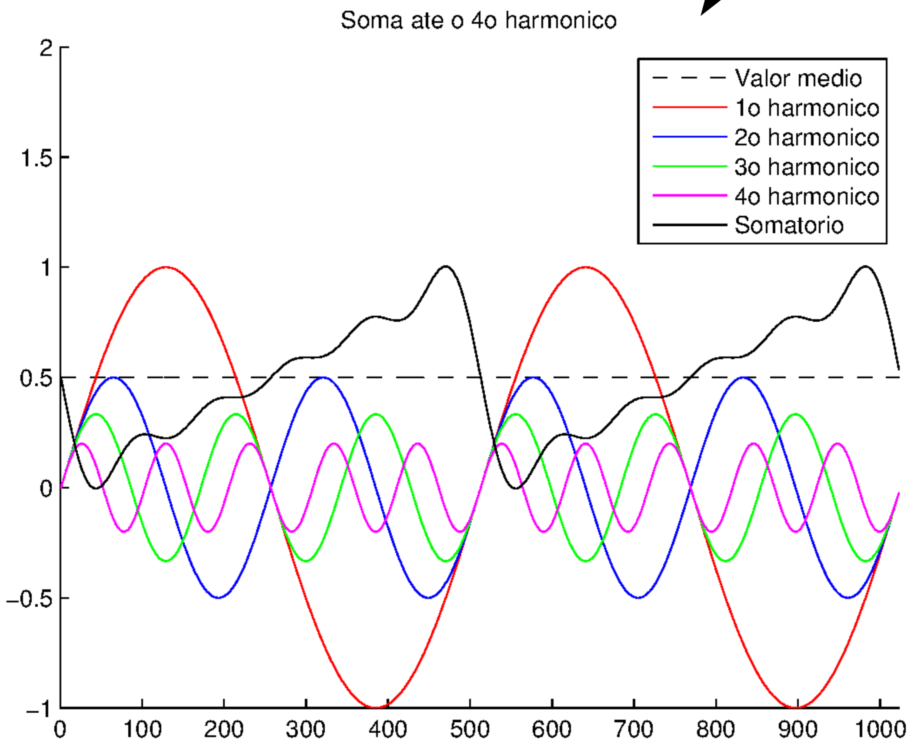
- **Determinar a série de Fourier para a tensão periódica definida pela forma de onda abaixo:**

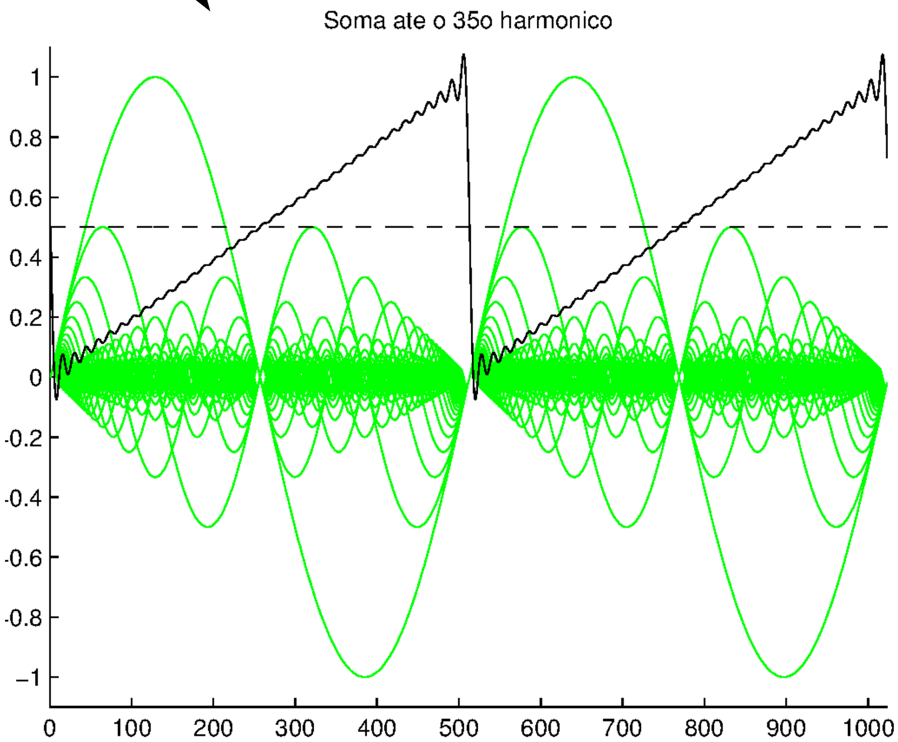


# Solução:

$$v(t)=\frac{V_m}{2}-\frac{V_m}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sen(n\omega_0 t)}{n}, \qquad n\in\mathbb{Z}$$

ATENÇÃO: harmônicos normalizados



# Representações alternativas para a Série de Fourier

- **Forma trigonométrica alternativa:**

$$f(t) = a_v + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n sen(n\omega_0 t) \right]$$

Mas: $sen\,\theta = \cos(\theta - 90^o) \longrightarrow$ $f(t) = a_v + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \cos(n\omega_0 t - 90^o) \right]$

Aplicando a representação fasorial:

$$P\left\{ a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \cos(n\omega_0 t - 90^o) \right\} = a_n e^{j0^o} + b_n e^{-j90^o} = a_n - jb_n = \boxed{A_n e^{j\theta_n}}$$

Onde: $\boxed{A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \qquad \theta_n = \arctan\left( \frac{-b_n}{a_n} \right)}$

Aplicando a representação inversa:

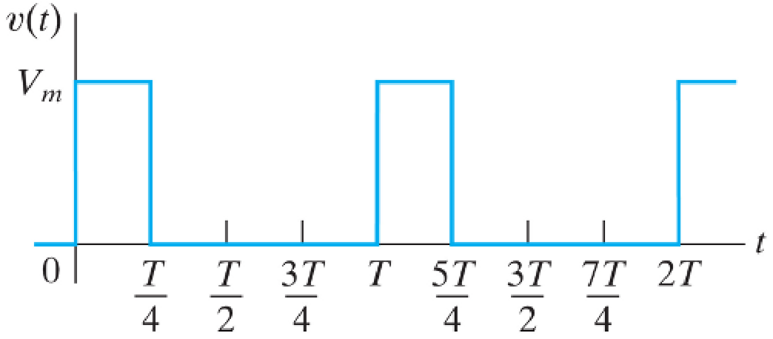
$$P^{-1}\left\{ A_n e^{j\theta_n} \right\} = A_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

Retornando à função:

$$\boxed{f(t) = a_v + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) \right]} = a_v + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos\left[ n\omega_0 t + \arctan\left( \frac{-b_n}{a_n} \right) \right]$$

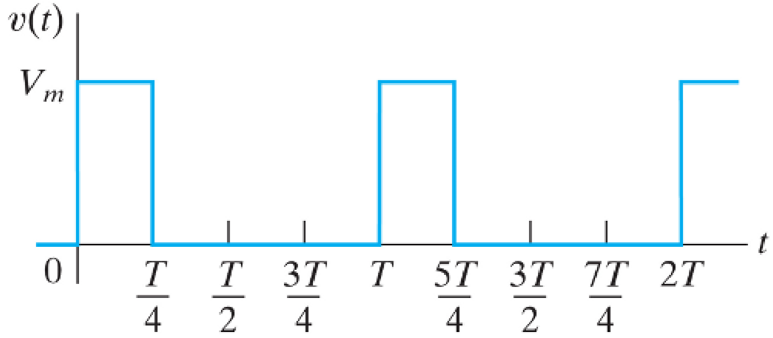
# Exemplo

- **Representação da série de Fourier na forma trigonométrica alternativa:**




$$f(t) = a_v + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) \right]$$

# Exemplo




$$v(t)=\frac{V_m}{4}+\frac{\sqrt{2}\,V_m}{\pi}\cos(\omega_0 t-45^o)+\frac{V_m}{\pi}\cos(2\omega_0 t-90^o)+\frac{\sqrt{2}\,V_m}{3\pi}\cos(3\omega_0 t-135^o)+\cdots$$

# Representações alternativas para a Série de Fourier

- **Forma exponencial → obtida por relações de Parseval**

$$f(t)=a_v+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(n\omega_0 t)+b_n sen(n\omega_0 t)\right] \longrightarrow$$

Mas: $\cos(n\omega_0 t)=\dfrac{e^{jn\omega_0 t}+e^{-jn\omega_0 t}}{2}$

$sen(n\omega_0 t)=\dfrac{e^{jn\omega_0 t}-e^{-jn\omega_0 t}}{2j}$

$$f(t)=a_v+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\frac{e^{jn\omega_0 t}+e^{-jn\omega_0 t}}{2}+b_n\frac{e^{jn\omega_0 t}-e^{-jn\omega_0 t}}{2j}\right]$$

$$=a_v+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n-jb_n}{2}e^{jn\omega_0 t}+\frac{a_n+jb_n}{2}e^{-jn\omega_0 t}\right]$$

Continua...

# Representações alternativas para a Série de Fourier

$$f(t)=a_v+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n-jb_n}{2}e^{jn\omega_0 t}+\frac{a_n+jb_n}{2}e^{-jn\omega_0 t}\right]$$

Fazendo: $$C_n=\frac{a_n-jb_n}{2}=\frac{1}{2}(a_n-jb_n)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\cos(n\omega_0 t)dt-j\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)sen(n\omega_0 t)dt\right]$$

$$=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\underbrace{\boxed{[\cos(n\omega_0 t)-j\,sen(n\omega_0 t)]}}_{e^{-jn\omega_0 t}}dt$$

$$\boxed{C_n=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt}$$

Equação de análise na forma exponencial

Continua...

# Representações alternativas para a Série de Fourier

- **Obtendo a equação de síntese na forma exponencial:**

$$f(t)=a_v+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\frac{e^{jn\omega_0 t}+e^{-jn\omega_0 t}}{2}+b_n\frac{e^{jn\omega_0 t}-e^{-jn\omega_0 t}}{2j}\right]=a_v+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n-jb_n}{2}e^{jn\omega_0 t}+\frac{a_n+jb_n}{2}e^{-jn\omega_0 t}\right]$$

Como $C_n=\dfrac{a_n-jb_n}{2}$ podemos escrever: $f(t)=a_v+\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n e^{jn\omega_0 t}+C_n{}^{*}e^{-jn\omega_0 t}\right]$

Para $n=0 \longrightarrow C_0=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)e^{-j0\omega_0 t}dt=\dfrac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)dt=a_v \longrightarrow \boxed{C_0=a_v}$

Portanto: $f(t)=C_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n e^{jn\omega_0 t}+C_n^{*}e^{-jn\omega_0 t}\right]=C_0+\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{jn\omega_0 t}+\sum_{n=1}^{\infty}C_n^{*}e^{-jn\omega_0 t}$

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n e^{jn\omega_0 t}+\sum_{n=1}^{\infty}C_n^{*}e^{-jn\omega_0 t}$$

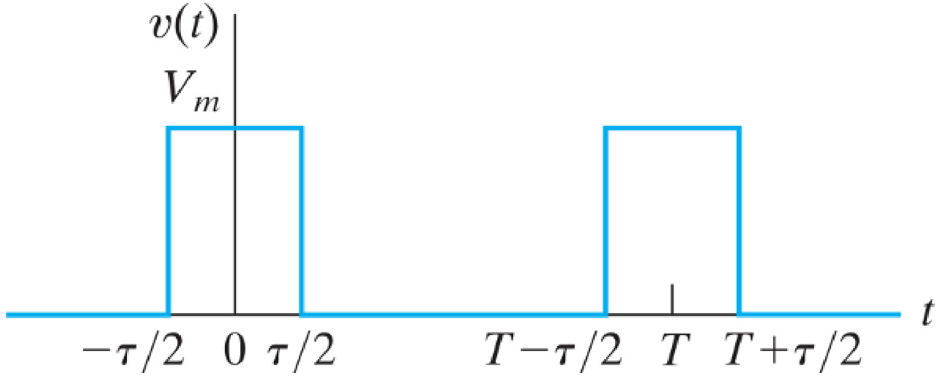
Mas:

$$\sum_{n=1}^{\infty}C_n^{*}e^{-jn\omega_0 t}=\sum_{n=-1}^{-\infty}C_n e^{jn\omega_0 t} \longrightarrow f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n e^{jn\omega_0 t}+\sum_{n=-1}^{-\infty}C_n e^{jn\omega_0 t} \longrightarrow \boxed{f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{jn\omega_0 t}}$$

Equação de síntese na forma exponencial

# Exemplo

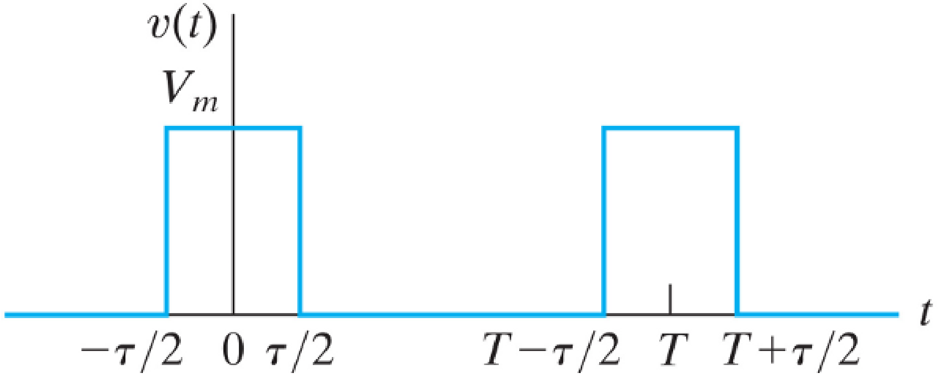
- **Representação da série de Fourier na forma exponencial.**




$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

# Exemplo




$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$C_n=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt$$

$$v(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{V_m}{n\pi}\cdot sen\left(n\omega_0\frac{\tau}{2}\right) e^{jn\omega_0 t}$$

# Resumindo: representações para a Série de Fourier

- **Forma trigonométrica:**

$$f(t)=a_v+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(n\omega_0 t)+b_n sen(n\omega_0 t)\right] \longrightarrow \text{onde: } \begin{cases} a_v=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,dt \\ a_n=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt \\ b_n=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,sen(n\omega_0 t)\,dt \end{cases}$$

- **Forma trigonométrica alternativa:**

$$f(t)=a_v+\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos(n\omega_0 t+\theta_n)\right] \longrightarrow \text{onde: } \begin{cases} A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2} \\ \theta_n=\arctan\left(\dfrac{-b_n}{a_n}\right) \end{cases}$$

- **Forma exponencial:**

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \longrightarrow \text{onde: } \begin{cases} C_n=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,e^{-jn\omega_0 t}\,dt \\ \quad =\dfrac{1}{2}(a_n-j\,b_n) \quad =\dfrac{1}{2}A_n e^{-j\theta_n} \end{cases}$$

# Espectros de amplitude e fase

- **Representação gráfica das amplitudes e fases de cada termo da série de Fourier.**
- **Geralmente utilizando a forma exponencial. Ex.:**
  - **Suponha que a decomposição de uma função resulta em:**

$$v(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{sen(n\pi/5)}{n\pi/5}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{jn\omega_0 t}$$

Portanto: $C_0=\frac{sen 0}{0}=???$

L'Hopital ► $C_0=\lim_{n\to 0}\frac{sen(n\pi/5)}{n\pi/5}$

$$=\lim_{n\to 0}\left\{\frac{d/dn[sen(n\pi/5)]}{d/dn[n\pi/5]}\right\}$$

$$=\lim_{n\to 0}\left[\frac{\pi/5\cos(n\pi/5)}{\pi/5}\right]$$

$$=\cos 0=1=1\,e^{j0}$$

$$C_{\pm 1}=\frac{sen\pm\pi/5}{\pm\pi/5}\approx 0{,}935\,e^{j0}$$

$$C_{\pm 2}=\frac{sen\pm 2\pi/5}{\pm 2\pi/5}\approx 0{,}757\,e^{j0}$$

$$C_{\pm 3}=\frac{sen\pm 3\pi/5}{\pm 3\pi/5}\approx 0{,}505\,e^{j0}$$

$$C_{\pm 4}=\frac{sen\pm 4\pi/5}{\pm 4\pi/5}\approx 0{,}234\,e^{j0}$$

$$C_{\pm 5}=\frac{sen\pm 5\pi/5}{\pm 5\pi/5}=0$$

$$C_{\pm 6}=\frac{sen\pm 6\pi/5}{\pm 6\pi/5}\approx -0{,}156=0{,}156\,e^{j180}$$

$$C_{\pm 7}=\frac{sen\pm 7\pi/5}{\pm 7\pi/5}\approx -0{,}216=0{,}216\,e^{j180}$$

$$C_{\pm 8}=\frac{sen\pm 8\pi/5}{\pm 8\pi/5}\approx -0{,}189=0{,}189\,e^{j180}$$

$$C_{\pm 9}=\frac{sen\pm 9\pi/5}{\pm 9\pi/5}\approx -0{,}104=0{,}104\,e^{j180}$$

$$C_{\pm 10}=\frac{sen\pm 10\pi/5}{\pm 10\pi/5}=0$$

# Espectros de amplitude e fase

$C_0 = 1\,e^{j0}$

$C_{\pm1} \approx 0{,}935\,e^{j0}$

$C_{\pm2} \approx 0{,}757\,e^{j0}$

$C_{\pm3} \approx 0{,}505\,e^{j0}$

$C_{\pm4} \approx 0{,}234\,e^{j0}$

$C_{\pm5} = 0$

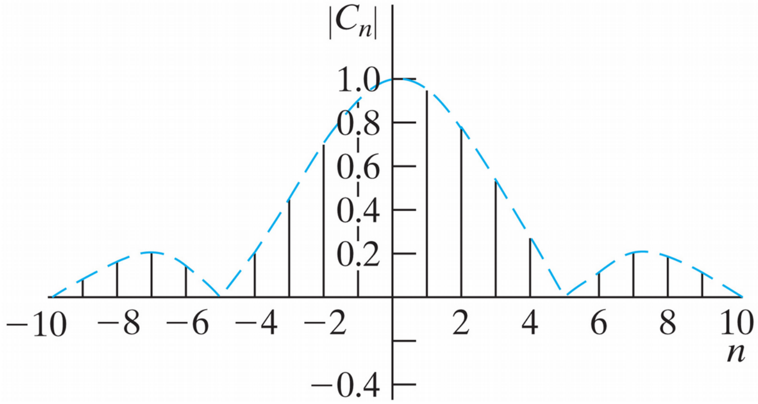
$C_{\pm6} \approx 0{,}156\,e^{j180}$

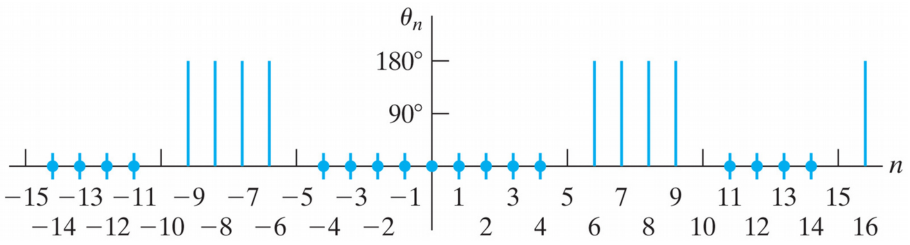
$C_{\pm7} \approx 0{,}216\,e^{j180}$

$C_{\pm8} \approx 0{,}189\,e^{j180}$

$C_{\pm9} \approx 0{,}104\,e^{j180}$

$C_{\pm10} = 0$



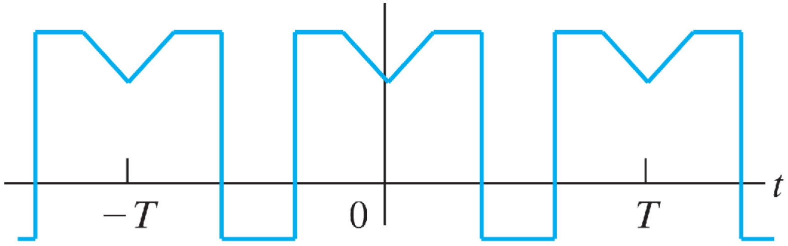
# Explorando a simetria de funções

- **Determinação dos coeficientes → processo tedioso.**
- **Simetria de funções → reduz a quantidade de cálculos.**
- **Quatro tipos:**
  - **Funções pares.**
  - **Funções ímpares.**
  - **Simetria de meia onda.**
  - **Simetria de quarto de onda.**

# Simetria de funções pares

- **Funções pares → simétricas em relação ao eixo vertical.**

$$f(t)=f(-t)$$




- **Os coeficientes se reduzem a:**

$$a_v=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,dt=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt=\frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\,dt \longrightarrow$$ Integração em ½ período, multiplicação por 2

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt=\frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt \longrightarrow$$ Integração em ½ período, multiplicação por 2

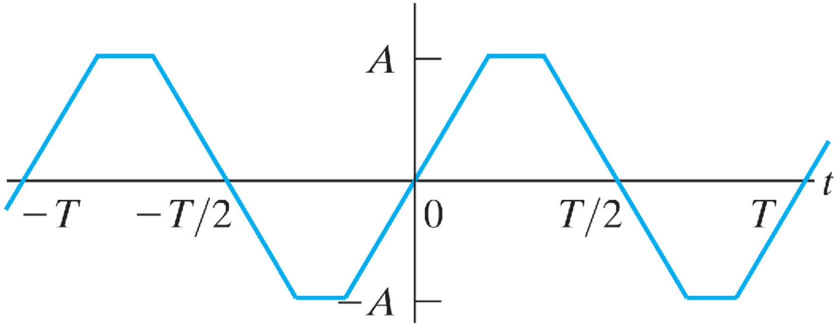
$$b_n=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,sen(n\omega_0 t)\,dt=0 \longrightarrow$$ Ausência de componentes senoidais

- **Síntese:**

$$\boxed{f(t)=a_v+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(n\omega_0 t)}$$

# Simetria de funções ímpares

- **Funções ímpares → anti-simétricas em relação ao eixo vertical.** $f(t) = -f(-t)$




- **Os coeficientes se reduzem a:**

$$a_v = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt = 0$$ → Ausência de componente contínua.

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt = 0$$ → Ausência de componentes cossenoidais.

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,sen(n\omega_0 t)\,dt = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\,sen(n\omega_0 t)\,dt$$ → Integração em ½ período, multiplicação por 2

- **Síntese:** $$\boxed{f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, sen(n\omega_0 t)}$$

# Simetria de meia onda (meio período)

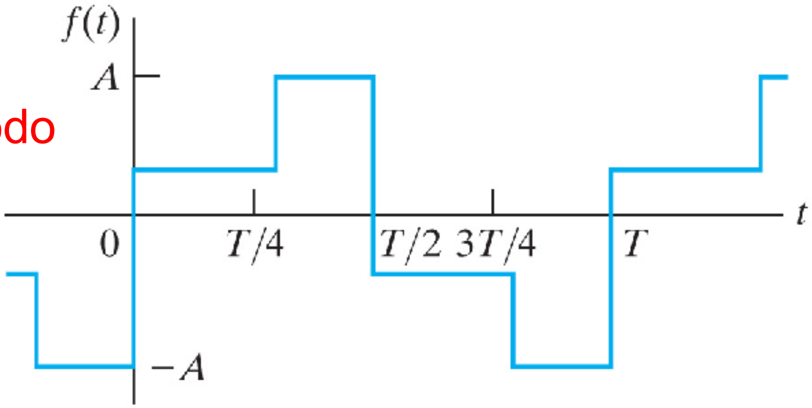
- **Simetria de meia onda:**

$$f(t) = -f(t - T/2)$$

Deslocar ½ período

Espelhar verticalmente

Volta a ser a mesma onda




- **Os coeficientes se reduzem a:**

$$a_v = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,dt = 0$$

Ausência de componente contínua.

$$a_n = \begin{cases} 0, & n\ par \\ \dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt, & n\ \ ímpar \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} 0, & n\ par \\ \dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{T/2} f(t)\,sen(n\omega_0 t)\,dt, & n\ \ ímpar \end{cases}$$

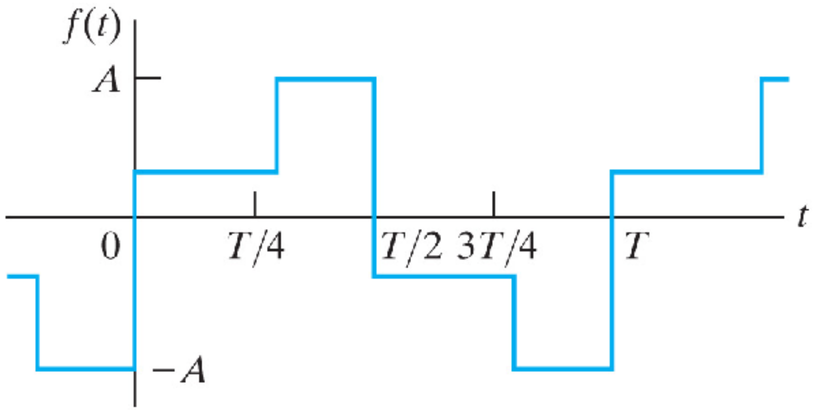
Somente harmônicos ímpares

Integração em ½ período, multiplicação por 2

# Simetria de meia onda (meio período)

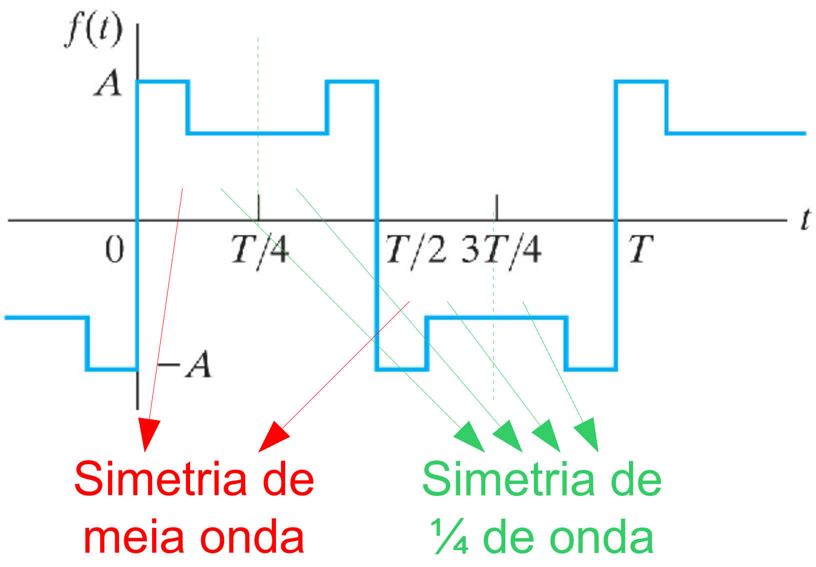
- **Síntese:**

$$f(t)=\sum_{n=1,\acute{\imath}mpar}^{\infty}\left[a_n\cos(n\omega_0 t)+b_n sen(n\omega_0 t)\right]$$

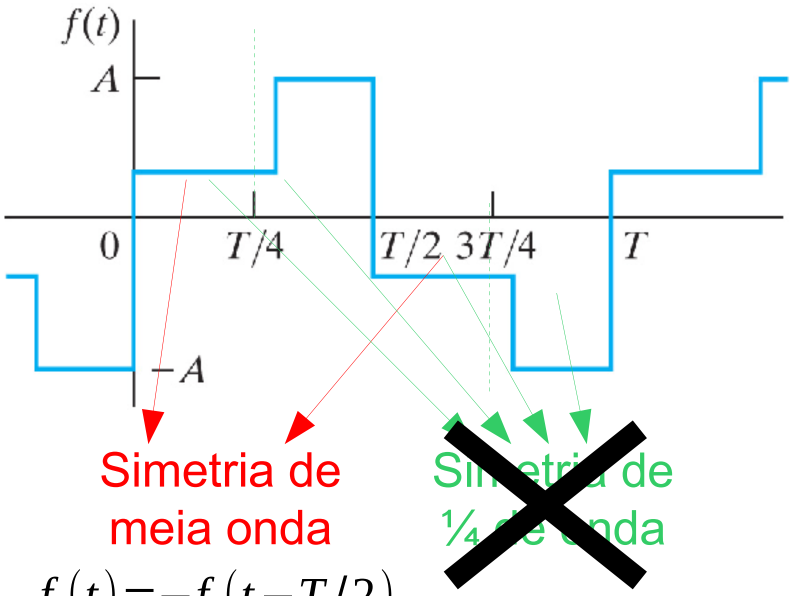


# Simetria de quarto de onda (¼ de período)

- **Simetria de ¼ de onda → simetria de meia onda + simetria em relação aos pontos médios dos semiciclos.**




$f(t) = -f(t - T/2)$

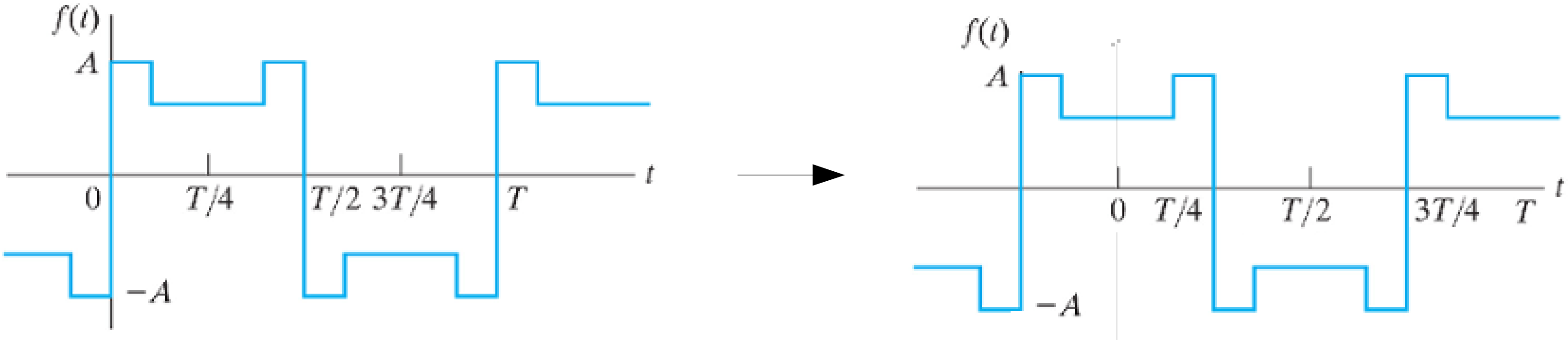



$f(t) = -f(t - T/2)$

- **Podem ser transformadas em funções pares ou ímpares → escolha adequada do instante t = 0.**

# Simetria de quarto de onda (¼ de período)

- **Transformação para função par:**




$$a_v = 0, \quad b_n = 0$$

Ausência de termos senoidais.

$$a_n = \begin{cases} 0, & n \; par \\ \dfrac{8}{T} \displaystyle\int_0^{T/4} f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt, & n \;\; ímpar \end{cases}$$

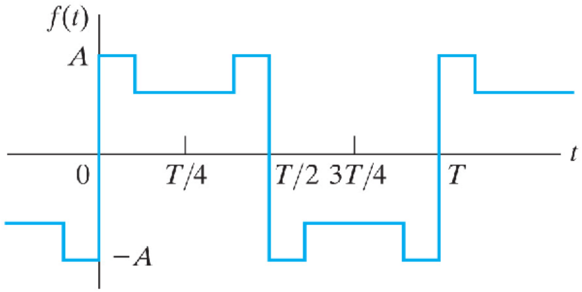
Somente harmônicos ímpares.
Integral em ¼ do período, multiplicação por 4.

- **Síntese:**

$$\boxed{f(t) = \sum_{n=1, ímpar}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t)}$$

# Simetria de quarto de onda (¼ de período)

- **Transformação para função ímpar:**




$a_v = 0, \quad a_n = 0$ → Ausência de termos cossenoidais.

$$b_n = \begin{cases} 0, & n \; par \\ \dfrac{8}{T}\displaystyle\int_0^{T/4} f(t)\,sen(n\omega_0 t)\,dt, & n \; ímpar \end{cases}$$

→ Somente harmônicos ímpares. Integral em ¼ do período, multiplicação por 4.

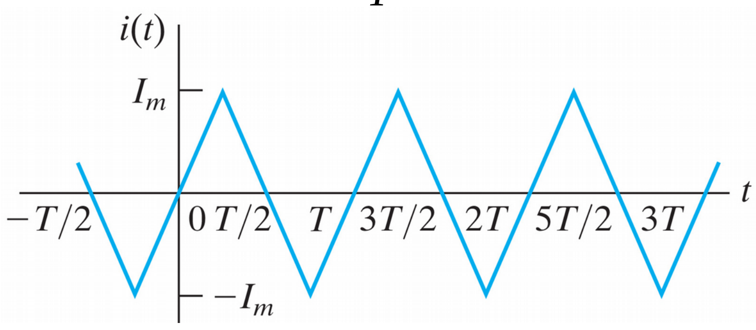
- **Síntese:**

$$\boxed{f(t) = \sum_{n=1,ímpar}^{\infty} b_n\, sen(n\omega_0 t)}$$

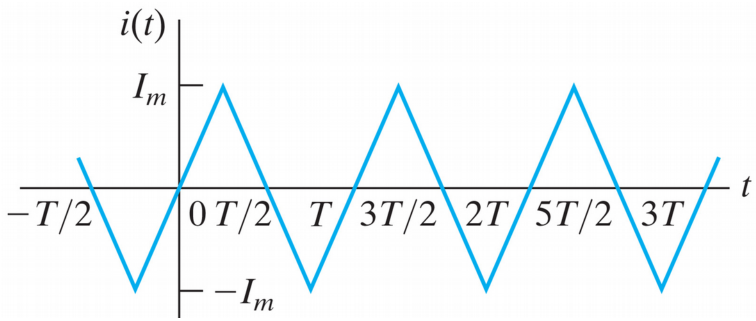
# Exemplo:

- **Determine a decomposição em série de Fourier para a forma de onda de corrente mostrada na figura.**

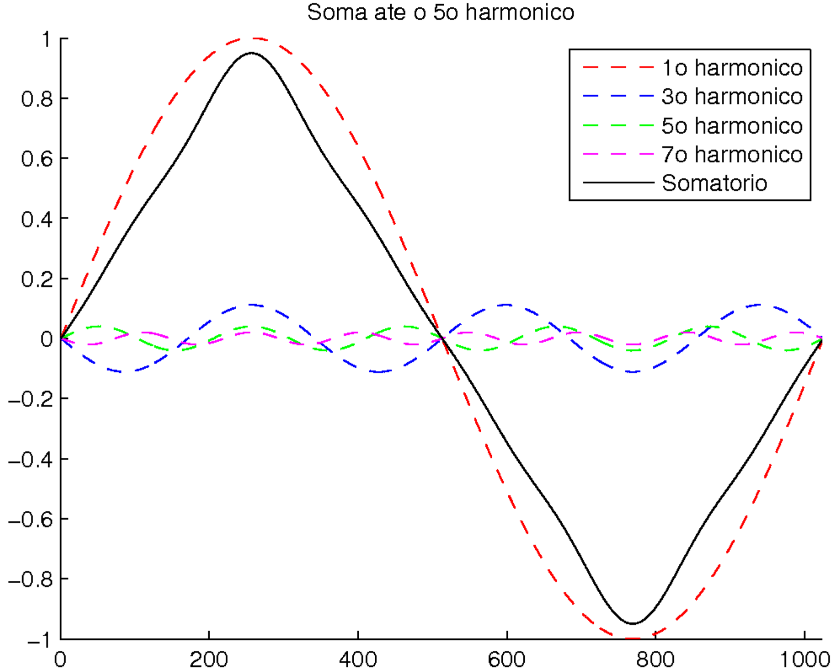
$$i(t) = \frac{4 \cdot I_m}{T} \cdot t\,, \quad 0 \le t \le T/4$$

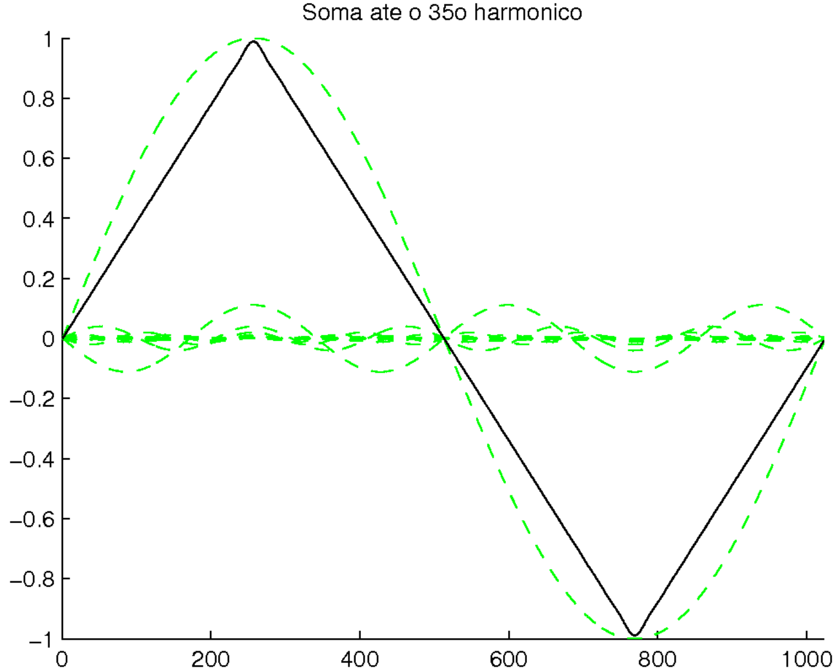


# Exemplo:



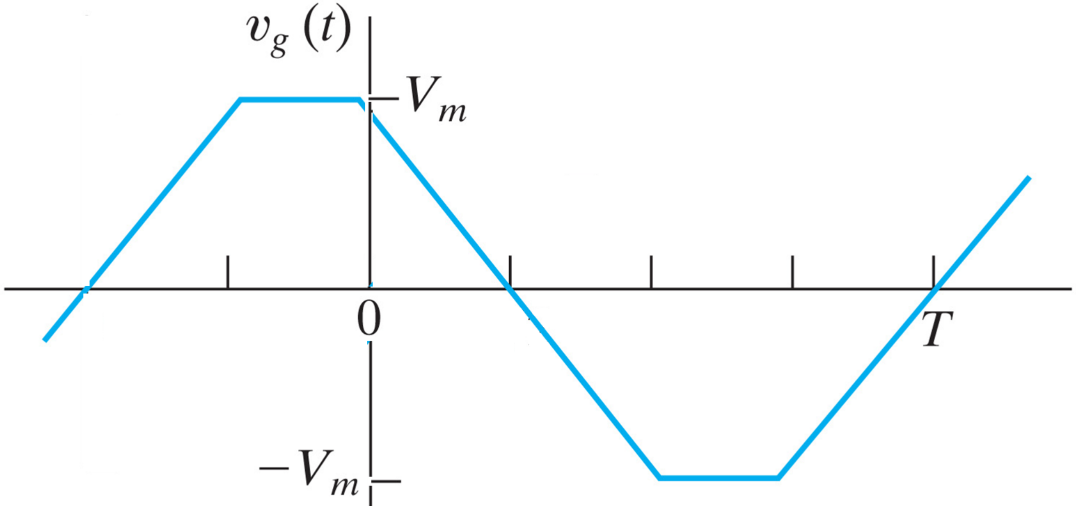

$$i(t) = 8\frac{I_m}{\pi^2}\sum_{n=1,ímpar}^{\infty}\frac{1}{n^2}\,sen\left(n\,\frac{\pi}{2}\right)sen(n\,\omega_0\,t)$$



# Exercício:

- **Calcule a série de Fourier da tensão periódica mostrada na figura abaixo:**



# Exercício:

$$v_g(t) = \frac{12 V_m}{\pi^2} \sum_{n=1,\, ímpar}^{\infty} \frac{sen(n\pi/3)}{n^2} \cdot sen(n\omega_0 t)$$