A transformada de Laplace em análise de circuitos elétricos

Sumário

- Elementos de circuitos no domínio da frequência.
- Análise de circuitos no domínio da frequência.
- Verificação de resultados.
- Técnicas de análise tradicionais no domínio da frequência.
- Funções de transferência.
- Memória e função de peso.
- Resposta em regime permanente.
- Operações de chaveamento.

Elementos de circuitos no domínio da frequência

- **Como visto: análise por Laplace → procedimento genérico:**
  - **Determinar a equação diferencial.**
  - **Aplicar a transformada de Laplace.**
  - **Isolar a grandeza de interesse.**
  - **Expandir em frações parciais.**
  - **Aplicar a transformada inversa.**
- **Mas! → A equação diferencial surge a partir de modelos matemáticos dos elementos no domínio do tempo:**

$$v_R = R\, i_R \qquad v_C = \frac{1}{C}\int_0^t i_C\, dt + v_C(0) \qquad v_L = L\frac{d}{dt} i_L$$

$$i_R = \frac{v_R}{R} \qquad i_C = C\frac{d}{dt} v_C \qquad i_L = \frac{1}{L}\int_0^t v_L\, dt + i_L(0)$$

- **Existe um modo mais fácil → converter os <u>modelos</u> para o domínio da frequência.**

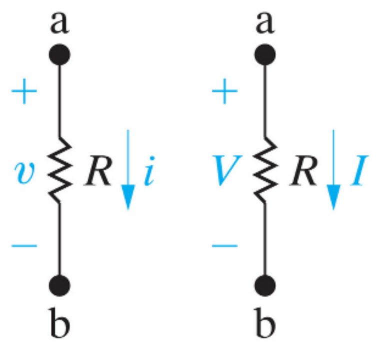
O resistor no domínio da frequência

- **No domínio do tempo:** $\longrightarrow$ $v_R(t) = R \cdot i_R(t)$
- **Aplicando Laplace unilateral:** $v_R(t)u(t) = [R \cdot i_R(t)]\, u(t)$

$$= R \cdot [\, i_R(t)\, u(t)]$$

$$\Big\downarrow \mathscr{L}$$

$$\boxed{V_R(s) = R \cdot I_R(s)}$$



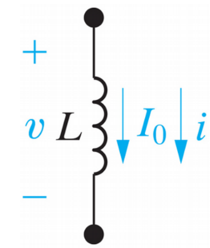
$V_R(s) \longrightarrow$ volts-segundos

$I_R(s) \longrightarrow$ ampères-segundos

O resistor possui o mesmo modelo nos domínios do tempo e da frequência.

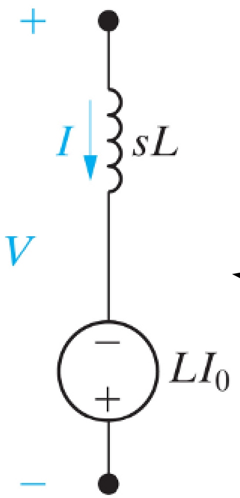
O indutor no domínio da frequência

- **No domínio do tempo:** $\longrightarrow$ $v_L(t) = L\frac{d}{dt}i_L(t)$ $\longrightarrow$



- **Aplicando Laplace unilateral:**

$$v_L(t)u(t) = \left[L\frac{d}{dt}i_L(t)\right]u(t)$$
$$= L\left[\frac{d}{dt}i_L(t)u(t)\right]$$
$$\Big\downarrow \mathscr{L}$$
$$V_L(s) = L\left[sI_L(s) - i_L(0)\right]$$
$$\boxed{V_L(s) = (sL)I_L(s) - LI_0}$$



Modelo de divisor de tensão.

Atenção às polaridades!

Impedância de *sL* ohms

Fonte de tensão proporcional a I_0

O indutor no domínio da frequência

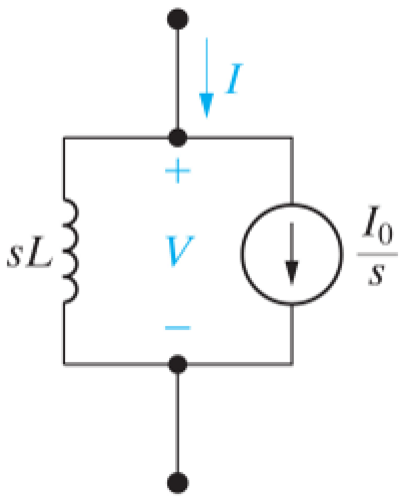
Ou: $i_L(t) = \frac{1}{L}\int_0^t v_L(t)\,dt + i_L(0^-) \longrightarrow i_L(t)u(t) = \left[\frac{1}{L}\int_0^t v_L(t)\,dt + i_L(0^-)\right]u(t)$

$$= \frac{1}{L}\left[\int_0^t v_L(t)\,dt\right]u(t) + i_L(0^-)\,u(t)$$

$$\Big\downarrow \mathscr{L}$$

$$I_L(s) = \frac{1}{L}\left[\frac{V_L(s)}{S}\right] + \frac{I_0}{s}$$

$$\boxed{I_L(s) = \frac{V_L(s)}{sL} + \frac{I_0}{s}}$$



Modelo de divisor de corrente.

Atenção às polaridades!

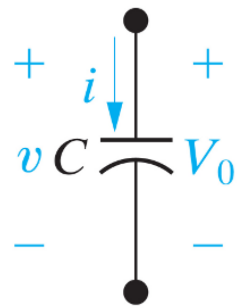
Impedância de *sL* ohms

Fonte de corrente proporcional a I_0

O capacitor no domínio da frequência

- **No domínio do tempo:**

$$i_C(t)=C\frac{d}{dt}v_C(t)$$



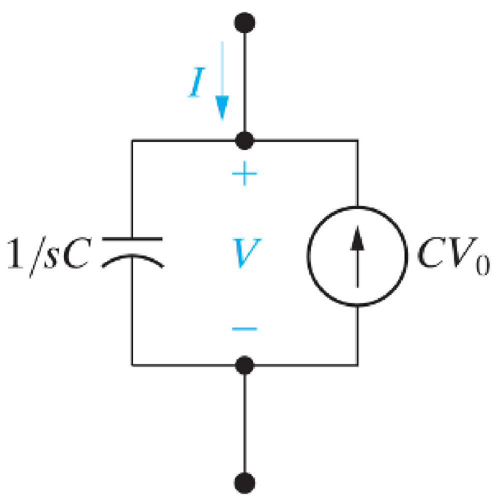
- **Aplicando Laplace unilateral:**

$$i_C(t)u(t)=\left[C\frac{d}{dt}v_C(t)\right]u(t)$$
$$=C\left[\frac{d}{dt}v_C(t)u(t)\right]$$

$$\big\downarrow \mathscr{L}$$

$$I_C(s)=C\left[sV_C(s)-v_C(0^-)\right]$$

$$\boxed{I_C(s)=\frac{V(s)}{1/sC}-CV_0}$$



Modelo de divisor de corrente.

Atenção às polaridades!

Impedância de 1/*sC* ohms

Fonte de corrente proporcional a V_0

O capacitor no domínio da frequência

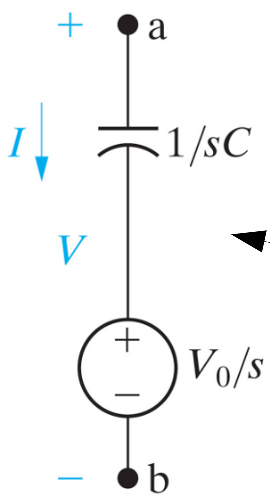
Ou:

$$v_C(t)=\frac{1}{C}\int_0^t i_C(t)\,dt+v_C(0^-) \longrightarrow v_C(t)u(t)=\left[\frac{1}{C}\int_0^t i_C(t)\,dt+v_C(0^-)\right]u(t)$$

$$=\frac{1}{C}\left[\int_0^t i_C(t)\,dt\right]u(t)+v_C(0^-)u(t)$$

$$\Big\downarrow \mathscr{L}$$

$$V_C(s)=\frac{1}{C}\left[\frac{I_C(s)}{s}\right]+\frac{v_C(0^-)}{s}$$



Modelo de divisor de tensão.

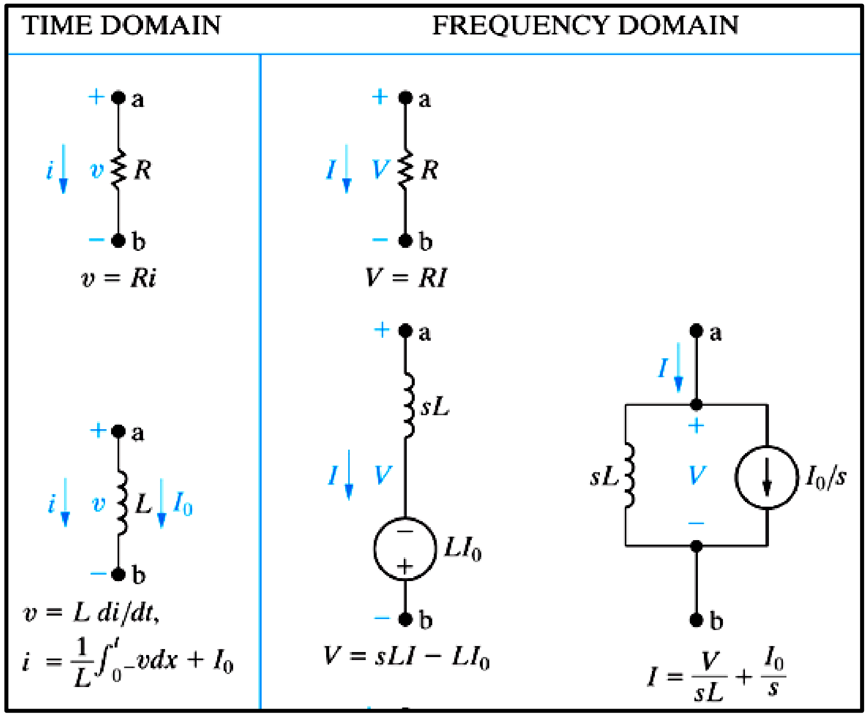
Atenção às polaridades!

$$\boxed{V_C(s)=I_C(s)\frac{1}{sC}+\frac{V_0}{s}}$$

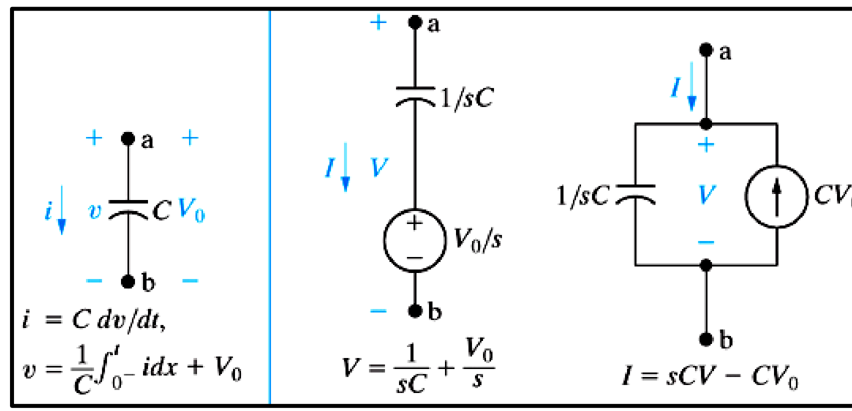
Impedância de 1/*sC* ohms

Fonte de tensão proporcional a V_0

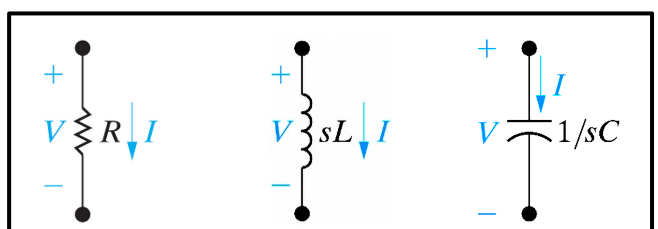
Resumindo: modelos de elementos no domínio da frequência



- **Qual modelo escolher?**
  - **Depende da configuração do circuito → o que proporcionar menos cálculos...**

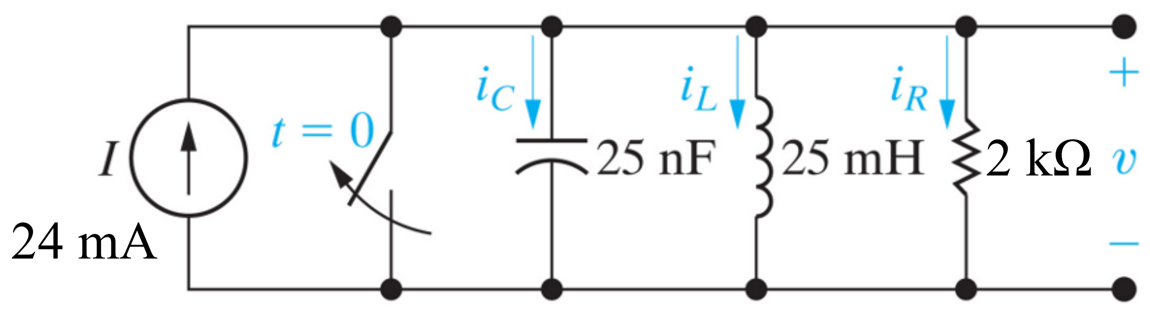


Se a energia inicial for nula: →



Exemplo: transitório com condições iniciais nulas

- **Energia nula em *t* = 0. Utilize os modelos de elementos para encontrar**
    1. $v(t)$
    2. $i_R(t), i_L(t), i_C(t)$



Análise de circuitos no domínio da frequência

- **Ao transformar o circuito para o domínio da frequência TODAS as técnicas de análise são aplicáveis.**
  - **Lei de ohm no domínio da frequência:**

$$V(s)=Z\cdot I(s)$$

Impedância no domínio da frequência

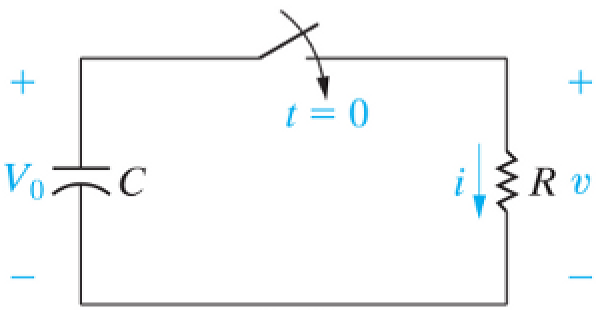
$$Z_R=R \qquad Z_L=sL \qquad Z_C=\frac{1}{sC}$$

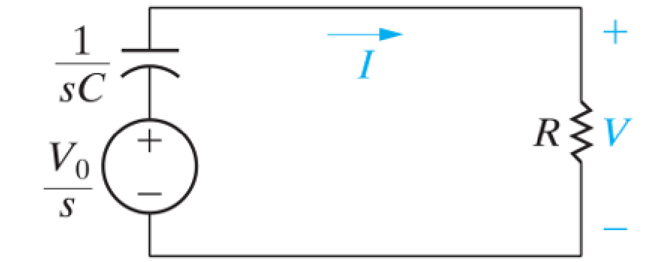
OU admitância no domínio da frequência

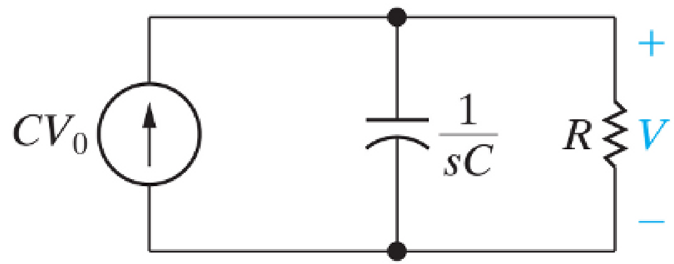
$$Y_R=\frac{1}{R} \qquad Y_L=\frac{1}{sL} \qquad Y_C=sC$$

  - **Associações de impedâncias → série, paralelo, transformações Δ-Y.**
  - **Leis de Kirchoff da tensão e da corrente.**
  - **Todas as técnicas de análise:**
    - **Tensões de nó, correntes de malha, transformações de fontes, equivalentes de Thévenin e Norton, superposição, etc...**

Exemplo: resposta natural de um circuito RC

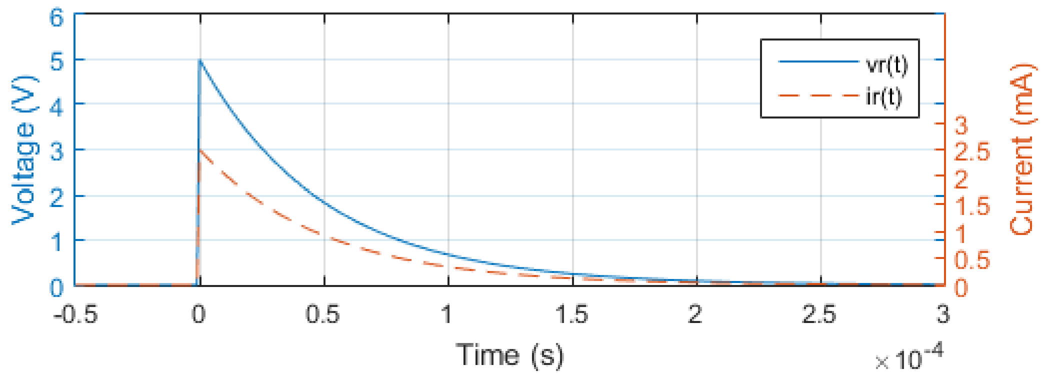




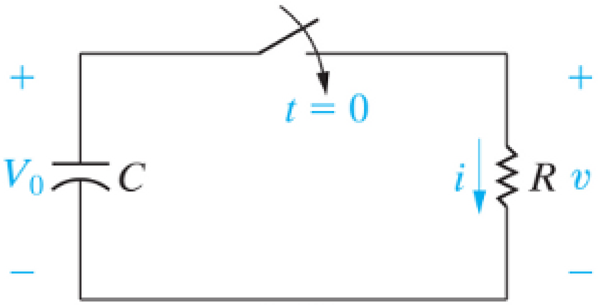


$$i(t)=\frac{V_0}{R}\,\mathrm{e}^{-(1/RC)t}\,u(t)$$

$$v_R(t)=R\cdot i(t)=V_0\,\mathrm{e}^{-(1/RC)t}\,u(t)$$



Exemplo: verificando os cálculos com os teoremas de valor final e inicial



Sabemos que o valor inicial v(0) é V_0.
Usando o teorema do valor inicial:

$$\lim_{t\to 0} v(t) = \lim_{s\to\infty} sV(s)$$

$$\lim_{t\to 0} v(t) = V_0$$

OK

$$\lim_{s\to\infty} sV(s) = \lim_{s\to\infty} s\frac{V_0}{s+1/(RC)} = \lim_{s\to\infty} \cancel{s}\frac{V_0}{\cancel{s}(1+1/(sRC))} = \lim_{s\to\infty} \frac{V_0}{1+1/(sRC)} = V_0$$

Sabemos que o valor final v(∞) é 0. Usando o teorema do valor final:

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{s\to 0} sV(s)$$

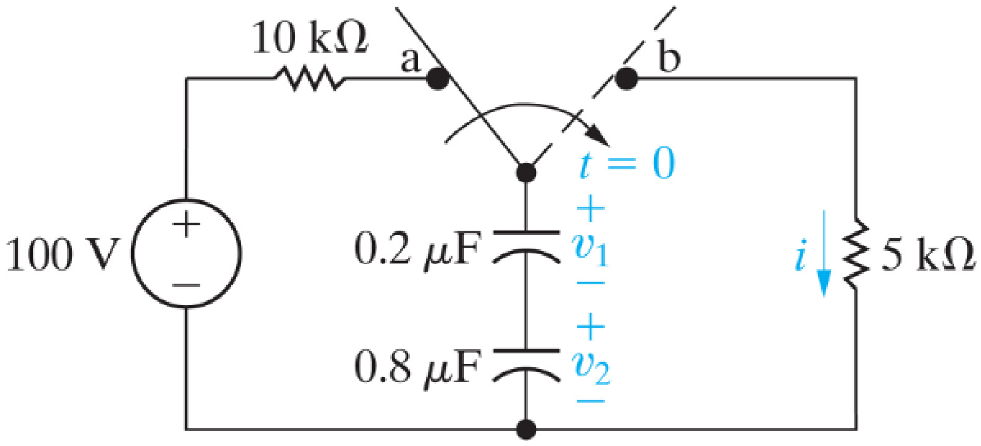
$$\lim_{t\to\infty} v(t) = 0$$

OK

$$\lim_{s\to 0} sV(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{V_0}{s+1/(RC)} = 0\cdot\frac{V_0}{0+1/(RC)} = 0$$

Exemplo: resposta transitória de um circuito RC

- **Determinar $I(s)$, $V_1(s)$ e $V_2(s)$ e $i(t)$, $v_1(t)$ e $v_2(t)$ para $t > 0$.**

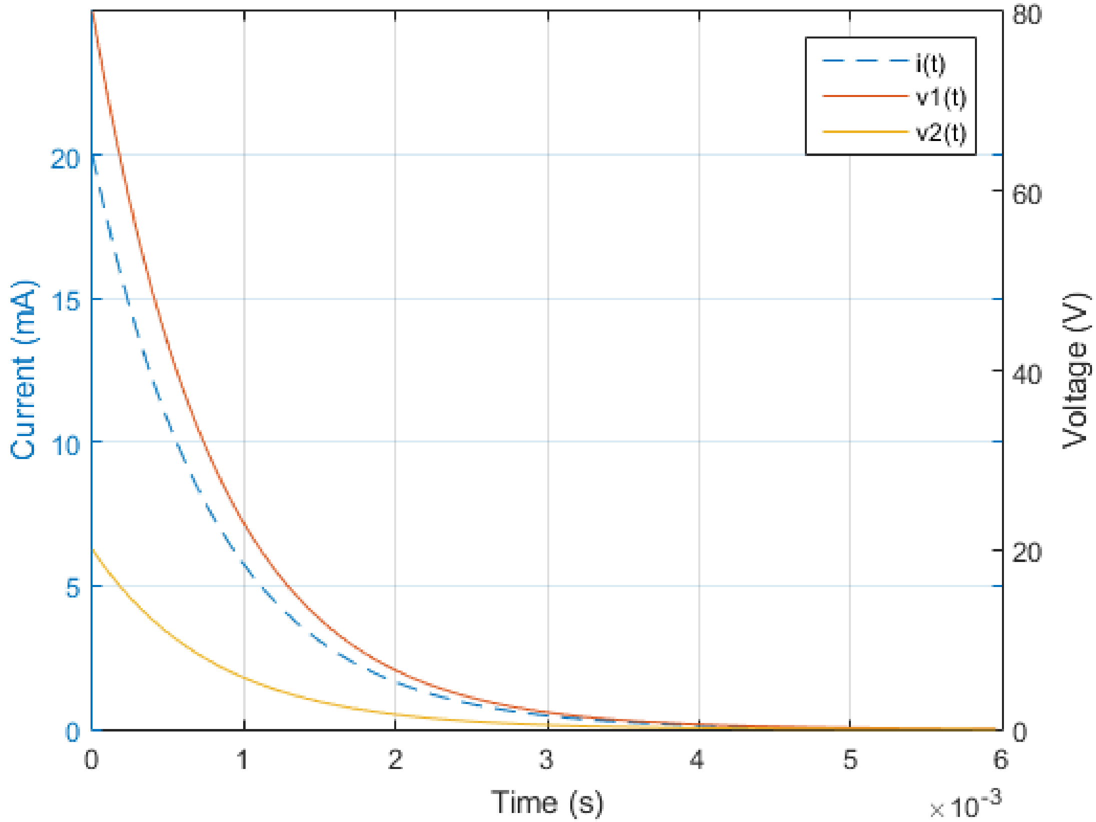


Exemplo: resposta transitória de um circuito RC

$I(s)=0{,}02/(s+1250) \quad i(t)=20\,e^{-1250\,t}u(t)\,mA$

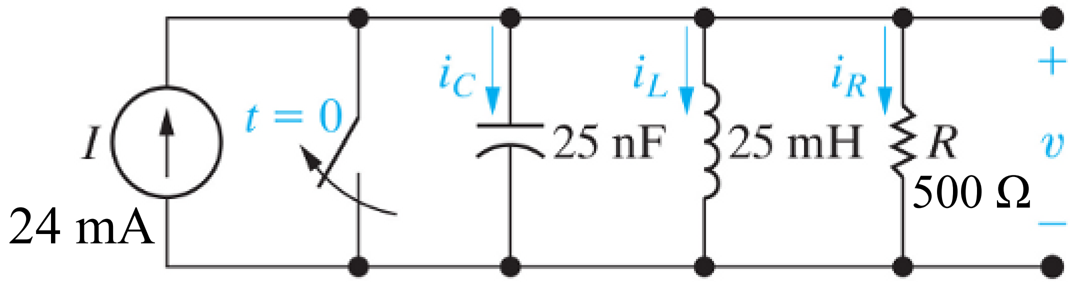
$V_1(s)=80/(s+1250) \quad v_1(t)=80\,e^{-1250t}u(t)\,V$

$V_2(s)=20/(s+1250) \quad v_2(t)=20\,e^{-1250t}u(t)\,V$



Exemplo: resposta ao degrau de um circuito RLC com carga inicial não nula

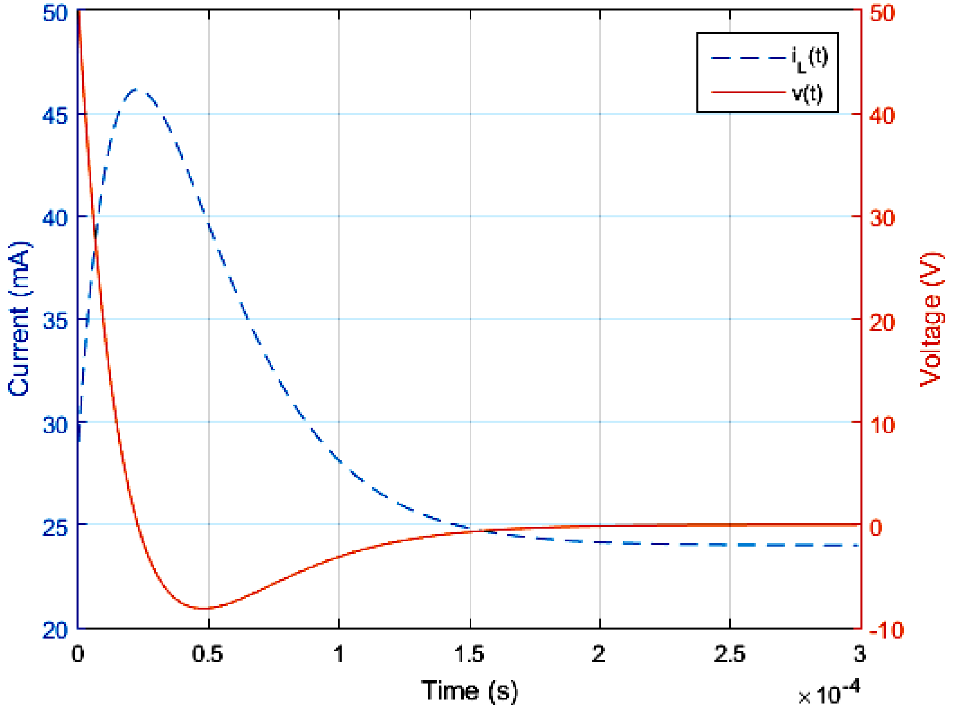
- $I_L(0) = 29$ mA, $V_C(0) = 50$ V.
- Determinar $i_L(t)$ e $v(t)$ para $t > 0$.



Exemplo: resposta ao degrau de um circuito RLC com carga inicial não nula

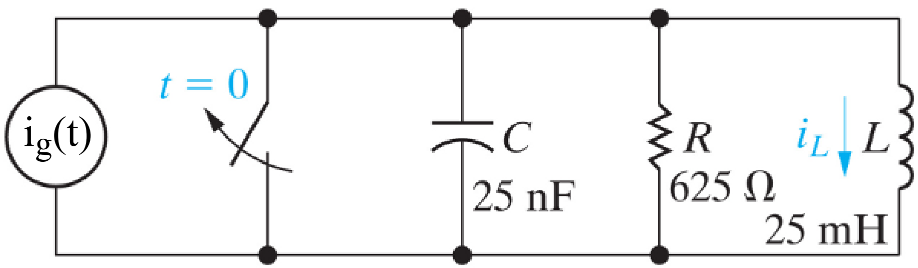
$$i_L(t) = (24 + 2{,}2\times10^6\, t\, e^{-40.000t} + 5\, e^{-40.000t})\, u(t)\, mA$$

$$v(t) = (-2{,}2\times10^6\, t\, e^{-40.000t} + 50\, e^{-40.000t})\, u(t)\, V$$



Exemplo: resposta transitória a uma fonte senoidal

- **Energia inicial nula.**
- **Determinar $i_L(t)$ para $t > 0$.**

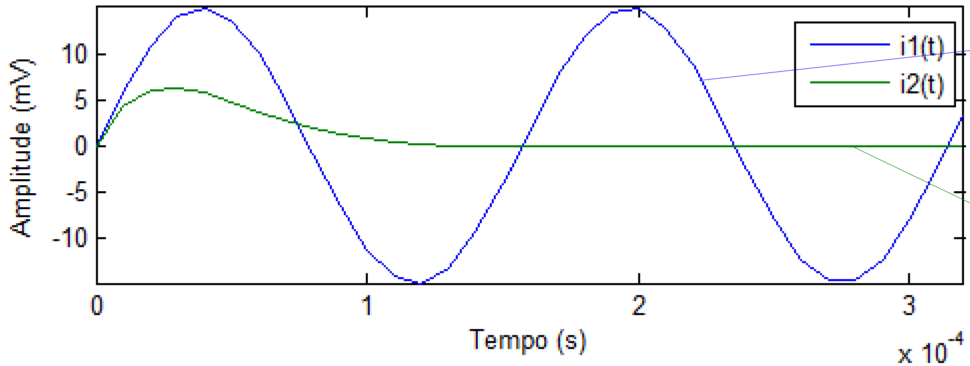


$$i_g(t) = 24 \times 10^{-3} \cos(40.000\, t) = I_M \cos(\omega t)$$

Exemplo: resposta transitória a uma fonte senoidal

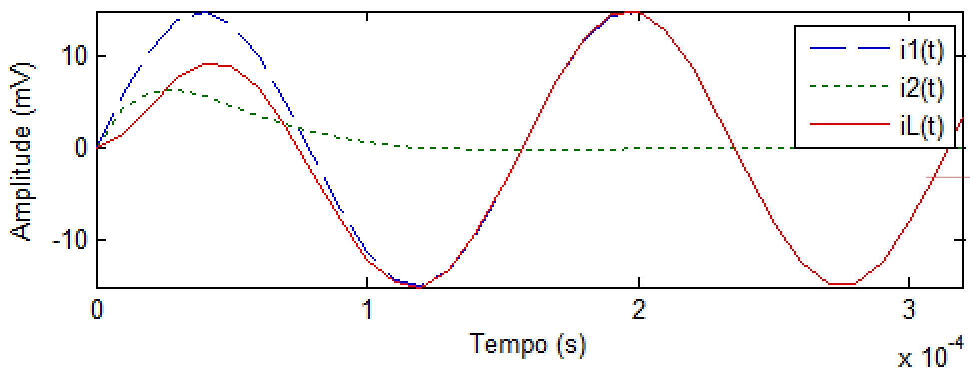
- **Portanto:**

$$i_L(t)=[15\sin(40.000\,t)-25\,e^{-32.000\,t}\sin(24.000\,t)]u(t)\,mA=[i_1(t)-i_2(t)]u(t)\,mA$$



Resposta em regime permanente.

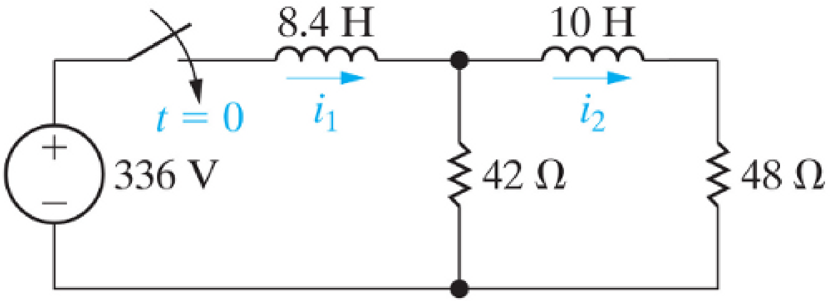
Resposta natural (resposta ao impulso).



Resposta total.

Exemplo: resposta ao degrau de um circuito com múltiplas malhas

- **Análise de circuitos com múltiplas malhas:**
  - **Resulta em *sistemas* de equações diferenciais.**
  - **No domínio de Laplace → sistemas de equações algébricas.**
- **Exemplo:**
  - **Energia inicial é nula.**
  - **Determinar $i_1(t)$ e $i_2(t)$.**

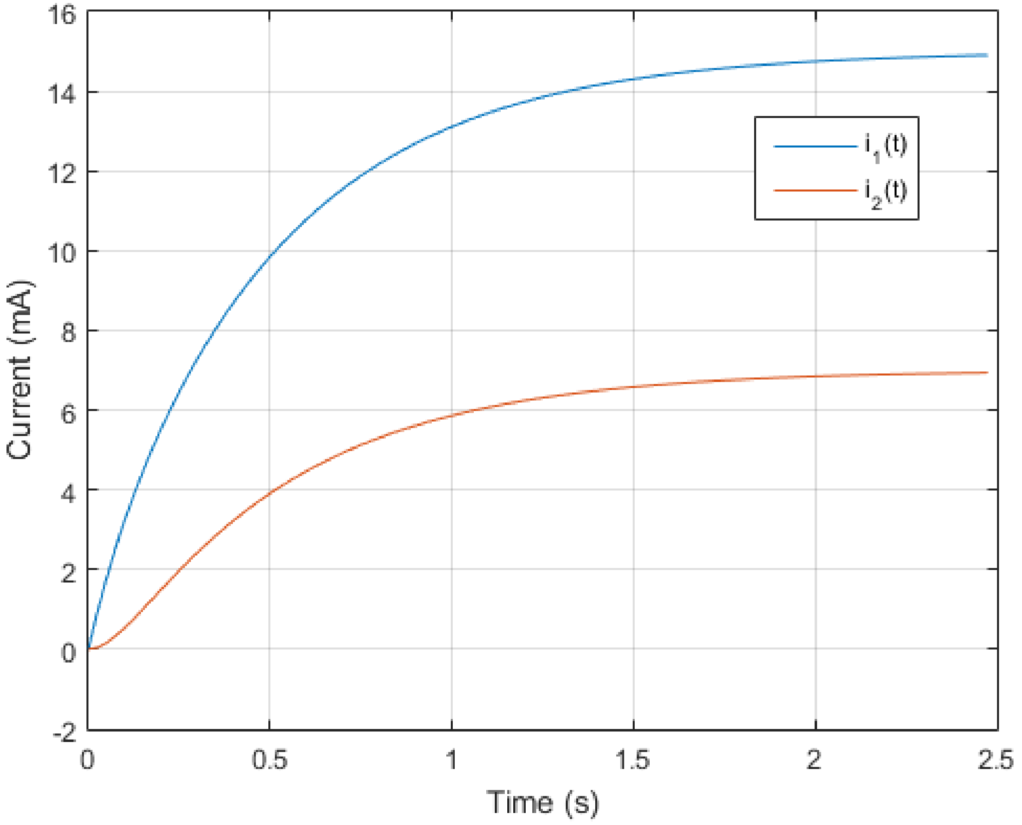


$$v(t) = 336\ u(t)$$

Exemplo: resposta ao degrau de um circuito com múltiplas malhas

$$i_1(t)=(15-14\,e^{-2t}-e^{-12t})u(t)\,A$$

$$i_2(t)=(7-8{,}4\,e^{-2t}+1{,}4\,e^{-12t})u(t)\,A$$



Outras técnicas...

- **Ver no livro texto:**
  - **Equivalentes de Thévenin e Norton.**
  - **Superposição.**
  - **Circuitos com fontes dependentes.**
  - **Circuitos com indutância mútua.**