Análise de respostas transitórias de circuitos de 2ª ordem RLC

Introdução

- **Circuitos de 2ª ordem → possuem 2 ou mais elementos de armazenamento de energia.**
- **Básicos → RLC série e RLC paralelo:**
  - **Descritos por equações diferenciais de 2ª ordem.**
  - **Modelos básicos para entendimento das respostas fundamentais.**
- **Múltiplas malhas:**
  - **Descritos por sistemas de equações diferenciais de 2ª ordem.**
  - **Modelos obtidos por técnicas de análise tradicionais: tensões de nós, correntes de malha, Thévenin, superposição, etc.**
  - **Extremamente complexos no domínio do tempo → usar Transformada de Laplace.**

Resposta natural de circuitos RLC paralelos

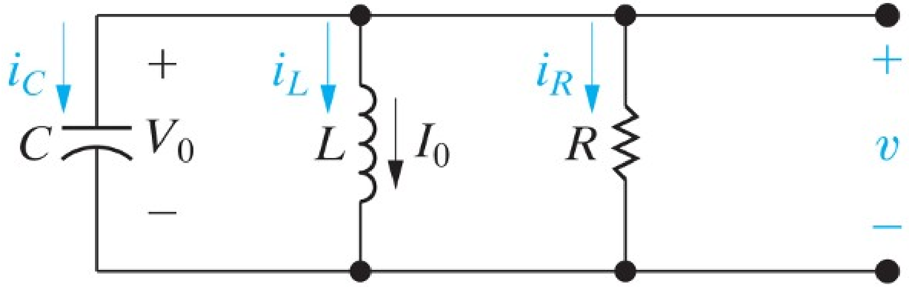


Figure: 08-01

Copyright © 2008 Pearson Prentice Hall, Inc.

Condições iniciais:

- **Circuito sem fonte de alimentação.**
- **Capacitor com tensão inicial V0.**
- **Indutor com corrente inicial I0.**

Por análise nodal, temos:

$$i_C + i_L + i_R = 0 \longrightarrow C\frac{d}{dt}v(t) + \left[\frac{1}{L}\int_0^t v(t)dt + I_0\right] + \frac{v(t)}{R} = 0$$

Diferenciando em relação a *t* e rearranjando:

$$C\frac{d^2}{dt^2}v(t) + \frac{1}{L}v(t) + \frac{1}{R}\frac{d}{dt}v(t) = 0$$

$$\downarrow$$

$$\frac{d^2}{dt^2}v(t) + \frac{1}{RC}\frac{d}{dt}v(t) + \frac{1}{LC}v(t) = 0$$

EDO de 2ª ordem homogênea com coeficientes constantes → circuito de 2ª ordem!

Resposta natural de circuitos RLC paralelos

- **Solução geral para EDOs de 2ª ordem:**
  - **Procura-se uma função que, somada às suas derivadas 1ª e 2ª, escaladas adequadamente, gere um resultado nulo.**

$$\frac{d^2}{dt^2}v(t)+\frac{1}{RC}\frac{d}{dt}v(t)+\frac{1}{LC}v(t)=0$$

  - **Abordagem tradicional → assumir que v(t) seja exponencial:**

$$v(t)=A\,e^{st}$$

- **Substituindo a exponencial na EDO de 2ª ordem:**

$$As^2e^{st}+\frac{1}{RC}As\,e^{st}+\frac{1}{LC}Ae^{st}=0$$

$$Ae^{st}\left(s^2+\frac{1}{RC}s+\frac{1}{LC}\right)=0$$

$$Ae^{st}=0 \longrightarrow v(t)=0 \longrightarrow$$

Solução trivial: não há energia no circuito.

$$\boxed{\left(s^2+\frac{1}{RC}s+\frac{1}{LC}\right)=0} \longrightarrow$$

Solução geral: *equação característica* do circuito RLC.

Resposta natural de circuitos RLC paralelos

- **Resolvendo a equação característica:**

$$\left(s^2+\frac{1}{RC}s+\frac{1}{LC}\right)=0 \longrightarrow s_{1,2}=-\frac{1}{2RC}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2-\frac{1}{LC}} \longrightarrow$$

Frequências complexas (rad/s)

$$=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}$$

onde:

$$\boxed{\alpha=\frac{1}{2RC}} \longrightarrow$$ **Frequência de Neper (rad/s)**

$$\boxed{\omega_0=\sqrt{\frac{1}{LC}}} \longrightarrow$$ **Frequência de ressonância (rad/s)**

- **Portanto, ambas as raízes s1 e s2 são soluções para a EDO de 2ª ordem → como escolher?**

$$v_1(t)=A_1 e^{s_1 t},\quad v_2(t)=A_2 e^{s_2 t}$$

Resposta natural de circuitos RLC paralelos

- **Uma vez que o sistema é linear e invariante no tempo:**

$$\frac{d}{dt}\left[v_1(t)+v_2(t)\right]=\frac{d}{dt}v_1(t)+\frac{d}{dt}v_2(t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[v_1(t)+v_2(t)\right]=\frac{d^2}{dt^2}v_1(t)+\frac{d^2}{dt^2}v_2(t)$$

a *soma* das funções também é uma solução, e é a *solução mais geral* para a EDO de 2ª ordem.

$$\boxed{v(t)=A_1\,\mathrm{e}^{s_1 t}+A_2\,\mathrm{e}^{s_2 t}}$$

S1, S2 → determinados pelos parâmetros do circuito (R, L, C).

A1, A2 → determinados pelas condições iniciais do circuito (V0, I0).

Resposta natural de circuitos RLC paralelos

- **Portanto, buscamos uma solução da forma:**

$$v(t)=A_1 e^{s_1 t}+A_2 e^{s_2 t}, \qquad s_{1,2}=-\frac{1}{2RC}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2-\frac{1}{LC}} \quad =-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}$$

- **Há 3 possibilidades, dependendo de R, L e C:**
  - **Quando:** $\alpha^2>\omega_0^2$
    - **Raízes reais e distintas → resposta superamortecida.**
  - **Quando:** $\alpha^2=\omega_0^2$
    - **Raízes reais e iguais → resposta criticamente amortecida (obs.: a solução tem formato diferente!).**
  - **Quando:** $\alpha^2<\omega_0^2$
    - **Raízes complexas e distintas (conjugadas) → resposta subamortecida.**

Resposta superamortecida

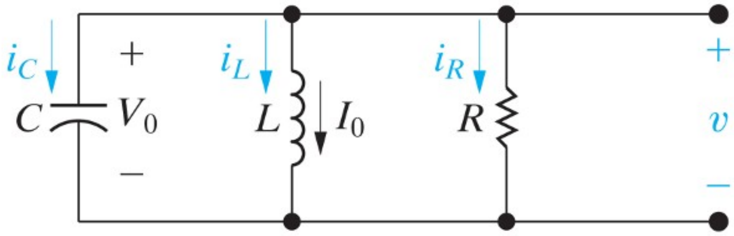


Figure: 08-01

Copyright © 2008 Pearson Prentice Hall, Inc.

$$v(t)=A_1 e^{s_1 t}+A_2 e^{s_2 t},$$

$$s_{1,2}=-\frac{1}{2RC}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2-\frac{1}{LC}} \quad =-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}$$

- **Determinando as constantes *A*1 e *A*2:**

$$v_C(0)=v(0)=A_1 e^{s_1 0}+A_2 e^{s_2 0} \longrightarrow v_C(0)=V_0=A_1+A_2$$

$$\frac{d}{dt}v_C(0)=\frac{d}{dt}v(0)=A_1 s_1 e^{s_1 0}+A_2 s_2 e^{s_2 0} \longrightarrow \frac{d}{dt}v_C(0)=A_1 s_1+A_2 s_2$$

Mas, pelo circuito: $i_C(0)+i_R(0)+i_L(0)=0$

$$C\frac{d}{dt}v_C(0)+\frac{V_0}{R}+I_0=0$$

$$\frac{d}{dt}v_C(0)=-\frac{1}{RC}(V_0+R I_0)$$

$$\boxed{\begin{aligned} &A_1+A_2=V_0\\ &A_1 s_1+A_2 s_2=-\frac{1}{RC}(V_0+R I_0)\end{aligned}}$$

Resolvendo o sistema...

Resposta superamortecida

- **A natureza da resposta superamortecida:**

$$v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t},$$

  - **Como**
    - **s1 e s2 são números reais;**
    - **A1 e A2 são números reais.**
  - **Comportamento esperado → v(t) é o somatório de duas exponenciais decrescentes com amplitudes e constantes de tempo diferentes.**

Exemplo 8.2

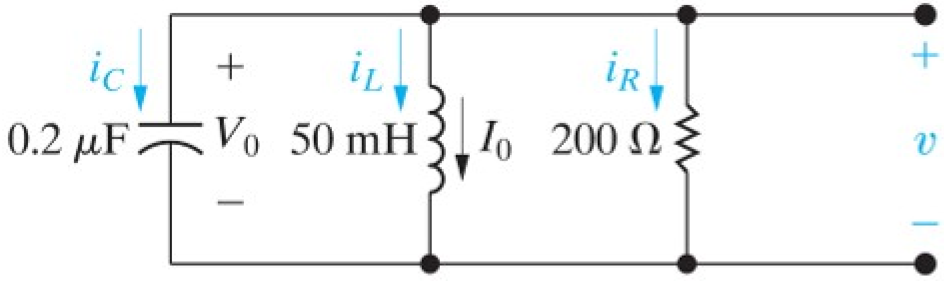


Figure: 08-06Ex8.2

Copyright © 2008 Pearson Prentice Hall, Inc.

$$v_C(0) = 12\,V$$

$$i_L(0) = 30\,mA$$

Exemplo 8.2

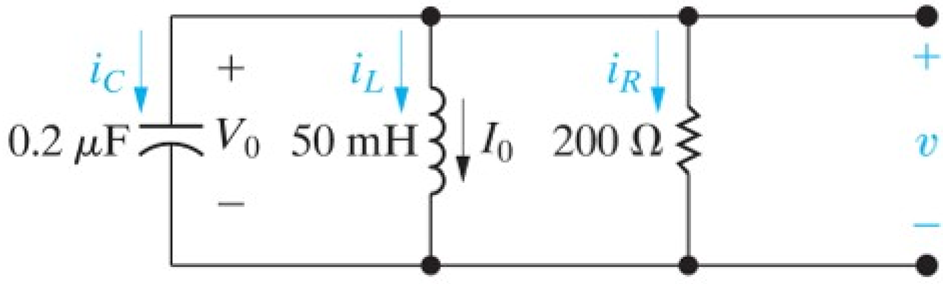


Figure: 08-06Ex8.2

Copyright © 2008 Pearson Prentice Hall, Inc.

$$v_C(0)=12\,V$$
$$i_L(0)=30\,mA$$

$$\alpha=\frac{1}{2RC}=12500\ rad/s$$
$$\omega_0=\sqrt{\frac{1}{LC}}=10000\ rad/s$$

Como $\alpha^2>\omega_0^2$ → **Resposta superamortecida.**

$$v(t)=A_1 e^{s_1 t}+A_2 e^{s_2 t}\,,$$

$$s_1=-\frac{1}{2RC}+\sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2-\frac{1}{LC}}=-5000\ rad/s$$
$$s_2=-\frac{1}{2RC}-\sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2-\frac{1}{LC}}=-20000\ rad/s$$

Exemplo 8.2

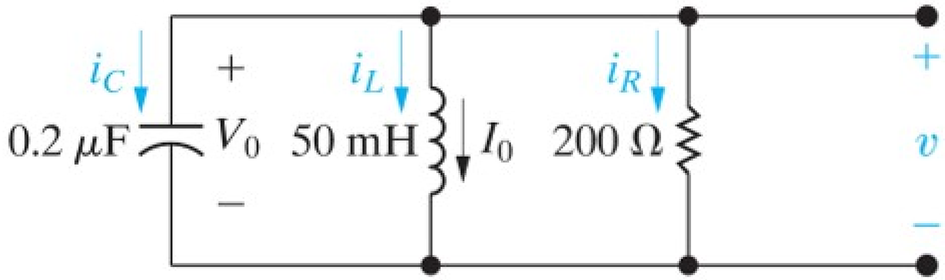


Figure: 08-06Ex8.2

Copyright © 2008 Pearson Prentice Hall, Inc.

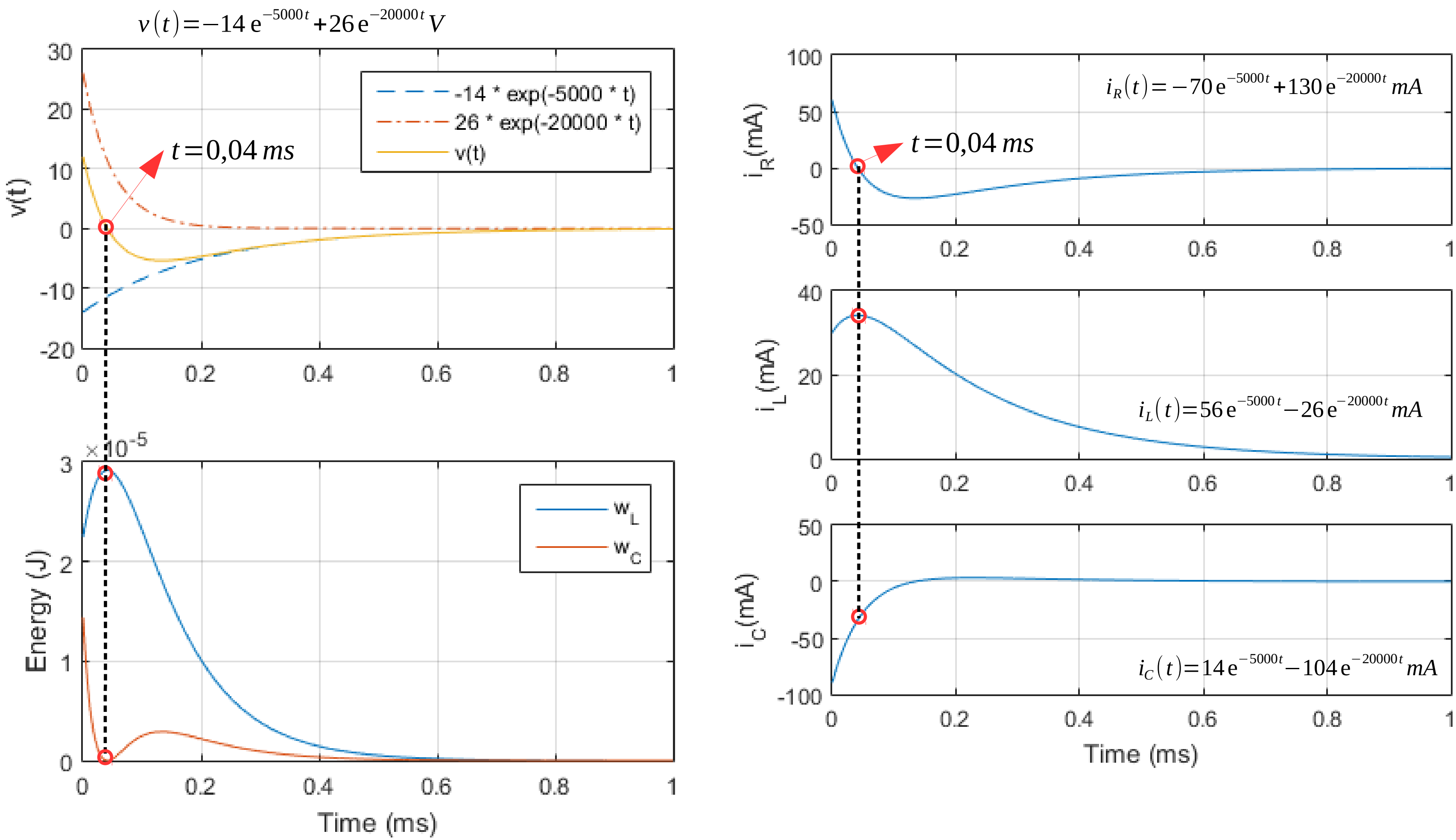
$$v_C(0)=12\,V$$
$$i_L(0)=30\,mA$$

$$A_1+A_2=v_C(0) \longrightarrow A_1+A_2=12V$$
$$A_1 s_1+A_2 s_2=-\frac{1}{RC}\left(V_0+R\,I_0\right) \longrightarrow -5000\,A_1-20000\,A_2=-450\times10^3\,V$$
$$\longrightarrow A_1=-14\,V \qquad A_2=26V$$

Portanto: $v(t)=A_1\,e^{s_1 t}+A_2\,e^{s_2 t} \longrightarrow v(t)=-14\,e^{-5000t}+26\,e^{-20000t}\,V$

$$i_R(t)=\frac{v(t)}{R}=-70\,e^{-5000t}+130\,e^{-20000t}\,mA$$
$$i_C(t)=C\frac{d}{dt}v(t)=14\,e^{-5000t}-104\,e^{-20000t}\,mA$$
$$i_L(t)=\frac{1}{L}\int_0^t v(t)\,dt+I_0=-i_R(t)-i_C(t)=56\,e^{-5000t}-26\,e^{-20000t}\,mA$$

Exemplo 8.2



$v(t) = -14\,e^{-5000t} + 26\,e^{-20000t}\ V$
-14 * exp(-5000 * t)
26 * exp(-20000 * t)
v(t)
$t = 0{,}04\ ms$
v(t)
×10^-5
w_L
w_C
Energy (J)
Time (ms)
$i_R(t) = -70\,e^{-5000t} + 130\,e^{-20000t}\ mA$
$t = 0{,}04\ ms$
i_R(mA)
$i_L(t) = 56\,e^{-5000t} - 26\,e^{-20000t}\ mA$
i_L(mA)
$i_C(t) = 14\,e^{-5000t} - 104\,e^{-20000t}\ mA$
i_C(mA)
Time (ms)

Resposta subamortecida

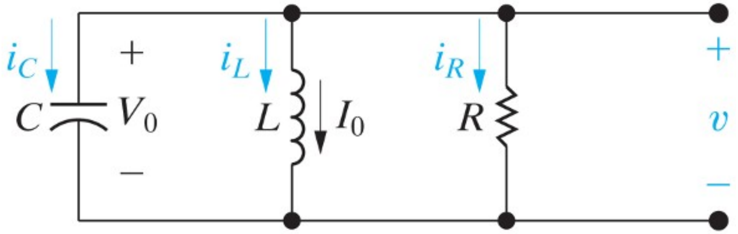


Figure: 08-01

Copyright © 2008 Pearson Prentice Hall, Inc.

$$v(t)=A_1 e^{s_1 t}+A_2 e^{s_2 t},$$

$$s_{1,2}=-\frac{1}{2RC}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2-\frac{1}{LC}} \quad =-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}$$

Se: $\alpha^2<\omega_0^2 \quad \longrightarrow \quad s_{1,2}=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}=-\alpha\pm\sqrt{-(\omega_0^2-\alpha^2)}=-\alpha\pm j\sqrt{(\omega_0^2-\alpha^2)}$

Fazendo: $\boxed{\sqrt{(\omega_0^2-\alpha^2)}=\omega_d} \quad \longrightarrow \quad s_{1,2}=-\alpha\pm j\,\omega_d$

Portanto:

$$\begin{aligned}
v(t) &= A_1 e^{s_1 t}+A_2 e^{s_2 t} = A_1 e^{(-\alpha+j\omega_d)t}+A_2 e^{(-\alpha-j\omega_d)t}\\
&= A_1 e^{-\alpha t}e^{j\omega_d t}+A_2 e^{-\alpha t}e^{-j\omega_d t}\\
&= e^{-\alpha t}\left(A_1 e^{j\omega_d t}+A_2 e^{-j\omega_d t}\right)\\
&= e^{-\alpha t}\left[A_1\left(\cos\omega_d t+j\,sen\,\omega_d t\right)+A_2\left(\cos\omega_d t-j\,sen\,\omega_d t\right)\right]\\
&= e^{-\alpha t}\left[(A_1+A_2)\cos\omega_d t+j(A_1-A_2)\,sen\,\omega_d t\right]
\end{aligned}$$

Fazendo: $(A_1+A_2)=B_1$, $j(A_1-A_2)=B_2 \quad \longrightarrow \quad \boxed{v(t)=e^{-\alpha t}\left[B_1\cos\omega_d t+B_2\,sen\,\omega_d t\right]}$

Resposta subamortecida

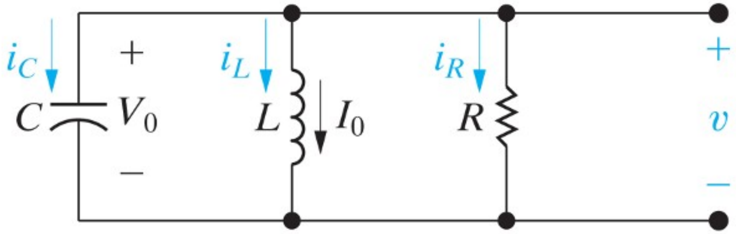


Figure: 08-01

Copyright © 2008 Pearson Prentice Hall, Inc.

$$v(t) = e^{-\alpha t}[B_1 \cos \omega_d t + B_2 \operatorname{sen} \omega_d t]$$

Determinando B1 e B2:

$$v_C(0) = v(0) = e^0[B_1 \cos 0 + B_2 \operatorname{sen} 0] \longrightarrow v_C(0) = V_0 = B_1$$

$$\frac{d}{dt} v_C(0) = \frac{d}{dt} v(0) = -\alpha B_1 + \omega_d B_2$$

Novamente, pelo circuito:

$$i_C(0) + i_R(0) + i_L(0) = 0$$

$$C \frac{d}{dt} v_C(0) + \frac{V_0}{R} + I_0 = 0$$

$$\frac{d}{dt} v_C(0) = -\frac{1}{RC}(V_0 + R I_0)$$

$$\boxed{\begin{aligned} &B_1 = V_0 \\ &-\alpha B_1 + \omega_d B_2 = -\frac{1}{RC}(V_0 + R I_0) \end{aligned}}$$

Resolvendo o sistema...

Resposta subamortecida

- **A natureza da resposta subamortecida:**

$$v(t) = e^{-\alpha t}\left[B_1 \cos \omega_d t + B_2\, sen\, \omega_d t\right]$$

  - **Como**
    - **B1 e B2 são números reais;**
    - ***α* e *ωd* são números reais.**
  - **Comportamento esperado → v(t) é uma onda *oscilatória*, com frequência *ωd*, multiplicada por uma exponencial decrescente → *senoide amortecida*.**

$\alpha = \dfrac{1}{2RC}$ → **Coeficiente (fator) de amortecimento** → **Depende de R.**

$\omega_d = \sqrt{(\omega_0^2 - \alpha^2)}$ → **Frequência angular amortecida** → **Sempre menor que** ω_0

Oscilações → **Trocas de energia entre o indutor e o capacitor.**

Exemplo

- **Repita o exemplo 8.2, entretanto considerando R = 1kΩ.**

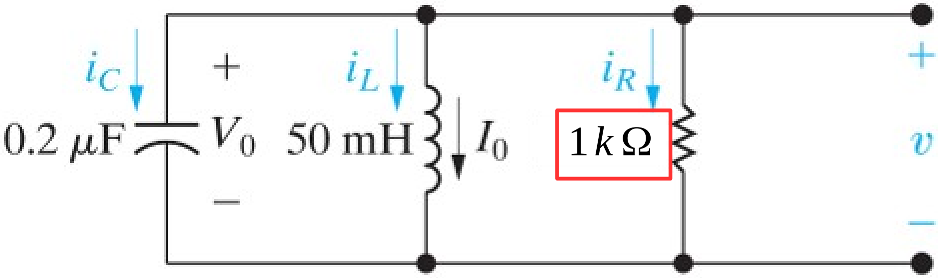


Figure: 08-06Ex8.2

Copyright © 2008 Pearson Prentice Hall, Inc.

$$v_C(0) = 12\,V$$

$$i_L(0) = 30\,mA$$

Exemplo

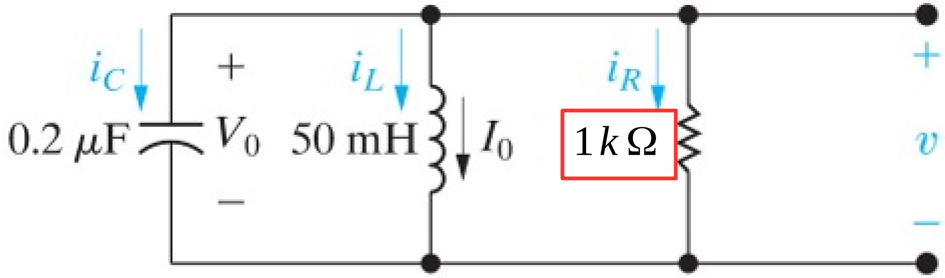


Figure: 08-06Ex8.2

Copyright © 2008 Pearson Prentice Hall, Inc.

$v_C(0)=12\,V$

$i_L(0)=30\,mA$

$$\alpha=\frac{1}{2RC}=2500\ rad/s$$

$$\omega_0=\sqrt{\frac{1}{LC}}=10000\ rad/s$$

Como $\alpha^2<\omega_0^2$ → **Resposta subamortecida.**

$$v(t)\ =\ e^{-\alpha t}\left[B_1\cos\omega_d t+B_2\, sen\,\omega_d t\right]$$

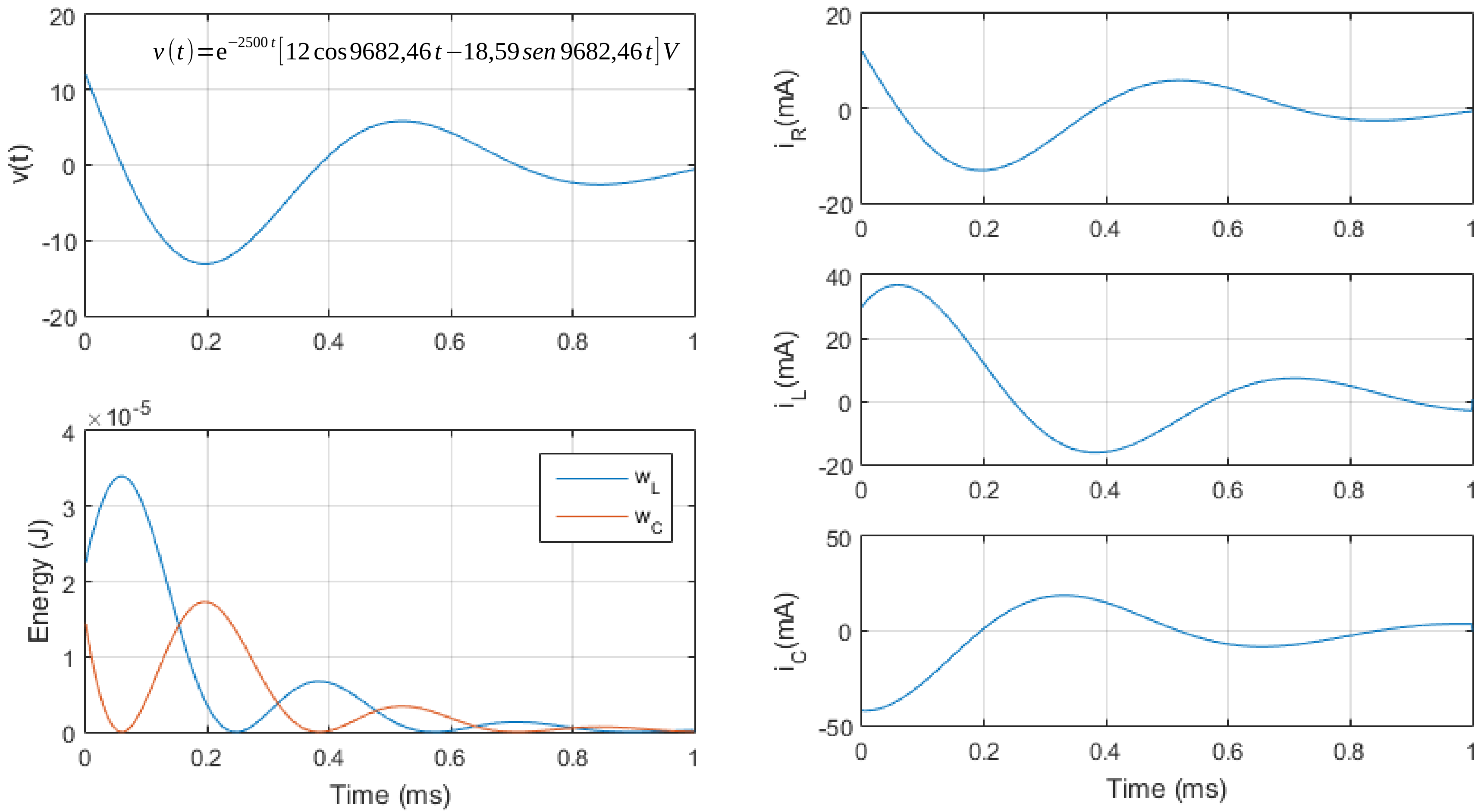
$$\omega_d=\sqrt{(\omega_0^2-\alpha^2)}=9682{,}46\,rad/s$$

$$B_1=V_0=12$$

$$-\alpha B_1+\omega_d B_2=-\frac{1}{RC}(V_0+R\,I_0) \longrightarrow B_2=-18{,}59$$

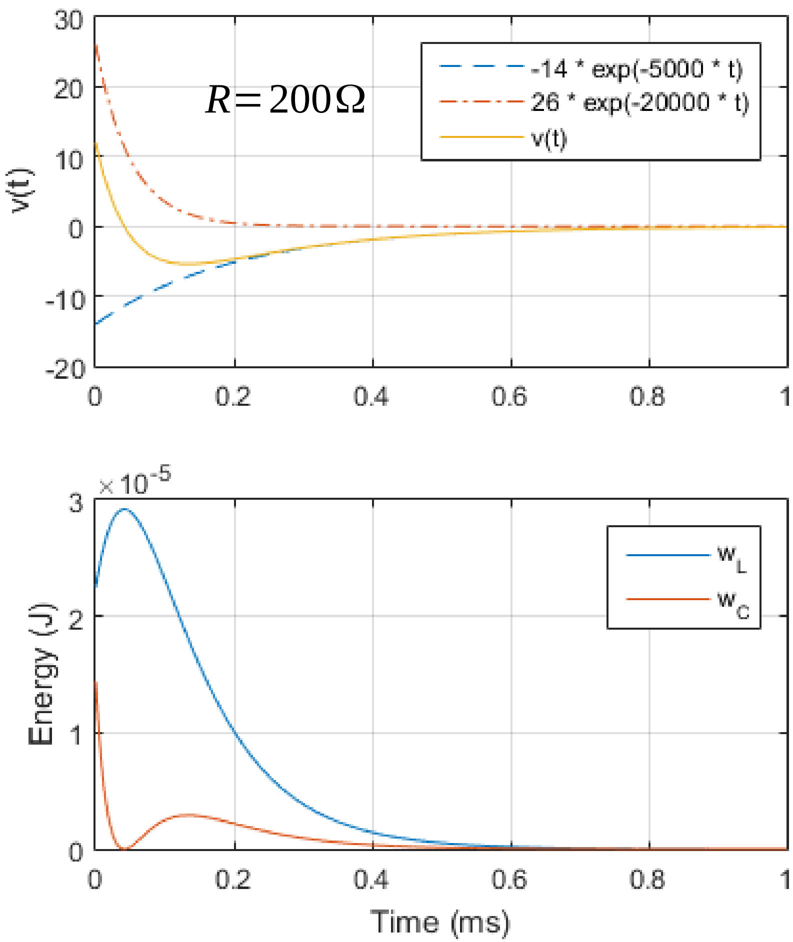
$$v(t)=e^{-2500\,t}\left[12\cos 9682{,}46\,t-18{,}59\,sen\,9682{,}46\,t\right]$$

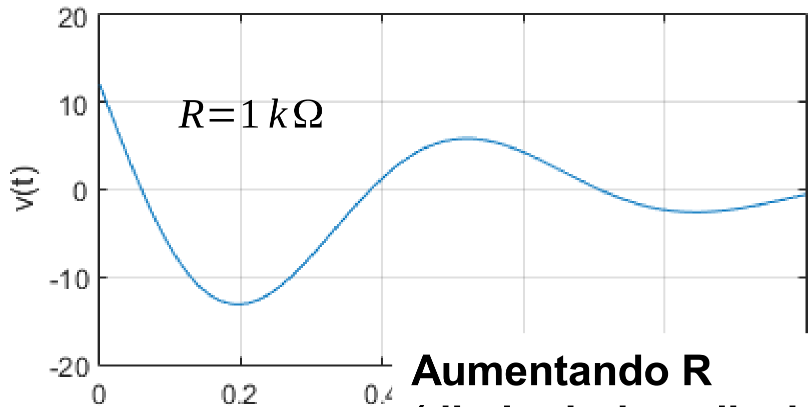
Exemplo

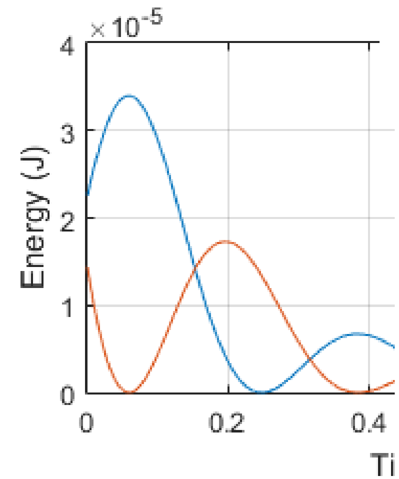


$v(t) = e^{-2500t}[12\cos 9682{,}46t - 18{,}59\,sen\,9682{,}46t]\,V$
v(t)
Energy (J)
$\times 10^{-5}$
w_L
w_C
Time (ms)
i_R(mA)
i_L(mA)
i_C(mA)
Time (ms)

Exemplo







Aumentando R (diminuindo a dissipação de energia):

- **A resposta passa a ser oscilatória.**
- **A frequência de oscilação aumenta.**
- **A resposta demora mais a estabilizar.**
- **A energia fica mais tempo oscilando entre o indutor e o capacitor.**

Exemplo 8.4

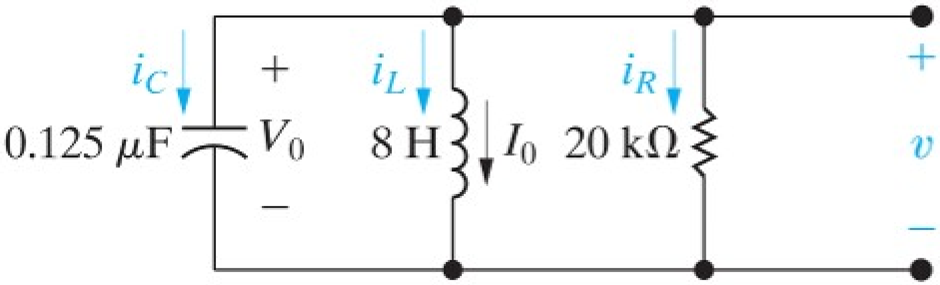


Figure: 08-08Ex8.4

Copyright © 2008 Pearson Prentice Hall, Inc.

$$v_C(0)=0\,V$$

$$i_L(0)=-12{,}25\,mA$$

Exemplo 8.4

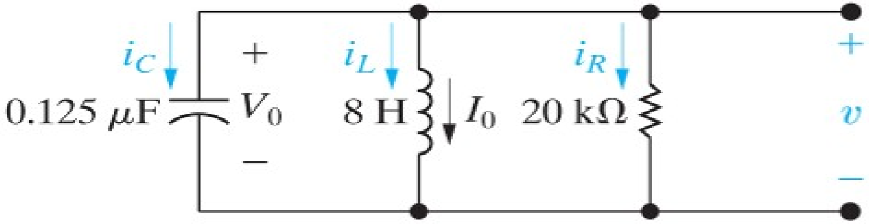


Figure: 08-08Ex8.4

Copyright © 2008 Pearson Prentice Hall, Inc.

$$v_C(0)=0\,V$$

$$i_L(0)=-12{,}25\,mA$$

$$\alpha=\frac{1}{2RC}=200\ rad/s$$

$$\omega_0=\sqrt{\frac{1}{LC}}=1000\ rad/s$$

Como $\alpha^2<\omega_0^2$ → **Resposta subamortecida.**

$$v(t)\ =\ \mathrm{e}^{-\alpha t}\left[B_1\cos\omega_d t+B_2\,sen\,\omega_d t\right]$$

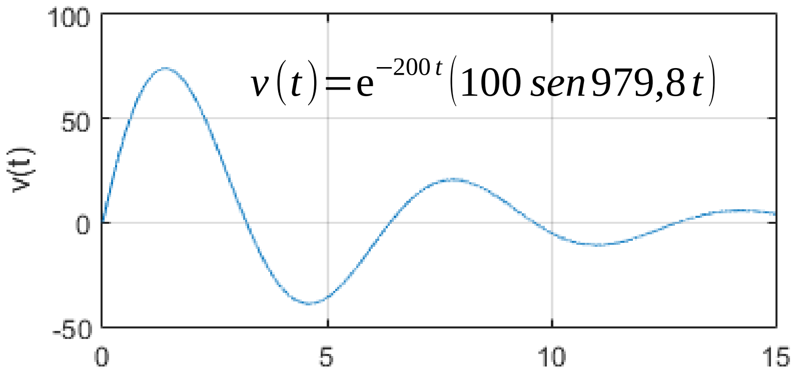
$$\omega_d=\sqrt{(\omega_0^2-\alpha^2)}\approx 979{,}8\,rad/s$$

$$B_1=V_0=0$$

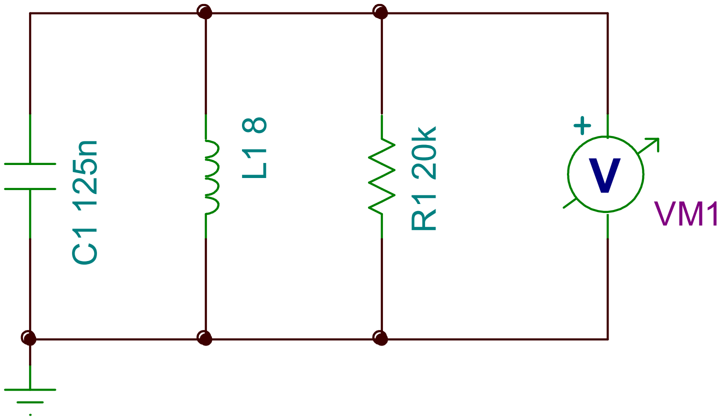
$$-\alpha B_1+\omega_d B_2=-\frac{1}{RC}\left(V_0+R\,I_0\right) \longrightarrow B_2\approx 100$$

$$v(t)=\mathrm{e}^{-200\,t}\left(100\,sen\,979{,}8\,t\right)$$

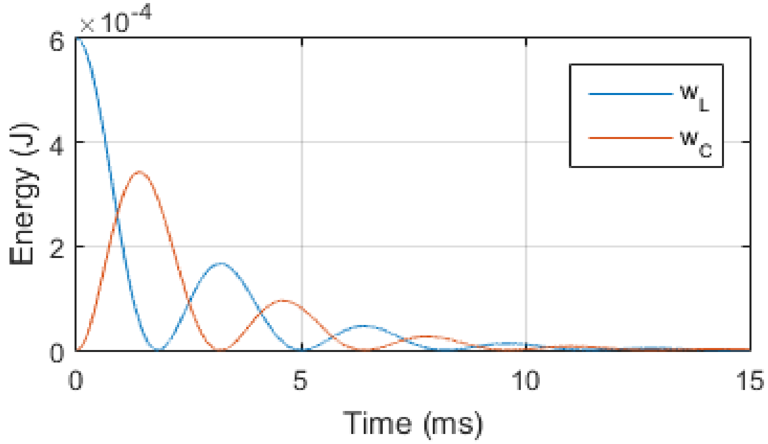
Exemplo 8.4



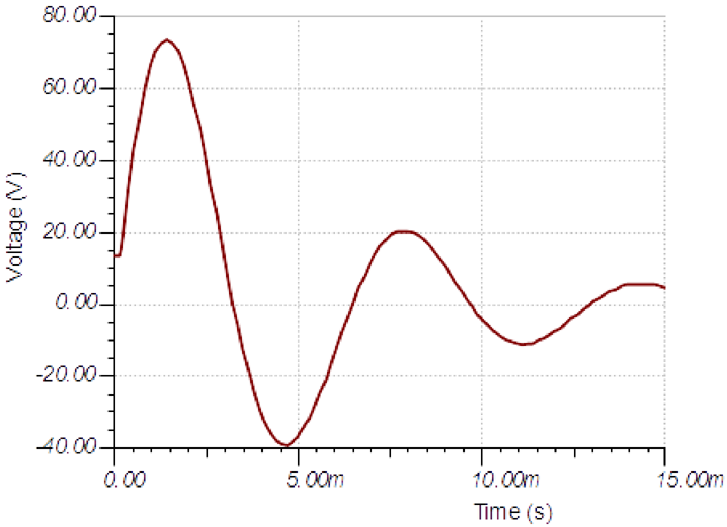
100
50
0
-50
v(t)
0
5
10
15
$v(t) = e^{-200t}(100\,sen\,979{,}8\,t)$



C1 125n
L1 8
R1 20k
V
+
VM1



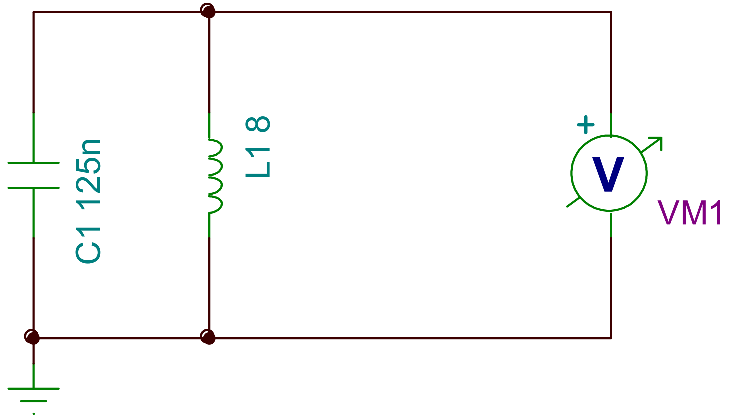
×10^-4
6
4
2
0
Energy (J)
w_L
w_C
0
5
10
15
Time (ms)

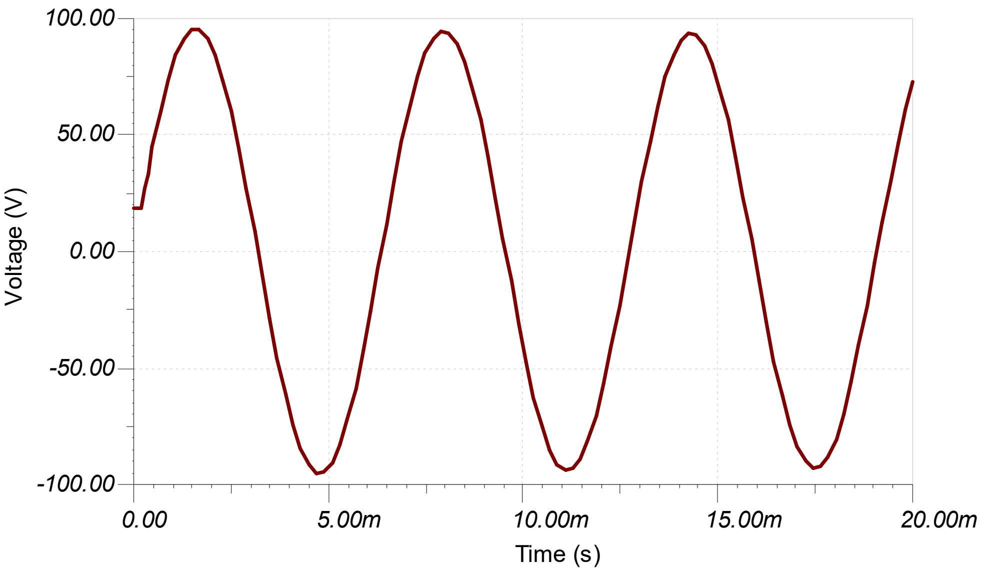


80.00
60.00
40.00
20.00
0.00
-20.00
-40.00
Voltage (V)
0.00
5.00m
10.00m
15.00m
Time (s)

Exemplo 8.4

- **E se R → ∞**





Obs.: situação idealizada! Na prática haverá dissipação de energia nas resistências de fios, contatos e internas aos componentes.

Resposta criticamente amortecida

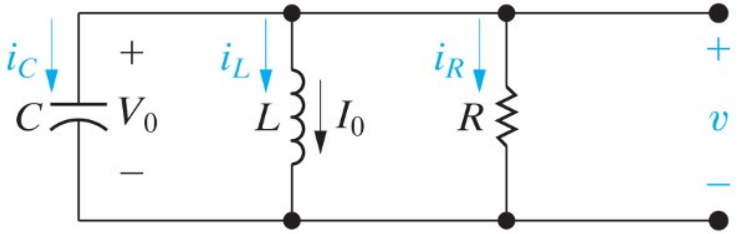


Figure: 08-01

Copyright © 2008 Pearson Prentice Hall, Inc.

$$v(t)=A_1 e^{s_1 t}+A_2 e^{s_2 t},$$

$$s_{1,2}=-\frac{1}{2RC}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2-\frac{1}{LC}} \quad =-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}$$

Se: $\alpha^2=\omega_0^2 \longrightarrow s_{1,2}=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}=-\alpha \longrightarrow$ **Raízes reais e iguais.**

Quando as raízes da equação característica são iguais, a solução deve ter forma:

$$\boxed{v(t)=e^{-\alpha t}(D_1 t+D_2)}$$

Determinando D1 e D2:

$$v_C(0)=v(0)=e^{-\alpha 0}(D_1\cdot 0+D_2) \longrightarrow D_2=V_0$$

$$\frac{d}{dt}v_C(0)=\frac{d}{dt}v(0)=D_1-\alpha D_2 \longrightarrow D_1-\alpha D_2=-\frac{1}{RC}(V_0+R I_0)$$

Resolvendo o sistema...

Resposta criticamente amortecida

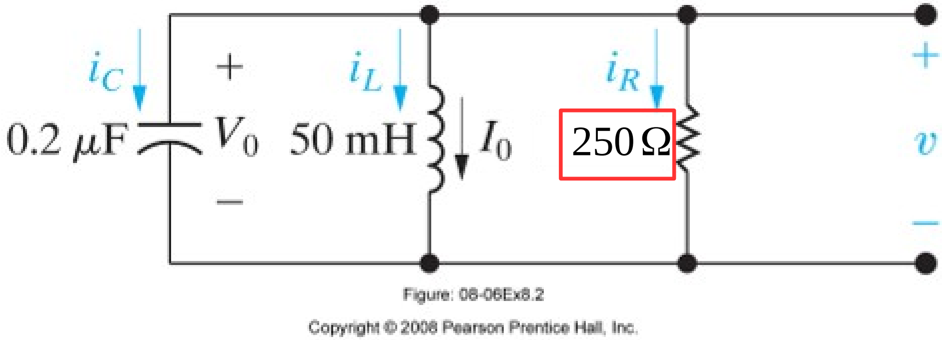
- **A natureza da resposta criticamente amortecida:**

$$v(t) = e^{-\alpha t}(D_1 t + D_2)$$

  - **Multiplicação entre um termo exponencial e um termo linear (reta).**
  - **A resposta está prestes a oscilar → limite entre super e subamortecida.**
  - **Difícil de obter na prática → α e ω_0 devem ser exatamente iguais, mas dependem de componentes físicos que variam com envelhecimento, temperatura, umidade, etc.**

Exemplo

- **Repita o exemplo 8.2, entretanto considerando R = 250Ω.**



$v_C(0) = 12\,V$

$i_L(0) = 30\,mA$

Exemplo

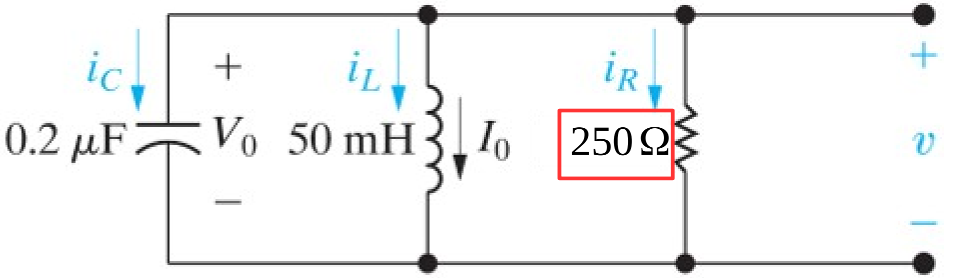


Figure: 08-06Ex8.2

Copyright © 2008 Pearson Prentice Hall, Inc.

$$v_C(0)=12\,V$$

$$i_L(0)=30\,mA$$

$$\alpha=\frac{1}{2RC}=10000\ rad/s$$

$$\omega_0=\sqrt{\frac{1}{LC}}=10000\ rad/s$$

Como $\alpha^2=\omega_0^2$ → **Resposta criticamente amortecida.**

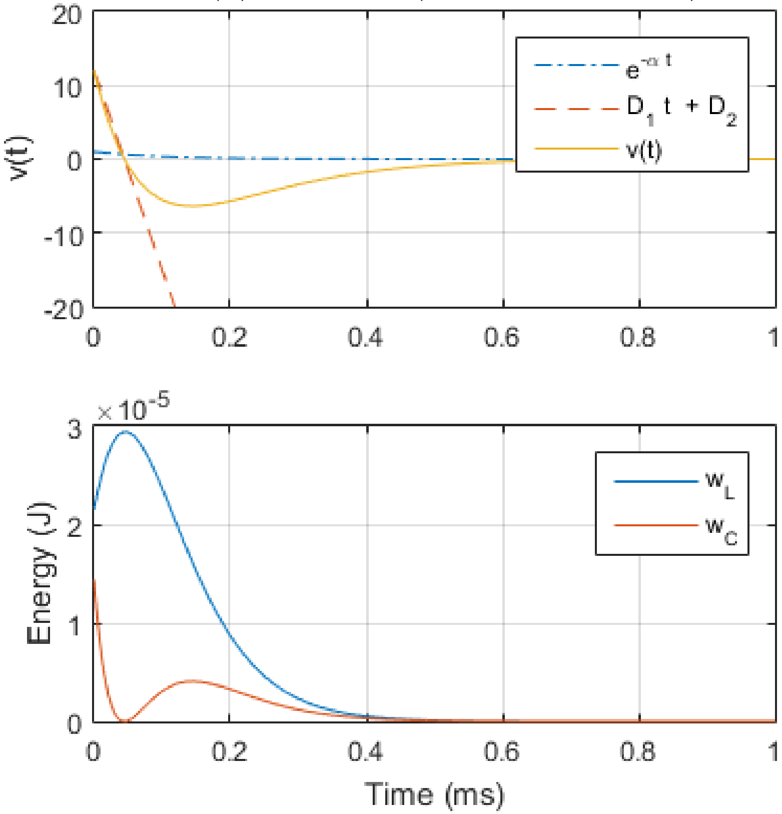
$$v(t)=e^{-\alpha t}(D_1 t+D_2)$$

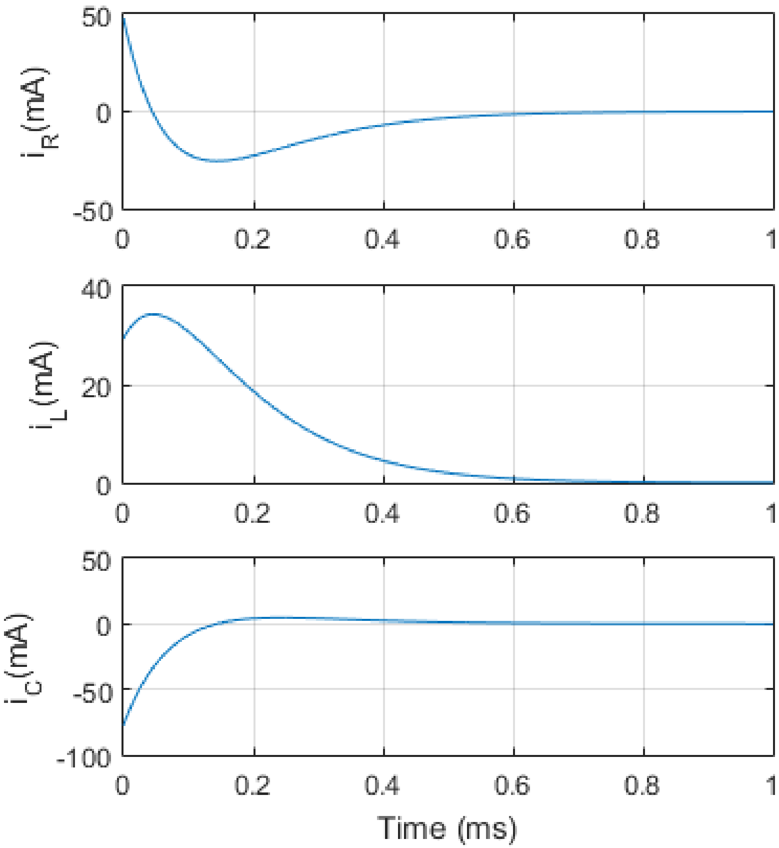
$$D_2=V_0=12$$

$$D_1-\alpha D_2=-\frac{1}{RC}(V_0+R I_0) \longrightarrow D_1=-270.000 \longrightarrow v(t)=e^{-10.000\,t}(-270.000\,t+12)$$

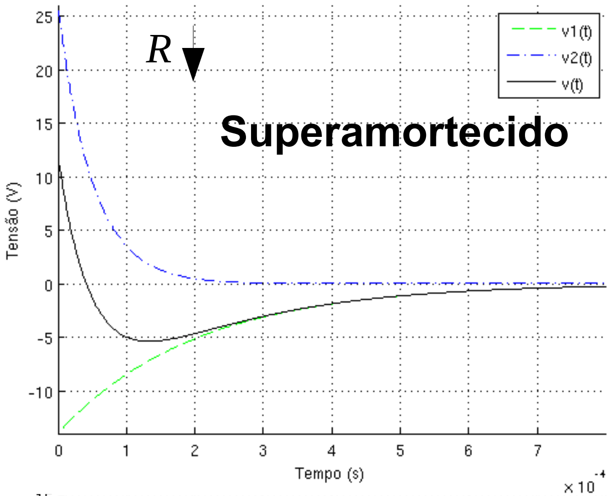
Exemplo

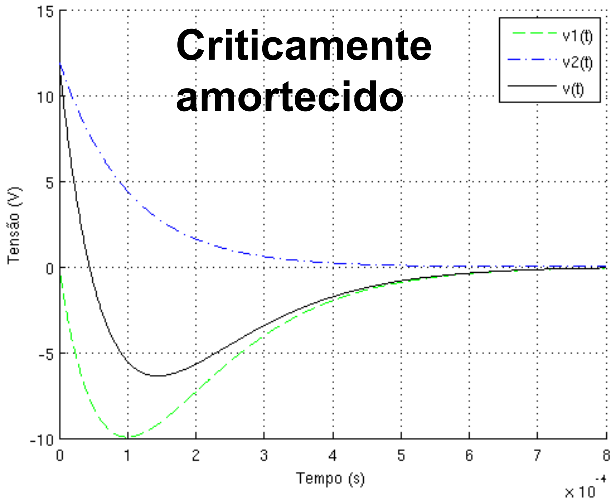
$$v(t) = e^{-10.000\,t}(-270.000\,t + 12)$$

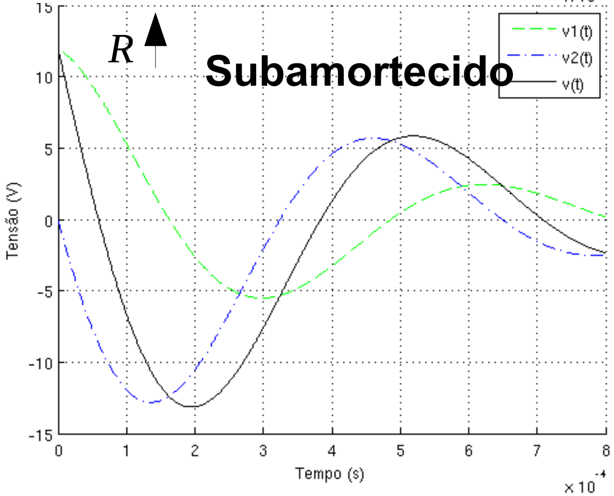




Comparação


R
Superamortecido
v1(t)
v2(t)
v(t)
Tensão (V)
Tempo (s)
x 10^-4


Criticamente amortecido
v1(t)
v2(t)
v(t)
Tensão (V)
Tempo (s)
x 10^-4


R
Subamortecido
v1(t)
v2(t)
v(t)
Tensão (V)
Tempo (s)
x 10^-4

Resposta ao degrau de um circuito RLC paralelo

- **Resposta ao degrau → aplicação repentina de uma fonte de tensão ou corrente contínuas.**

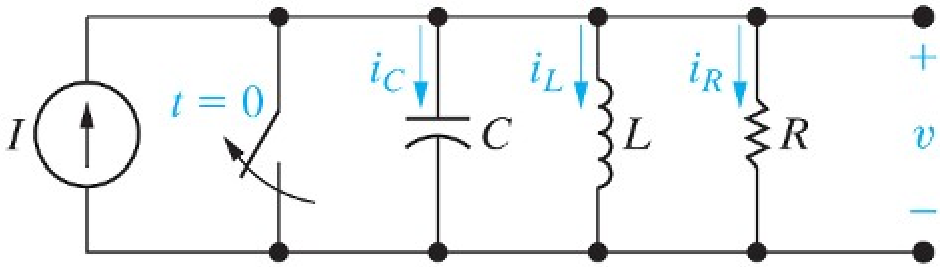


Figure: 08-11

Copyright © 2008 Pearson Prentice Hall, Inc.

Condições iniciais:

- **Energia inicial nula.**

Por análise nodal, temos: $i_C + i_L + i_R = I \longrightarrow C\frac{d}{dt}v(t) + i_L(t) + \frac{v(t)}{R} = I$

Como: $v(t) = L\frac{d}{dt}i_L(t) \longrightarrow \frac{d}{dt}v(t) = L\frac{d^2}{dt^2}i_L(t)$

Substituindo e rearranjando:

$$CL\frac{d^2}{dt^2}i_L(t) + i_L(t) + \frac{L}{R}\frac{d}{dt}i_L(t) = I \longrightarrow \frac{d^2}{dt^2}i_L(t) + \frac{1}{RC}\frac{d}{dt}i_L(t) + \frac{1}{LC}i_L(t) = \frac{I}{LC} \longrightarrow$$

EDO de 2ª ordem com função forçante.

Resposta ao degrau de um circuito RLC paralelo

- **Solução geral para EDOs de 2ª ordem com função forçante constante:**
  - **Resposta final no mesmo formato da forçada + resposta transitória no mesmo formato da natural.**

$$\frac{d^2}{dt^2} i_L(t) + \frac{1}{RC}\frac{d}{dt} i_L(t) + \frac{1}{LC} i_L(t) = \frac{I}{LC} \longrightarrow i_L(t) = I_f + \{resposta\ natural\}$$

Resposta final constante (pode ou não ser 0).

Resposta transitória semelhante à resposta natural.

Exemplo 8.6

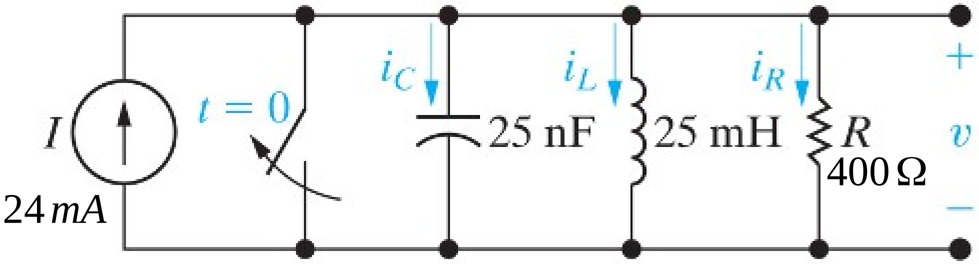


Figure: 08-12Ex8.6

Copyright © 2008 Pearson Prentice Hall, Inc.

Energia inicial nula.

$$\frac{d^2}{dt^2} i_L(t) + \frac{1}{RC}\frac{d}{dt} i_L(t) + \frac{1}{LC} i_L(t) = \frac{I}{LC}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} = 40.000\, rad/s$$

Como: $\alpha^2 > \omega_0^2 \longrightarrow$ **Resposta superamortecida**

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = 50.000\, rad/s$$

Portanto: $i_L(t) = I_f + A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \longrightarrow$

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -20.000\, rad/s$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -80.000\, rad/s$$

Exemplo 8.6

Determinando A1 e A2: $i_L(t)=I_f+A_1 e^{s_1 t}+A_2 e^{s_2 t}$

Energia inicial no indutor é nula $\longrightarrow$ $i_L(0)=0=I_f+A_1 e^{s_1 0}+A_2 e^{s_2 0}$ $\longrightarrow$ $\boxed{A_1+A_2=-I_f}$

Energia inicial no capacitor é nula $\longrightarrow$ $v_C(0)=0=v_L(0)$ $\longrightarrow$ $L\frac{d}{dt}i_L(0)=0$ $\longrightarrow$ $\frac{d}{dt}i_L(0)=0$ $\longrightarrow$

$A_1 s_1 e^{s_1 0}+A_2 s_2 e^{s_2 0}=0$ $\longrightarrow$ $\boxed{A_1 s_1+A_2 s_2=0}$

A corrente final no indutor será a corrente da fonte $\longrightarrow$ $I_f=I=24\,mA$

Portanto:

$$A_1+A_2=-24\,mA$$
$$-20.000\,A_1-80.000\,A_2=0$$

$\longrightarrow$ $A_1=-32\,mA,\ A_2=8\,mA$

$$\boxed{i_L(t)=(24-32\,e^{-20.000\,t}+8\,e^{-80.000\,t})\,mA}$$

Exemplo 8.6

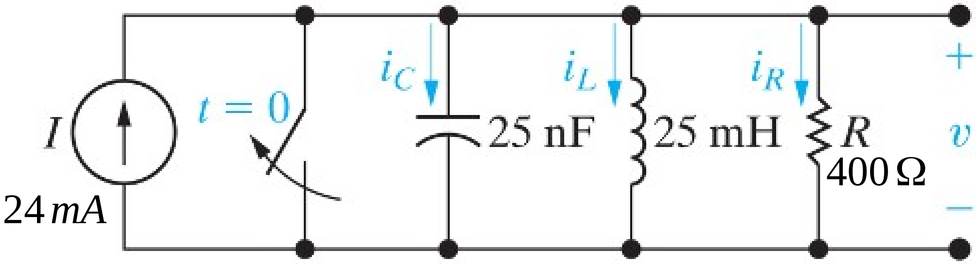
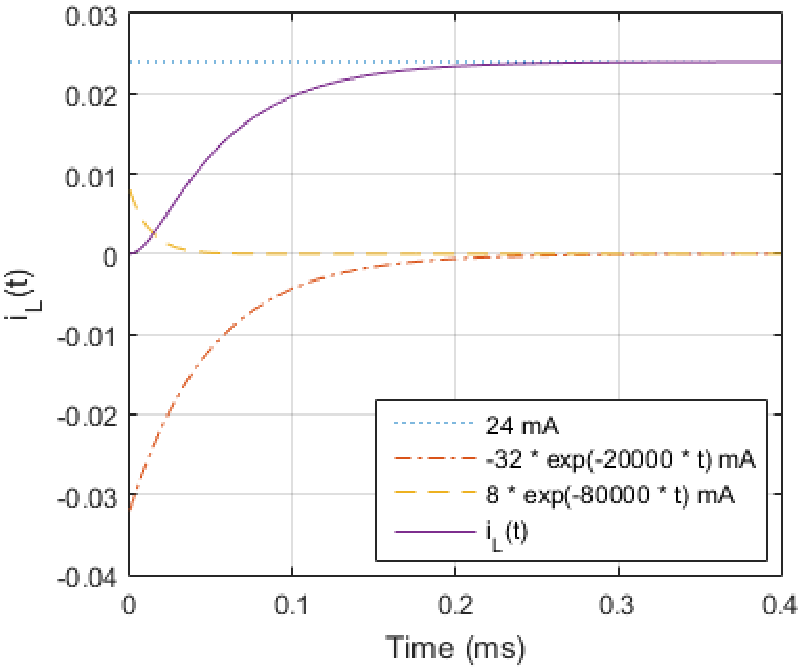


Figure: 08-12Ex8.6

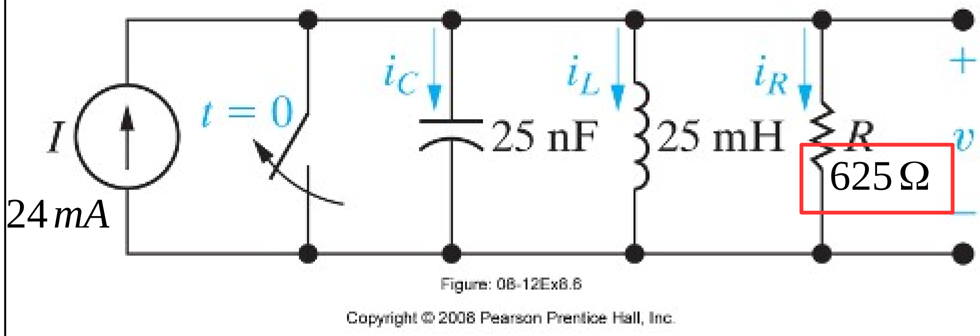
Copyright © 2008 Pearson Prentice Hall, Inc.

$$i_L(t) = (24 - 32\,e^{-20.000\,t} + 8\,e^{-80.000\,t})\,mA$$



Exemplo 8.7

- **Mesmo exemplo, considerando R = 625Ω.**



$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} = 40.000\, rad/s$$

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = 32.000\, rad/s$$

$\longrightarrow \alpha^2 < \omega_0^2 \longrightarrow$ **Resposta subamortecida**

Portanto: $i_L(t) = I_f + e^{-\alpha t}\left[B_1 \cos(\omega_d t) + B_2 \sin(\omega_d t)\right] \longrightarrow \omega_d = \sqrt{(\omega_0^2 - \alpha^2)} = 24.000\, rad/s$

$$s_1 = -\alpha + j\omega_d = -32.000 + j24.000\, rad/s$$

$$s_2 = -\alpha - j\omega_d = -32.000 - j24.000\, rad/s$$

Exemplo 8.7

Determinando B1 e B2: $i_L(t)=I_f+e^{-\alpha t}\left[B_1\cos(\omega_d t)+B_2\sin(\omega_d t)\right]$

Energia inicial no indutor é nula $\longrightarrow$ $i_L(0)=0=I_f+e^{-\alpha 0}\left[B_1\cos(\omega_d 0)+B_2\sin(\omega_d 0)\right]$ $\longrightarrow$ $\boxed{B_1=-I_f}$

Energia inicial no capacitor é nula $\longrightarrow$ $v_C(0)=0=v_L(0)$ $\longrightarrow$ $L\frac{d}{dt}i_L(0)=0$ $\longrightarrow$ $\frac{d}{dt}i_L(0)=0$

$$-\alpha e^{-\alpha 0}\left[B_1\cos(\omega_d 0)+B_2\sin(\omega_d 0)\right]+e^{-\alpha 0}\left[B_1\omega_d(-\sin\omega_d 0)+B_2\omega_d(\cos\omega_d 0)\right]=0$$

$\longrightarrow$ $\boxed{-\alpha B_1+\omega_d B_2=0}$

A corrente final no indutor será a corrente da fonte $\longrightarrow$ $I_f=I=24\,mA$

Portanto: $B_1=-24\,mA$

$-32.000\,B_1+24.000\,B_2=0$ $\longrightarrow$ $B_1=-24\,mA,\ B_2=-32\,mA$

$$\boxed{i_L(t)=24+e^{-32.000\,t}\left[-24\cos(24.000\,t)-32\sin(24.000\,t)\right]\ mA}$$

Exemplo 8.7

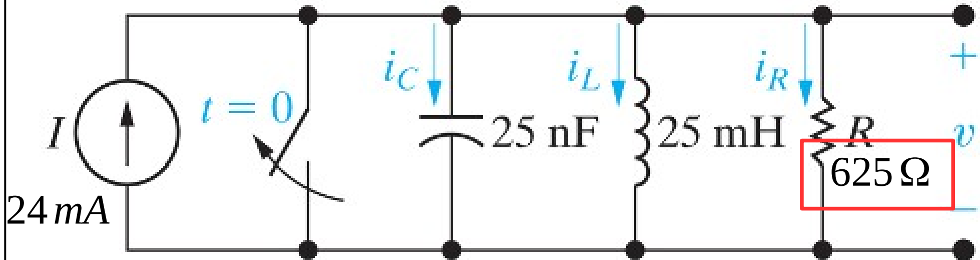
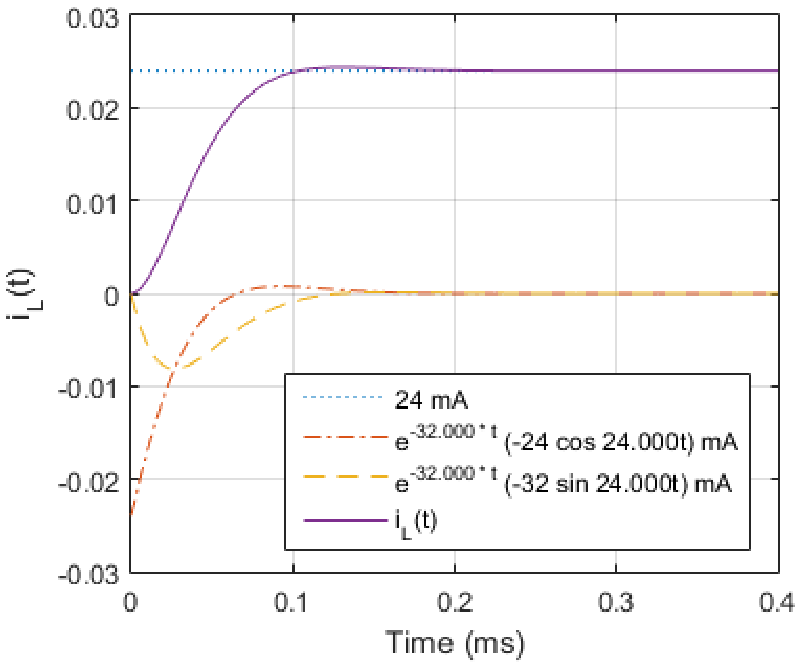


Figure: 08-12Ex8.6

Copyright © 2008 Pearson Prentice Hall, Inc.

$$i_L(t) = 24 + e^{-32.000\,t}\left[-24\cos(24.000\,t) - 32\sin(24.000\,t)\right]\,mA$$



Exemplo 8.8

- **Mesmo exemplo, considerando R = 500Ω.**

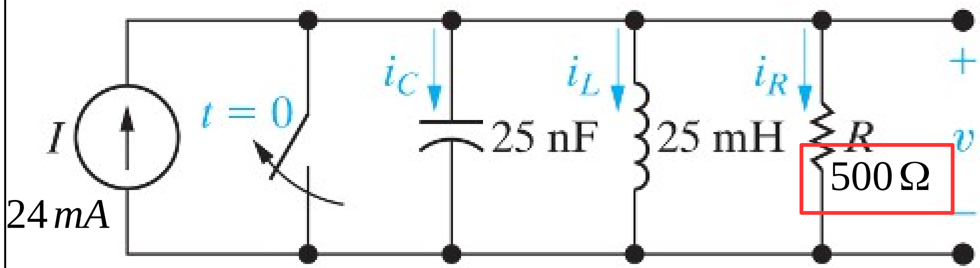


Figure: 08-12Ex8.6

Copyright © 2008 Pearson Prentice Hall, Inc.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} = 40.000\, rad/s$$

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = 40.000\, rad/s$$

$\longrightarrow \alpha^2 = \omega_0^2 \longrightarrow$ **Resposta criticamente amortecida**

Portanto:

$$i_L(t) = I_f + e^{-\alpha t}(D_1 t + D_2)$$

Exemplo 8.8

Determinando D1 e D2: $i_L(t)=I_f+e^{-\alpha t}(D_1 t+D_2)$

Energia inicial no indutor é nula $\longrightarrow$ $i_L(0)=0=I_f+e^{-\alpha 0}(D_1\cdot 0+D_2)$ $\longrightarrow$ $\boxed{D_2=-I_f}$

Energia inicial no capacitor é nula $\longrightarrow$ $v_C(0)=0=v_L(0)$ $\longrightarrow$ $L\frac{d}{dt}i_L(0)=0$ $\longrightarrow$ $\frac{d}{dt}i_L(0)=0$

$$D_1 e^{-\alpha 0}+D_1\cdot 0(-\alpha e^{-\alpha 0})+D_2(-\alpha e^{-\alpha 0})=0 \longrightarrow$$

$$\boxed{D_1-\alpha D_2=0}$$

A corrente final no indutor será a corrente da fonte $\longrightarrow$ $I_f=I=24\,mA$

Portanto: $D_2=-24\,mA$

$D_1-40.000\,D_2=0$ $\longrightarrow$ $D_1=-960.000\,mA\,,\ D_2=-24\,mA$

$$\boxed{i_L(t)=24+e^{-40.000\,t}(-960.000\,t-24)\ mA}$$

Exemplo 8.8

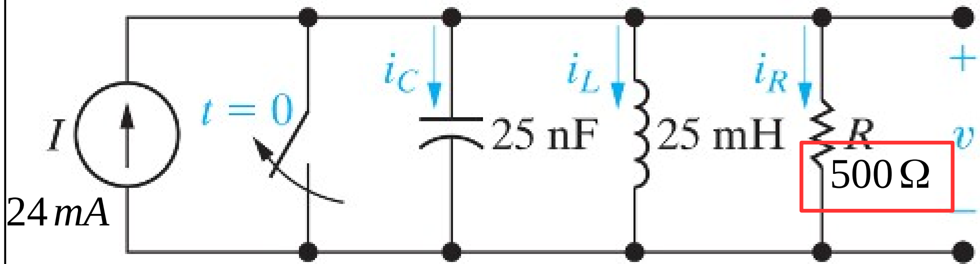
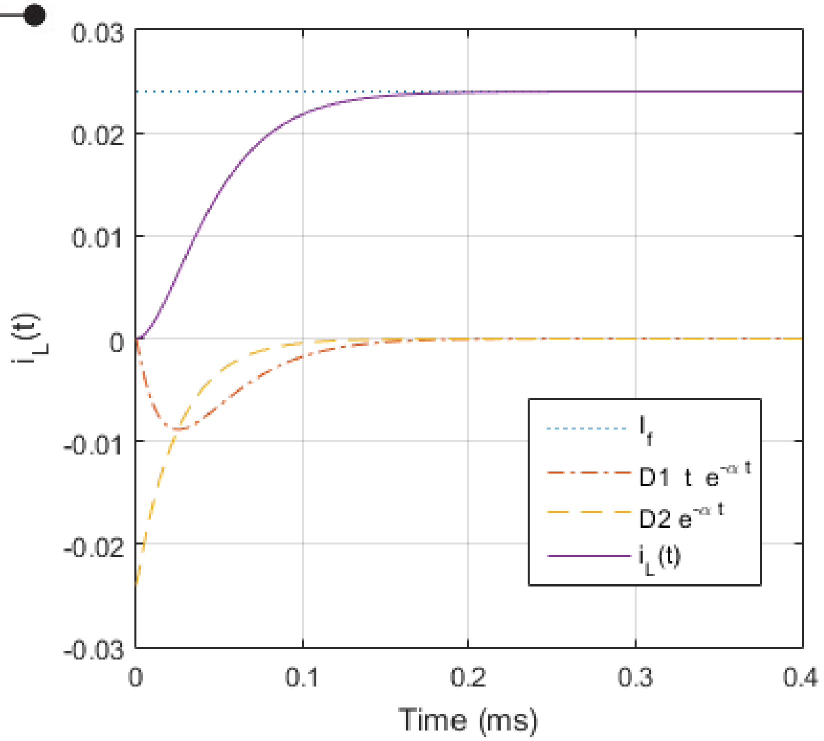


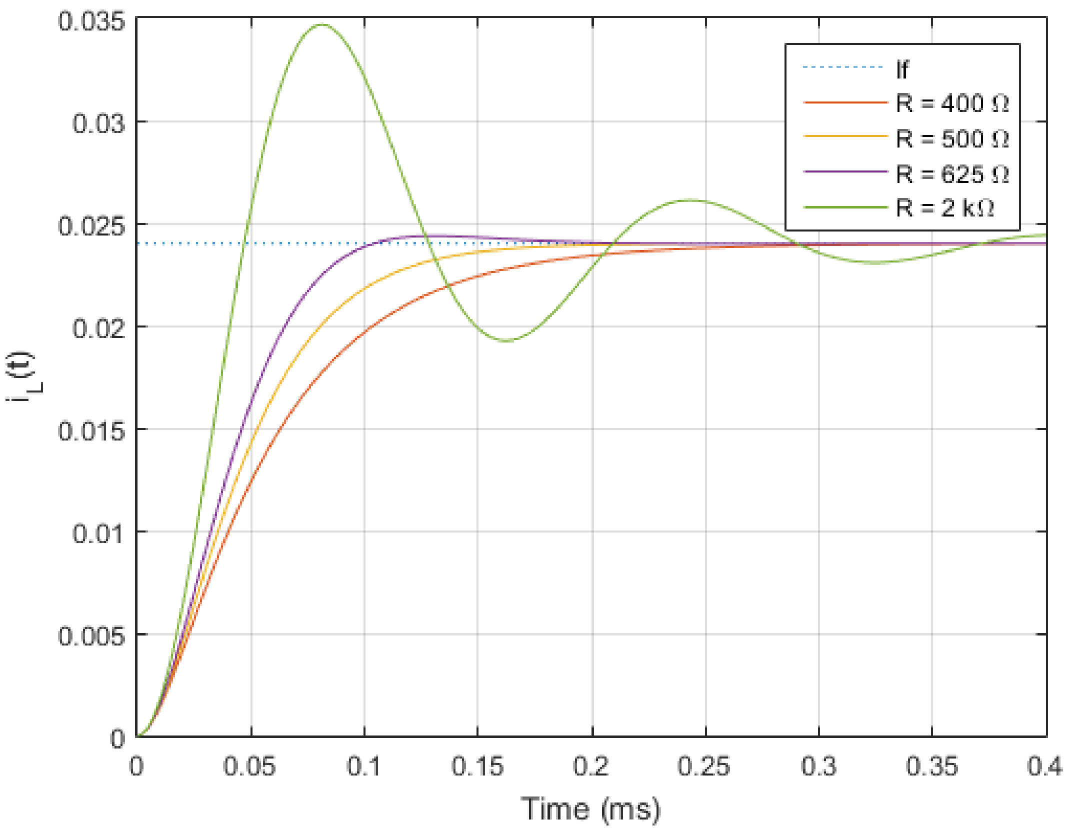
Figure: 08-12Ex8.6

Copyright © 2008 Pearson Prentice Hall, Inc.

$$i_L(t)=24+e^{-40.000\,t}(-960.000\,t-24)\;mA$$



Exemplo 8.9: comparação respostas sub, super e criticamente amortecidas



Exemplo 8.10: resposta ao degrau com condições iniciais não nulas

- **Considere o exemplo anterior com R = 500 Ω, IL(0) = 29 mA e vc(0) = 50 V.**

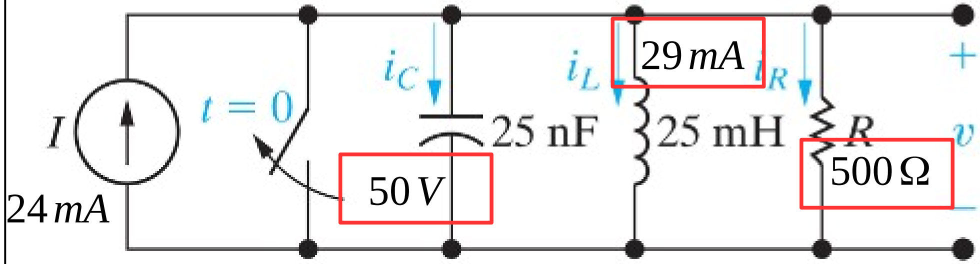


Figure: 08-12Ex8.6

Copyright © 2008 Pearson Prentice Hall, Inc.

Como R, L e C não mudaram ⟶ $\alpha^2 = \omega_0^2$ ⟶ **Resposta criticamente amortecida** ⟶

$$i_L(t) = I_f + e^{-\alpha t}(D_1 t + D_2)$$

Exemplo 8.10: resposta ao degrau com condições iniciais não nulas

Determinando D1 e D2: $i_L(t)=I_f+e^{-\alpha t}(D_1 t+D_2)$

Energia inicial no indutor $\longrightarrow$ $i_L(0)=29\,mA=I_f+D_1 0\,e^{-\alpha 0}+D_2\,e^{-\alpha 0}$ $\longrightarrow$ $\boxed{D_2=-I_f+i_L(0)}$

Energia inicial no capacitor $\longrightarrow$ $v_C(0)=50\,V=v_L(0)$ $\longrightarrow$ $L\frac{d}{dt}i_L(0)=v_C(0)$ $\longrightarrow$ $\frac{d}{dt}i_L(0)=\frac{v_C(0)}{L}$

$$D_1\,e^{-\alpha 0}+D_1\cdot 0\,(-\alpha\,e^{-\alpha 0})+D_2(-\alpha\,e^{-\alpha 0})=\frac{v_C(0)}{L} \longrightarrow$$

$$\boxed{D_1-\alpha D_2=\frac{v_C(0)}{L}}$$

A corrente final no indutor será a corrente da fonte $\longrightarrow$ $I_f=I=24\,mA$

Portanto:

$$D_2=(-24+29)\,mA=5\,mA$$

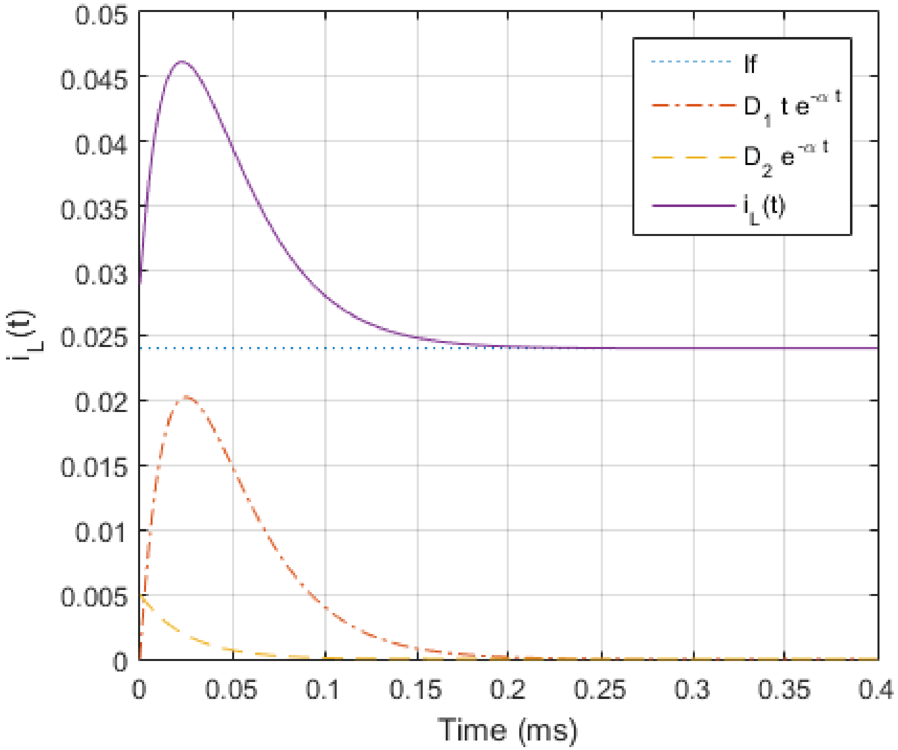
$$D_1-40.000\,D_2=\frac{50}{25\times 10^{-3}}$$

$\longrightarrow$ $D_1=2.200\,A/s,\ D_2=5\times 10^{-3}\,A$

$$\boxed{i_L(t)=24+2.2\times 10^{6}\,t\,e^{-40.000\,t}+5\,e^{-40.000\,t}\ mA}$$

Exemplo 8.10: resposta ao degrau com condições iniciais não nulas

$$i_L(t) = 24 + 2.2\times10^6\, t\, e^{-40.000\,t} + 5\, e^{-40.000\,t}\ mA$$



Resposta natural de circuitos RLC série

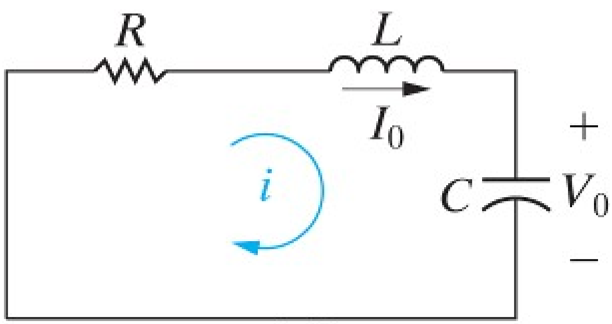


Figure: 08-14

Copyright © 2008 Pearson Prentice Hall, Inc.

Aplicando a lei das tensões de Kirchoff:

$$v_R(t)+v_L(t)+v_C(t)=0$$

$$R\,i(t)+L\frac{d}{dt}i(t)+\frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt+V_0=0$$

Diferenciando e rearranjando:

$$R\frac{d}{dt}i(t)+L\frac{d^2}{dt^2}i(t)+\frac{1}{C}i(t)=0 \longrightarrow \frac{d^2}{dt^2}i(t)+\frac{R}{L}\frac{d}{dt}i(t)+\frac{1}{LC}i(t)=0 \longrightarrow$$

EDO de 2ª ordem homogênea com coeficientes constantes → circuito de 2ª ordem!

1ª diferença → EDO em função da corrente, não da tensão!

Soluções:

$$i(t)=A_1 e^{s_1 t}+A_2 e^{(s_2 t)} \longrightarrow$$ **Superamortecido.**

$$i(t)=e^{-\alpha t}(B_1\cos\omega_d t+B_2\sin\omega_d t) \longrightarrow$$ **Subamortecido.**

$$i(t)=e^{-\alpha t}(D_1 t+D_2) \longrightarrow$$ **Criticamente amortecido.**

Resposta natural de circuitos RLC série

$$\frac{d^2}{dt^2}i(t)+\frac{R}{L}\frac{d}{dt}i(t)+\frac{1}{LC}i(t)=0$$

Aplicando a solução tradicional de EDOs de 2ª ordem:

$$i(t)=Ae^{st} \longrightarrow As^2e^{st}+\frac{R}{L}Ase^{st}+\frac{1}{LC}Ae^{st}=0 \longrightarrow Ae^{st}\left(s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}\right)=0$$

Equação característica: $\left(s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}\right)=0$ → **2ª diferença → equação característica diferente!**

Raízes da equação característica:

$$s_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}$$

$$\alpha=\frac{R}{2L}$$ → **3ª diferença → frequência de Neper (fator de amortecimento) diferente!**

$$\omega_0=\sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Exemplo 8.11

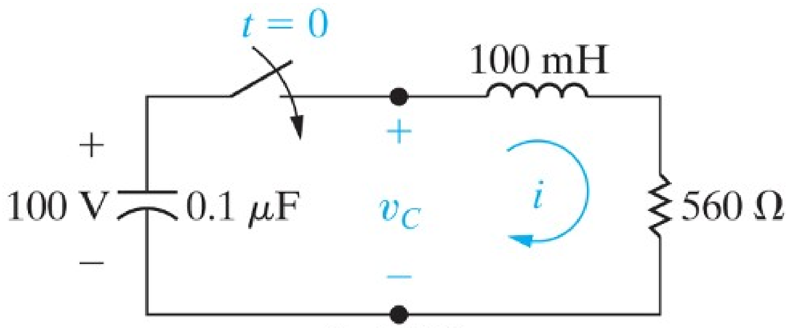


Figure: 08-16Ex8.11

Copyright © 2008 Pearson Prentice Hall, Inc.

$$\alpha=\frac{R}{2L}=2.800\,rad/s$$

$$\omega_0=\sqrt{\frac{1}{LC}}=10.000\,rad/s$$

Como: $\alpha^2<\omega_0^2$ ⟶ **subamortecido** ⟶ $i(t)=e^{-\alpha t}(B_1\cos\omega_d t+B_2\sin\omega_d t)$

$$\omega_d=\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}=9.600\,rad/s$$

Como a corrente no indutor não pode variar instantaneamente:

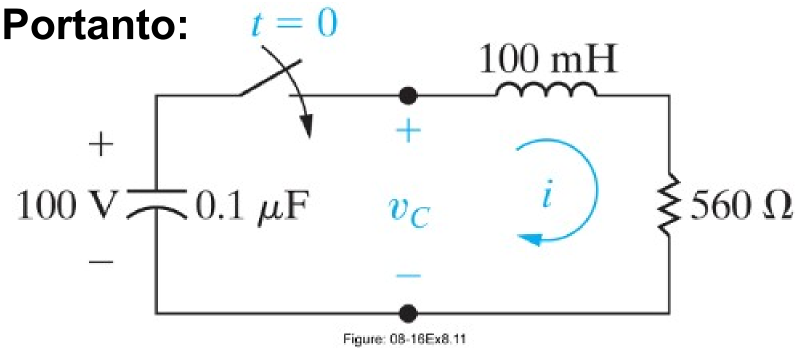
$i(0^-)=i(0^+)=0$ ⟶ $e^{-\alpha 0}(B_1\cos\omega_d 0+B_2\sin\omega_d 0)=0$ ⟶ $\boxed{B_1=0}$

$v_L(0)=v_C(0)$ ⟶ $L\frac{d}{dt}i(0)=100\,V$ ⟶ $\frac{d}{dt}i(0)=\frac{100}{L}$ ⟶

$$\left\{\begin{matrix}-\alpha e^{-\alpha 0}(B_1\cos\omega_d 0+B_2\sin\omega_d 0)+\\ e^{-\alpha 0}[B_1\omega_d(-\sin\omega_d 0)+B_2\omega_d\cos\omega_d 0]\end{matrix}\right\}=\frac{100}{L} \longrightarrow -\alpha\overset{0}{\cancel{B_1}}+\omega_d B_2=\frac{100}{L} \longrightarrow \boxed{B_2=\frac{100}{\omega_d L}\approx 0,1042}$$

Exemplo 8.11

Portanto:



Copyright © 2008 Pearson Prentice Hall, Inc.

$$i(t) = e^{-2.800t}(0\cos 9.600t + 0{,}1042\sin 9.600t)$$

$$= 0{,}1042 e^{-2.800t}\sin 9.600t\ A$$

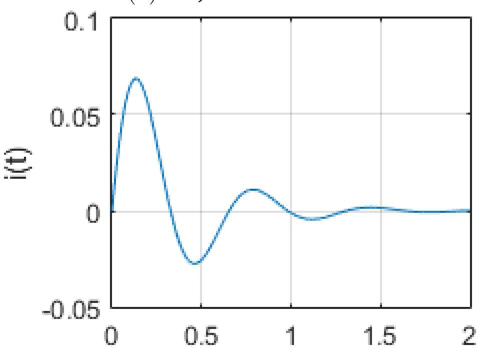
$$v_R(t) = R\cdot i(t) = 58{,}33 e^{-2.800t}\sin 9.600t\ V$$

$$v_L(t) = L\frac{d}{dt}i(t) = e^{-2.800t}(-29{,}176\sin 9.600t + 100{,}32\cos 9.600t)\,V$$

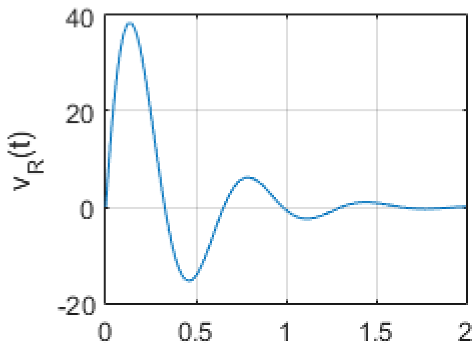
$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt + v_C(0) = v_R(t) + v_L(t) = e^{-2.800t}(100\cos 9.600t + 29{,}176\sin 9.600t)\,V$$

Exemplo 8.11

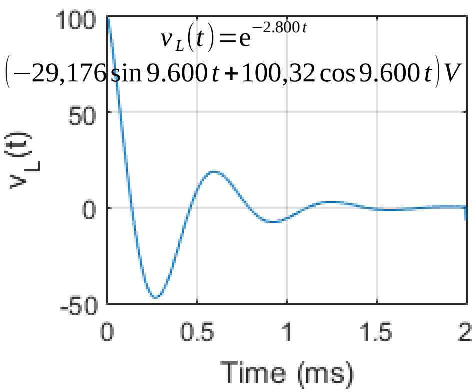
$$i(t)=0{,}1042\,e^{-2.800t}\sin 9.600\,t\;A$$



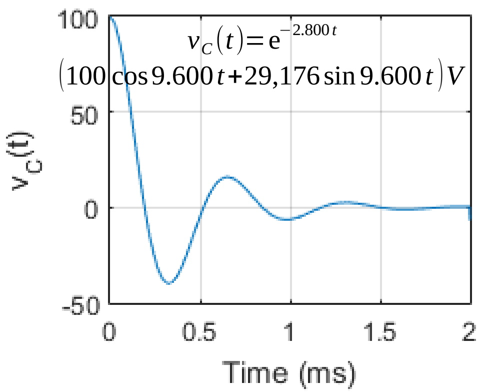
$$v_R(t)=R\cdot i(t)=58{,}33\,e^{-2.800t}\sin 9.600\,t\;V$$

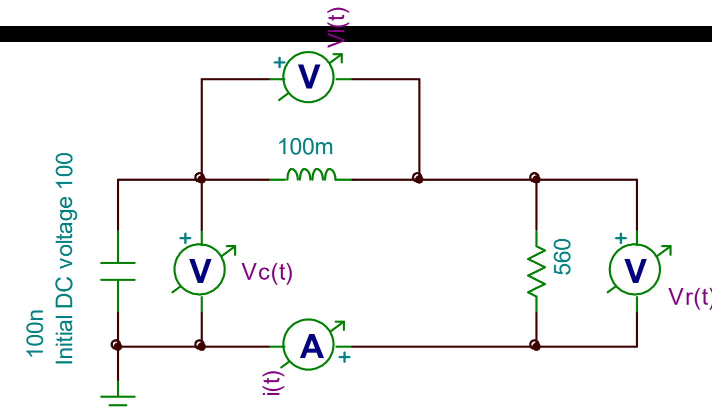


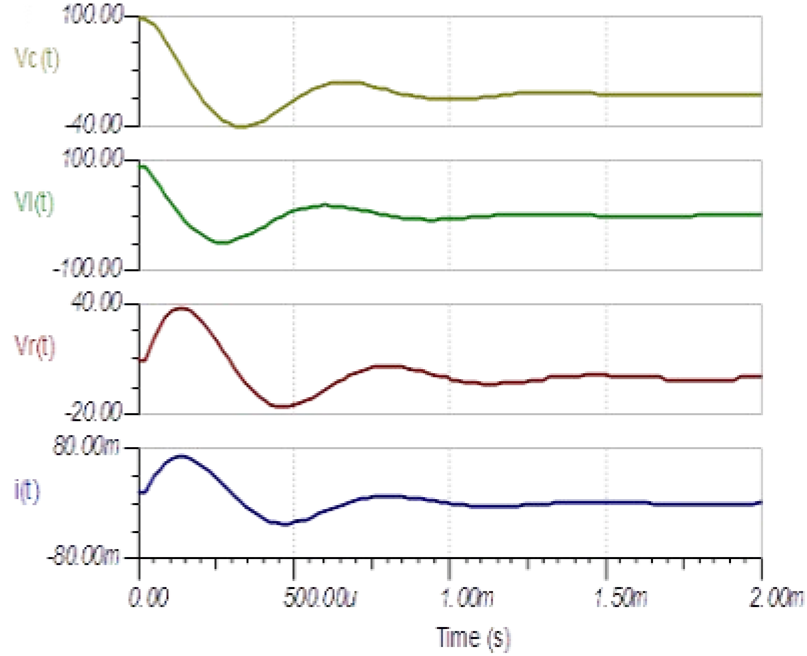
$$v_L(t)=e^{-2.800\,t}\left(-29{,}176\sin 9.600\,t+100{,}32\cos 9.600\,t\right)V$$



$$v_C(t)=e^{-2.800\,t}\left(100\cos 9.600\,t+29{,}176\sin 9.600\,t\right)V$$







Resposta ao degrau de circuitos RLC série

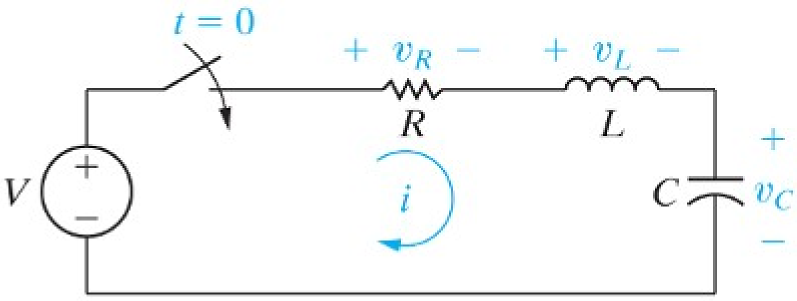


Figure: 08-15

Copyright © 2008 Pearson Prentice Hall, Inc.

Considerando que não há energia em *t* = 0. Aplicando a lei das tensões de Kirchoff:

$$v_R(t)+v_L(t)+v_C(t)=V$$

$$R\,i(t)+L\frac{d}{dt}i(t)+v_C(t)=V$$

Utilizando a tensão no capacitor: $i(t)=i_C(t)=C\frac{d}{dt}v_C(t) \longrightarrow \frac{d}{dt}i(t)=C\frac{d^2}{dt^2}v_C(t)$

Substituindo e rearranjando:

$$RC\frac{d}{dt}v_C(t)+LC\frac{d^2}{dt^2}v_C(t)+v_C(t)=V \longrightarrow \frac{d^2}{dt^2}v_C(t)+\frac{R}{L}\frac{d}{dt}v_C(t)+\frac{1}{LC}v_C(t)=\frac{V}{LC} \longrightarrow$$

EDO de 2ª ordem com função forçante.

1ª diferença → EDO em função da tensão em C, não da corrente em L!

Soluções:

$v_C(t)=V_f+A_1 e^{s_1 t}+A_2 e^{(s_2 t)}$ → **Superamortecido.**

$v_C(t)=V_f+e^{-\alpha t}(B_1\cos\omega_d t+B_2\sin\omega_d t)$ → **Subamortecido.**

$v_C(t)=V_f+e^{-\alpha t}(D_1 t+D_2)$ → **Criticamente amortecido.**

Exemplo 8.12

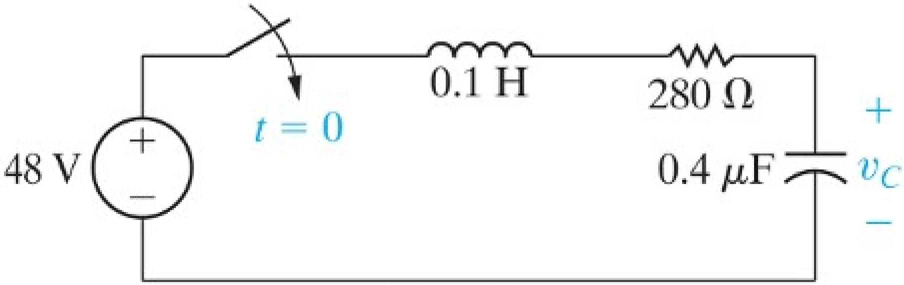


Figure: 08-17Ex8.12

Copyright © 2008 Pearson Prentice Hall, Inc.

Considerando que não há energia em *t* = 0.

$$\alpha = \frac{R}{2L} = 1.400\, rad/s$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} = 5.000\, rad/s$$

Como: $\alpha^2 < \omega_0^2 \longrightarrow$ **subamortecido** $\longrightarrow$

$$\begin{cases} v_C(t) = V_f + e^{-\alpha t}(B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sin \omega_d t) \\ \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = 4.800\, rad/s \\ V_f = 48\, V \end{cases}$$

Como a tensão no capacitor não pode variar instantaneamente:

$$v_C(0^-) = v_C(0^+) = 0 \longrightarrow V_f + e^{-\alpha 0}(B_1 \cos \omega_d 0 + B_2 \sin \omega_d 0) = 0 \longrightarrow \boxed{B_1 = -48\, V}$$

Como a corrente no indutor não pode variar instantaneamente:

$$i(0^-) = i(0^+) = 0 \longrightarrow C \frac{d}{dt} v_C(0) = 0 \longrightarrow \frac{d}{dt} v_C(0) = 0 \longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\alpha e^{-\alpha 0}(B_1 \cos \omega_d 0 + B_2 \sin \omega_d 0) + \\ e^{-\alpha 0}[B_1 \omega_d (-\sin \omega_d 0) + B_2 \omega_d \cos \omega_d 0] \end{array} \right\} = 0 \longrightarrow -\alpha B_1 + \omega_d B_2 = 0 \longrightarrow \boxed{B_2 = -14\, V}$$

Exemplo 8.12

Portanto:

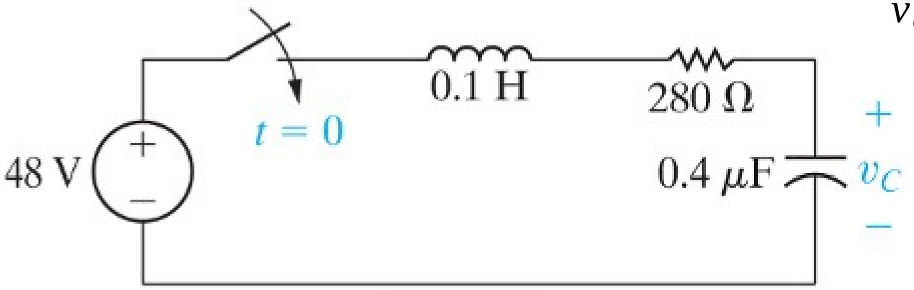


Figure: 08-17Ex8.12

Copyright © 2008 Pearson Prentice Hall, Inc.

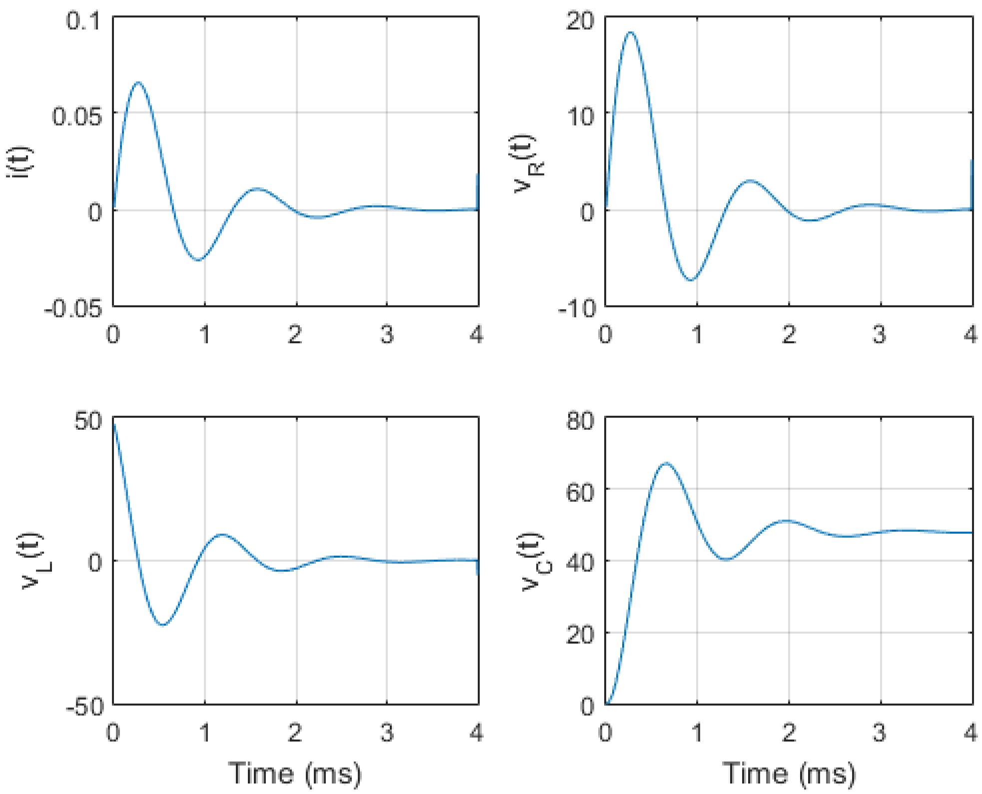
$$v_C(t) = 48 + e^{-1.400\,t}(-48\cos 4.800\,t - 14\sin 4.800t)\ V$$

$$i(t) = C\frac{d}{dt}v_C(t)$$

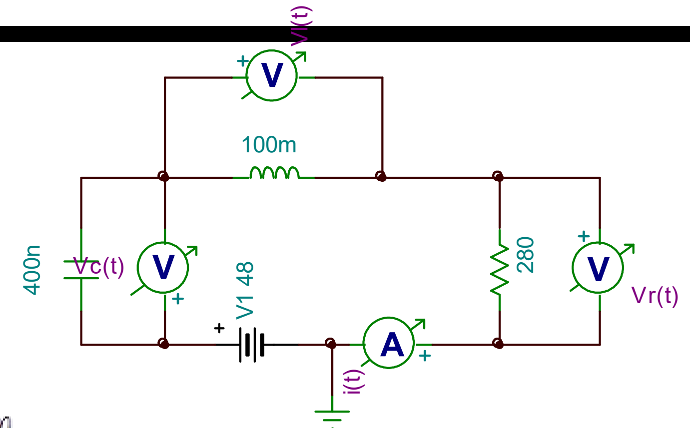
$$v_R(t) = R\cdot i(t)$$

$$v_L(t) = L\frac{d}{dt}i(t) = 48 - v_R(t) - v_C(t)$$

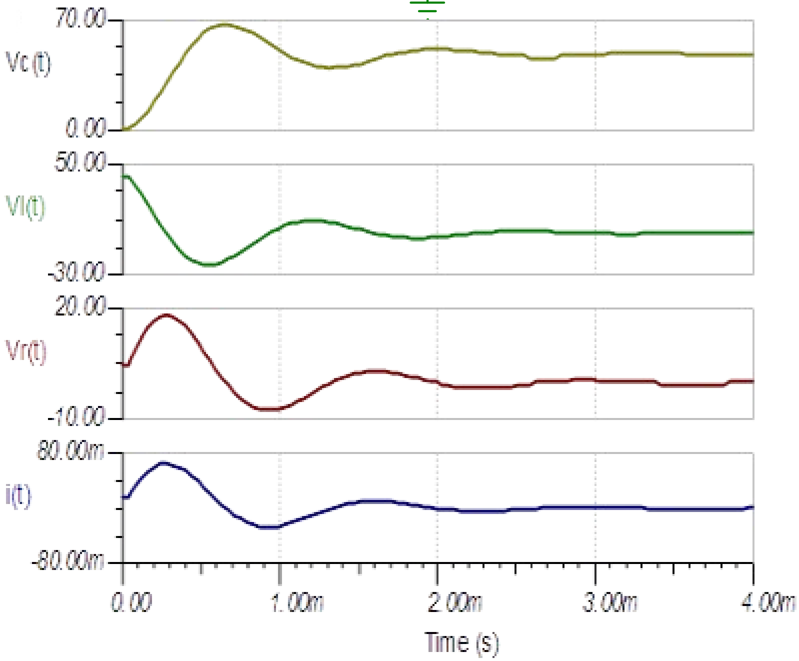
Exemplo 8.12



i(t)
$v_R(t)$
$v_L(t)$
$v_C(t)$
Time (ms)
Time (ms)



Vl(t)
100m
400n
Vc(t)
V1 48
280
Vr(t)
i(t)



Vc(t)
Vl(t)
Vr(t)
i(t)
Time (s)

Circuitos com dois amplificadores integradores

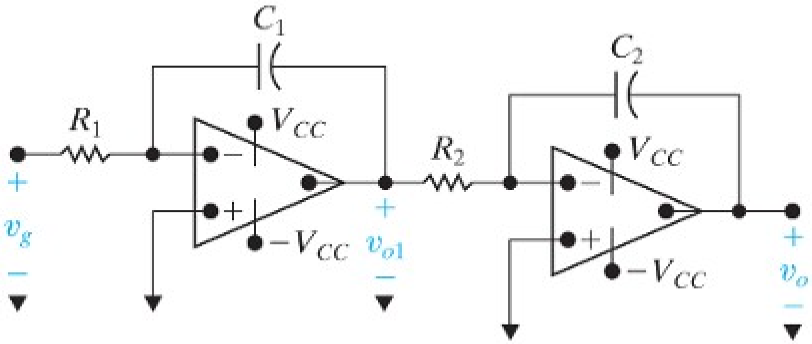


Figure: 08-18

Copyright © 2008 Pearson Prentice Hall, Inc.

$$i_{R1}=i_{C1} \longrightarrow \frac{v_g-0}{R_1}=C_1\frac{d}{dt}(0-v_{o1}) \longrightarrow$$

$$\frac{d}{dt}v_{o1}=-\frac{1}{R_1C_1}v_g$$

$$i_{R2}=i_{C2} \longrightarrow \frac{v_{o1}-0}{R_2}=C_2\frac{d}{dt}(0-v_o) \longrightarrow$$

$$\frac{d}{dt}v_o=-\frac{1}{R_2C_2}v_{o1}$$

Diferenciando a segunda equação:

$$\frac{d^2}{dt^2}v_o=-\frac{1}{R_2C_2}\frac{d}{dt}v_{o1} \longrightarrow \boxed{\frac{d^2}{dt^2}v_o=\frac{1}{R_2C_2}\frac{1}{R_1C_1}v_g} \longrightarrow$$

EDO de 2ª ordem com função forçante.

Exemplo 8.13

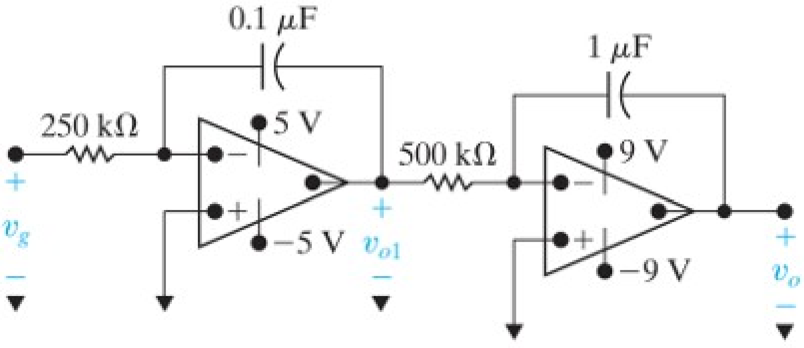


Figure: 08-19Ex8.13

Copyright © 2008 Pearson Prentice Hall, Inc.

Não há energia armazenada em *t* = 0.
Em *t* = 0, vg = 25 mV. Determine:

- **vo(t).**
- **Quanto tempo para saturar a saída.**

Para o 1º amp. op.: $v_{o1}(t) = -\frac{1}{R_1 C_1}\int_0^t v_g(t)\,dt + v_{o1}(0) = -\frac{1}{250k \cdot 0{,}1\mu}\int_0^t 25\times 10^{-3}\,dt + 0 \longrightarrow$

$v_{o1}(t) = -t\ V$

Como o 1º amp. op. está alimentado com 5 V: $\longrightarrow$ $v_{o1}(5) = -5\ V$ $\longrightarrow$ **Satura em 5 s!**

Para o 2º amp. op.: $v_o(t) = -\frac{1}{R_2 C_2}\int_0^t v_{o1}(t)\,dt + v_o(0) = -\frac{1}{500k \cdot 1\mu}\int_0^t t\,dt + 0 = -\cancel{2}\cdot\frac{t^2}{\cancel{2}} \longrightarrow$

$v_o(t) = -t^2\ V$

Como o 2º amp. op. está alimentado com 9 V: $\longrightarrow$ $v_o(3) = -3^2 = -9\ V$ $\longrightarrow$ **Satura em 3 s!** $\longrightarrow$ $\boxed{\textbf{Conclusões?}}$

Amplificadores integradores com resistores de realimentação

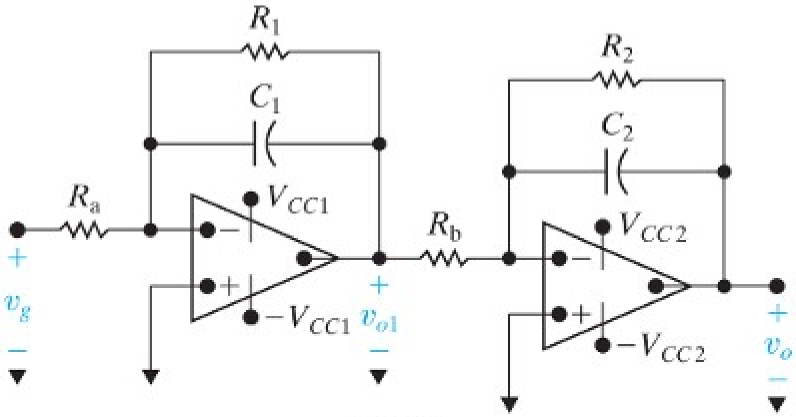


Figure: 08-20

Copyright © 2008 Pearson Prentice Hall, Inc.

Para o 1° amp. op.:

$$\frac{0-v_g}{R_a}+\frac{0-v_{o1}}{R_1}+C_1\frac{d}{dt}(0-v_{o1})=0 \longrightarrow$$

$$\frac{d}{dt}v_{o1}=-\frac{1}{R_1C_1}v_{o1}-\frac{v_g}{R_aC_1} \qquad 1$$

Para o 2° amp. op.:

$$\frac{0-v_{o1}}{R_b}+\frac{0-v_o}{R_2}+C_2\frac{d}{dt}(0-v_o)=0 \longrightarrow$$

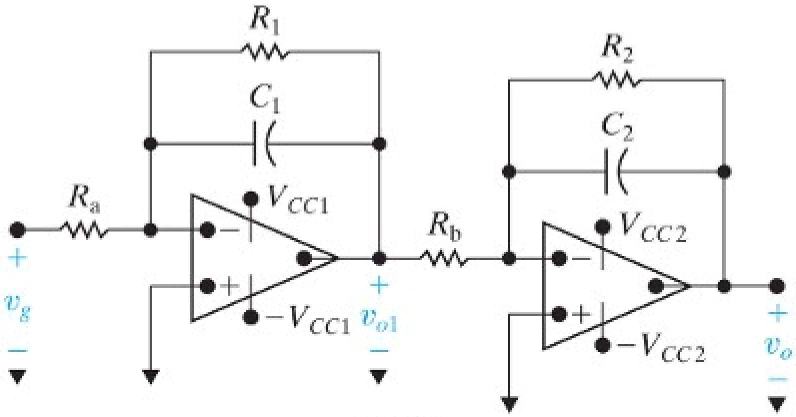
$$\frac{d}{dt}v_o+\frac{1}{R_2C_2}v_o=-\frac{v_{o1}}{R_bC_2} \qquad 2$$

Diferenciando 2 $\longrightarrow$ $$\frac{d^2}{dt^2}v_o+\frac{1}{R_2C_2}\frac{d}{dt}v_o=-\frac{1}{R_bC_2}\frac{d}{dt}v_{o1}$$

Substituindo 1 $\longrightarrow$ $$\frac{d^2}{dt^2}v_o+\frac{1}{R_2C_2}\frac{d}{dt}v_o=-\frac{1}{R_bC_2}\left(-\frac{1}{R_1C_1}v_{o1}-\frac{v_g}{R_aC_1}\right) \qquad 3$$

De 2 temos $\longrightarrow$ $$v_{o1}=-(R_bC_2)\left(\frac{d}{dt}v_o+\frac{1}{R_2C_2}v_o\right)$$

Amplificadores integradores com resistores de realimentação



Substituindo em 3 e rearranjando:

$$\boxed{\frac{d^2}{dt^2}v_o+\left(\frac{1}{R_1C_1}+\frac{1}{R_2C_2}\right)\frac{d}{dt}v_o+\left(\frac{1}{R_1C_1}\cdot\frac{1}{R_2C_2}\right)v_o=\frac{1}{R_aR_bC_1C_2}\cdot v_g}$$

$$\boxed{\frac{d^2}{dt^2}v_o+\left(\frac{1}{\tau_1}+\frac{1}{\tau_2}\right)\frac{d}{dt}v_o+\left(\frac{1}{\tau_1}\cdot\frac{1}{\tau_2}\right)v_o=\frac{1}{R_aR_bC_1C_2}\cdot v_g}$$

EDO de 2ª ordem com função forçante.

Solução: $v_o(t)=V_f+\{resposta\ natural\}$

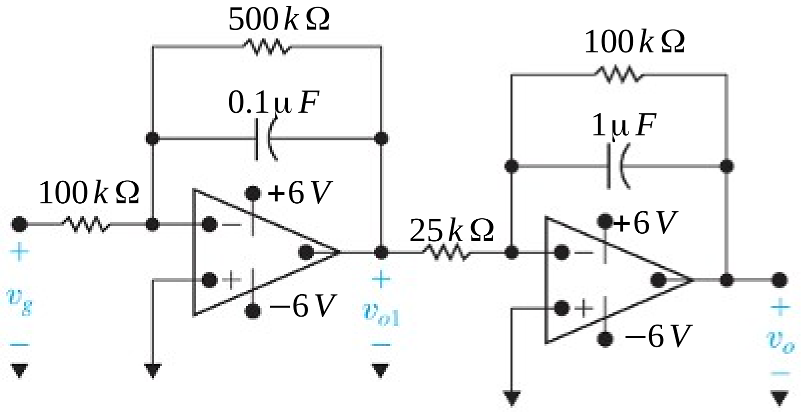
Eq. característica: $s^2+\left(\frac{1}{R_1C_1}+\frac{1}{R_2C_2}\right)s+\left(\frac{1}{R_1C_1}\cdot\frac{1}{R_2C_2}\right)=0$

$$\alpha=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{R_1C_1}+\frac{1}{R_2C_2}\right)$$

$$\omega_0=\sqrt{\frac{1}{R_1C_1}\cdot\frac{1}{R_2C_2}}$$

$$\longrightarrow \quad s_{1,2}=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}$$

Exemplo 8.14



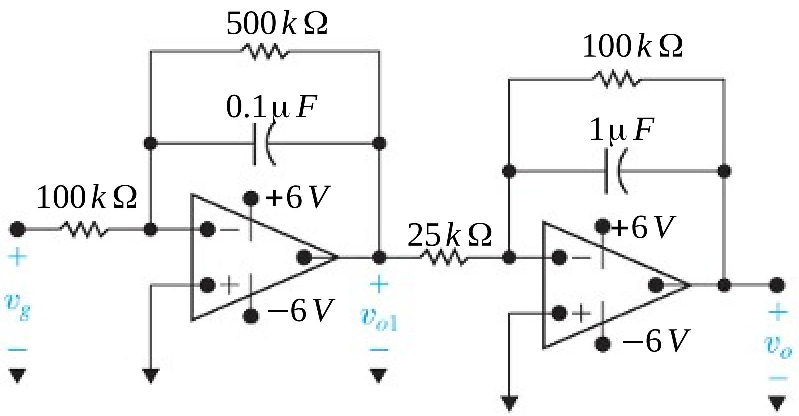
Não há energia armazenada em *t* = 0.
Em *t* = 0, vg = 250 mV. Determine:

- **vo(t).**
- **Quanto tempo para saturar a saída.**

$$\frac{d^2}{dt^2}v_o+\left(\frac{1}{\tau_1}+\frac{1}{\tau_2}\right)\frac{d}{dt}v_o+\left(\frac{1}{\tau_1}\cdot\frac{1}{\tau_2}\right)v_o=\frac{1}{R_aR_bC_1C_2}\cdot v_g \longrightarrow \frac{d^2}{dt^2}v_o+30\frac{d}{dt}v_o+200v_o=1000v_g$$

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{R_1C_1}+\frac{1}{R_2C_2}\right)=15\,rad/s\\ \omega_0&=\sqrt{\frac{1}{R_1C_1}\cdot\frac{1}{R_2C_2}}\approx14{,}14\,rad/s\end{aligned}\right\} \longrightarrow \alpha^2>\omega_0^2 \longrightarrow \textbf{Superamortecido} \longrightarrow v_0(t)=V_f+A_1e^{s_1t}+A_2e^{s_2t}$$

Exemplo 8.14



$$v_0(t)=V_f+A_1 e^{s_1 t}+A_2 e^{s_2 t}$$

$$V_f=v_g\cdot G_1\cdot G_2=250\times 10^{-3}\cdot\left(-\frac{500\,k}{100\,k}\right)\cdot\left(-\frac{100\,k}{25\,k}\right)=5\,V$$

$$s_{1,\,2}=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}=\begin{Bmatrix}-10\,rad/s\\-20\,rad/s\end{Bmatrix}$$

Determinando A1 e A2 → como não há energia em *t* = 0:

$$v_0(0)=0=V_f+A_1 e^{s_1 0}+A_2 e^{s_2 0} \longrightarrow A_1+A_2=-V_f=-5\,V$$

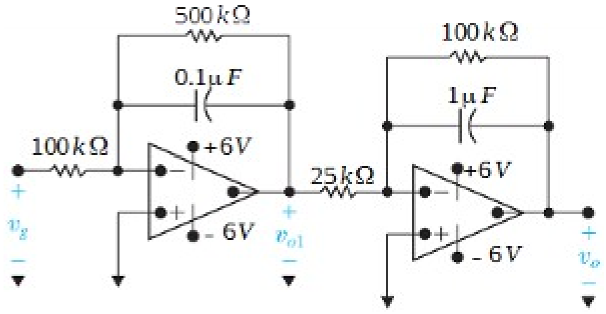
$$\frac{d}{dt}v_0(0)=0=A_1 s_1 e^{s_1 0}+A_2 s_2 e^{s_2 0} \longrightarrow -20\,A_1-10\,A_2=0\,V$$

$$\longrightarrow \begin{cases}A_1=-10\,V\\A_2=5\,V\end{cases}$$

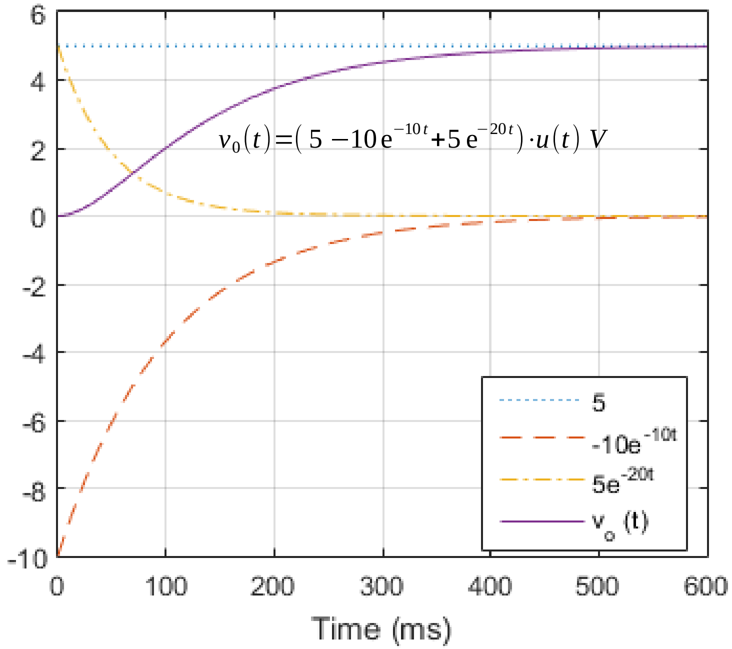
Portanto:

$$v_0(t)=(\,5\,-10\,e^{-10t}+5\,e^{-20t})\cdot u(t)\;V$$

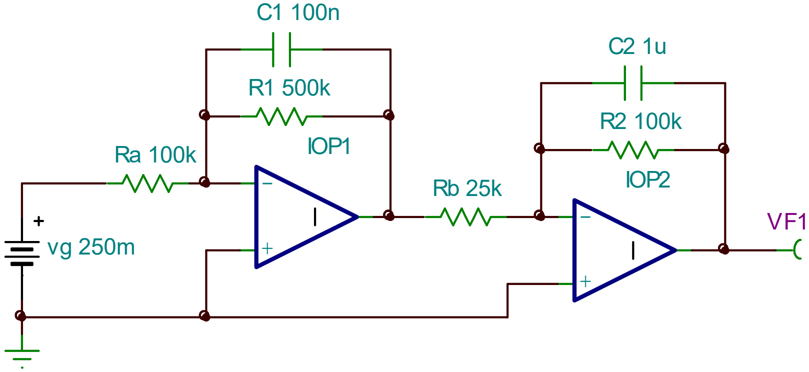
Exemplo 8.14



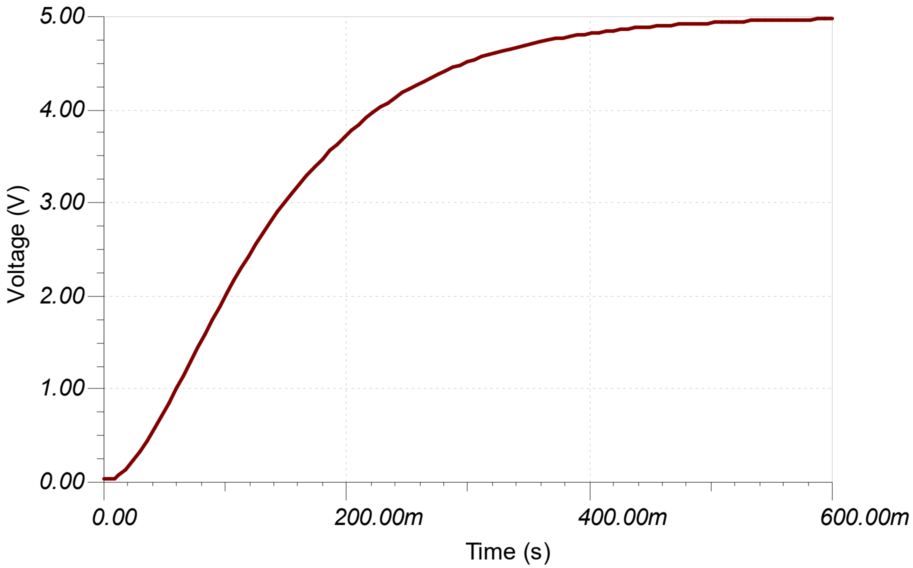
500 kΩ
0.1μF
100 kΩ
+6V
- 6V
25 kΩ
100 kΩ
1μF
+6V
- 6V
v_g
v_{o1}
v_o



$v_0(t)=(5-10e^{-10t}+5e^{-20t})\cdot u(t)\ V$
5
$-10e^{-10t}$
$5e^{-20t}$
$v_o(t)$
Time (ms)



C1 100n
R1 500k
IOP1
Ra 100k
vg 250m
Rb 25k
C2 1u
R2 100k
IOP2
VF1



Voltage (V)
Time (s)