# ELE066
# Análise de Circuitos Elétricos III

**Prof. Hilton Mota**

# Introdução

- **Análise de circuitos e Engenharia Elétrica.**
- **Contexto da ACE III no curso:**
  - ACE I:
    - Elementos e grandezas de circuitos elétricos.
    - Leis fundamentais.
    - Técnicas de análise fundamentais.
    - Circuitos resistivos em tensão/corrente contínuas.
    - Potência em circuitos DC/CC.
  - ACE II:
    - Elementos de armazenamento de energia.
    - Análise dinâmica no domínio do tempo (eq. dif.).
    - Respostas natural e ao degrau.
    - Análise de regime permanente senoidal.
    - Potência em circuitos em regime permanente.
  - ACE III: → vejamos a ementa...

# Análise de Circuitos Elétricos III

- **Ementa:**
  - **Análise de circuitos utilizando a Transformada de Laplace.**
  - **Análise de circuitos utilizando quadripolos e a Série de Fourier.**
  - **Resposta em frequência de circuitos.**

– ACE III:
- Análise dinâmica no domínio de Laplace.
- Respostas a excitações genéricas.
- Análise do ponto de vista da variação de frequências.
- Decomposição de sinais por série e transformada de Fourier.
- Análise de resposta às várias frequências de um sinal.
- Modelos de circuitos por sistemas dinâmicos lineares.

# Análise de Circuitos Elétricos III

## Por quê???

# Pré-requisitos

- Circuitos 1:
  - Leis de Ohm e Kirchoff, associações de resistores.
  - Tensões de nós, correntes de malhas, substituição de fontes, superposição, Thevenin e Norton.
  - Potência.
- Circuitos 2:
  - Respostas naturais RL, RC e RLC.
  - Respostas ao degrau RL, RC e RLC.
  - Impedância e admitância.
  - Cálculo fasorial e respostas em regime permanente senoidal.
  - Fluxo de energia e potência.

# Avaliações e bibliografia

- Cronograma no Moodle.
- Avaliações:
  - 03 provas individuais e sem consulta no valor de 30 pontos cada.
  - 03 listas de exercícios:
    - Laplace em análise de circuitos → 4 pontos.
    - Análise por seleção de frequências → 3 pontos.
    - Análise por Fourier e quadripolos → 3 pontos.
  - 01 exame especial no valor de 100 pontos.
- Bibliografia:

  - J. W. Nilsson, S. A. Riedel. *Circuitos elétricos,* 8ª ed., São Paulo: Pearson Prentice-Hall, 2009.
  - R. C. Dorf, J. A. Svoboda, *Introdução aos circuitos elétricos,* 8ª ed., LTC, 2012.
  - C K. Alexander, M. N. O. Sadiku, *Fundamentos de circuitos elétricos*, 5ª ed. McGraw-Hill, 2013.
  - R. L. Boylestad, *Introdução à análise de circuitos*, 12ª ed., Pearson, 2012.
  - A. Agarwal, J. H. Lang, *Foundations of analog and digital electronic circuits*, Elsevier, 2012.

# Análise de circuitos utilizando a Transformada de Laplace

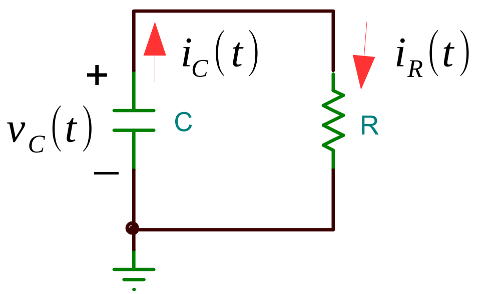
# Sumário

- Pré-requisitos.
- Introdução e motivação.
- Definição.
- Transformadas de Laplace de algumas funções práticas.
- Propriedades da TL.
- A transformada de Laplace inversa.
- Polos, zeros e análise de estabilidade.
- Teoremas do valor inicial e final.

# Introdução

- **Análise por Laplace → por quê?**
  - **Sistemas dinâmicos lineares → modelados matematicamente por equações diferenciais de coeficientes constantes.**
  - **Alguns exemplos já estudados:**

Resposta natural RC




$$i_C(t) = i_R(t)$$

$$\frac{d}{dt} v_C + \frac{1}{RC} v_C = 0 \longrightarrow \boxed{v_C(t) = v_C(t_0)\, e^{-\frac{1}{RC}(t - t_0)}}$$

Resposta ao degrau RLC paralelo

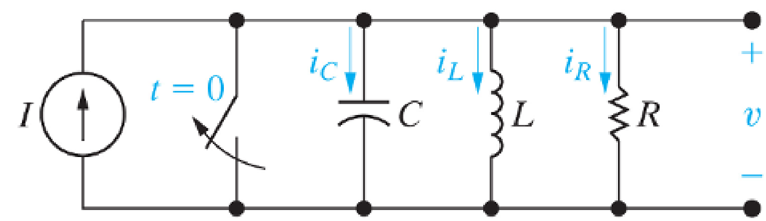



Figure: 08-11



$$\frac{d^2}{dt^2} i_L(t) + \frac{1}{RC} \frac{d}{dt} i_L(t) + \frac{1}{LC} i_L(t) = \frac{I}{LC} \longrightarrow$$

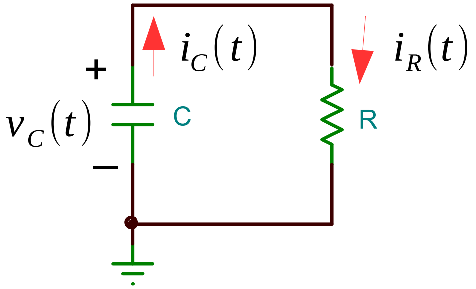
$$\boxed{i_L(t) = \left\{ \begin{array}{l} I_f + A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \\ I_f + e^{-\alpha t}(B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sin \omega_d t) \\ I_f + e^{-\alpha t}(D_1 t + D_2) \end{array} \right\}}$$

# Introdução

- **Problemas?**
  - **Análise de eqs. difs. no domínio do tempo → muito complexa!**
  - **O método é dependente do tipo de estímulo.**
- **Como melhorar?**
  - **Solução de eqs. difs. por Transformada de Laplace.**
- **O que precisamos saber para usar?**
  - **Construir a eq. dif. do sistema (será? Veremos…).**
  - **Transformar a eq. dif. para o domínio de Laplace.**
  - **Calcular a transformada de Laplace da fonte.**
  - **Resolver as equações resultantes → algébricas!**
  - **Transformar a resposta de volta para o domínio do tempo:**
    - **Transformada inversa de funções básicas.**
    - **Expansão em frações parciais.**

# Exemplos

- **Resposta natural RC.**



# Portanto, do que precisamos?

- **Como calcular a transf. de Laplace direta e inversa.**
- **Conhecer a TL de algumas funções básicas → estímulos mais interessantes.**
- **Conhecer algumas <u>propriedades</u> da TL para lidar com "modificações" das funções básicas.**
- **Após isso, vamos inserir algumas simplificações:**
  - **Modelos de circuitos no domínio de Laplace.**
  - **Técnicas de análise diretamente no domínio de Laplace.**
  - **Modelos de circuitos por Sistemas Dinâmicos Lineares:**
    - **Função de transferência, respostas transitória e permanente, pólos, zeros e estabilidade, etc...**

# A transformada de Laplace

- **Definição: a transformada de Laplace de uma função f(t) é**

$$F(s)=L\{f(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-st}\,dt$$

$t$ → tempo (s).

$s$ → frequência (rad/s).

**em que *s* é uma <u>variável complexa</u> genérica:** $s=\sigma+j\omega$

- **Nós estamos interessados na transformada unilateral:**

Integral imprópria: convergência depende do comportamento da função.

$$F(s)=L\{f(t)\}=\int_{0^-}^{\infty} f(t)\,e^{-st}\,dt$$

Para garantir o uso da transformada unilateral → f(t) é multiplicada por um degrau unitário:

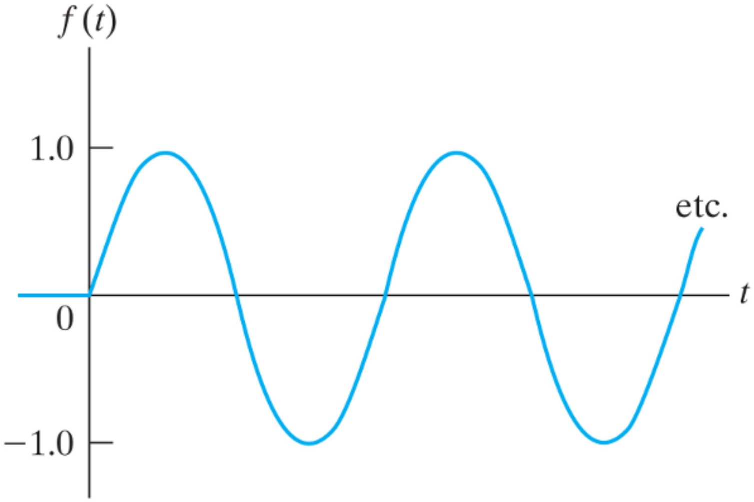
$$\boxed{f(t^+)=f(t)\cdot u(t)}$$

Unilateral → informações para t<0 embutidas nas *condições iniciais*.

# Exemplo

$$f(t)=sen(\omega t)\, u(t)$$

$$F(s)=L\{f(t)\}=?$$



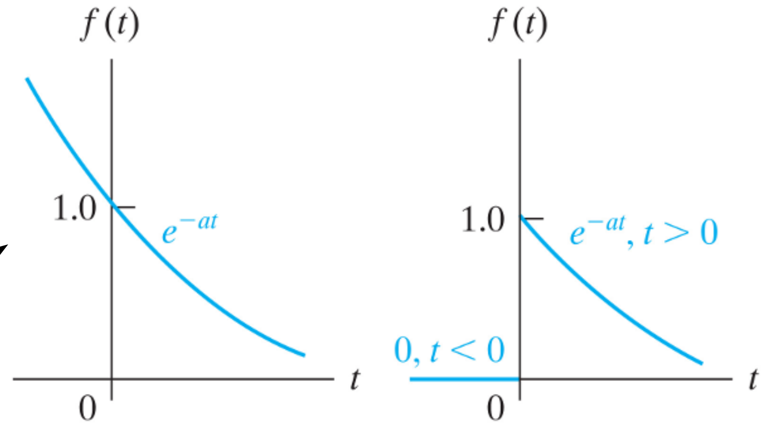

$$sen(\omega t) \overset{L}{\Leftrightarrow} \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

# Descontinuidades na origem

- **E se f(t) tiver uma descontinuidade na origem?**
  - **Se a descontinuidade for finita → o valor inicial é o valor para t = 0.**

Área entre (0-) e (0+) é zero → a integral terá o mesmo valor.

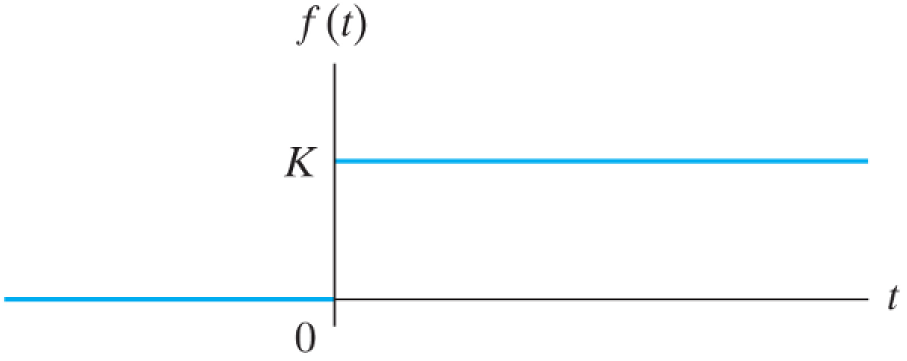
Estas duas funções possuem a mesma transformada de Laplace <u>unilateral</u>




- **Se a descontinuidade for infinita → IMPULSO → o valor inicial é igual à *área* do impulso.**

# Exemplos de sinais descontínuos

- **Transformada de Laplace de um degrau.**



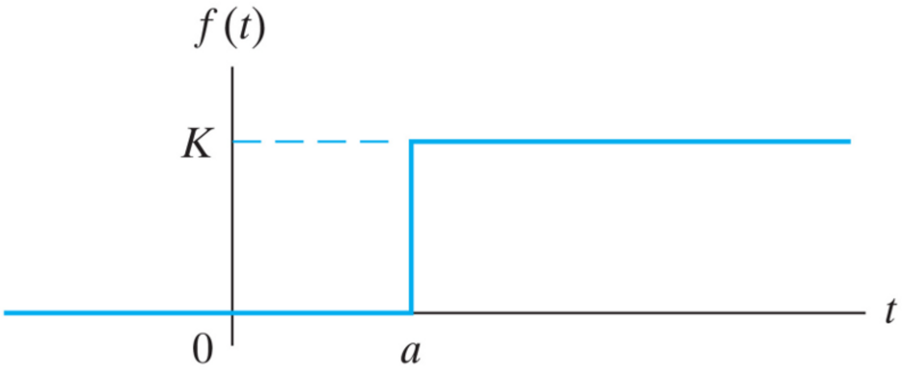

$$f(t) = K \cdot u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ K, & t > 0 \end{cases}$$

$$F(s) = ?$$

$$\boxed{K \cdot u(t) \overset{L}{\Leftrightarrow} \frac{K}{s}}$$

# Exemplos de sinais descontínuos

- **Transformada de Laplace de um degrau deslocado.**



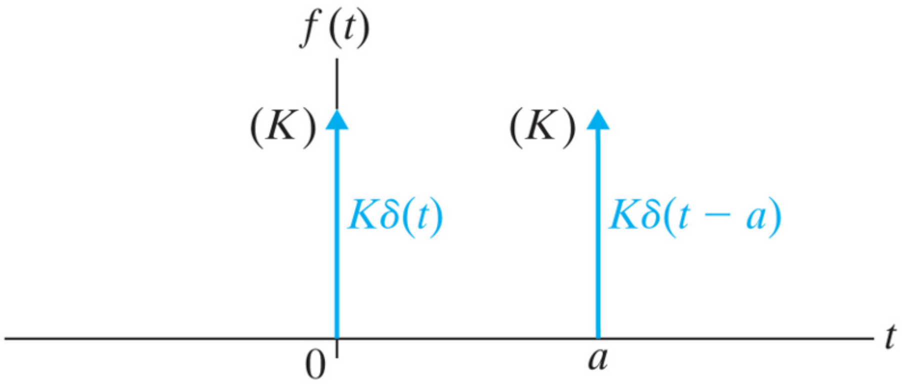

$$f(t) = K \cdot u(t-a) = \begin{cases} 0, & t < a \\ K, & t > a \end{cases}$$

$$F(s) = ?$$

$$K \cdot u(t-a) \overset{L}{\Leftrightarrow} \frac{K}{s} e^{-as}$$

# Exemplos de sinais descontínuos

- **Transformada de Laplace de um impulso.**




$$f(t)=K\cdot\delta(t)=\begin{Bmatrix}0, & t\neq 0\\ \infty, & t=0\\ Área=K & \end{Bmatrix}$$

$$F(s)=?$$

$$\boxed{K\cdot\delta(t)\overset{L}{\Leftrightarrow}K}$$

**Se o impulso for deslocado:**

$$f(t)=K\cdot\delta(t-a)$$

$$F(s)=?$$

$$\boxed{K\cdot\delta(t-a)\overset{L}{\Leftrightarrow}K\,e^{-as}}$$

# Transformadas de Laplace de alguns estímulos interessantes

| *Tipo* | $f(t)\ (t > 0^-)$ | $F(s)$ |
|---|---|---|
| (impulso) | $\delta(t)$ | $1$ |
| (degrau) | $u(t)$ | $\dfrac{1}{s}$ |
| (rampa) | $t$ | $\dfrac{1}{s^2}$ |
| (exponencial) | $e^{-at}$ | $\dfrac{1}{s+a}$ |
| (seno) | $\text{sen}\ \omega t$ | $\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$ |
| (co–seno) | $\cos \omega t$ | $\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$ |
| (rampa amortecida) | $te^{-at}$ | $\dfrac{1}{(s+a)^2}$ |
| (seno amortecido) | $e^{-at}\ \text{sen}\ \omega t$ | $\dfrac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$ |
| (co–seno amortecido) | $e^{-at}\cos \omega t$ | $\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$ |

**<u>IMPORTANTE</u>**

**Notar que nesta tabela já se considera a função multiplicada pelo degrau unitário (transformada unilateral)!**

$$f(t^+) = f(t)\cdot u(t)$$

$$\delta'(t) \overset{L}{\Leftrightarrow} s$$

$$\delta^{(n)}(t) \overset{L}{\Leftrightarrow} s^n$$

# Propriedades da transformada de Laplace

| Operação | $f(t)$ | $F(s)$ |
|---|---|---|
| Multiplicação por uma constante | $Kf(t)$ | $KF(s)$ |
| Adição/subtração | $f_1(t) + f_2(t) - f_3(t) + \ldots$ | $f_1(s) + f_2(s) - f_3(s) + \ldots$ |
| Derivada de primeira ordem (tempo) | $\frac{df(t)}{dt}$ | $sF(s) - f(0^-)$ |
| Derivada de segunda ordem (tempo) | $\frac{d^2f(t)}{dt^2}$ | $s^2F(s) - sf(0^-) - \frac{df(0^-)}{dt}$ |
| Derivada de ordem $n$ (tempo) | $\frac{d^nf(t)}{dt^n}$ | $s^nF(s) - s^{n-1}f(0^-) - s^{n-2}\frac{df(0^-)}{dt} - s^{n-3}\frac{df^2(0^-)}{dt^2} - \cdots - \frac{d^{n-1}f(0^-)}{dt^{n-1}}$ |
| Integral em relação ao tempo | $\int_0^t f(x)\,dx$ | $\frac{F(s)}{s}$ |
| Deslocamento no tempo | $f(t-a)u(t-a),\ a>0$ | $e^{-as}F(s)$ |
| Deslocamento na freqüência | $e^{-at}f(t)$ | $F(s+a)$ |
| Mudança de escala | $f(at),\ a>0$ | $\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$ |
| Derivada de primeira ordem (em $s$) | $tf(t)$ | $-\frac{dF(s)}{ds}$ |
| Derivada de ordem $n$ (em $s$) | $t^nf(t)$ | $(-1)^n\frac{d^nF(s)}{ds^n}$ |
| Integral (em $s$) | $\frac{f(t)}{t}$ | $\int_s^\infty F(u)\,du$ |

**Diferenciação no tempo**
**=**
**Multiplicação na frequência**

**Integração no tempo**
**=**
**Divisão na frequência**

**Deslocamento no tempo**
**=**
**Fase na frequência**

**Compressão no tempo**
**=**
**Dilatação na frequência**

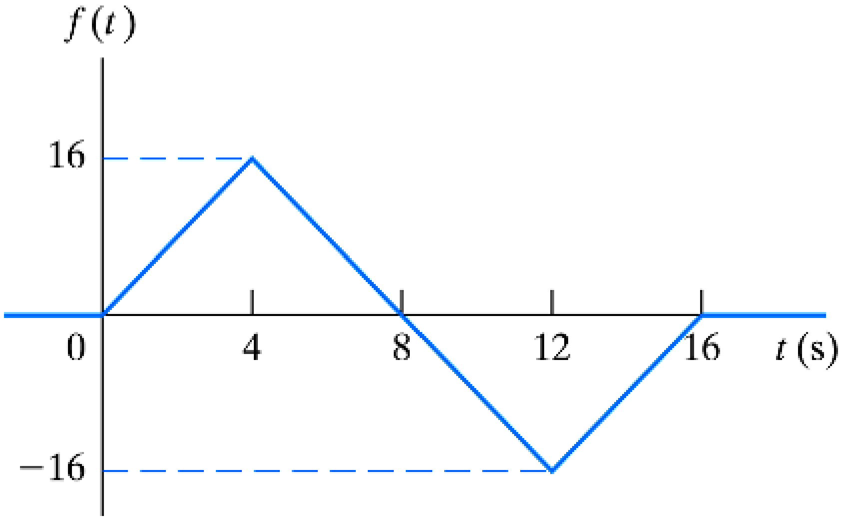
# Exemplos

- **Calcule as transformadas de Laplace de:**

1. $f(t) = t^2 e^{-at} u(t)$

2. $f(t) = t\cos(\omega t) u(t)$

- **Dada a função mostrada na figura abaixo, calcule:**




$$L\{f(t)\}$$

$$L\left\{\frac{d}{dt} f(t)\right\}$$

# Exemplos de aplicação

- **Considere que a chave mostrada no circuito abaixo é fechada em t = 0 e que não há energia armazenada previamente no circuito. Determine a expressão para a transformada de Laplace de i(t).**

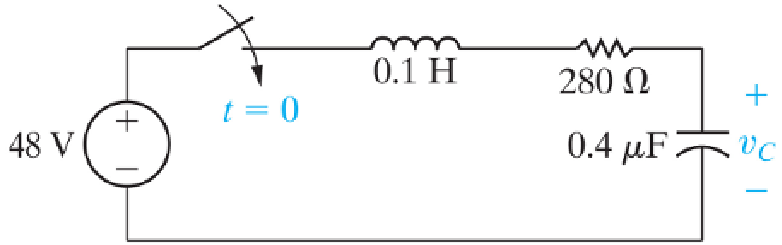



Figure: 08-17Ex8.12



- **O circuito abaixo encontra-se em regime permanente com a chave na posição *a*. Em t = 0 a chave é movida para a posição *b*. Determine a equação para $I_o(s)$.**