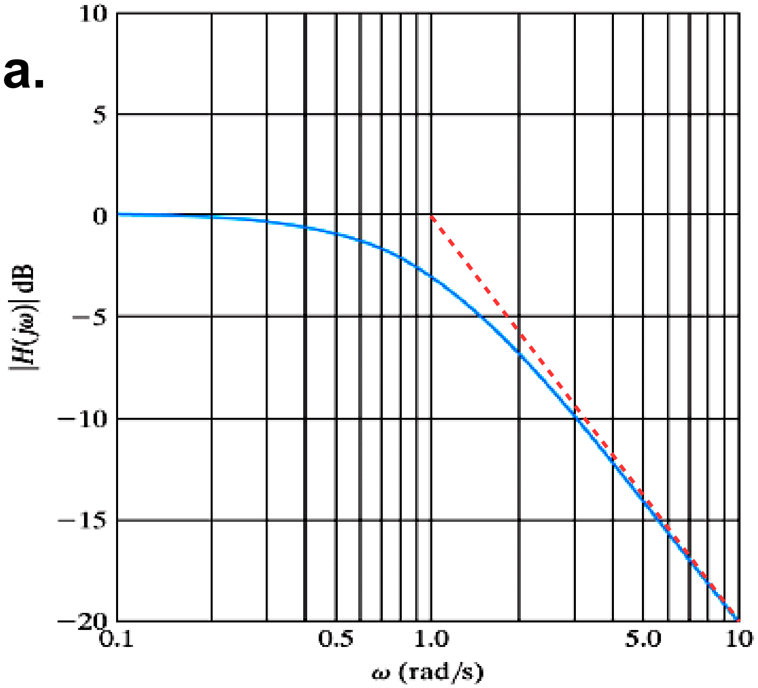
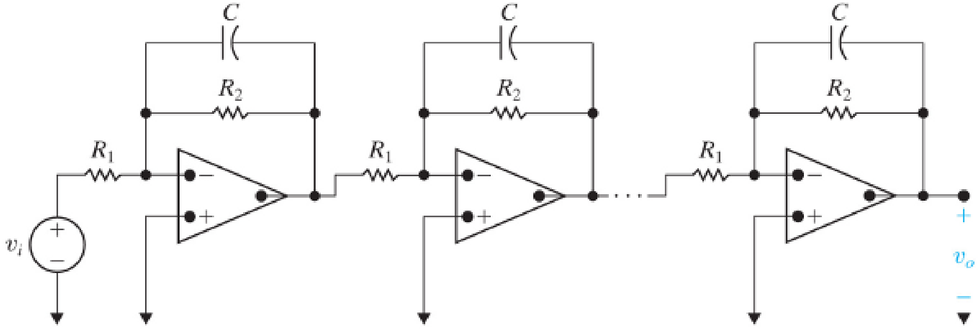
Filtros ativos de ordem superior

- **Filtros de 1ª ordem:**
  - Um polo na função de transferência.
  - Inclinação de –20 dB por década.
  - Resposta longe da ideal.
- **Aumentando-se o número de polos:**
  - Resposta mais próxima da ideal.
  - Aumenta o número de componentes, complexidade e custo.
  - Circuitos mais sensíveis a variações nos componentes e interferências externas.



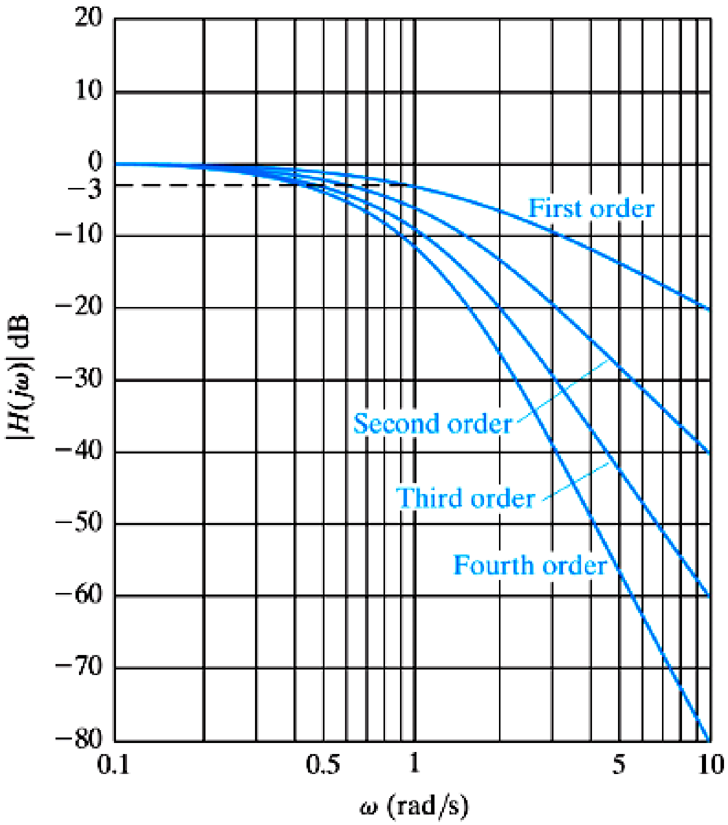
Cascata de módulos de 1ª ordem

- **1ª abordagem → cascata de módulos de 1ª ordem.**
  - **Cada módulo adiciona –20 dB/década à curva de resposta em frequência.**
  - ***N* módulos → –20 *N* dB/dec.**



$$H(s)=\left(\frac{-\omega_c}{s+\omega_c}\right)\left(\frac{-\omega_c}{s+\omega_c}\right)\cdots\left(\frac{-\omega_c}{s+\omega_c}\right)$$

$$\boxed{=\frac{(-\omega_c)^n}{(s+\omega_c)^n}}$$

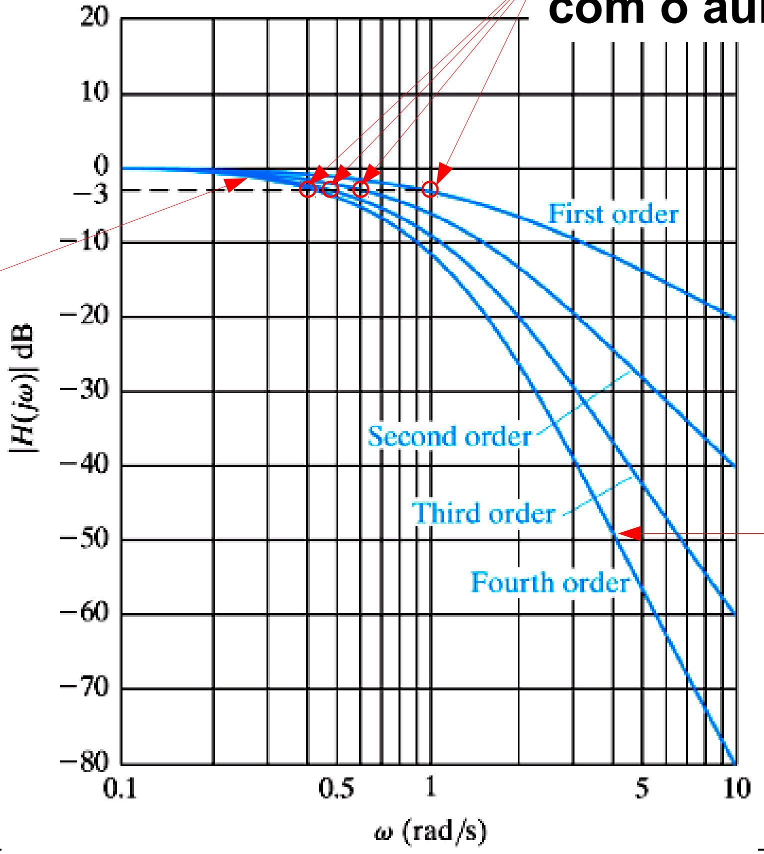


Cascata de módulos de 1ª ordem

- **Problemas com esta abordagem:**

Frequência de corte diminui com o aumento da ordem

Distorções na faixa de passagem



Faixa de transição muito larga.

Cascata de módulos de 1ª ordem

- **Considerando *n* filtros <u>protótipos</u> de 1ª ordem:**

$$H(s)=\left(\frac{-1}{s+1}\right)\left(\frac{-1}{s+1}\right)\cdots\left(\frac{-1}{s+1}\right) \longrightarrow H(s)=\frac{(-1)^n}{(s+1)^n}$$

A resposta de frequência é dada por:

$$H(j\omega)=\frac{(-1)^n}{(j\omega+1)^n}=\frac{1}{\sqrt{(\omega^2+1)^n}}e^{-jn[180+\arctan(\omega)]}$$

A resposta de amplitude é:

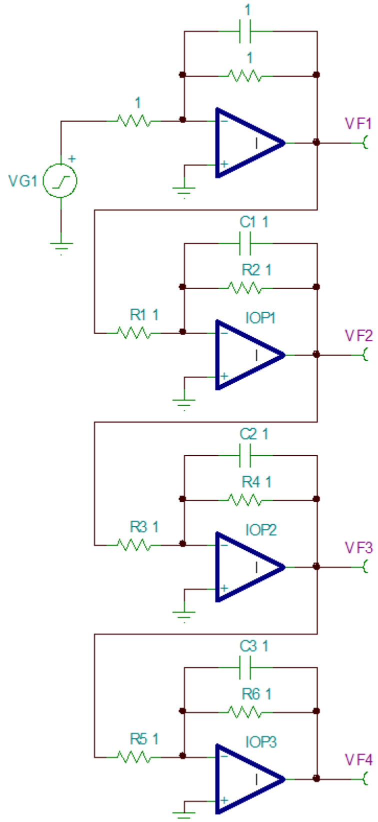
$$|H(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{(\omega^2+1)^n}}$$

Na frequência de corte:

$$\frac{1}{\sqrt{(\omega_{cn}^2+1)^n}}=\frac{1}{\sqrt{2}} \longrightarrow (\omega_{cn}^2+1)^n=2 \longrightarrow \omega_{cn}^2+1=\sqrt[n]{2} \longrightarrow \boxed{\omega_{cn}=\sqrt{\sqrt[n]{2}-1}}$$

Cascata de módulos de 1ª ordem

- **Portanto, a frequência de corte de uma cascata de *n* filtros normalizados de primeira ordem é:**



$$\boxed{\omega_{cn} = \sqrt{\sqrt[n]{2} - 1}}$$

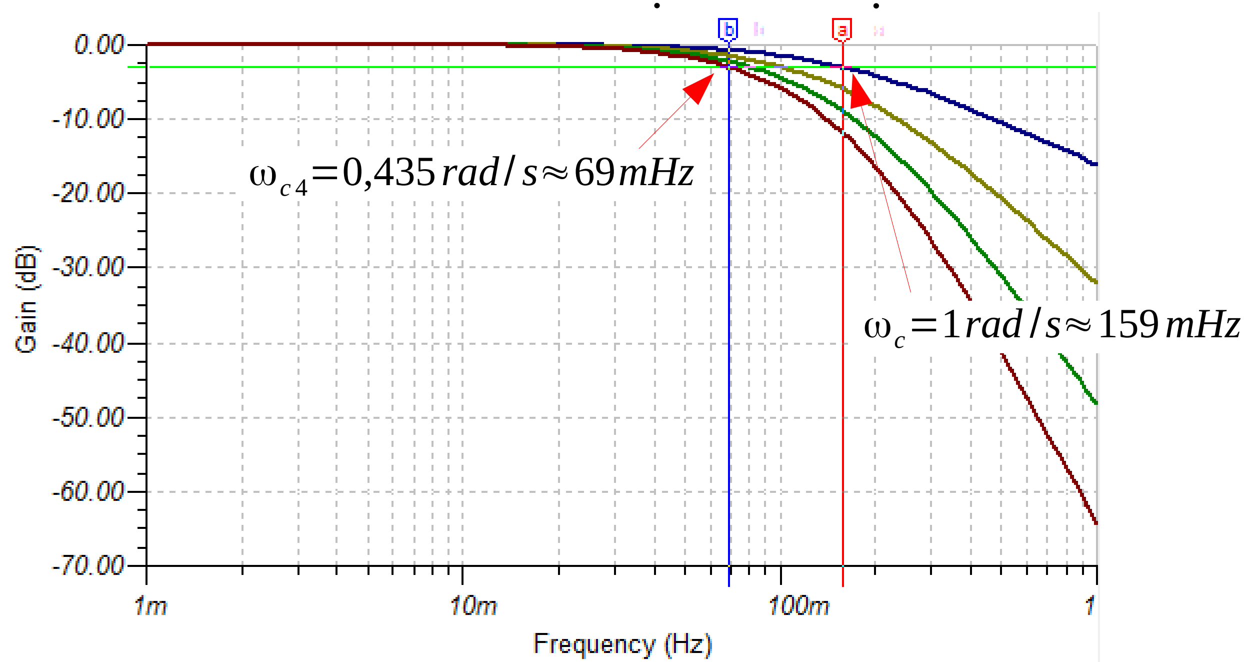
$n=1 \rightarrow 100\,\%$

$n=2 \rightarrow 64{,}4\,\%$

$n=3 \rightarrow 51{,}0\,\%$

$n=4 \rightarrow 43{,}5\,\%$

$\vdots \qquad \vdots$



Cascata de módulos de 1a ordem

- **Correção da frequência:**
  - **Se quisermos que a frequência de corte volte a ser 1 rad/s → corrigir (aumentar) a frequência do módulo de 1ª ordem.**
  - **Utilizando o ganho de frequência:**

$$\boxed{k_f = \frac{\omega_{cn}'}{\omega_{cn}} = \frac{\omega_{cn}'}{\sqrt{\sqrt[n]{2}-1}}}$$

- **Exemplo: considerando uma cascata de 4 estágios:**

$$\omega_{c4} = \sqrt{\sqrt[4]{2}-1} = 0{,}435\, rad/s \longrightarrow k_f = \frac{\omega_{cn}'}{\omega_{cn}} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt[4]{2}-1}} = 2{,}299$$

  - **Podemos alterar o resistor ou o capacitor:**

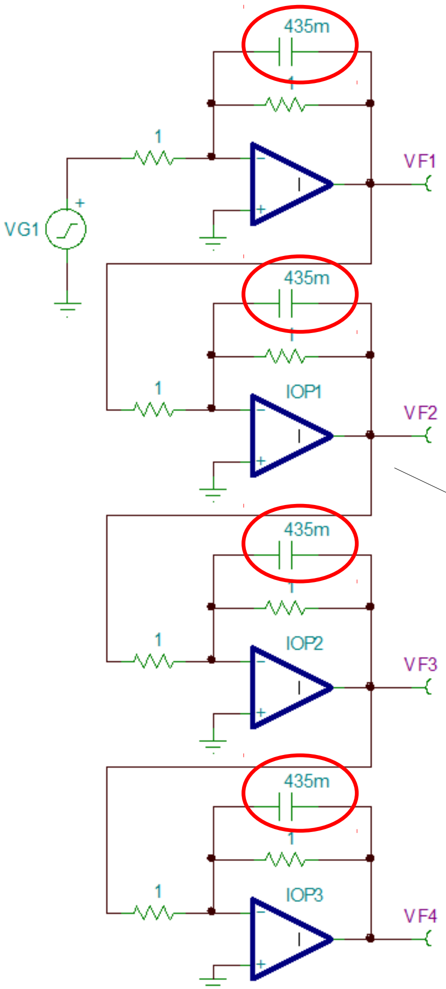
$$Se\, R' = R = 1 \quad \rightarrow \quad k_a = 1$$

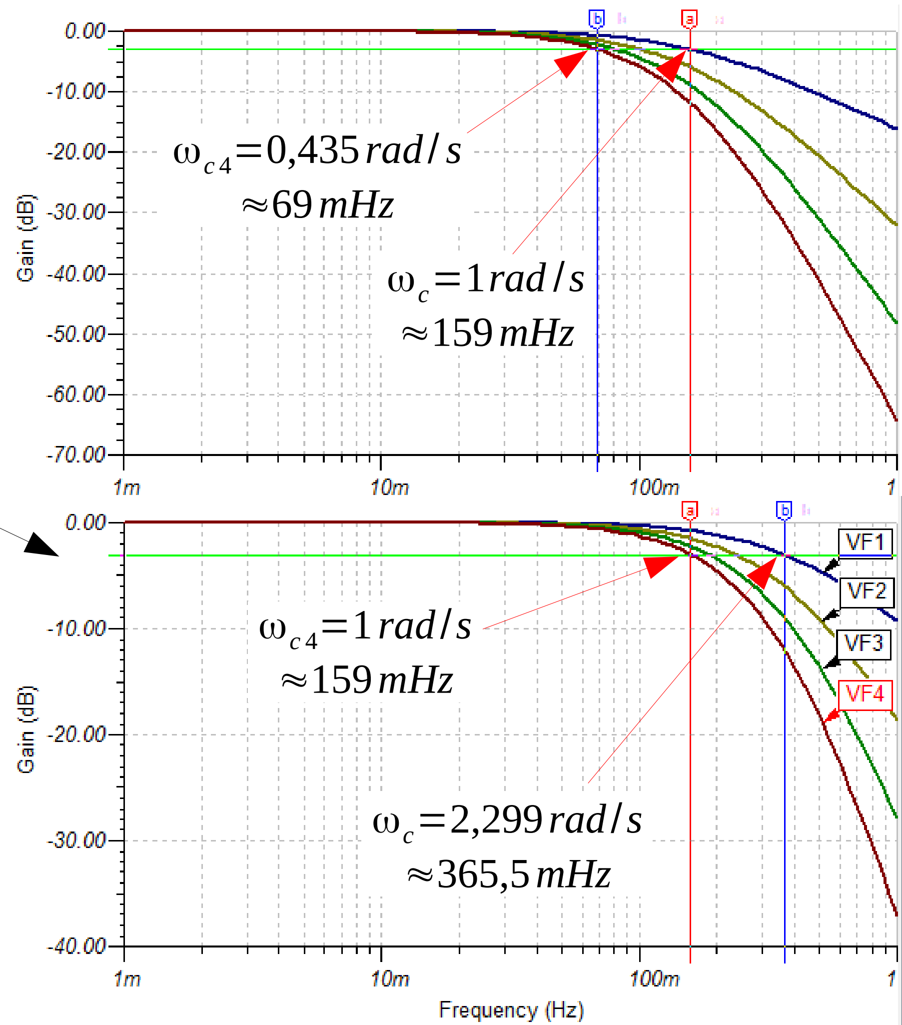
$$C' = \frac{1}{k_a k_f} C = \frac{1}{1 \cdot 2{,}299} \cdot 1 = 0{,}435\, F$$

$$Se\, C' = C = 1 \rightarrow \frac{1}{k_a k_f} = 1 \rightarrow k_a = 0{,}435$$

$$R' = k_a R = 0{,}435 \cdot 1 = 0{,}435$$

Cascata de módulos de 1a ordem





$$H(s)=\frac{(-\omega_c)^4}{(s+\omega_c)^4}=\frac{(-1)^4}{(s+1)^4}$$

$$H(s)=\frac{(-\omega_c)^4}{(s+\omega_c)^4}=\frac{(-2{,}299)^4}{(s+2{,}299)^4}$$

Cascata de módulos de 1ª ordem

- **Podemos usar o mesmo raciocínio para qualquer frequência de corte.**
- **Ex.: filtro passa-baixas de 4ª ordem a partir de cascata de módulos de 1ª ordem:**
  - **Frequência de corte de 500 Hz.**
  - **Ganho de 20 dB.**

Filtro protótipo de 4ª ordem → $\omega_{c4}=\sqrt{\sqrt[4]{2}-1}=0{,}435\,rad/s$

Frequência desejada → $\omega_{c4}'=2\pi 500=3141{,}59\,rad/s$

Ganho de frequência → $k_f=\dfrac{3141{,}59}{0{,}435}=7222{,}39$

Podemos definir o resistor ou o capacitor.

Usando $C'=1\mu F$ → $C'=\dfrac{1}{k_a k_f}C$ → $k_a=\dfrac{1}{C' k_f}C=\dfrac{1}{1\mu\cdot 7222{,}39}\cdot 1=138{,}46$

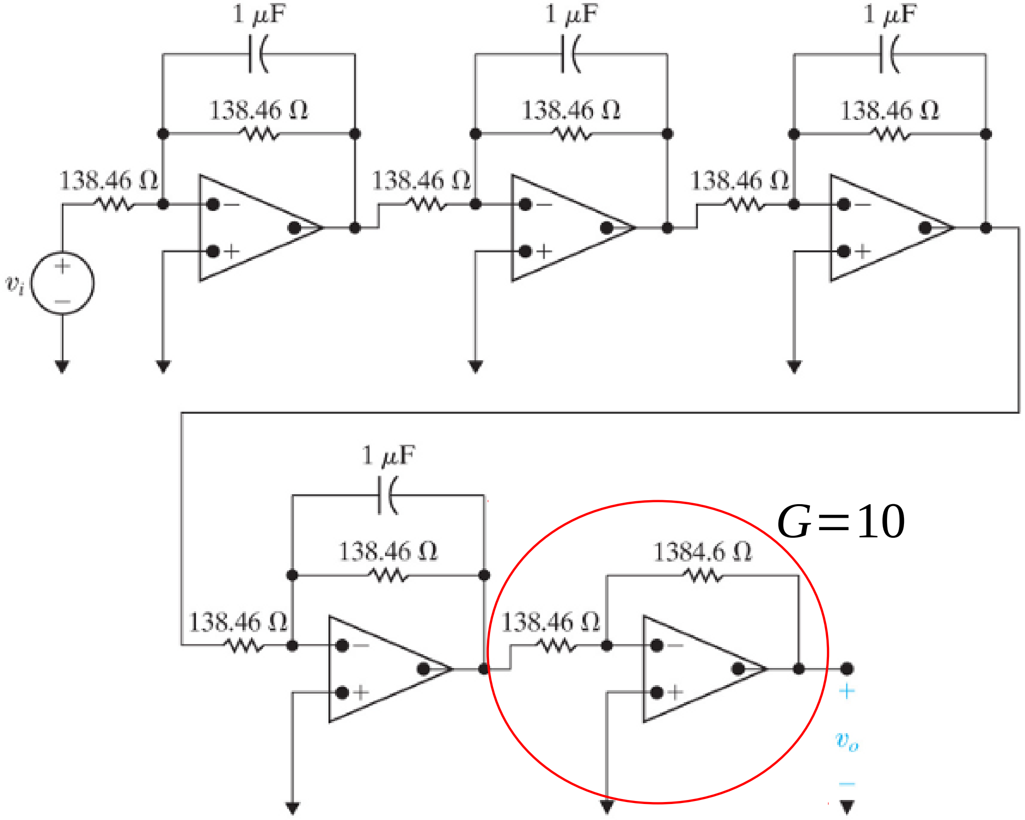
Exemplo:

$k_a = 138{,}46$ $\longrightarrow$ $R' = k_a \cdot R = 138{,}46 \cdot 1 = 138{,}46\Omega$

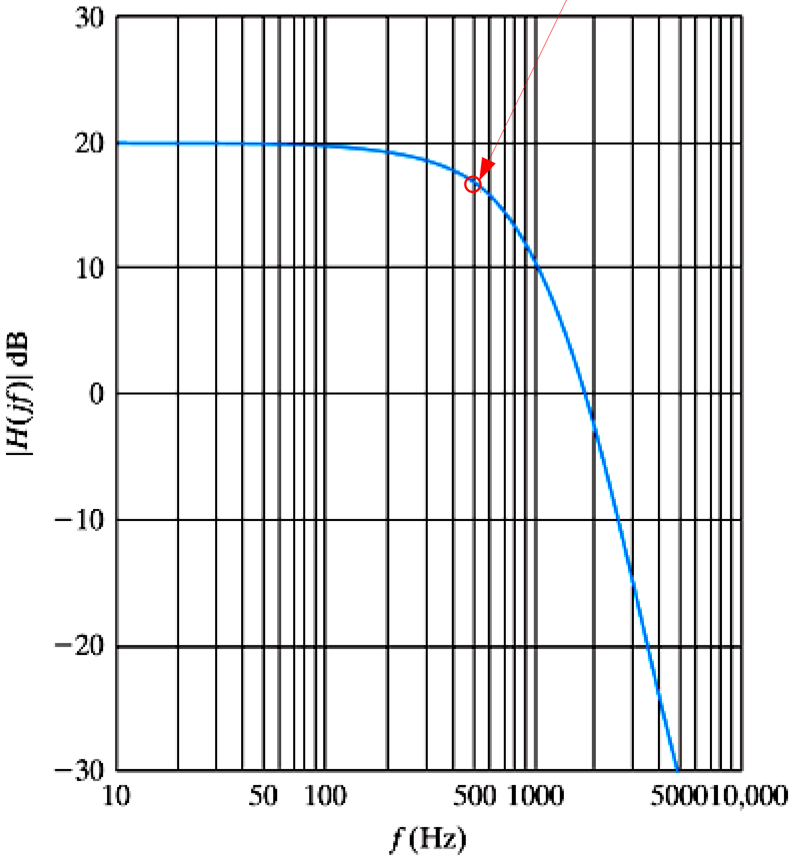
$|H(j\omega)| = 17\,dB$

$\downarrow$

$f_C = 500\,Hz$



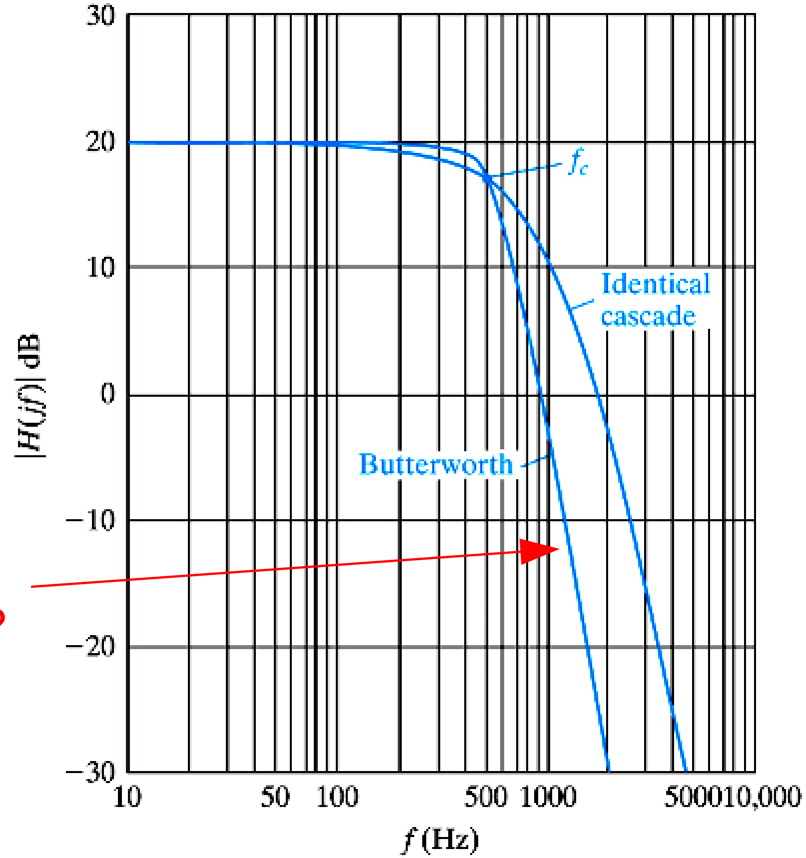
$G = 10$



Polinômios de ordem superior

- **Ok → usando os filtros protótipos é possível corrigir o desvio na frequência de corte.**
- **Outros problemas:**
  - **Faixa de transição muito larga.**
  - **Distorção considerável na faixa de passagem.**
- **2ª abordagem → emprego de polinômios de ordem superior:**

É possível encontrar um polinômio que gere uma resposta em frequência melhor?



Filtro de Butterworth passa-baixas

Resposta em módulo do filtro passa-baixas em cascata:

$$H(s)=\frac{(-\omega_c)^n}{(s+\omega_c)^n} \longrightarrow H(j\omega)=\frac{(-\omega_c)^n}{(j\omega+\omega_c)^n} \longrightarrow |H(j\omega)|=\frac{\omega_c^n}{\left(\sqrt{\omega^2+\omega_c^2}\right)^n} \longrightarrow$$

$$|H(j\omega)|=\frac{1}{\left(\sqrt{(\omega/\omega_c)^2+1}\right)^n}$$

Enquanto $\omega \ll \omega_c \longrightarrow |H(j\omega)|\approx 1$

Mas quando $\omega \to \omega_c \longrightarrow |H(j\omega)|<1$

Resposta do filtro de Butterworth:

$$\boxed{|H(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{(\omega/\omega_c)^{2n}+1}}} \longrightarrow$$

Mantém o ganho próximo ao unitário em uma região maior da faixa de passagem

Filtro de Butterworth passa-baixas

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(\omega/\omega_c)^{2n} + 1}}$$

- **Características do filtro:**
  - **A frequência de corte é independente da ordem *n* do filtro.**
  - **Para *n* suficientemente grande, o ganho permanecerá próximo de 1 em uma região maior da faixa de passagem.**
  - **A resposta decai mais rapidamente na faixa de transição.**
  - **O expoente 2*n* é sempre PAR → condição para que o filtro seja realizável.**
- **Ok → mas, dada a resposta de amplitude desejada, como determinar a função de transferência H(s)?**

Filtro de Butterworth passa-baixas

- **Utilizando a abordagem por filtros protótipos:**

$$\omega_c = 1 rad/s \longrightarrow |H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(\omega/\omega_c)^{2n}+1}} = \frac{1}{\sqrt{\omega^{2n}+1}}$$

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{\omega^{2n}+1} = \frac{1}{(\omega^2)^n+1}$$

Agora, note que, em regime permanente: $s^2 = (j\omega)^2 = -\omega^2 \longrightarrow \omega^2 = -s^2$

Substituindo: $|H(s)|^2 = \dfrac{1}{(-s^2)^n+1} \longrightarrow |H(s)|^2 = \dfrac{1}{(-1)^n s^{2n}+1}$

$\downarrow$ **continua...**

Filtro de Butterworth passa-baixas

$$|H(s)|^2 = \frac{1}{(-1)^n s^{2n} + 1}$$

Como H(s) é uma função complexa: $|H(s)|^2 = H(s) \cdot H^*(s)$

$$= H(s) \cdot H(-s)$$

Portanto: $\boxed{H(s)H(-s) = \frac{1}{(-1)^n s^{2n} + 1}}$

- **Como encontrar H(s)? → Expansão em frações parciais:**
  - **Determine as raízes do polinômio** $(-1)^n s^{2n} + 1 = 0$
  - **Atribua as raízes localizadas no semi-plano esquerdo a H(s).**
  - **Combine os termos para formar fatores de 1ª e 2ª ordens.**

Exemplo

- **Função de transferência para filtro Butterworth passa-baixas de 2ª ordem normalizado:**

$$H(s)H(-s)=\frac{1}{(-1)^n s^{2n}+1}=\frac{1}{(-1)^2 s^{2\cdot 2}+1}=\frac{1}{s^4+1}$$

Polinômio: $s^4+1=0 \longrightarrow s^4=-1 \longrightarrow s^4=1\,e^{j180^o}=$

As raízes são: $\cancel{s_{1,2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\pm j\frac{1}{\sqrt{2}}}$

$$s_{3,4}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\pm j\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Portanto: $H(s)=\frac{1}{\left(s+\frac{1}{\sqrt{2}}-j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(s+\frac{1}{\sqrt{2}}+j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \longrightarrow \boxed{H(s)=\frac{1}{s^2+\sqrt{2}\,s+1}}$

Polinômios de Butterworth normalizados

- **Polinômios de Butterworth para filtros passa-baixas <u>normalizados</u> até a 8ª ordem:**

n	nth-Order Butterworth Polynomial
1	$(s + 1)$
2	$(s^2 + \sqrt{2}s + 1)$
3	$(s + 1)(s^2 + s + 1)$
4	$(s^2 + 0.765s + 1)(s^2 + 1.848s + 1)$
5	$(s + 1)(s^2 + 0.618s + 1)(s^2 + 1.618s + 1)$
6	$(s^2 + 0.518s + 1)(s^2 + \sqrt{2} + 1)(s^2 + 1.932s + 1)$
7	$(s + 1)(s^2 + 0.445s + 1)(s^2 + 1.247s + 1)(s^2 + 1.802s + 1)$
8	$(s^2 + 0.390s + 1)(s^2 + 1.111s + 1)(s^2 + 1.6663s + 1)(s^2 + 1.962s + 1)$

Circuitos de ordem superior

- **Ok, já sabemos como obter H(s).**
- **Mas → como conseguir o circuito?**
- **Observando a tabela:**

Produtos de fatores de 1ª e 2ª ordem.

Cascata de circuitos de 1ª e 2ª ordem

$$H_1(s)=\frac{1}{s+1}$$

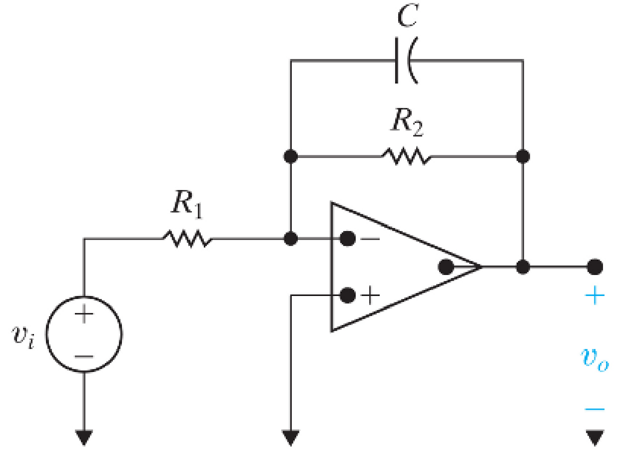
$$H_2(s)=\frac{1}{s^2+b_1 s+1}$$

*n*th-Order Butterworth Polynomial
$(s+1)$
$(s^2+\sqrt{2}s+1)$
$(s+1)(s^2+s+1)$
$(s^2+0.765s+1)(s^2+1.848s+1)$
$(s+1)(s^2+0.618s+1)(s^2+1.618s+1)$
$(s^2+0.518s+1)(s^2+\sqrt{2}+1)(s^2+1.932s+1)$
$(s+1)(s^2+0.445s+1)(s^2+1.247s+1)(s^2+1.802s+1)$
$(s^2+0.390s+1)(s^2+1.111s+1)(s^2+1.6663s+1)(s^2+1.962s+1)$

Circuitos de ordem superior

- **Estágio de 1ª ordem → filtro protótipo passa-baixas:**

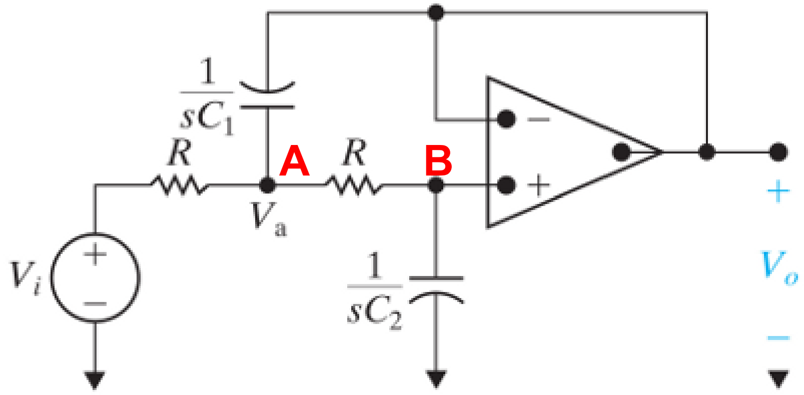
$$H(s)=\frac{1}{s+1}$$



$$R_1=1\,\Omega$$
$$R_2=1\,\Omega$$
$$C=1\,F$$
$$\omega_c=1\ rad/s$$

Circuitos de ordem superior

- **Estágio de 2ª ordem → existem algumas configurações.**
  - **Ex.: Sallen-Key com ganho unitário.**



Análise quantitativa:

$$Nó\,A: \frac{V_a - V_i}{R} + \frac{V_a - V_o}{1/sC_1} + \frac{V_a - V_o}{R} = 0$$

$$Nó\,B: \frac{V_o - V_a}{R} + \frac{V_o}{1/sC_2} = 0$$

Simplificando: $$H(s) = \frac{V_0}{V_i} = \frac{\frac{1}{R^2 C_1 C_2}}{s^2 + \frac{2}{RC_1}s + \frac{1}{R^2 C_1 C_2}}$$

continua...

Circuitos de ordem superior

$$H(s)=\frac{V_0}{V_i}=\frac{\frac{1}{R^2C_1C_2}}{s^2+\frac{2}{RC_1}s+\frac{1}{R^2C_1C_2}}$$

Fazendo R = 1: $$H(s)=\frac{\frac{1}{C_1C_2}}{s^2+\frac{2}{C_1}s+\frac{1}{C_1C_2}}$$

Mas o que queremos é: $$H(s)=\frac{1}{s^2+b_1s+1}$$

Portanto: $$\boxed{\frac{1}{C_1C_2}=1,\quad b_1=\frac{2}{C_1},\quad R=1} \longrightarrow \omega_c=1\ rad/s,\quad K=1$$

Filtro de 2ª ordem normalizado

Exemplo

- **Projeto de um filtro Butterworth passa-baixas de 4ª ordem:**
  - **fc = 500 Hz.**
  - **K = 10.**
  - **Maior número possível de resistores de 1 kΩ.**

Exemplo

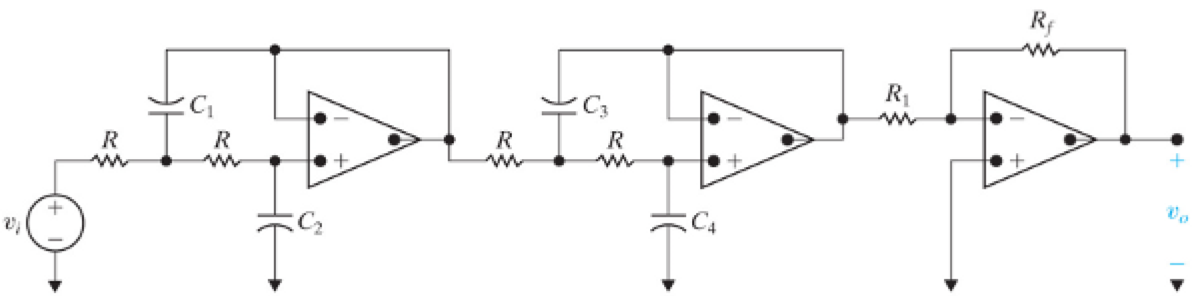
Polinômio de Butterworth

*n*th-Order Butterworth Polynomial
$(s + 1)$
$(s^2 + \sqrt{2}s + 1)$
$(s + 1)(s^2 + s + 1)$
$\boxed{(s^2 + 0.765s + 1)(s^2 + 1.848s + 1)}$
$(s + 1)(s^2 + 0.618s + 1)(s^2 + 1.618s + 1)$
$(s^2 + 0.518s + 1)(s^2 + \sqrt{2} + 1)(s^2 + 1.932s + 1)$
$(s + 1)(s^2 + 0.445s + 1)(s^2 + 1.247s + 1)(s^2 + 1.802s + 1)$
$(s^2 + 0.390s + 1)(s^2 + 1.111s + 1)(s^2 + 1.6663s + 1)(s^2 + 1.962s + 1)$

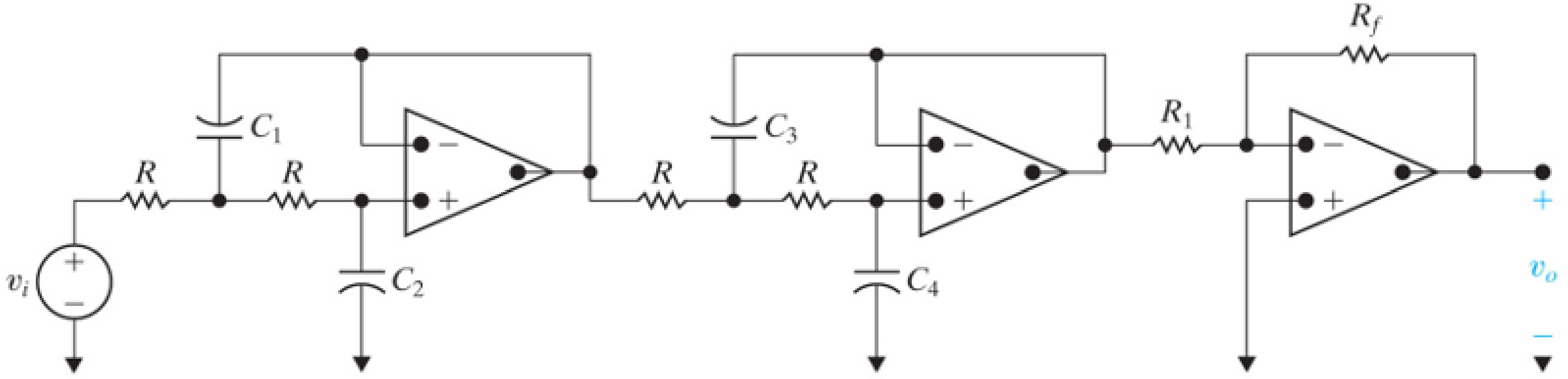
4ª ordem:

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 0{,}765\,s + 1} \cdot \frac{1}{s^2 + 1{,}848\,s + 1}$$

2 estágios de 2ª ordem + estágio de ganho



Exemplo



$$H_1(s)=\frac{1}{s^2+b_1 s+1}=\frac{1}{s^2+0{,}765\,s+1} \qquad H_2(s)=\frac{1}{s^2+b_2 s+1}=\frac{1}{s^2+1{,}848\,s+1}$$

$$b_1=\frac{2}{C_1}=0{,}765 \rightarrow C_1=2{,}61\,F \qquad b_2=\frac{2}{C_3}=1{,}848 \rightarrow C_3=1{,}08\,F$$

$$\frac{1}{C_1C_2}=1 \rightarrow C_2=0{,}38\,F \qquad \frac{1}{C_3C_4}=1 \rightarrow C_4=0{,}924\,F$$

$$R=1 \qquad R=1$$

$$Filtro\ de\ 4^a\ ordem,\ \omega_c=1\ rad/s$$

Exemplo

Ajustando a frequência de corte: $f'_c = 500\,Hz$ $\longrightarrow$ $\omega'_c = 3.141{,}6\,rad/s$

$$k_f = \frac{\omega'_c}{\omega} = \frac{3.141{,}6}{1} = 3.141{,}6$$

Para utilizar resistores de 1k: $R' = 1000\,\Omega = k_a . R$ $\longrightarrow$ $k_a = \frac{R'}{R} = \frac{1000}{1} = 1000$

Ajustando os capacitores:

$$C'_1 = \frac{1}{k_a k_f} C_1 = 831\,nF$$

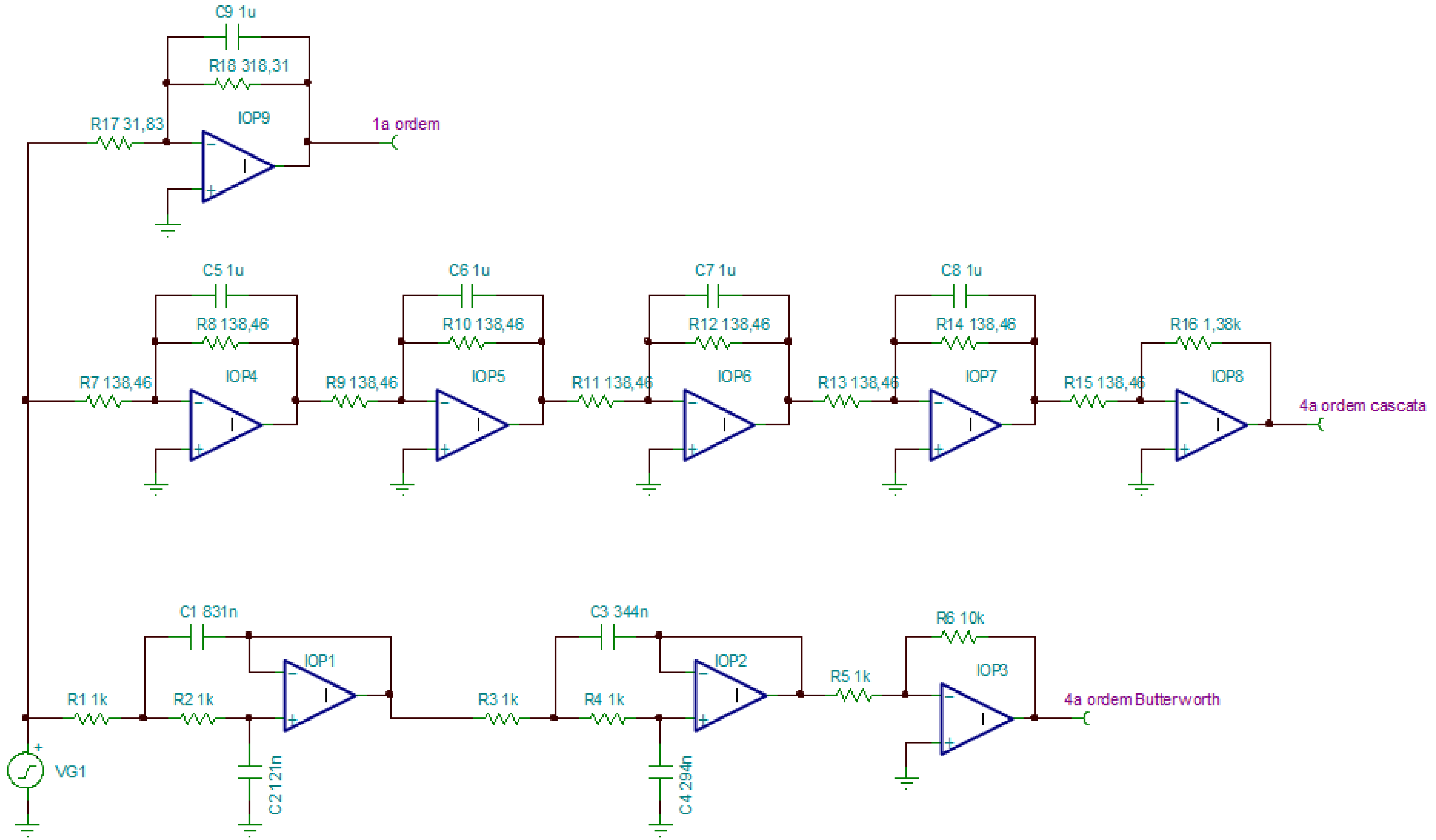
$$C'_2 = \frac{1}{k_a k_f} C_2 = 121\,nF$$

$$C'_3 = \frac{1}{k_a k_f} C_3 = 344\,nF$$

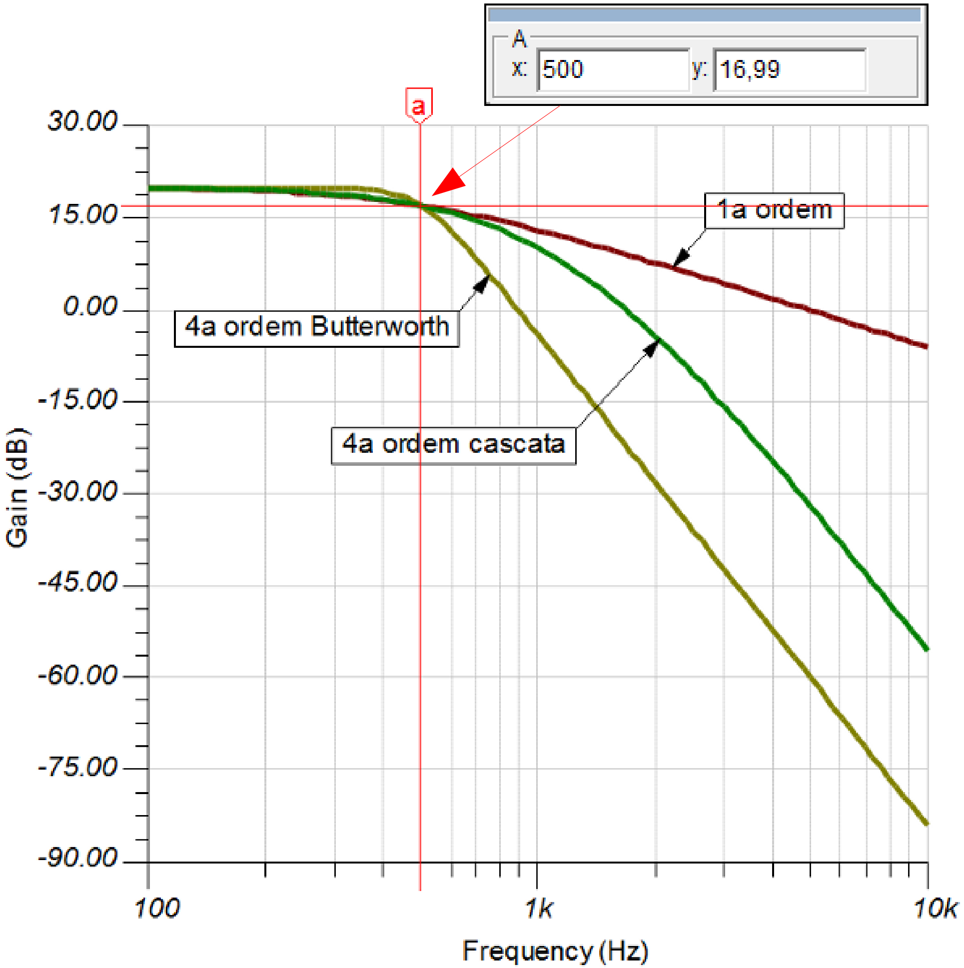
$$C'_4 = \frac{1}{k_a k_f} C_4 = 294\,nF$$

Calculando o estágio de ganho: $K = 10 = \frac{R_f}{R_i}$ $\longrightarrow$ $R_i = 1\,k\Omega,\ R_f = 10\,k\Omega$

Exemplo


C9 1u
R18 318,31
R17 31,83
IOP9
1a ordem
C5 1u
R8 138,46
R7 138,46
IOP4
C6 1u
R10 138,46
R9 138,46
IOP5
C7 1u
R12 138,46
R11 138,46
IOP6
C8 1u
R14 138,46
R13 138,46
IOP7
R16 1,38k
R15 138,46
IOP8
4a ordem cascata
C1 831n
R1 1k
R2 1k
IOP1
C2 121n
VG1
R3 1k
C3 344n
R4 1k
IOP2
C4 294n
R5 1k
R6 10k
IOP3
4a ordem Butterworth

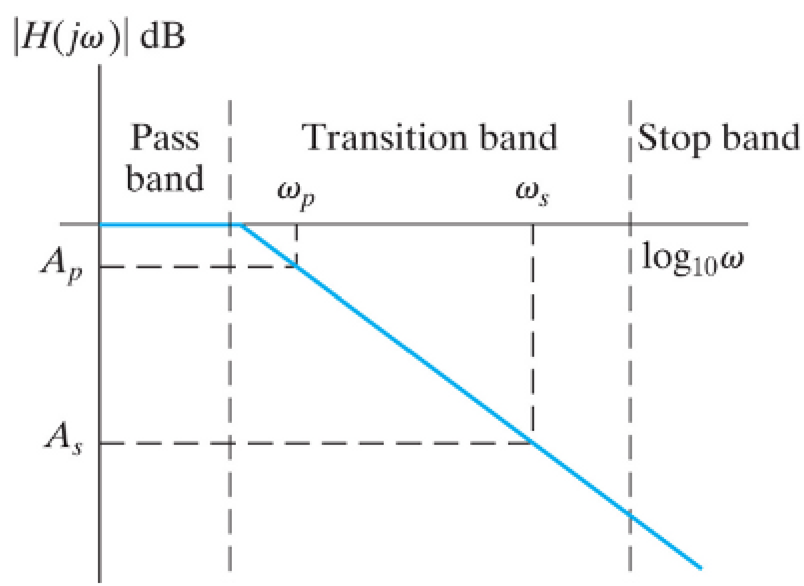
Exemplo



A
x: 500
y: 16,99
a
30.00
15.00
0.00
-15.00
-30.00
-45.00
-60.00
-75.00
-90.00
Gain (dB)
100
1k
10k
Frequency (Hz)
1a ordem
4a ordem Butterworth
4a ordem cascata

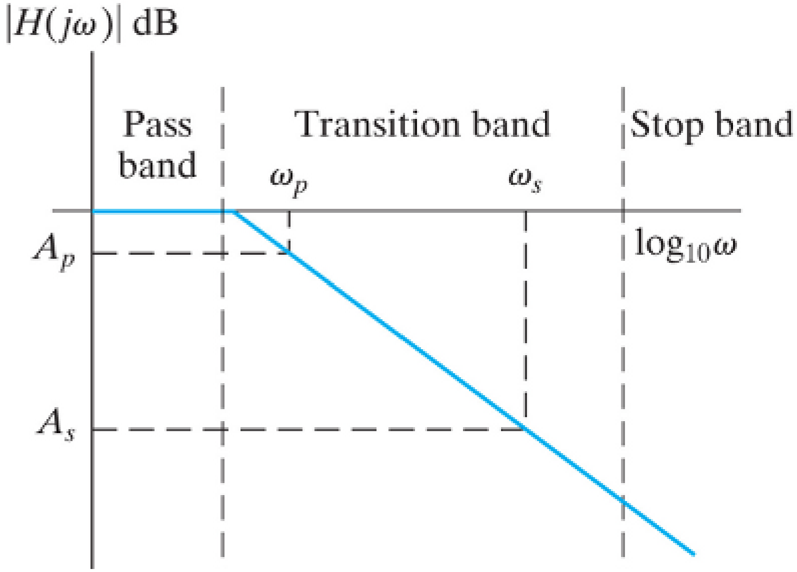
Estimativa da ordem do filtro

- **Projetos de filtros → normalmente deseja-se atender a um conjunto de especificações:**
  - **Frequência(s) de corte.**
  - **Ganho na faixa de passagem.**
  - **Atenuação na faixa de rejeição.**
  - **Largura da faixa de transição.**
- **A ordem do filtro pode ser determinada com base nas especificações do projeto.**



Ordem do filtro Butterworth

- **Para um filtro PB Butterworth normalizado:**



$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^{2n}+1}}$$

$$A_p = 20\log_{10}\frac{1}{\sqrt{\omega_p^{2n}+1}} = -10\log_{10}(\omega_p^{2n}+1)$$

$$A_s = 20\log_{10}\frac{1}{\sqrt{\omega_s^{2n}+1}} = -10\log_{10}(\omega_s^{2n}+1)$$

$$A_p = -10\log_{10}(\omega_p^{2n}+1) \longrightarrow (\omega_p^{2n}+1) = 10^{-\frac{A_p}{10}} \longrightarrow \omega_p^n = \sqrt{10^{-\frac{A_p}{10}}-1}$$

$$A_s = -10\log_{10}(\omega_s^{2n}+1) \longrightarrow (\omega_s^{2n}+1) = 10^{-\frac{A_s}{10}} \longrightarrow \omega_s^n = \sqrt{10^{-\frac{A_s}{10}}-1}$$

continua...

Ordem do filtro Butterworth

$$\omega_p^n = \sqrt{10^{-\frac{A_p}{10}} - 1}$$

$$\omega_s^n = \sqrt{10^{-\frac{A_s}{10}} - 1}$$

$$\longrightarrow \left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)^n = \frac{\sqrt{10^{-\frac{A_s}{10}} - 1}}{\sqrt{10^{-\frac{A_p}{10}} - 1}} \longrightarrow \log_{10}\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)^n = \log_{10}\left(\frac{\sqrt{10^{-\frac{A_s}{10}} - 1}}{\sqrt{10^{-\frac{A_p}{10}} - 1}}\right)$$

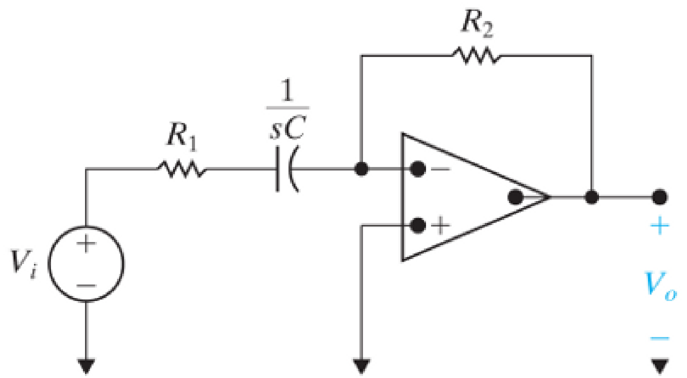
$$n \cdot \log_{10}\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right) = \log_{10}\left(\frac{\sqrt{10^{-\frac{A_s}{10}} - 1}}{\sqrt{10^{-\frac{A_p}{10}} - 1}}\right) \longrightarrow \boxed{n = \frac{\log_{10}\left(\sqrt{10^{-\frac{A_s}{10}} - 1} \Big/ \sqrt{10^{-\frac{A_p}{10}} - 1}\right)}{\log_{10}\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)}}$$

Se: $\omega_p = \omega_c$

$$A_p = -3{,}01\, dB \longrightarrow \sqrt{10^{-\frac{A_p}{10}} - 1} = 1 \longrightarrow \boxed{n = \frac{\log_{10}\sqrt{10^{-\frac{A_s}{10}} - 1}}{\log_{10}\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)}}$$

Filtro Butterworth passa-altas

- **Utilizando a mesma abordagem → cascata de estágios de 1ª e 2ª ordem:**
  - **Estágio passa-altas de 1ª ordem → filtro protótipo.**



$$R_1 = 1\,\Omega \qquad H(s) = \frac{s}{s+1}$$

$$R_2 = 1\,\Omega$$

$$C = 1\,F$$

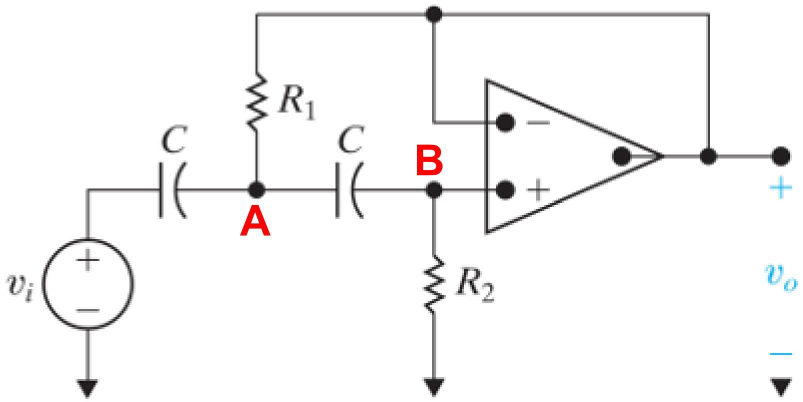
$$\omega_c = 1\ rad/s$$

  - **Estágio passa-altas de 2ª ordem → função de transferência do tipo:**

$$H(s) = \frac{s^2}{s^2 + b_1 s + 1}$$

Filtro Butterworth passa-altas

– **Sallen-Key passa-altas de 2ª ordem:**



Análise quantitativa:

$$N\acute{o}\,A: \frac{V_a - V_i}{1/sC} + \frac{V_a - V_o}{R_1} + \frac{V_a - V_o}{1/sC} = 0$$

$$N\acute{o}\,B: \frac{V_o - V_a}{1/sC} + \frac{V_o}{R_2} = 0$$

Simplificando: $$H(s) = \frac{V_0}{V_i} = \frac{s^2}{s^2 + \frac{2}{R_2 C}s + \frac{1}{R_1 R_2 C}}$$

Fazendo: $$C = 1F \longrightarrow H(s) = \frac{s^2}{s^2 + \frac{2}{R_2}s + \frac{1}{R_1 R_2}} = \frac{s^2}{s^2 + b_1 s + 1} \longrightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \frac{1}{R_1 R_2} = 1 \\ \frac{2}{R_2} = b_1 \\ C = 1 \\ \omega_c = 1\ rad/s \\ K = 1 \end{array}}$$

Exemplo

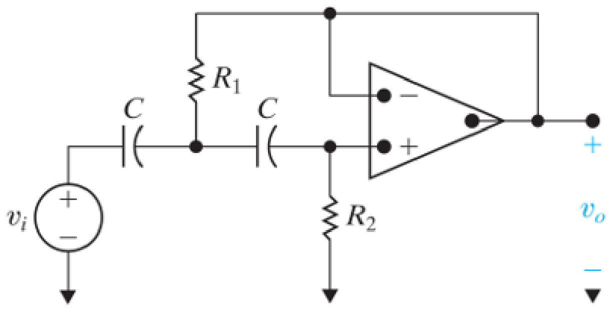
- **Projeto de um filtro protótipo passa-altas de 2ª ordem.**

nth-Order Butterworth Polynomial
$(s+1)$
$\boxed{(s^2+\sqrt{2}s+1)}$
$(s+1)(s^2+s+1)$
$(s^2+0.765s+1)(s^2+1.848s+1)$
$(s+1)(s^2+0.618s+1)(s^2+1.618s+1)$
$(s^2+0.518s+1)(s^2+\sqrt{2}+1)(s^2+1.932s+1)$
$(s+1)(s^2+0.445s+1)(s^2+1.247s+1)(s^2+1.802s+1)$
$(s^2+0.390s+1)(s^2+1.111s+1)(s^2+1.6663s+1)(s^2+1.962s+1)$

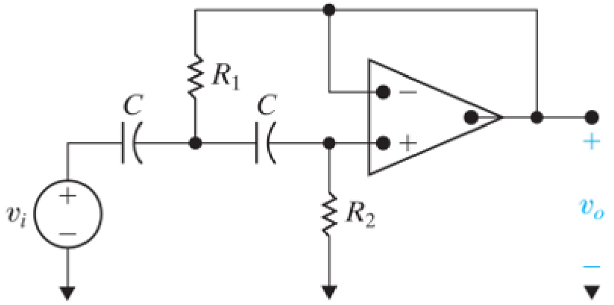
2ª ordem:

$$H(s)=\frac{s^2}{s^2+\sqrt{2}s+1}$$

1 estágio de 2ª ordem



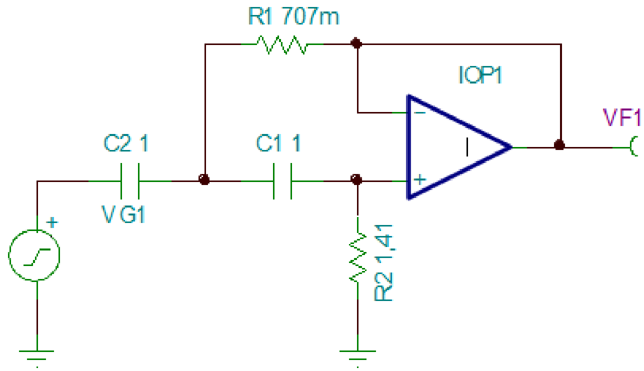
Exemplo

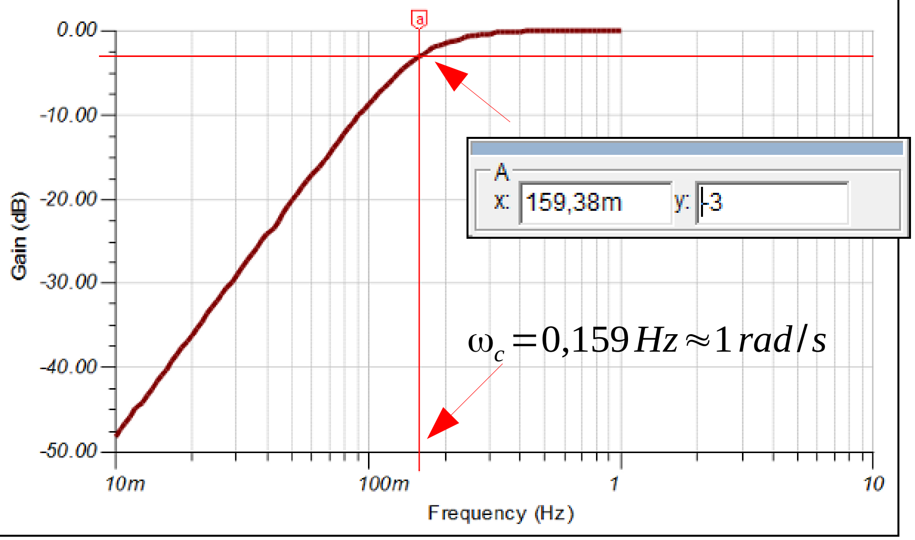


$$H(s)=\frac{s^2}{s^2+\sqrt{2}\,s+1}=\frac{s^2}{s^2+b_1 s+1}\qquad \boxed{C=1}\qquad b_1=\frac{2}{R_2}\qquad \frac{1}{R_1 R_2}=1$$

$$\frac{2}{R_2}=\sqrt{2}\;\longrightarrow\;\boxed{R_2=1{,}4142\,\Omega}$$

$$\frac{1}{R_1 R_2}=1\;\longrightarrow\;\boxed{R_1=0{,}707\,\Omega}$$

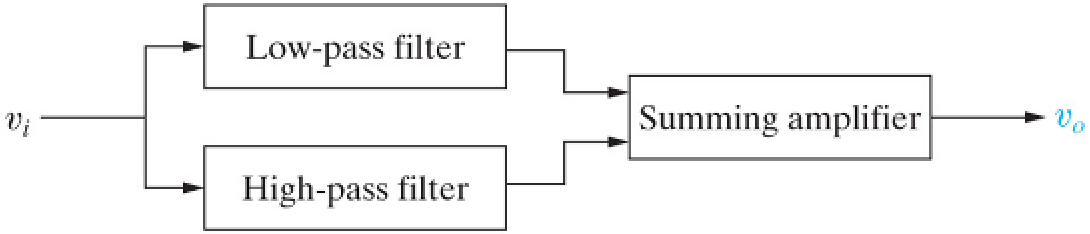




Filtro Butterworth passa-faixa e rejeita-faixa

- **Uma vez que sabemos projetar filtros passa-baixas e passa-altas:**
  - **Filtros passa-faixa → cascata de filtros de n-ésima ordem.**

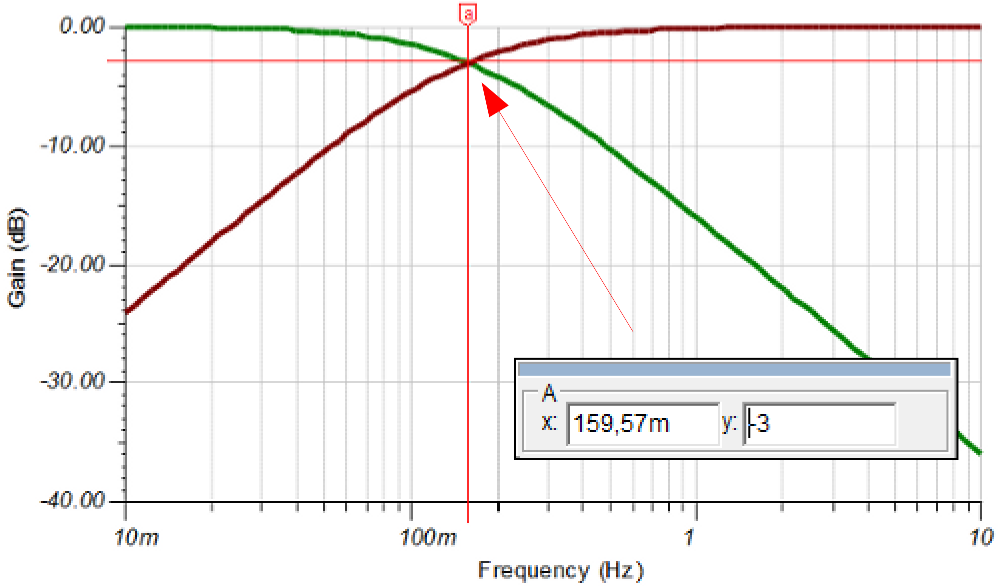
  - **Filtros rejeita-faixa → conjunção de filtros de n-ésima ordem.**



- **Novamente → restritos a filtros de faixa larga →** $\omega_{c2} \geq 2\,\omega_{c1}$

Filtros passa-faixa e rejeita-faixa de faixa estreita (filtro sintonizados)

- **Filtros em cascata e em paralelo:**
  - **restritos a faixas de passagem largas →** $\omega_{c2} \geq 2\omega_{c1}$
  - **baixo fator de qualidade → o maior Q é obtido quando as frequências de corte são iguais:**



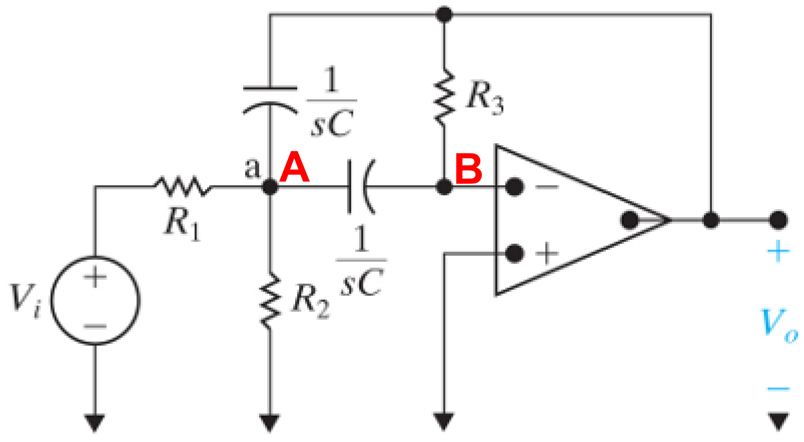
$$H(s) = \left(\frac{-\omega_c}{s+\omega_c}\right)\left(\frac{-s}{s+\omega_c}\right)$$
$$= \frac{s\,\omega_c}{s^2 + 2\omega_c s + \omega_c^2}$$
$$= \frac{0{,}5\,\beta\, s}{s^2 + \beta s + \omega_0^2}$$

Portanto:

$$\beta = 2\omega_c$$
$$\omega_0 = \omega_c$$
$$\longrightarrow \quad Q = \frac{\omega_0}{\beta} = \frac{1}{2}$$

Filtro passa-faixa de faixa estreita

- **Para aumentar a qualidade → função de transferência com polos complexos.**
- **Exemplo: topologia *múltipla realimentação*.**



Análise quantitativa:

$$Nó\,A: \frac{V_a - V_i}{R_1} + \frac{V_a - V_o}{1/sC} + \frac{V_a}{R_2} + \frac{V_a}{1/sC} = 0$$

$$Nó\,B: \frac{-V_a}{1/sC} + \frac{-V_o}{R_3} = 0$$

Simplificando:

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{-s/(R_1 C)}{s^2 + 2/(R_3 C)s + 1/[(R_1 \| R_2) R_3 C^2]}$$

continua...

Filtro passa-faixa de faixa estreita

$$H(s) = \frac{-s/(R_1 C)}{s^2 + 2/(R_3 C)s + 1/[(R_1 \| R_2) R_3 C^2]} \quad = \frac{-K\beta s}{s^2 + \beta s + \omega_0^2}$$

Portanto:

$$\boxed{\begin{aligned} \beta &= \frac{2}{R_3 C} \\ K\beta &= \frac{1}{R_1 C} \\ \omega_0^2 &= \frac{1}{[(R_1 \| R_2) R_3 C^2]} \end{aligned}}$$

- **Notar que:**
  - $\beta \, e \, \omega_0$ **tornam-se independentes.**
  - **R1, R2 e R3 definem os parâmetros do filtro.**
  - **É conveniente definir filtros protótipos considerando**

    $C = 1\mathrm{F}, \quad \omega_0 = 1\, rad/s$

Filtro protótipo passa-faixa de faixa estreita

- **Considerando** $C=1\mathrm{F},\ \omega_0=1\,rad/s$

$$R_1=\frac{Q}{K}$$

$$R_2=\frac{Q}{2Q^2-K}$$

$$R_3=2\mathrm{Q}$$

Exemplo

- **Projeto de um filtro passa-faixa sintonizado:**
  - $f_0 = 3$ kHz.
  - Q = 10.
  - K = 2.
  - Use capacitores de 10nF

Exemplo

Partindo do filtro protótipo:

$$\left.\begin{aligned} &R_1 = \frac{Q}{K} = \frac{10}{2} = 5\,\Omega \\ &R_2 = \frac{Q}{2Q^2 - K} = \frac{10}{2 \cdot 10^2 - 2} = \frac{10}{198}\,\Omega \\ &R_3 = 2\mathrm{Q} = 2 \cdot 10 = 20\,\Omega \end{aligned}\right\} \quad C = 1\mathrm{F},\ \ \omega_0 = 1\,rad/s$$

Corrigindo para a resposta desejada

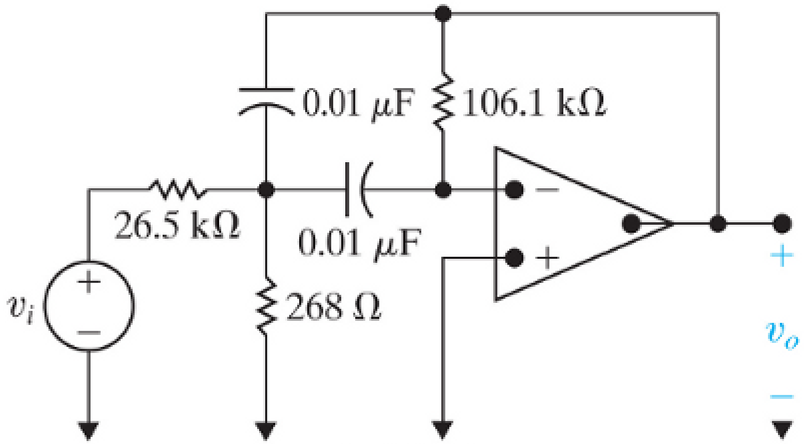
$$\omega'_0 = 2\pi 3k = 6000\pi\, rad/s \longrightarrow k_f = \frac{\omega'_0}{\omega_0} = \frac{6000\pi}{1} = 6000\pi$$

$$C' = \frac{1}{k_a k_f} C = 1\mu F \longrightarrow k_a = \frac{1}{6000\pi \cdot 10\, nF} 1F \approx 5305{,}16$$

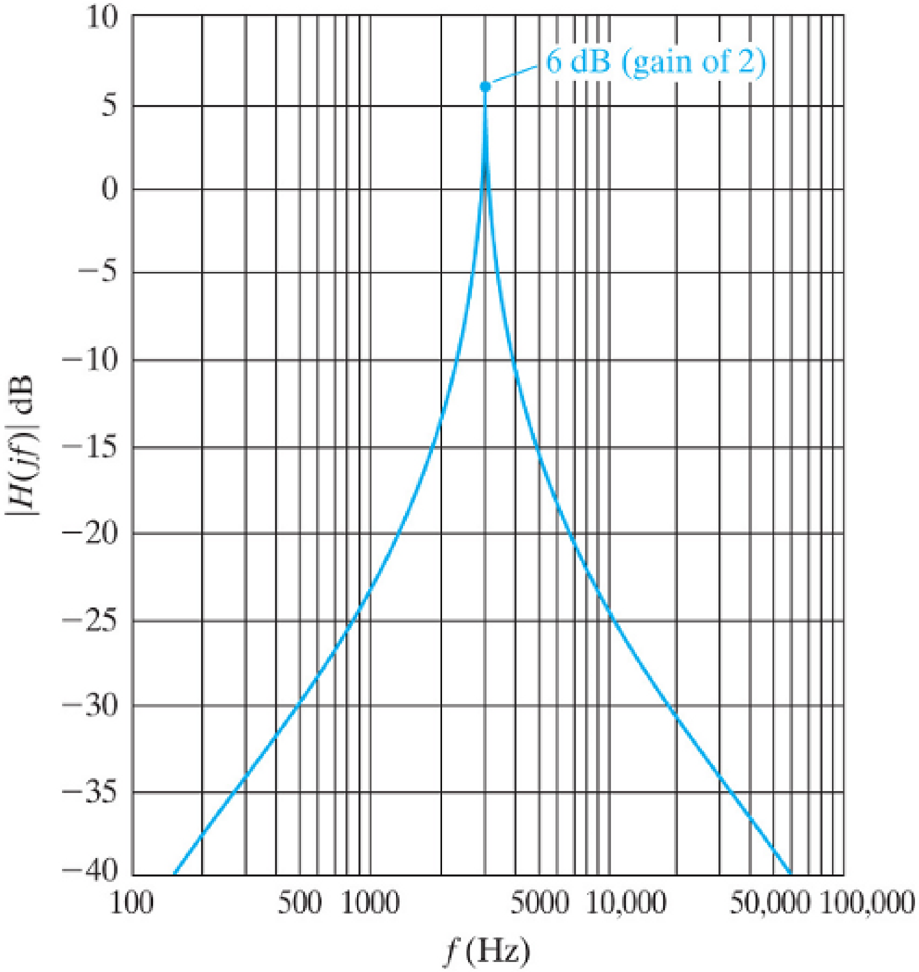
$$R_1' = k_a R_1 = 5305{,}16 \cdot 5 \approx 26{,}5\, k\Omega$$

$$R_2' = k_a R_2 = \frac{5305{,}16 \cdot 10}{198} \approx 267{,}9\,\Omega \qquad R_3' = k_a R_3 = 5305{,}16 \cdot 20 \approx 106{,}1\, k\Omega$$

Exemplo



0.01 μF
106.1 kΩ
26.5 kΩ
0.01 μF
268 Ω
v_i
v_o



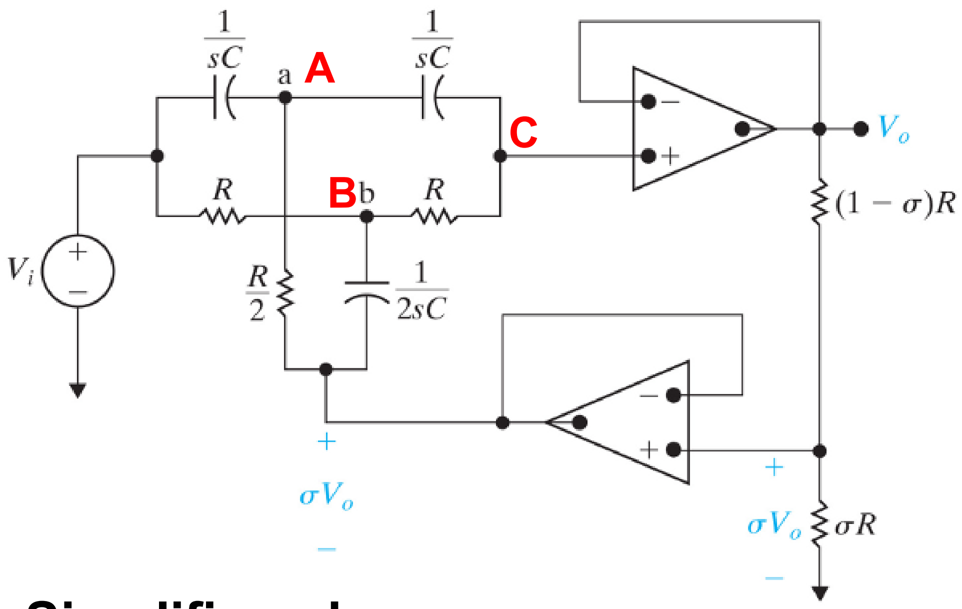
6 dB (gain of 2)
|H(jf)| dB
f (Hz)
10
5
0
−5
−10
−15
−20
−25
−30
−35
−40
100
500
1000
5000
10,000
50,000
100,000

Filtro rejeita-faixa de faixa estreita duplo-T

- Filtros rejeita-faixa em paralelo sofrem as mesmas restrições:
  - Baixo fator de qualidade.
  - Distorções na faixa de passagem.
- Solução:
  - Função de transferência com polos complexos.
  - Topologia duplo-T.

Filtro rejeita-faixa de faixa estreita duplo-T

- **Topologia duplo-T.**



Análise quantitativa:

$$Nó\,A: \frac{V_a - V_i}{1/sC} + \frac{V_a - V_o}{1/sC} + \frac{V_a - \sigma V_o}{R/2} = 0$$

$$Nó\,B: \frac{V_b - V_i}{R} + \frac{V_b - V_o}{R} + \frac{V_b - \sigma V_o}{1/2sC} = 0$$

$$Nó\,C: \frac{V_o - V_a}{1/sC} + \frac{V_o - V_b}{R} = 0$$

Simplificando:

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{s^2 + 1/(R^2C^2)}{s^2 + [4(1-\sigma)/(RC)]s + 1/(R^2C^2)}$$

continua...

Filtro rejeita-faixa de faixa estreita duplo-T

$$H(s) = \frac{s^2 + 1/(R^2C^2)}{s^2 + [4(1-\sigma)/(RC)]s + 1/(R^2C^2)} = \frac{s^2 + \omega_0^2}{s^2 + \beta s + \omega_0^2}$$

Portanto:

$$\boxed{\beta = \frac{4(1-\sigma)}{RC} \qquad \omega_0^2 = \frac{1}{R^2C^2}}$$

- **Notar que:**
  - $\beta \; e \; \omega_0$ **tornam-se independentes.**
  - **3 parâmetros a ajustar:** $R, C \; e \; \sigma$
  - **2 restrições:** $\beta \; e \; \omega_0$
  - **Escolhe-se um dos parâmetros arbitrariamente.**

Ex.: definindo-se arbitrariamente C

$$R = \frac{1}{\omega_0 C} \qquad \sigma = 1 - \frac{\beta}{4\omega_0}$$

Exemplo

- **Filtro rejeita-faixa:**
  - **$\omega 0$ = 5000 rad/s.**
  - **β = 1000 rad/s.**
  - **Capacitores de 1 uF.**

Exemplo

Considerando que o capacitor foi definido

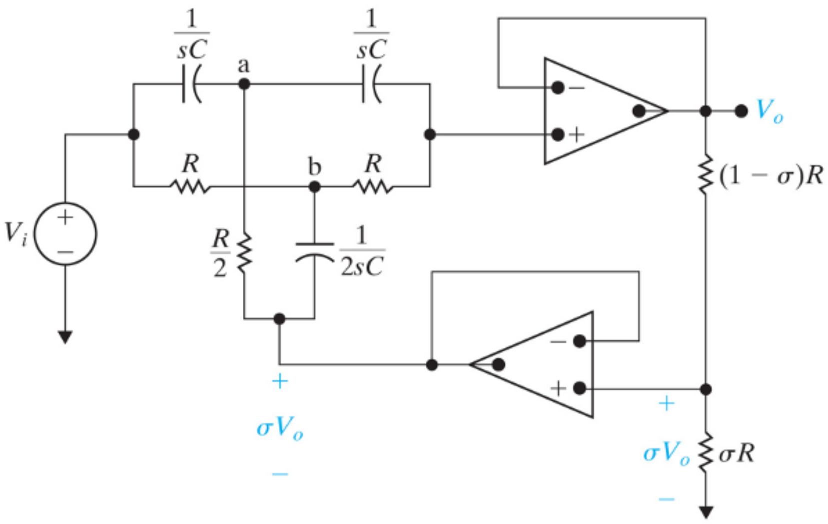
$$\omega_0 = 5000\, rad/s$$

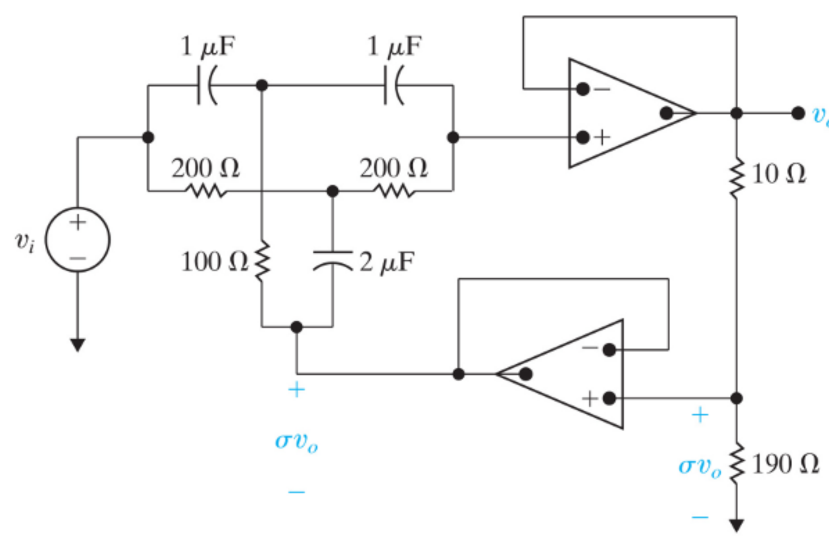
$$\beta = 1000\, rad/s$$

$$C = 1\mu F$$

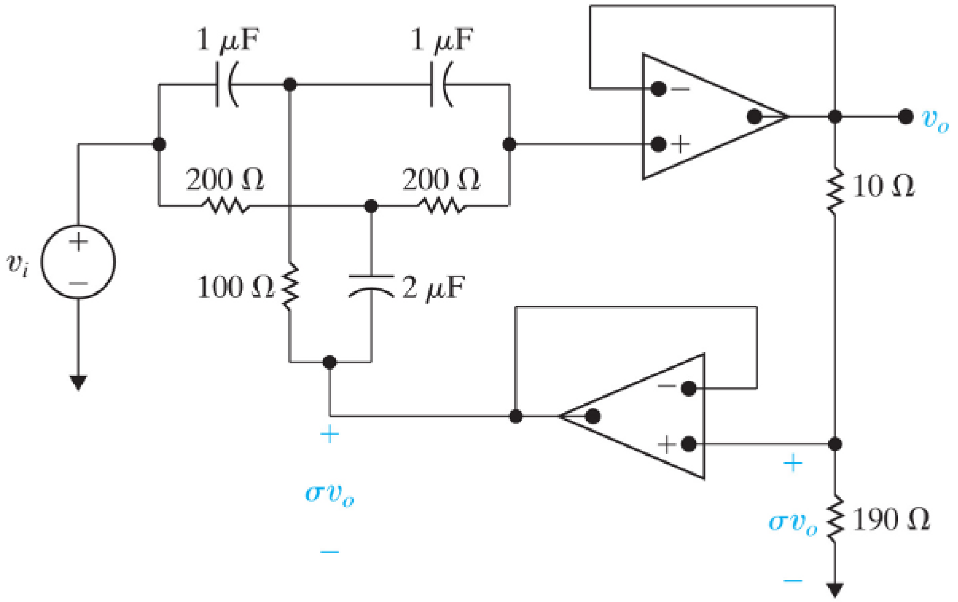
$$R = \frac{1}{\omega_0 C} = \frac{1}{5000 \cdot 1\mu} = 200\Omega$$

$$\sigma = 1 - \frac{\beta}{4\omega_0} = 1 - \frac{1000}{4 \cdot 5000} = 0{,}95$$

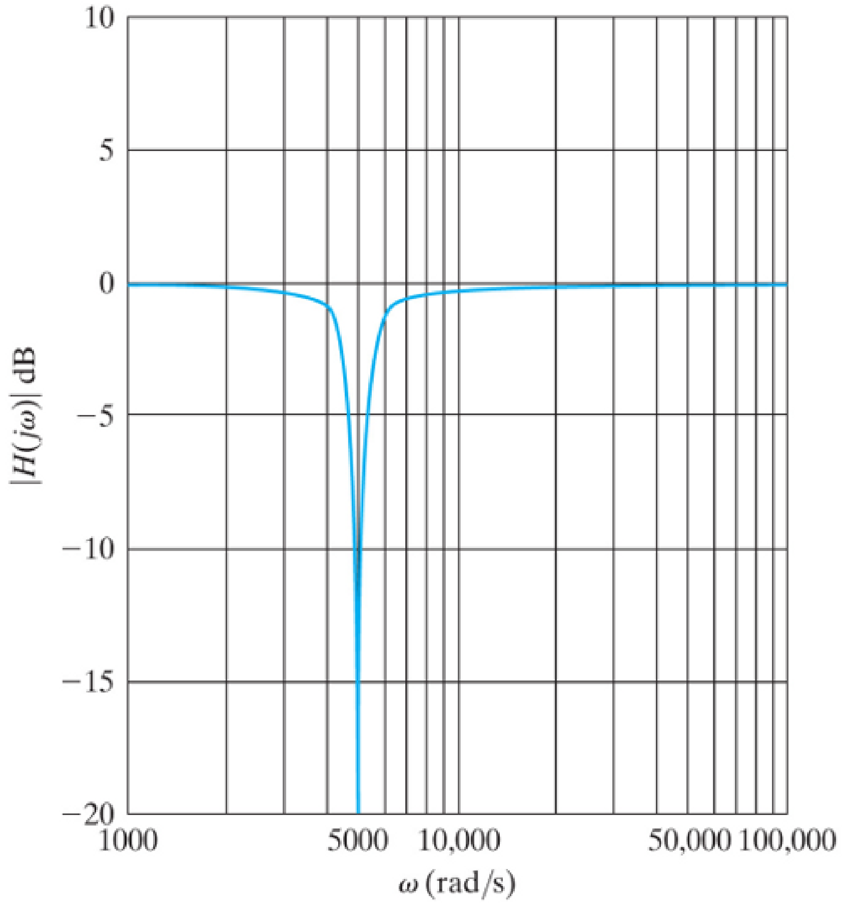




Exemplo



1 μF
1 μF
200 Ω
200 Ω
100 Ω
2 μF
10 Ω
190 Ω
v_i
v_o
σv_o
σv_o



10
5
0
−5
−10
−15
−20
|H(jω)| dB
1000
5000
10,000
50,000
100,000
ω (rad/s)