
Análise de circuitos elétricos em regime permanente senoidal (RPS)

Introdução

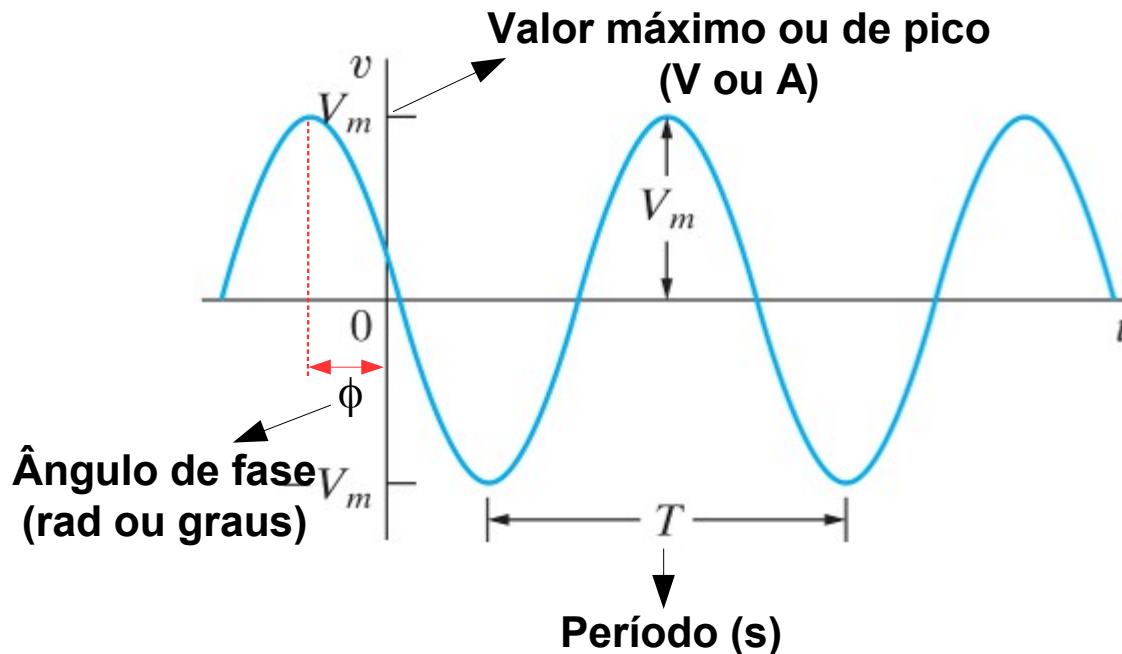
- **Regime senoidal** → comportamento dos circuitos elétricos quando estimulados por fontes de tensão ou corrente senoidais.
- **Regime *permanente* senoidal** → nos interessa o comportamento apenas após o término de *transitórios* (ligamento ou desligamento das fontes, variações nas configurações, etc...).
- **Por que a análise em RPS é importante?**
 - Geração, transmissão e distribuição de energia elétrica.
 - Decomposição de sinais arbitrários como somatórios de sinais senoidais → análise por Fourier, princípio da superposição.
 - Análise de circuitos no domínio da frequência.
 - Etc...

Fontes senoidais

- Fontes de tensão ou corrente senoidais:

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi_v) \longrightarrow \text{Obs.: por que usar cosseno e não seno?}$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi_i)$$



Ainda temos:

$$f = \frac{1}{T} \longrightarrow \text{Frequência (Hz).}$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \longrightarrow \text{Frequência angular (rad/s).}$$

Lembrando que:

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ$$

Valores eficazes

- **Valor eficaz de uma função *periódica* → definido como a raiz quadrada do valor médio quadrático da função (*root mean square* – RMS).**

$$F_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f^2(t) dt}$$

- **Considerando fontes senoidais:**

$$F_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} F_m^2 \cos^2(\omega t + \phi) dt} =$$

$$= \sqrt{\frac{F_m^2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{1 + \cos[2(\omega t + \phi)]}{2} dt} = \sqrt{\frac{F_m^2}{T} \left(\frac{T}{2} + 0 \right)} = \sqrt{\frac{F_m^2}{2}} = \frac{F_m}{\sqrt{2}}$$

$$V_{RMS} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \approx 0,707 V_m$$

$$I_{RMS} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \approx 0,707 I_m$$

- **No caso de tensões e correntes → produz a mesma energia que seria fornecida por uma fonte contínua de mesmo valor!**

Exemplo

- O sistema de energia empregado em Belo Horizonte utiliza tensões senoidais com valor de pico de 180V e frequência de 60 Hz. Determine:
 - A equação “genérica” da tensão $v(t)$.
 - O valor eficaz da tensão.
 - Faça um esboço da forma de onda, enfatizando os principais pontos singulares.

Exemplo

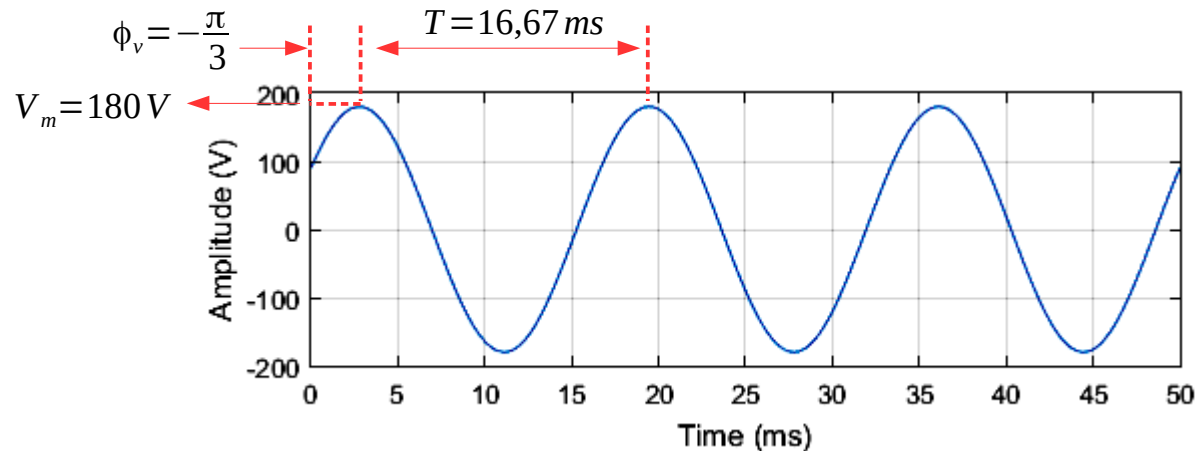
$$V_m = 180 \text{ V}$$

$$f = 60 \text{ Hz} \rightarrow \omega = 2\pi \cdot 60 \approx 377 \text{ rad/s} \rightarrow T = \frac{1}{f} \approx 16,67 \text{ ms}$$

Portanto $\rightarrow v(t) = 180 \cos(377t + \phi_v)$

O valor eficaz será \rightarrow

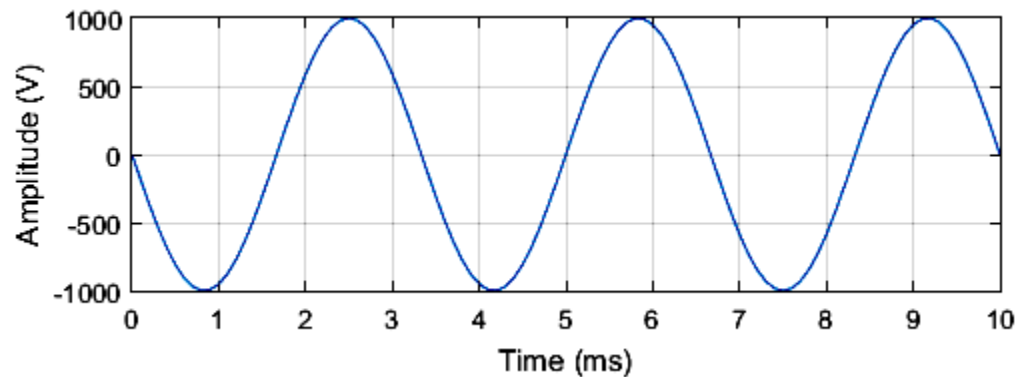
$$V_{RMS} = \frac{180}{\sqrt{2}} \approx 127 \text{ V}$$



Exemplos

- **Exemplo 9.1:** Uma corrente senoidal tem amplitude de 20A e realiza uma oscilação completa em 1ms. O valor em $t = 0$ é 10A. Determine:
 - A frequência da onda, em Hz e em rad/s.
 - A expressão de $i(t)$ considerando uma representação por cosseno e o ângulo expresso em graus e em radianos.
 - O valor RMS da corrente.
- Dada a seguinte forma de onda, determine:
 - A expressão de $f(t)$.
 - Faça um esboço da onda de $f(t - 1 \text{ ms})$.
 - Faça um esboço para a onda considerando um ângulo de fase

$$\phi_v = -\frac{2\pi}{3}$$



Regime *permanente* senoidal

- **Considere o seguinte circuito:**

- Energia inicial no indutor nula.

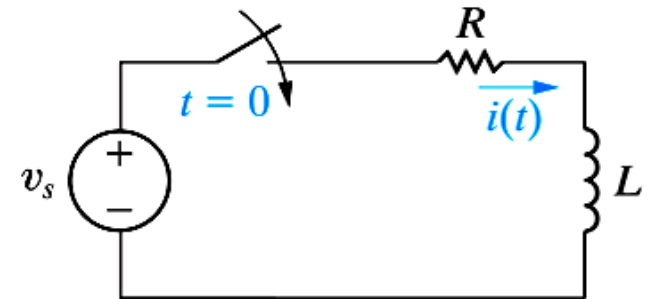
- Fonte de tensão senoidal $\rightarrow v_s(t) = V_m \cos(\omega t + \phi_v)$

- **Em $t = 0$:**

$$-v_s(t) + v_R(t) + v_L(t) = 0 \rightarrow v_R(t) + v_L(t) = v_s(t) \rightarrow$$

$$Ri(t) + L \frac{d}{dt} i(t) = V_m \cos(\omega t + \phi_v) \rightarrow$$

$$\frac{d}{dt} i(t) + \frac{R}{L} i(t) = \frac{V_m}{L} \cos(\omega t + \phi_v) \rightarrow \text{EDO de 1 ordem com função forçante (ver solução da resposta ao degrau...)}$$



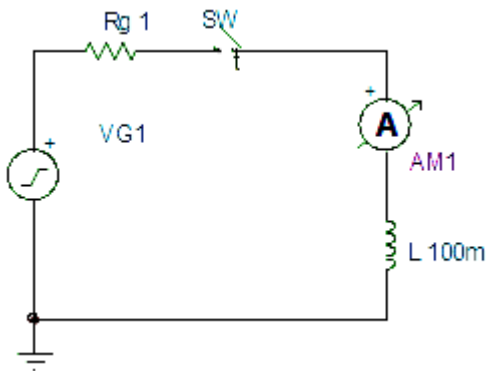
$$i(t) = -\frac{V_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos(\phi - \theta) e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos(\omega t + \phi - \theta), \quad \theta = \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

Resposta transitória

Resposta permanente

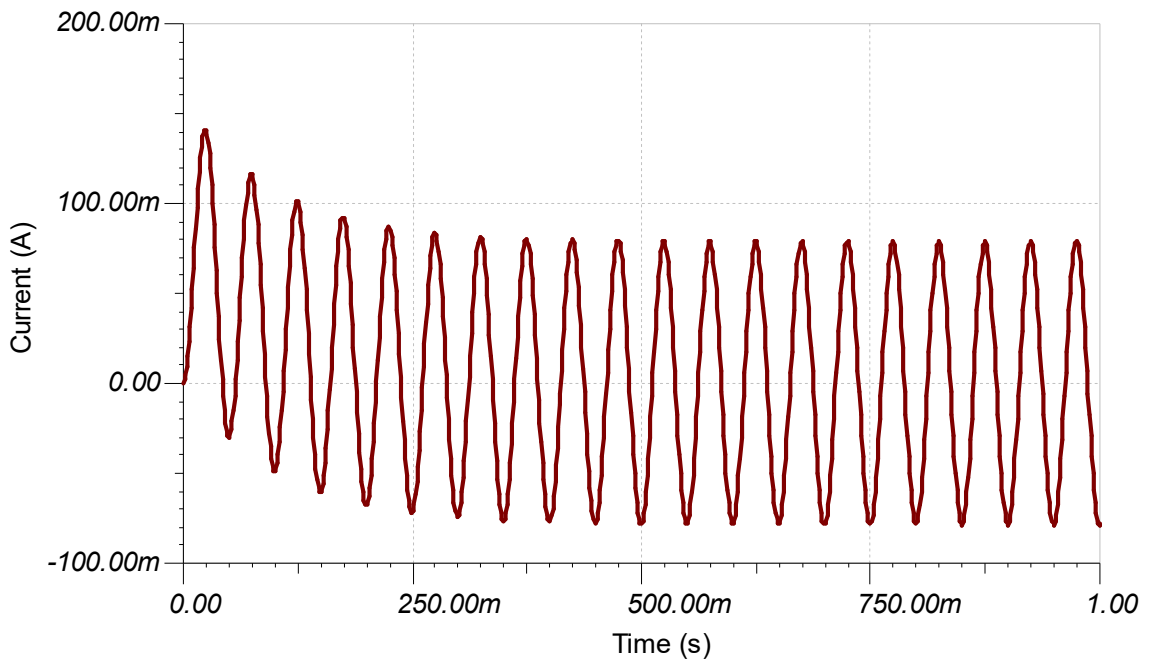
Regime *permanente* senoidal

$$i(t) = -\frac{V_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos(\phi - \theta) e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos(\omega t + \phi - \theta), \quad \theta = \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$



$$v_g(t) = 1 \sin(2\pi 20t + 0^\circ) V$$

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{100 \text{ m}}{1} = 100 \text{ ms}$$



**Não nos interessa
nesse momento!**

~~$5\tau = 500 \text{ ms}$
Resposta transitória~~

Resposta permanente

Representação fasorial

- Representação fasorial → forma alternativa para representar grandezas trigonométricas:

Fasores → vetores girantes.

Identidade de Euler: $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$

Portanto: $\begin{cases} \cos \theta = \Re \{ e^{j\theta} \} \\ \sin \theta = \Im \{ e^{j\theta} \} \end{cases}$

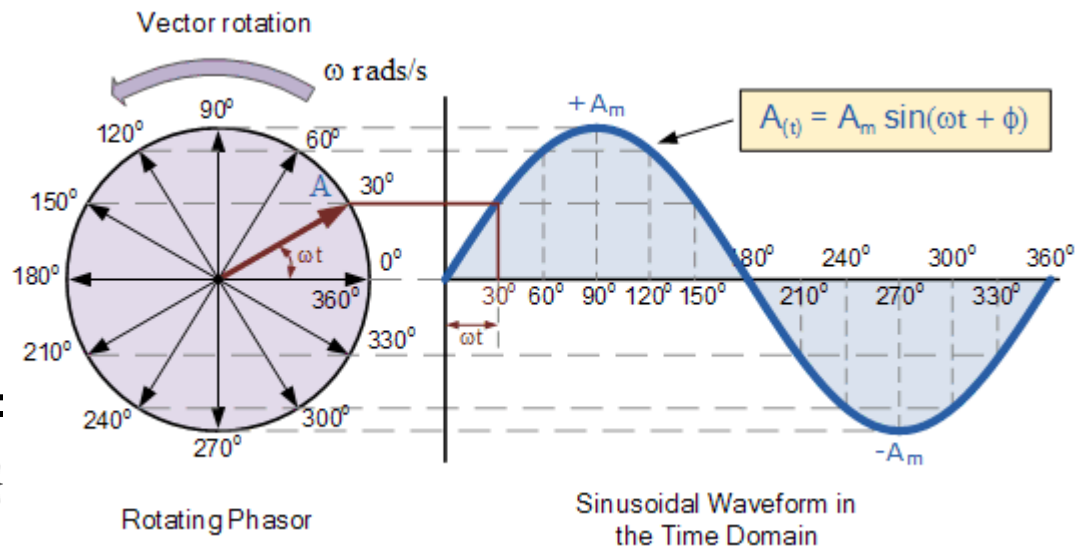
Considerando uma tensão senoidal:

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi) = V_m \Re \{ e^{j(\omega t + \phi)} \}$$

$$= \Re \{ \underbrace{V_m e^{j\phi}}_{\text{Amplitude e fase são variáveis.}} \underbrace{e^{j\omega t}}_{\text{Frequência é constante.}} \}$$

Amplitude e fase
são variáveis.

~~Frequência é
constante.~~

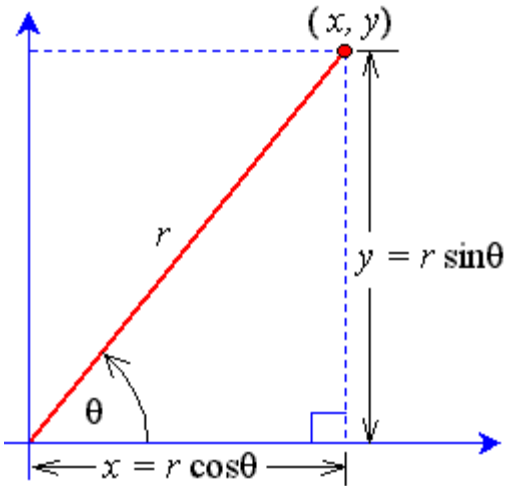


Representação fasorial (ou
no domínio da frequência)

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi) \rightarrow \vec{V} = V_m e^{j\phi}$$

Representação fasorial

- Representações nas formas polar, retangular e angular.



$$\boxed{\vec{R} = r e^{j\theta}} \rightarrow \text{Forma polar}$$

Pela figura, temos:

$$\left. \begin{array}{l} \Re\{\vec{R}\} = r \cos \theta \\ \Im\{\vec{R}\} = r \sin \theta \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{\vec{R} = \Re\{\vec{R}\} + j \Im\{\vec{R}\}} \rightarrow \text{Forma retangular}$$

$$\text{Por fim: } \vec{R} = r e^{j\theta} \rightarrow \boxed{\vec{R} = r \angle \theta} \rightarrow \text{Forma angular}$$

Conversão de polar para retangular:

$$\vec{R} = r e^{j\theta} \rightarrow \vec{R} = (r \cos \theta) + j(r \sin \theta)$$

Conversão de retangular para polar:

$$\vec{R} = \Re_R + j \Im_R \rightarrow \vec{R} = \sqrt{\Re_R^2 + \Im_R^2} e^{\arctan\left(\frac{\Im_R}{\Re_R}\right)}$$

Representação fasorial → perguntas pertinentes

- Para que usar a representação fasorial?

- Permite realizar operações trigonométricas [ex. $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$]

- Por que usar duas representações:

- Adição e subtração → forma retangular

Melhor do que isso → aprenda a usar sua *calculadora científica!*

$$\left. \begin{array}{l} \vec{A} = A e^{j\theta_A} \\ \vec{B} = B e^{j\theta_B} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \vec{A} \pm \vec{B} = \\ = A e^{j\theta_A} \pm B e^{j\theta_B} = ? \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \vec{A} = \mathcal{R}_A + j \mathcal{I}_A \\ \vec{B} = \mathcal{R}_B + j \mathcal{I}_B \end{array} \right\} \begin{array}{l} \vec{A} \pm \vec{B} = \\ = (\mathcal{R}_A \pm \mathcal{R}_B) \pm j(\mathcal{I}_A \pm \mathcal{I}_B) \quad \text{OK!} \end{array}$$

- Multiplicação e divisão → forma polar é mais fácil.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{A} = A e^{j\theta_A} \\ \vec{B} = B e^{j\theta_B} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B e^{j(\theta_A + \theta_B)} \quad \text{OK!} \\ \frac{\vec{A}}{\vec{B}} = \frac{A}{B} e^{j(\theta_A - \theta_B)} \quad \text{OK!} \end{array} \quad \frac{\vec{A}}{\vec{B}} = \frac{\mathcal{R}_A + j \mathcal{I}_A}{\mathcal{R}_B + j \mathcal{I}_B} = \frac{\mathcal{R}_A + j \mathcal{I}_A}{\mathcal{R}_B + j \mathcal{I}_B} \cdot \frac{\mathcal{R}_B - j \mathcal{I}_B}{\mathcal{R}_B - j \mathcal{I}_B} = \frac{(\mathcal{R}_A \mathcal{R}_B + \mathcal{I}_A \mathcal{I}_B) + j(\mathcal{R}_B \mathcal{I}_A - \mathcal{R}_A \mathcal{I}_B)}{\mathcal{R}_B^2 + \mathcal{I}_B^2} !$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{A} = \mathcal{R}_A + j \mathcal{I}_A \\ \vec{B} = \mathcal{R}_B + j \mathcal{I}_B \end{array} \right\} \vec{A} \cdot \vec{B} = (\mathcal{R}_A + j \mathcal{I}_A) \cdot (\mathcal{R}_B + j \mathcal{I}_B) = (\mathcal{R}_A \mathcal{R}_B - \mathcal{I}_A \mathcal{I}_B) + j(\mathcal{R}_A \mathcal{I}_B + \mathcal{R}_B \mathcal{I}_A) !$$

Exemplos

- Considere que a tensão em um resistor em um determinado circuito seja

$$v_R(t) = 160 \cos(2.500t - 45^\circ) V$$

Determine:

- \vec{V}_R na forma polar.
- \vec{V}_R na forma retangular.
- \vec{V}_R na forma angular.
- O diagrama fasorial de \vec{V}_R
- A forma de onda de $v_R(t)$

Exemplos

- **Exemplo 9.5:** Considere duas funções senoidais

$$y_1(t) = 20 \cos(\omega t - 30^\circ) \quad y_2(t) = 40 \cos(\omega t + 60^\circ)$$

Determine:

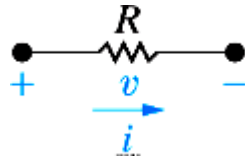
- $y_1(t) + y_2(t)$
 - $y_1(t) - y_2(t)$
 - $y_1(t) \cdot y_2(t)$
 - $\frac{y_1(t)}{y_2(t)}$
- **A tensão e a corrente fornecidas pela fonte de alimentação a um determinado circuito são dadas pelas equações abaixo. Determine a equação da potência instantânea fornecida pela fonte.**

$$v_g(t) = 270 \cos(377t) \text{ V}$$

$$i_g(t) = 30 \sin(377t - 45^\circ) \text{ A}$$

Elementos de circuitos no domínio da frequência

• Resistores:



No domínio da frequência:

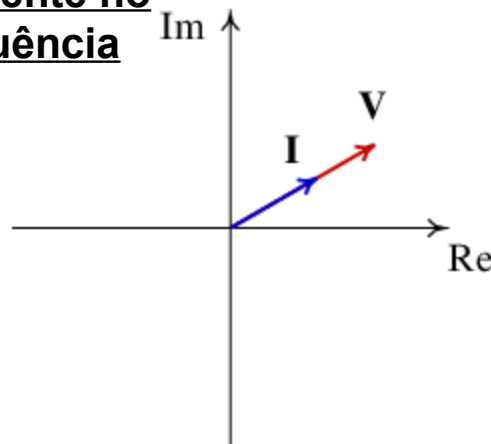
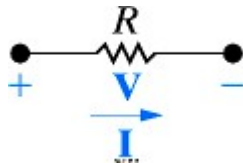
Se $i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi_i)$ $\longrightarrow \vec{I} = I_m e^{j\phi_i}$

Lei de Ohm

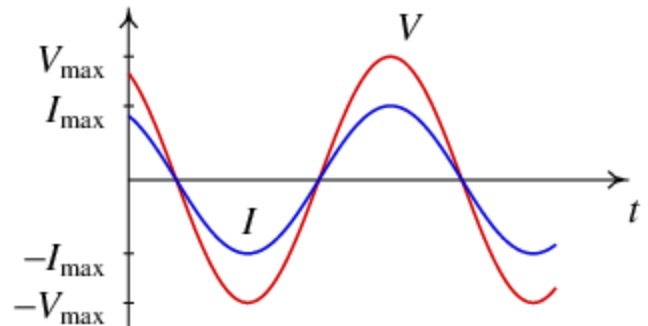
$v(t) = R \cdot i(t) = R \cdot I_m \cos(\omega t + \phi_i) \longrightarrow \vec{V} = R \cdot I_m e^{j\phi_i} = R \cdot \vec{I}$

Portanto: relação tensão-corrente no resistor no domínio da frequência

$$\vec{V} = R \cdot \vec{I}$$



A tensão e a corrente têm o mesmo ângulo \rightarrow estão *em fase*



Elementos de circuitos no domínio da frequência

- Indutores:** $v(t) = L \frac{d}{dt} i(t)$

Se $i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi_i)$

$$v(t) = L \frac{d}{dt} [I_m \cos(\omega t + \phi_i)]$$

$$= -\omega L I_m \sin(\omega t + \phi_i)$$

$$= -\omega L I_m \cos(\omega t + \phi_i - 90^\circ)$$

$$= \omega L I_m \cos(\omega t + \phi_i - 90^\circ + 180^\circ)$$

$$= \omega L I_m \cos(\omega t + \phi_i + 90^\circ)$$

No domínio da frequência:

$$\vec{I} = I_m e^{j\phi_i}$$

$$\vec{V} = \omega L I_m e^{j(\phi_i + 90^\circ)}$$

$$= \omega L I_m e^{j\phi_i} e^{j90^\circ}$$

$$= e^{j90^\circ} \omega L I_m e^{j\phi_i}$$

$$= e^{j90^\circ} \omega L \vec{I}$$

$$\vec{V} = j\omega L \vec{I}$$

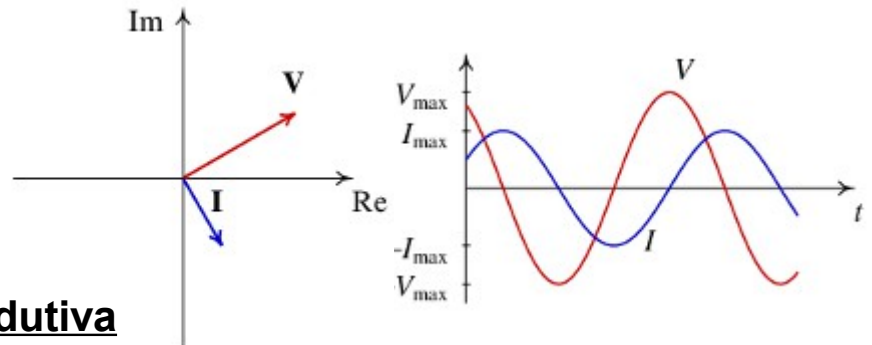
A tensão é adiantada 90° em relação à corrente

Portanto: relação tensão-corrente no indutor no domínio da frequência:

$$\vec{V} = Z_L \vec{I}$$



$$Z_L = j\omega L = e^{j90^\circ} \omega L [\Omega] \rightarrow \text{Impedância indutiva}$$



Elementos de circuitos no domínio da frequência

- Capacitores:** $i(t) = C \frac{d}{dt} v(t)$

Se $v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi_v)$

$$i(t) = C \frac{d}{dt} [V_m \cos(\omega t + \phi_v)]$$

$$= -\omega C V_m \sin(\omega t + \phi_v)$$

$$= -\omega C V_m \cos(\omega t + \phi_v - 90^\circ)$$

$$= \omega C V_m \cos(\omega t + \phi_v - 90^\circ + 180^\circ)$$

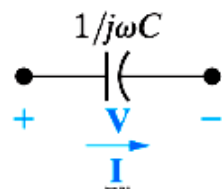
$$= \omega C V_m \cos(\omega t + \phi_v + 90^\circ)$$

Portanto: relação tensão-corrente no capacitor no domínio da frequência:

$$\vec{V} = Z_C \vec{I}$$

$$Z_C = \frac{-j}{\omega C} = \frac{1}{j\omega C} [\Omega]$$

Impedância capacitiva



No domínio da frequência:

$$\vec{V} = V_m e^{j\phi_v}$$

$$\vec{I} = \omega C V_m e^{j(\phi_v + 90^\circ)}$$

$$= \omega C V_m e^{j\phi_v} e^{j90^\circ}$$

$$= e^{j90^\circ} \omega C V_m e^{j\phi_v}$$

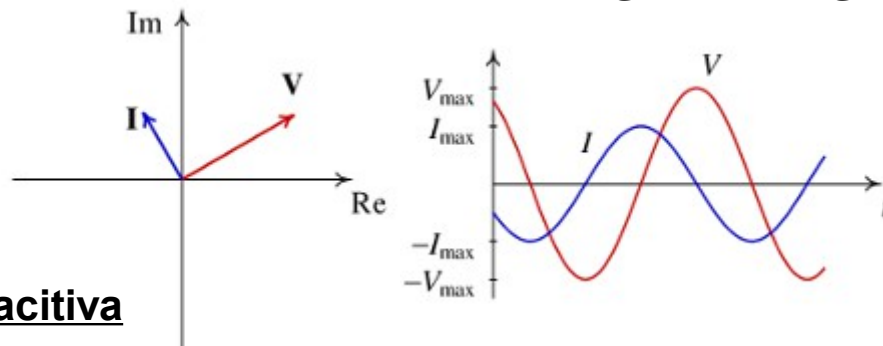
$$\vec{I} = e^{j90^\circ} \omega C \vec{V}$$

$$\vec{V} = \frac{1}{e^{j90^\circ} \omega C} \vec{I}$$

$$\vec{V} = e^{-j90^\circ} \frac{1}{\omega C} \vec{I}$$

A tensão é atrasada 90° em relação à corrente

$$\vec{V} = e^{-j90^\circ} \frac{1}{\omega C} \vec{I} = -j \frac{1}{\omega C} \vec{I}$$

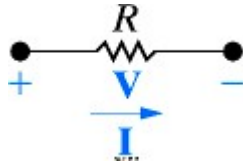


Resumo

Lei de Ohm no domínio da frequência

$$\vec{V} = Z \cdot \vec{I}$$

Resistores:



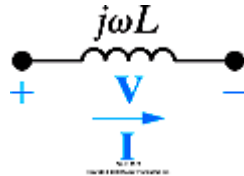
$$\vec{V} = R \cdot \vec{I}$$

Impedância: $Z_R = R \text{ } [\Omega]$

Reatância: 0

A tensão e a corrente estão em fase

Indutores:



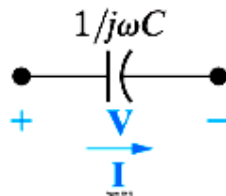
$$\vec{V} = j \omega L \vec{I} = Z_L \vec{I}$$

Impedância: $Z_L = j \omega L \text{ } [\Omega]$

Reatância: $\omega L \text{ } [\Omega]$

A tensão é *adiantada* 90° em relação à corrente

Capacitores:



$$\vec{V} = \frac{1}{j \omega C} \vec{I} = \frac{-j}{\omega C} \vec{I} = Z_C \vec{I}$$

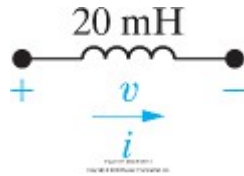
Impedância: $Z_C = \frac{1}{j \omega C} = -j \frac{1}{\omega C} \text{ } [\Omega]$

Reatância: $\frac{-1}{\omega C} \text{ } [\Omega]$

A tensão é *atrasada* 90° em relação à corrente

Exemplos

Exercício 9.3:



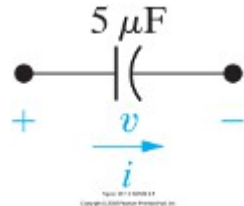
$$i(t) = 10 \cos(10.000t + 30^\circ) \text{ mA}$$

Determine: $f, Z_L, \vec{V}, v(t)$

Faça um gráfico com esboços de $i(t)$ e $v(t)$.

Exemplo 2: repita o exemplo anterior, considerando que a frequência da fonte foi alterada para $f = 5 \text{ kHz}$.

Exercício 9.4:



$$v(t) = 30 \cos(4.000t + 25^\circ) \text{ V}$$

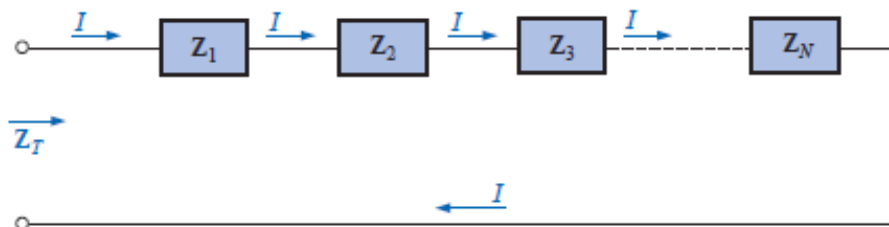
Determine: $f, Z_C, \vec{I}, i(t)$

Faça um gráfico com esboços de $i(t)$ e $v(t)$.

Exemplo 4: Repita o exemplo anterior, considerando que a frequência da fonte foi alterada para $f = 5 \text{ kHz}$.

Análise de circuitos no domínio da frequência

- Leis de Kirchhoff:**



$$-v_g(t) + v_1(t) + v_2(t) + \dots + v_N(t) = 0$$

$$-V_g \cos(\omega t + \phi_g) + V_1 \cos(\omega t + \phi_1) + \dots + V_N \cos(\omega t + \phi_N) = 0$$

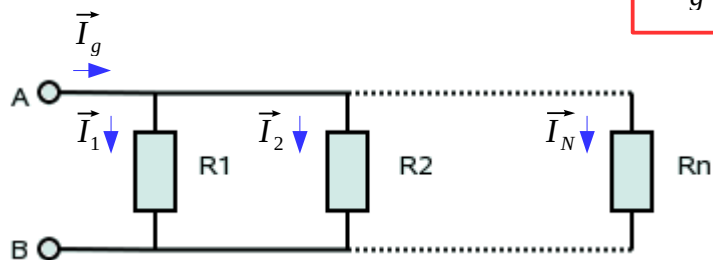
↓ **Representação fasorial**

$$-V_g e^{j\phi_g} + V_1 e^{j\phi_1} + \dots + V_N e^{j\phi_N} = 0$$

$$-\vec{V}_g + \vec{V}_1 + \dots + \vec{V}_N = 0$$

$$\vec{V}_g = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \dots + \vec{V}_N$$

→ **Lei das tensões de Kirchhoff no domínio da frequência**



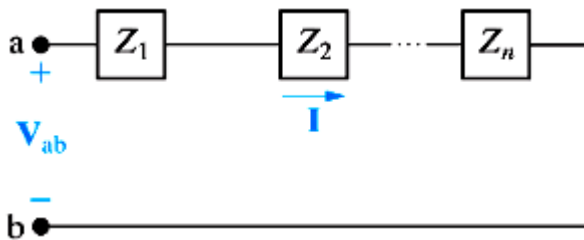
$$\vec{I}_g = \vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \dots + \vec{I}_N$$

→ **Lei das correntes de Kirchhoff no domínio da frequência**

Análise de circuitos no domínio da frequência

- Associações de impedâncias:

- Em série

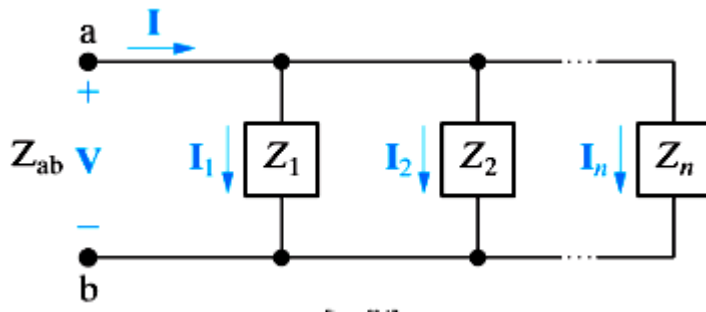


$$\begin{aligned}\vec{V}_{ab} &= \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \dots + \vec{V}_N \\ &= Z_1 \vec{I} + Z_2 \vec{I} + \dots + Z_N \vec{I} \\ &= (Z_1 + Z_2 + \dots + Z_N) \vec{I}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{V}_{ab} &= Z_{eq} \vec{I} \\ Z_{eq} &= (Z_1 + Z_2 + \dots + Z_N)\end{aligned}$$

$$Z_{eq} = \sum_{i=1}^N Z_i$$

- Em paralelo



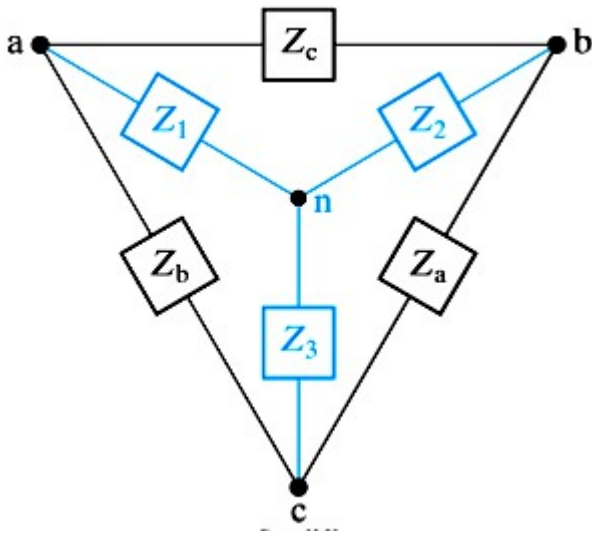
$$\begin{aligned}\vec{I} &= \vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \dots + \vec{I}_N \\ &= \frac{\vec{V}}{Z_1} + \frac{\vec{V}}{Z_2} + \dots + \frac{\vec{V}}{Z_N} \\ &= \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \dots + \frac{1}{Z_N} \right) \vec{V}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{V} &= \frac{1}{\left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \dots + \frac{1}{Z_N} \right)} \vec{I} \\ &= Z_{eq} \vec{I}\end{aligned}$$

$$Z_{eq} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{Z_i}}$$

Análise de circuitos no domínio da frequência

- Transformações estrela-triângulo:



$$Z_1 = \frac{Z_b Z_c}{Z_a + Z_b + Z_c}$$

$$Z_2 = \frac{Z_a Z_c}{Z_a + Z_b + Z_c}$$

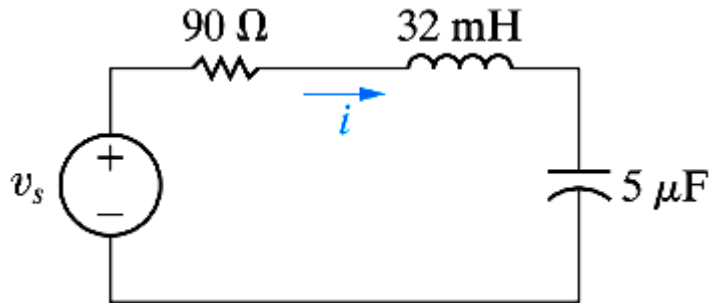
$$Z_3 = \frac{Z_a Z_b}{Z_a + Z_b + Z_c}$$

$$Z_a = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_1}$$

$$Z_b = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_2}$$

$$Z_c = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_3}$$

Exemplo 9.6

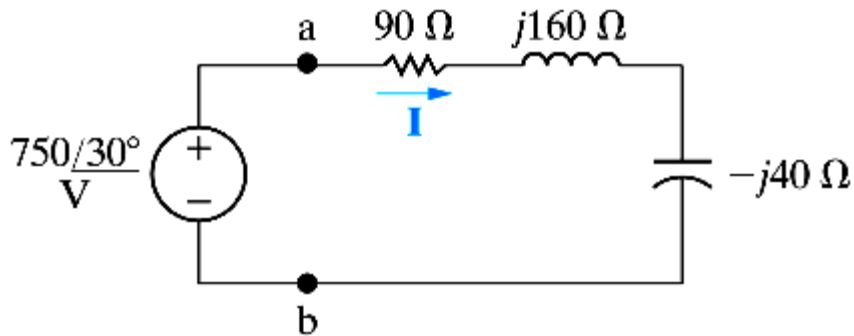


$$v_s(t) = 750 \cos(5.000t + 30^\circ) \text{ V}$$

Determine:

- Circuito equivalente no domínio da frequência.
- Impedância equivalente vista pela fonte.
- O circuito equivalente no domínio do tempo.
- Corrente total $i(t)$.
- Tensões nos elementos do circuito no domínio do tempo.

Exemplo 9.6



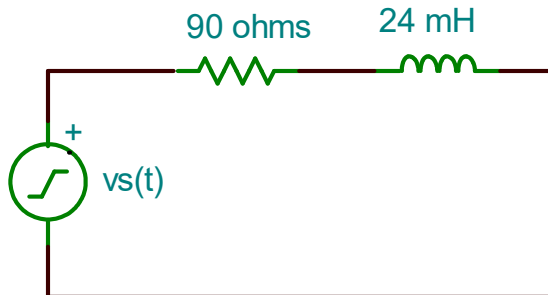
$$v_s(t) = 750 \cos(5.000t + 30^\circ) \text{ V}$$

$$\vec{V}_s = 750 e^{j30^\circ} \text{ V}$$

$$Z_{eq} = (90 + j120) \Omega = 150 e^{j53,13^\circ} \Omega$$

$$R = 90 \Omega$$

$$L = 24 \text{ mH}$$

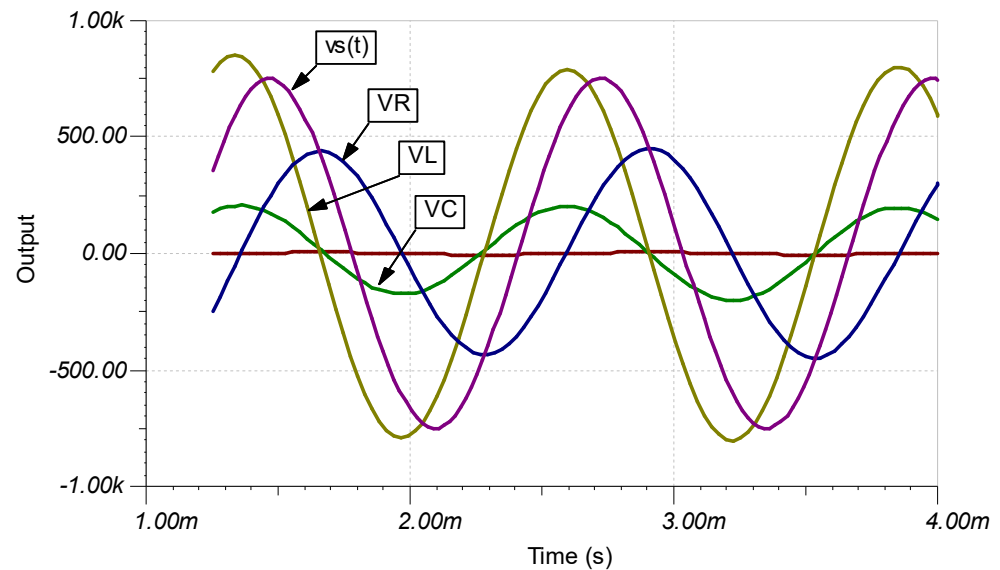


$$i(t) = 5 \cos(5.000t - 23,13^\circ) \text{ A}$$

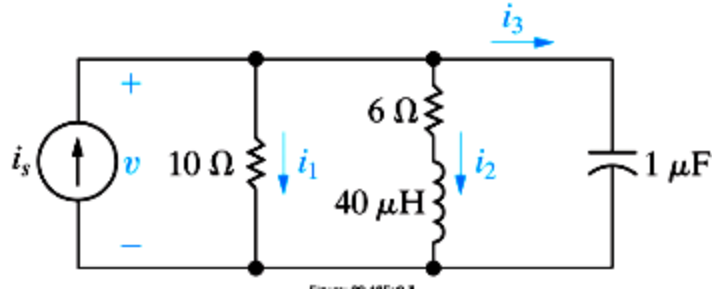
$$v_R(t) = 450 \cos(5.000t - 23,13^\circ) \text{ A}$$

$$v_L(t) = 800 \cos(5.000t + 66,87^\circ) \text{ A}$$

$$v_C(t) = 200 \cos(5.000t - 113,13^\circ) \text{ A}$$



Exemplo 9.7

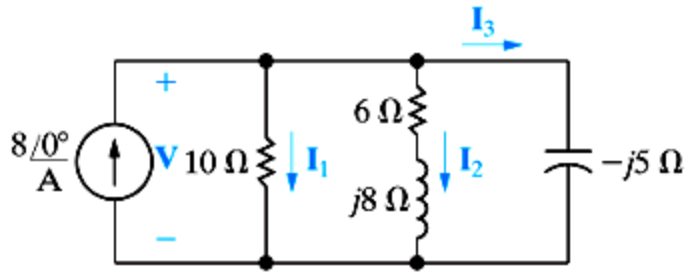


$$i_s(t) = 8 \cos(200.000 t) \text{ A}$$

Determine:

- Circuito equivalente no domínio da frequência.
- Impedância equivalente vista pela fonte.
- A tensão sobre a fonte $v(t)$.
- Correntes nos elementos do circuito no domínio do tempo.

Exemplo 9.7



$$i_s(t) = 8 \cos(200.000 t) \text{ A} \longrightarrow \vec{I}_s = 8 e^{j0}$$

$$Z_{eq} = 5 e^{-j36,87^\circ}$$

$$V_s = 40 e^{-j36,87^\circ}$$

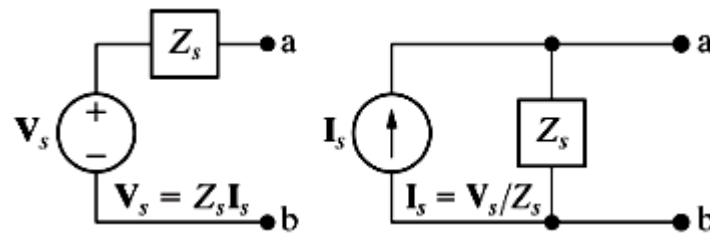
$$\vec{I}_1 = 4 e^{-j36,87^\circ} \longrightarrow i_1(t) = 4 \cos(200.000 t - 36,87^\circ) \text{ A}$$

$$\vec{I}_2 = 4 e^{-j90^\circ} \longrightarrow i_2(t) = 4 \cos(200.000 t - 90^\circ) \text{ A}$$

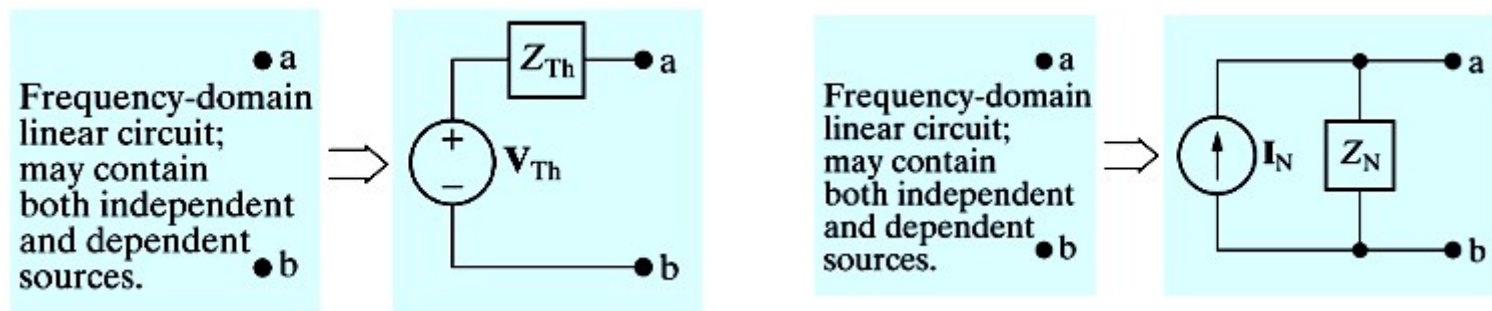
$$\vec{I}_3 = 8 e^{j53,13^\circ} \longrightarrow i_3(t) = 8 \cos(200.000 t + 53,13^\circ) \text{ A}$$

Técnicas de análise no domínio da frequência

- Transformações de fontes:

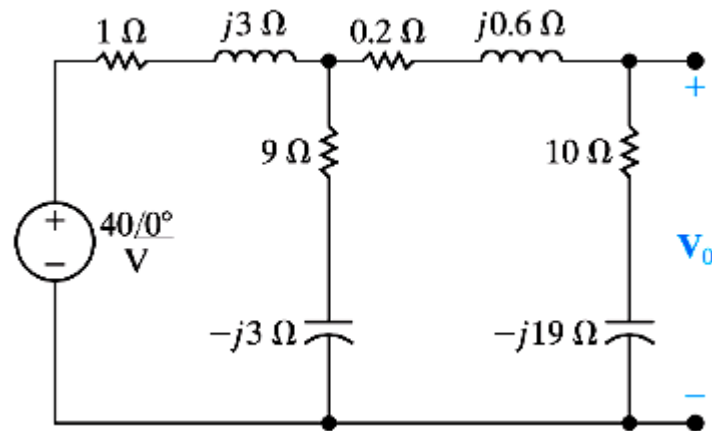


- Circuitos equivalentes de Thévenin e Norton:

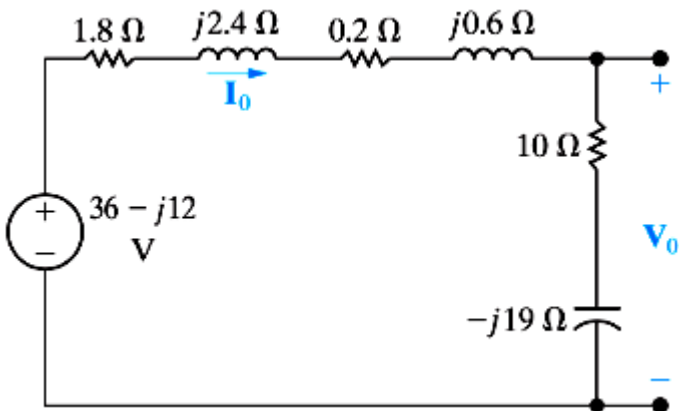
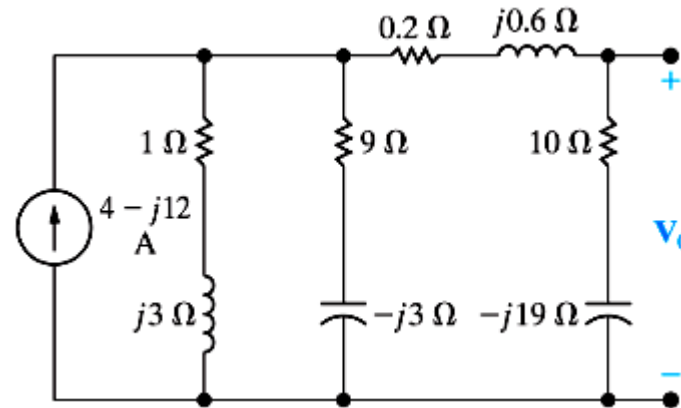
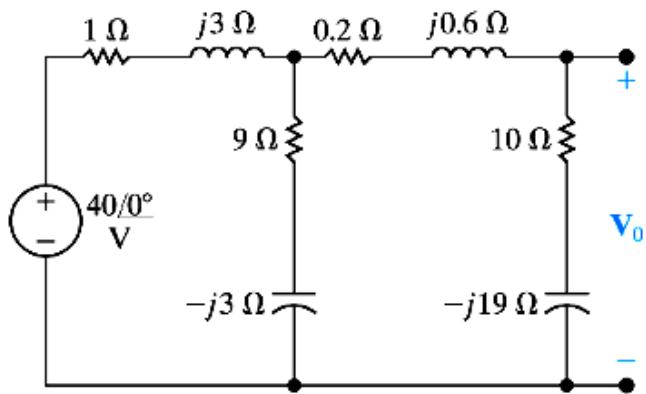


Exemplo 9.9

- Utilize a técnica de transformação de fontes para determinar \vec{V}_o



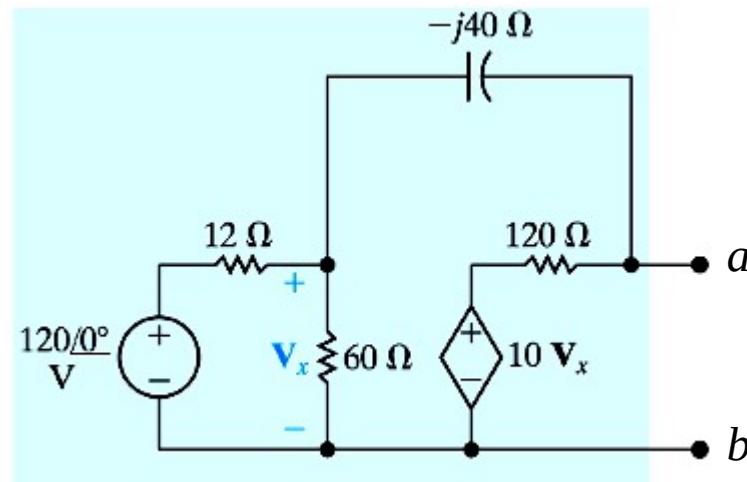
Exemplo 9.9



$$\vec{V}_o = \frac{36 - j12}{12 - j16} \cdot (10 - j19) = 36,12 - j18,84 \text{ V}$$

Exemplo 9.10

- Determine o circuito equivalente de Thévenin nos terminais a e b do circuito abaixo.



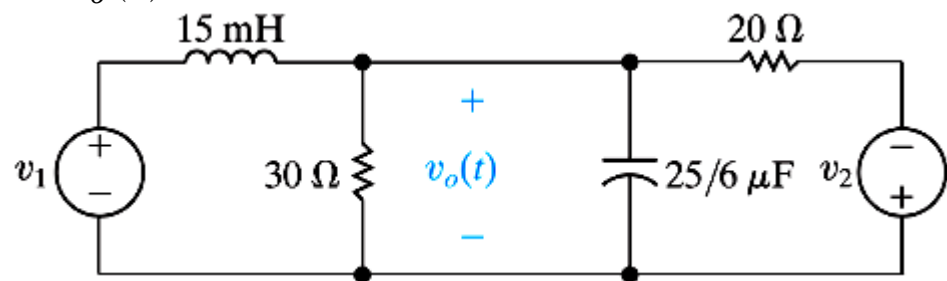
Técnicas de análise no domínio da frequência

- **Método das tensões de nós:**

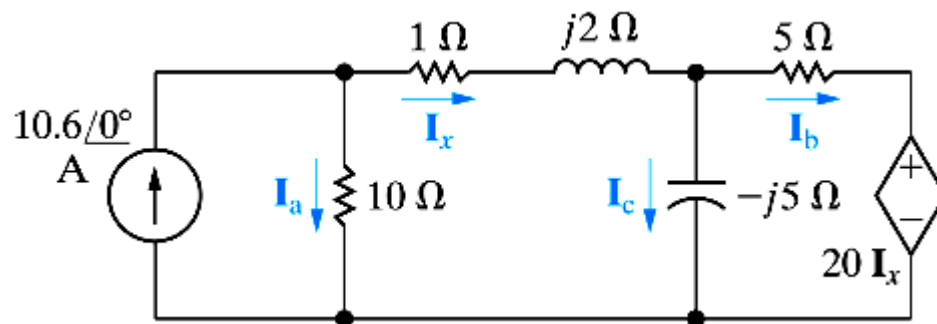
- **Exercício 9.10:** determine $v_o(t)$

$$v_1(t) = 240 \cos(4.000t + 53,13^\circ) \text{ V}$$

$$v_2(t) = 96 \sin 4.000t \text{ V}$$



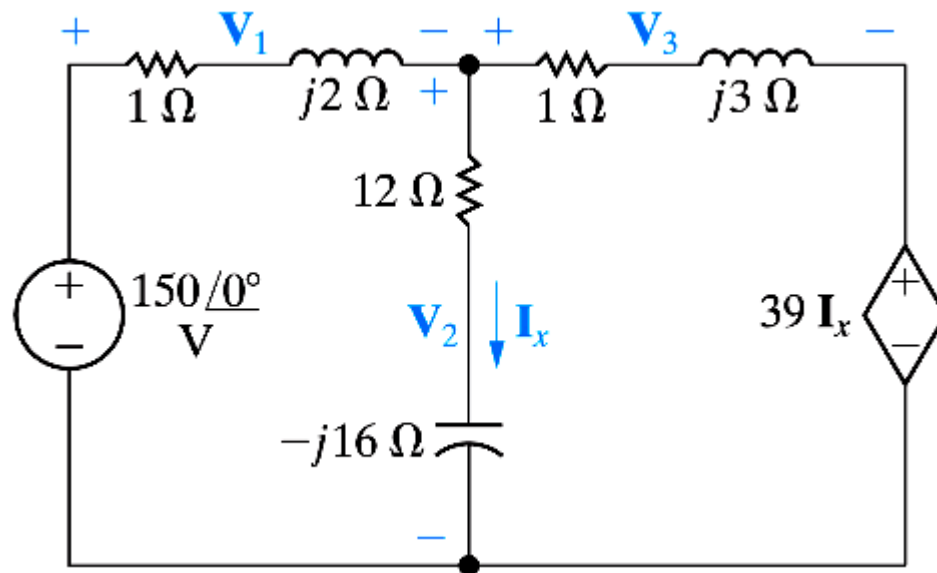
- **Exemplo 9.11:** determine \vec{I}_a, \vec{I}_b e \vec{I}_c



Técnicas de análise no domínio da frequência

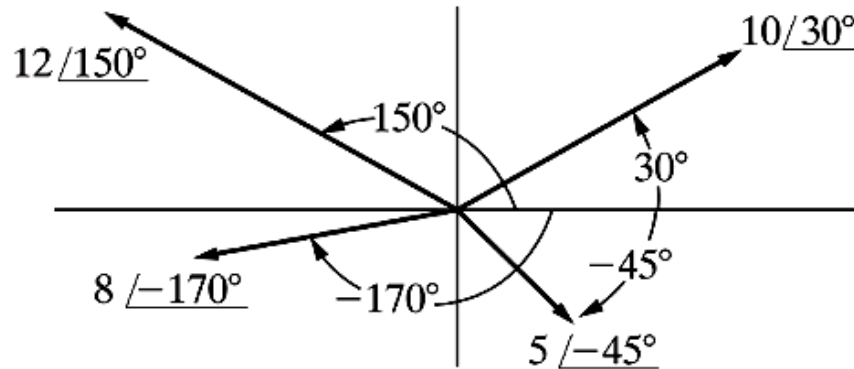
- Método das correntes de malhas:

- Exemplo 9.12: determine \vec{V}_1, \vec{V}_2 e \vec{V}_3



Diagramas fasoriais

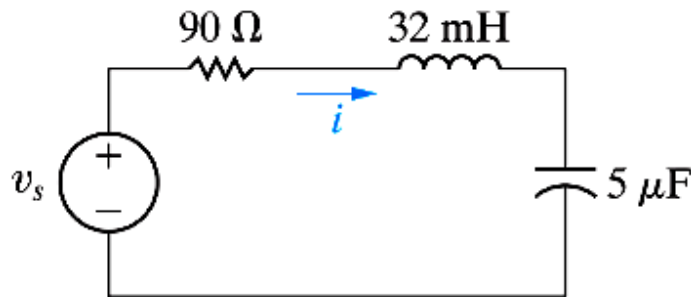
- Representam os módulos e ângulos de cada grandeza fasorial no plano complexo.



- Permitem realizar análises e conferir resultados de forma “visual” → operações com fasores.

Exemplos

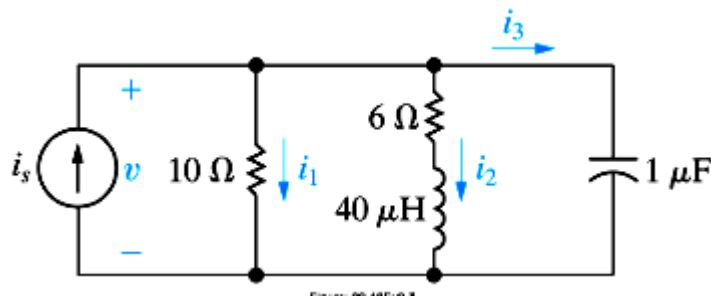
- Exemplo 9.6:** utilize um diagrama fasorial para demonstrar a lei das tensões de Kirchhoff no circuito do exemplo 9.6.



$$v_s(t) = 750 \cos(5.000t + 30^\circ) \text{ V}$$

$$\vec{V}_s = \vec{V}_R + \vec{V}_L + \vec{V}_C$$

- Exemplo 9.7:** utilize um diagrama fasorial para demonstrar a lei das correntes de Kirchhoff no circuito do exemplo 9.7.

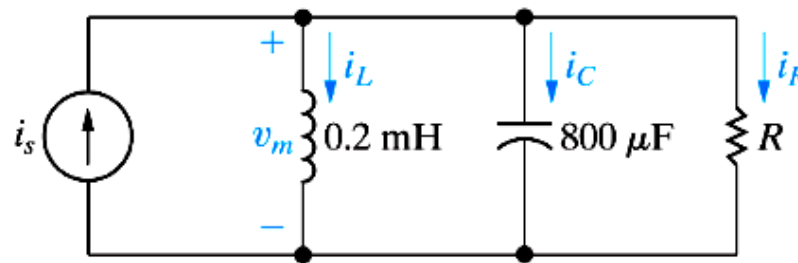


$$i_s(t) = 8 \cos(200.000t) \text{ A}$$

$$\vec{I}_s = \vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \vec{I}_3$$

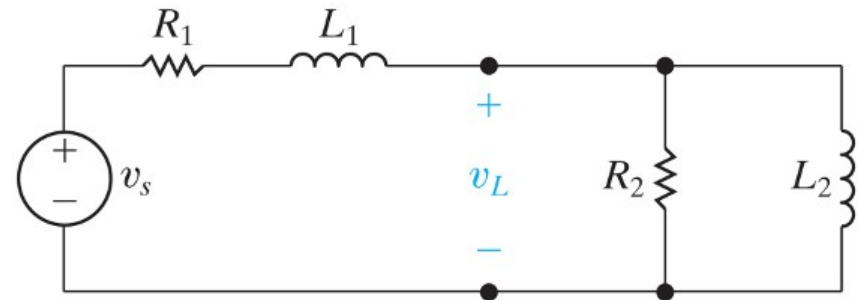
Exemplos

- Exemplo 9.15: utilize um diagrama fasorial para determinar o valor de R que faça com que $i_r(t)$ fique atrasada 45 graus em relação a $i_s(t)$ se $\omega = 5k \frac{\text{rad}}{\text{s}}$



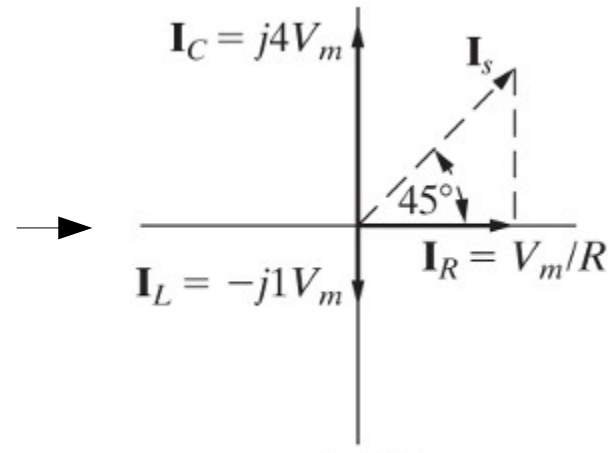
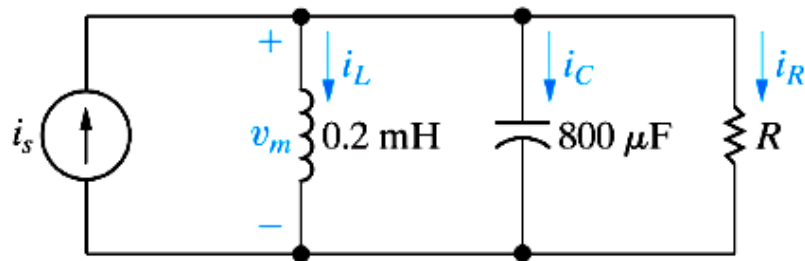
- Exemplo 9.16: considere o circuito elétrico abaixo, que modela um gerador de tensão ligado a uma carga R2L2 ligada em paralelo. R_1 e L_1 representam a impedância da linha de transmissão.

Utilize um diagrama fasorial para avaliar o efeito de se conectar um capacitor em paralelo com R2L2, considerando que a amplitude da tensão $v_L(t)$ permanecerá constante.

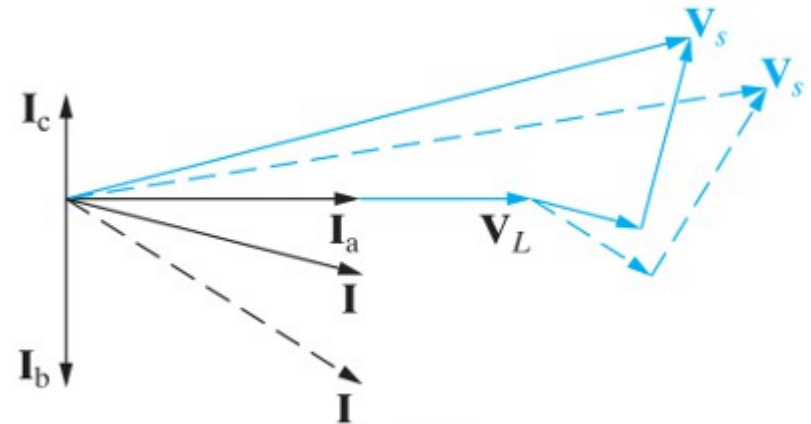
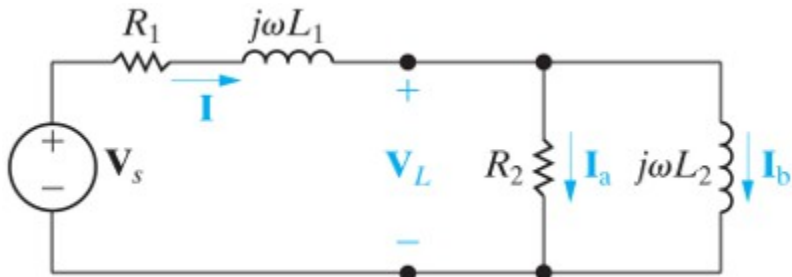


Exemplos

- Exemplo 9.15:**

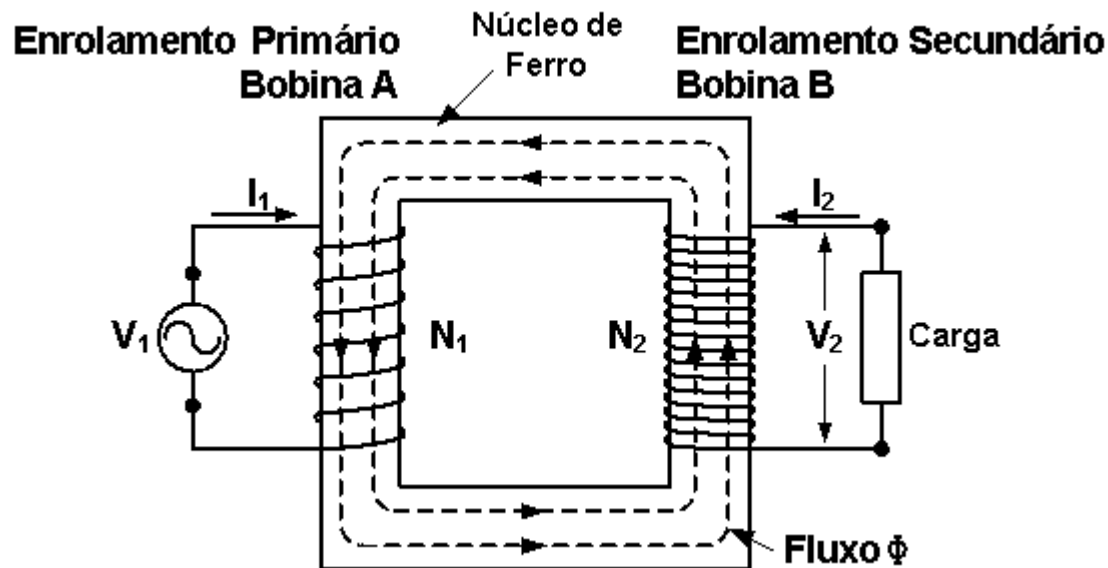


- Exemplo 9.16:**

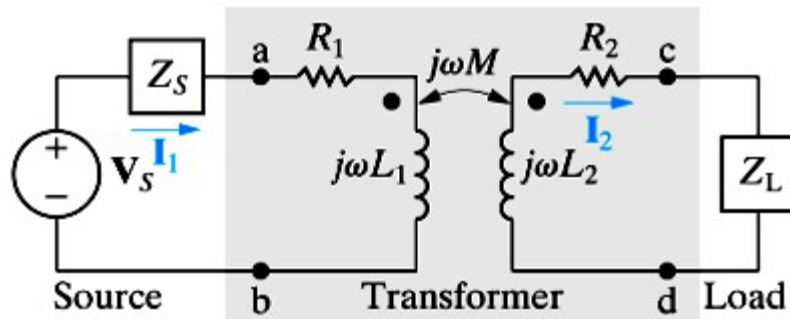


Circuitos com transformadores

- Transformadores → dois ou mais enrolamentos em um único núcleo → princípio do acoplamento magnético → indutância mútua.



Modelo em regime permanente senoidal



- $R_1 \rightarrow$ Resistência do enrolamento primário.
- $R_2 \rightarrow$ Resistência do enrolamento secundário.
- $L_1 \rightarrow$ Auto-indutância do primário.
- $L_2 \rightarrow$ Auto-indutância do secundário.
- $M \rightarrow$ Indutância mútua.

Determinando as correntes no primário e no secundário \rightarrow usando equações de malhas:

$$\begin{aligned}
 -V_s + Z_s I_1 + R_1 I_1 + j\omega L_1 I_1 - j\omega M I_2 &= 0 & \rightarrow & V_s = (Z_s + R_1 + j\omega L_1) I_1 - j\omega M I_2 \\
 j\omega L_2 I_2 + R_2 I_2 + Z_L I_2 - j\omega M I_1 &= 0 & \rightarrow & 0 = -j\omega M I_1 + (j\omega L_2 + R_2 + Z_L) I_2
 \end{aligned}$$

Fazendo:

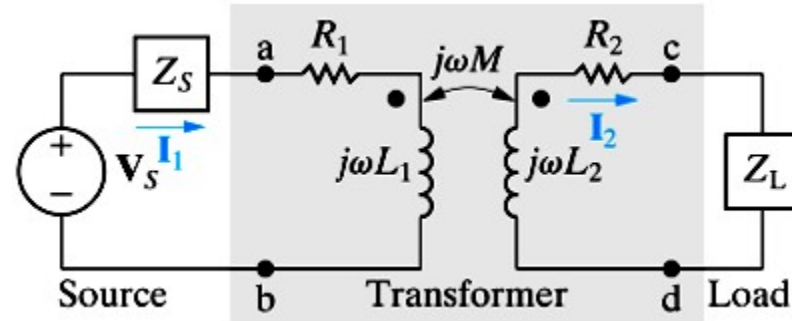
$$(Z_s + R_1 + j\omega L_1) = Z_{11} \rightarrow V_s = Z_{11} I_1 - j\omega M I_2$$

$$(j\omega L_2 + R_2 + Z_L) = Z_{22} \rightarrow 0 = -j\omega M I_1 + Z_{22} I_2$$

$$I_1 = \frac{Z_{22}}{Z_{11} Z_{22} + \omega^2 M^2} V_s$$

$$I_2 = \frac{j\omega M}{Z_{11} Z_{22} + \omega^2 M^2} V_s = \frac{j\omega M}{Z_{22}} I_1$$

Impedância de entrada



A impedância vista pela fonte de alimentação é:
$$Z = \frac{V_s}{I_1} = \frac{Z_{11}Z_{22} + \omega^2 M^2}{Z_{22}} = Z_{11} + \frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}}$$

A impedância na entrada do transformador é:

$$Z_{ab} = Z - Z_s = R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R_2 + j\omega L_2 + Z_L}$$

IMPEDÂNCIA REFLETIDA do secundário para o primário.

Portanto:

$$Z_R = \frac{\omega^2 M^2}{R_2 + j\omega L_2 + Z_L} = \frac{\omega^2 M^2}{|Z_{22}|^2} [(R_2 + R_L) - j(\omega L_2 + X_L)] \rightarrow \text{Conjugado da auto-impedância do secundário } (Z_{22}^*) \text{ multiplicado por uma escala}$$

Exemplo 9.13

$$R_1 = 200 \, \Omega, L_1 = 9 \, H$$

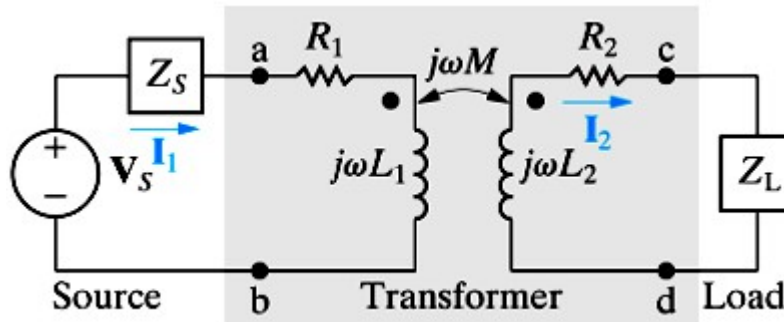
$$R_2 = 100 \, \Omega, L_2 = 4 \, H$$

$$k = 0.5, M = k \sqrt{L_1 L_2}$$

$$R_L = 800 \, \Omega, C_L = 1 \, \mu F$$

$$v_s(t) = \sqrt{2} \cdot 300 \sin(400t) \, V$$

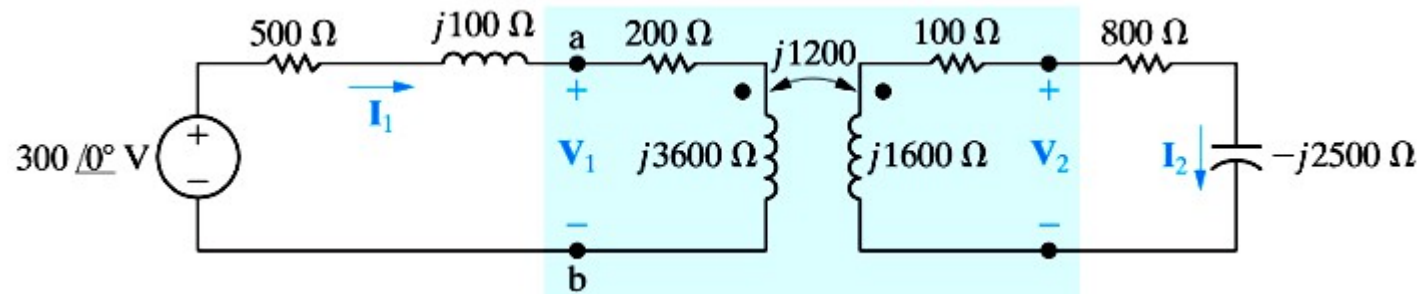
$$Z_s = (500 + j100) \, \Omega$$



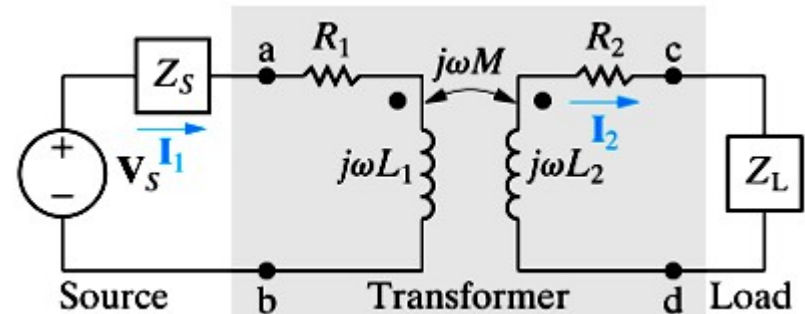
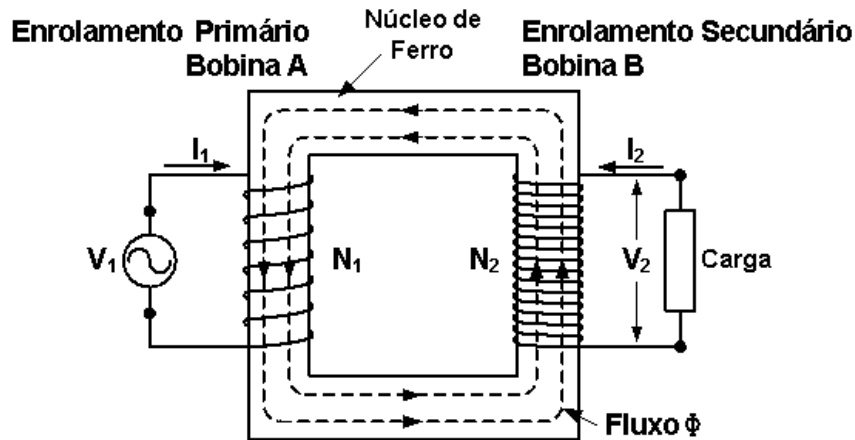
Determine:

- Circuito equivalente no domínio da frequência.
- As correntes no primário e no secundário.
- A impedância refletida para o primário.
- O circuito equivalente de Thévenin do ponto de vista da carga.

Exemplo 9.13



O transformador ideal



Transformadores ideais: $R_1 = R_2 \approx 0$
 $L_1 = L_2 \rightarrow \infty$
 $k \approx 1$

→ **Perdas desprezíveis.**
 → **Auto-indutâncias infinitas.**
 → **Coeficiente de acoplamento unitário.**

Neste caso:

$$Z_{ab} = R_1 + \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 (R_2 + R_L + j X_L) \rightarrow Z_R$$

$$\left| \frac{V_1}{N_1} \right| = \left| \frac{V_2}{N_2} \right|$$

$$I_1 N_1 = I_2 N_2$$

→ **Transformadores com núcleo ferromagnético têm comportamento muito próximo a esse.**