Análise de respostas transitórias de circuitos de 1ª ordem RL e RC

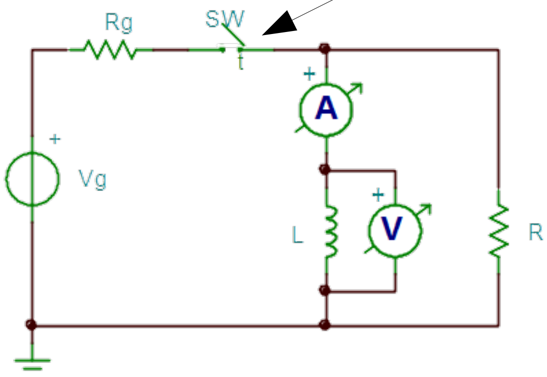
Introdução

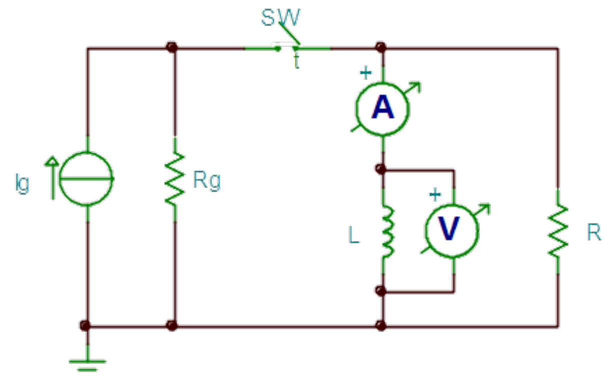
- **No capítulo anterior estudamos que:**
  - **Indutores e capacitores → sensíveis a VARIAÇÕES de correntes e tensões.**
  - **Corrente no indutor e tensão no capacitor NÃO podem variar instantaneamente.**
  - **Ambos são capazes de ARMAZENAR energia.**
- **Neste capítulo → o que acontece quando variamos abruptamente tensões e correntes?**
  - **Resposta natural → como os componentes devolvem a energia armazenada → comportamento independente das fontes.**
  - **Resposta ao degrau → como os componentes reagem ao ligar ou desligar fontes.**
- **Circuitos RL e RC → equações diferenciais de 1ª ordem.**

Resposta natural RL

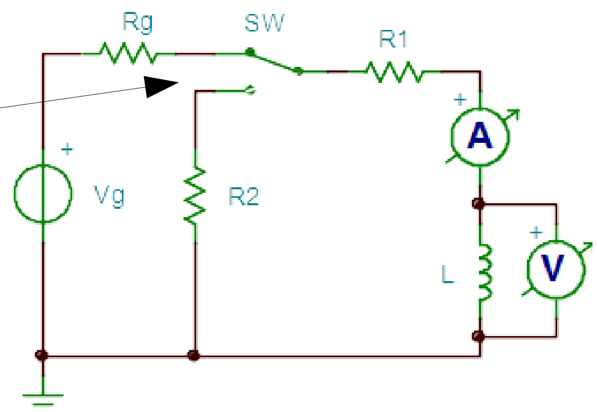
- **Exemplos:**

Aberturas de chaves em t=0s.





Troca de configuração em t=0s.

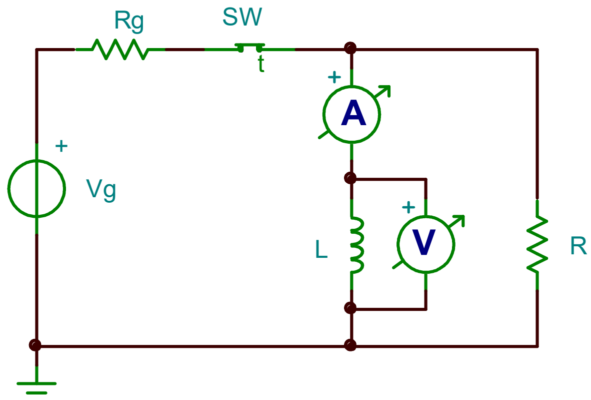


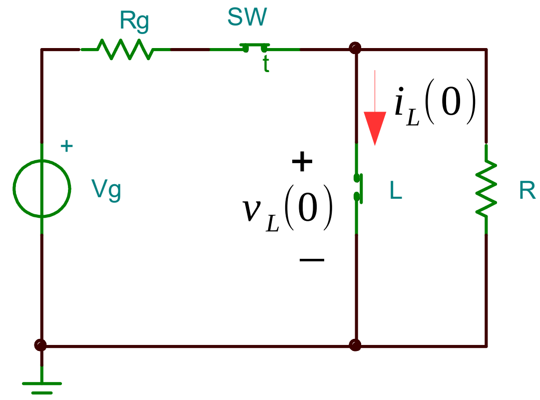
<u>IMPORTANTE</u>!

Notar que em todas estas configurações há um "esforço" para evitar a interrupção abrupta da corrente.

Resposta natural RL

- **Considerando que a chave esteve fechada por um longo tempo → circuito em *regime permanente*.**

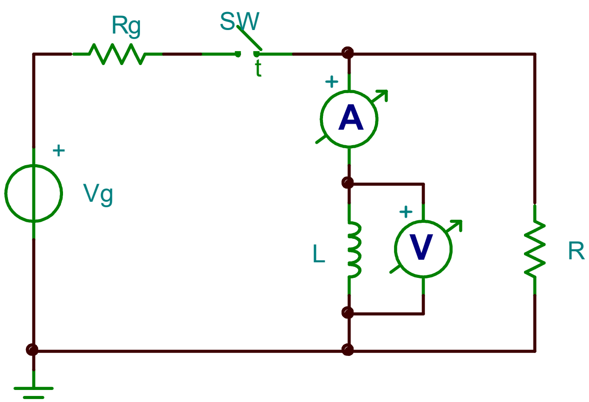


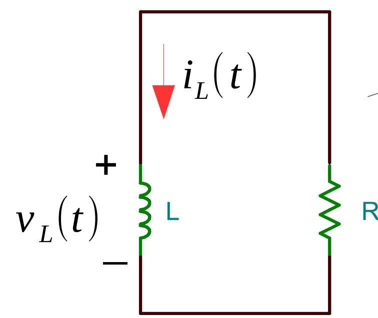


$$i_L(0^-) = \frac{V_g}{R_g}$$

$$v_L(0^-) = 0$$

- **Em *t* = 0 a chave é aberta:**

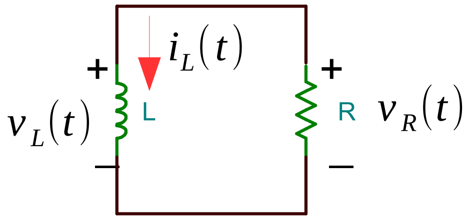




O comportamento não depende mais da fonte!

RESPOSTA NATURAL DO CIRCUITO RL.

Resposta natural RL



$$v_L(t)=v_R(t) \longrightarrow L\frac{d}{dt}i_L(t)=-R\,i_L(t) \longrightarrow L\frac{d}{dt}i_L(t)+R\,i_L(t)=0$$

$$\frac{d}{dt}i_L(t)+\frac{R}{L}i_L(t)=0 \longrightarrow$$

EDO de 1ª ordem homogênea com coeficientes constantes → circuito de 1ª ordem!

Resolvendo a EDO:

$$\frac{d}{dt}i_L+\frac{R}{L}i_L=0 \longrightarrow \frac{d}{dt}i_L=-\frac{R}{L}i_L \longrightarrow \frac{di_L}{i_L}=-\frac{R}{L}dt \longrightarrow \int_{i_L(t_0)}^{i_L(t)}\frac{dx}{x}=-\frac{R}{L}\int_{t_0}^{t}dy \longrightarrow$$

$$(\ln x)_{i_L(t_0)}^{i_L(t)}=-\frac{R}{L}(y)_{t_0}^{t} \longrightarrow \ln[i_L(t)]-\ln[i_L(t_0)]=-\frac{R}{L}(t-t_0) \longrightarrow \ln\left[\frac{i_L(t)}{i_L(t_0)}\right]=-\frac{R}{L}(t-t_0) \longrightarrow$$

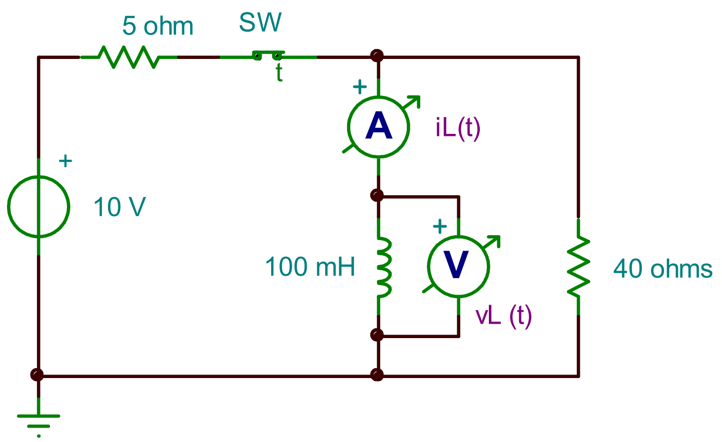
$$\frac{i_L(t)}{i_L(t_0)}=\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}(t-t_0)} \longrightarrow \boxed{i_L(t)=i_L(t_0)\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}(t-t_0)}}$$

$$v_L(t)=L\frac{d}{dt}i_L(t)=\cancel{L}\left[-\frac{R}{\cancel{L}}i_L(t_0)\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}(t-t_0)}\right] \longrightarrow \boxed{v_L(t)=-R\,i_L(t_0)\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}(t-t_0)}}$$

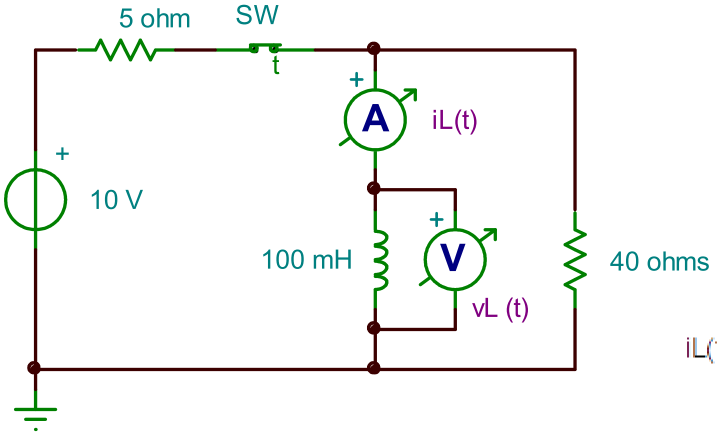
Se t_0 = 0:

$$\boxed{\begin{aligned} i_L(t)&=i_L(0)\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} \\ v_L(t)&=-R\,i_L(0)\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\end{aligned}}$$

Exemplo

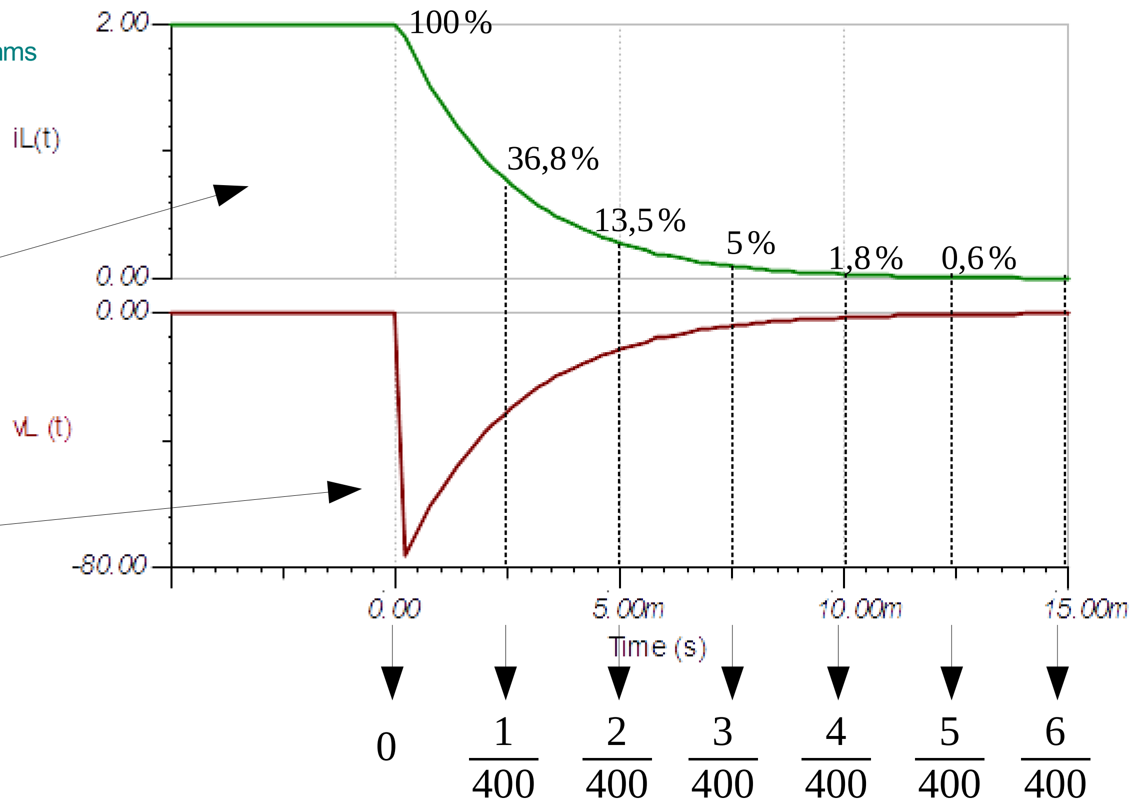


Exemplo



$$i_L(t) = 2\,e^{-400t}$$

$$v_L(t) = -80\,e^{-400t}$$



Notar que não há descontinuidade na corrente.

Notar variação abrupta na tensão para garantir a corrente inicial.

A constante de tempo

- **Colocando em uma forma padrão:**

$$i_L(t) = i_L(0)\,e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$v_L(t) = -R\,i_L(0)\,e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$f(t) = f(0)\,e^{-t/\tau}$$

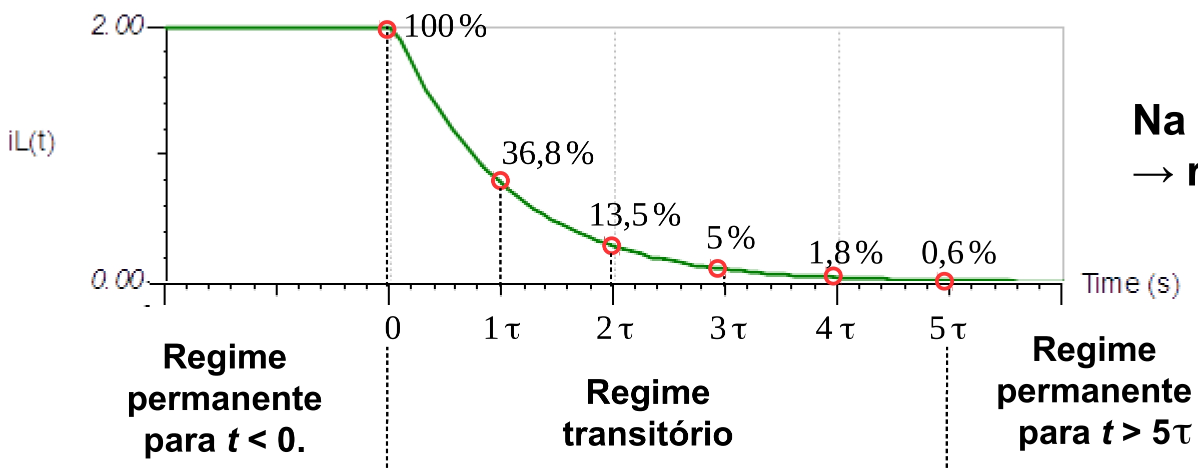
Onde:

$$\boxed{\tau = \frac{L}{R}\ (s)}$$

Constante de tempo do circuito → determina a taxa de decaimento da resposta:

τ grande → circuito "lento".

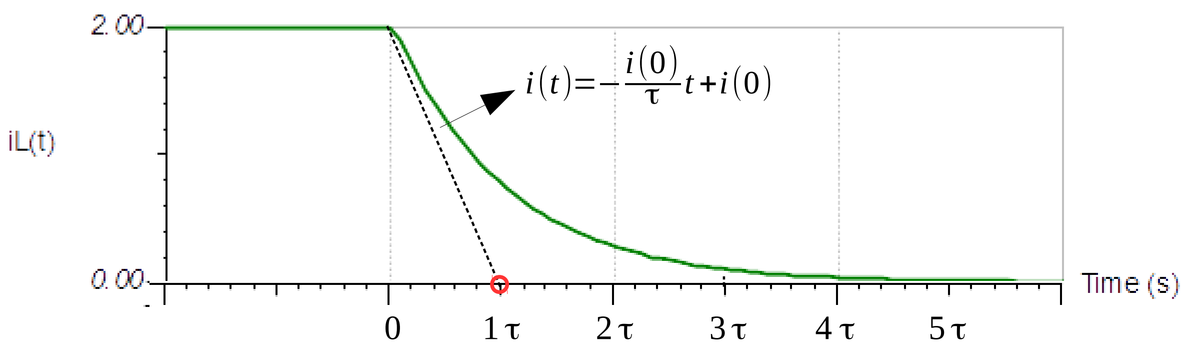
τ pequeno → circuito "rápido".



Na maioria dos casos práticos → regime permanente após $\boxed{5\ \tau}$

A constante de tempo e a inclinação em *t* = 0

- **A constante de tempo pode ser determinada pela inclinação da curva em *t* = 0.**



$$i(t) = i(0)\,e^{-t/\tau}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{d}{dt}i(t) = i(0)\left(-\frac{1}{\tau}\right)e^{-t/\tau}$$

Em *t* = 0: $\frac{d}{dt}i(0) = i(0)\left(-\frac{1}{\tau}\right)e^{0} \longrightarrow \frac{d}{dt}i(0) = -\frac{i(0)}{\tau}$

Se a inclinação fosse constante: $\longrightarrow$ **Equação da reta!** $\longrightarrow$ $i(t) = -\frac{i(0)}{\tau}t + i(0)$

Em *t* = τ

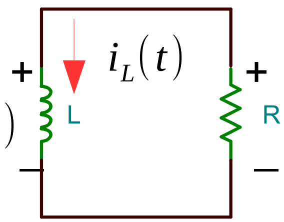
$$i(\tau) = -\frac{i(0)}{\cancel{\tau}}\cancel{\tau} + i(0)$$

$$= -i(0) + i(0)$$

$$= 0$$

Potência e energia

- **Potência dissipada no resistor:**



$$v_L(t) \qquad i_L(t) \qquad v_R(t)$$

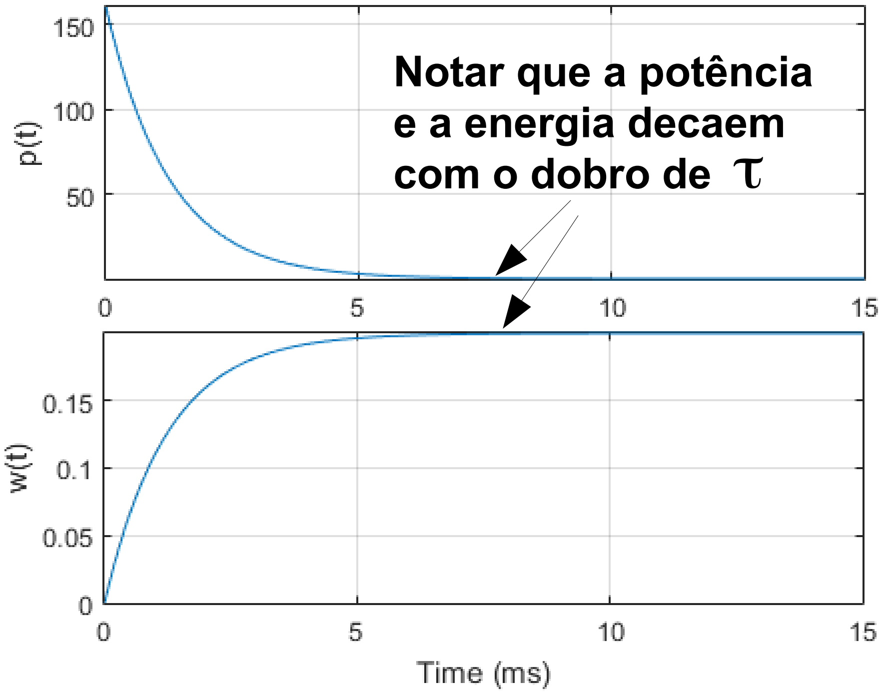
$$p_R(t)=v_R(t)\,i_R(t)=v_L(t)[-i_L(t)]=\left[-R\,i_L(0)\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\right]\left[-i_L(0)\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\right]$$

$$p_R(t)=R\,i_L^2(0)\,\mathrm{e}^{-2\frac{R}{L}t}$$

- **Energia devolvida pelo indutor ao resistor:**

$$w=\int_0^t p(t)\,dt=\int_0^t R\,i_L^2(0)\,\mathrm{e}^{-2\frac{R}{L}t}\,dt$$

$$w=\frac{1}{2}L\,i_L^2(0)\left[1-\mathrm{e}^{-2\frac{R}{L}t}\right]$$



Exemplo 7.1

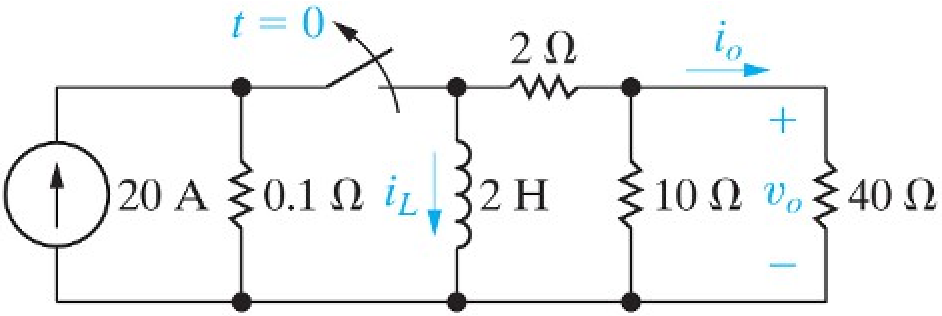


Figure: 07-07Ex7.1

Determine: $i_L(t),\ i_o(t),\ v_o(t)$

Em quanto tempo a energia armazenada no indutor é totalmente transferida para os resistores.

A porcentagem da energia transferida para o resistor de 10 Ω.

$$i_L(t) = 20\,e^{-5t}$$

$$i_o(t) = -4\,e^{-5t}$$

$$v_o(t) = -160\,e^{-5t}$$

$$\tau = \frac{1}{5} = 0.2\,s$$

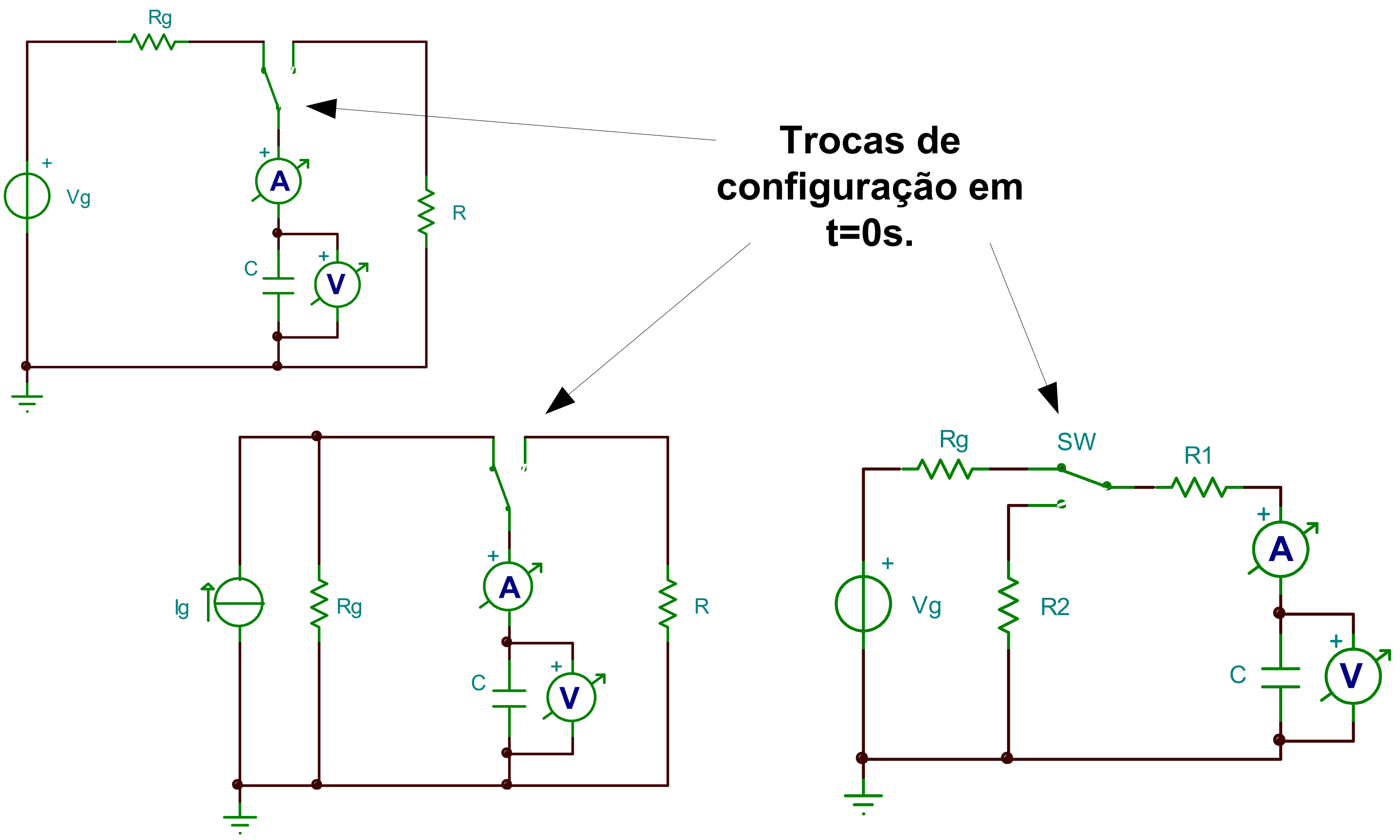
$$5\tau = 1\,s$$

$$2.5\,\tau = 0.5\,s$$

$$w_{10} = 246\,J = 64\,\%$$

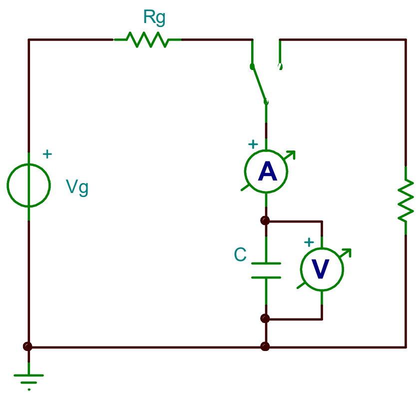
Resposta natural RC

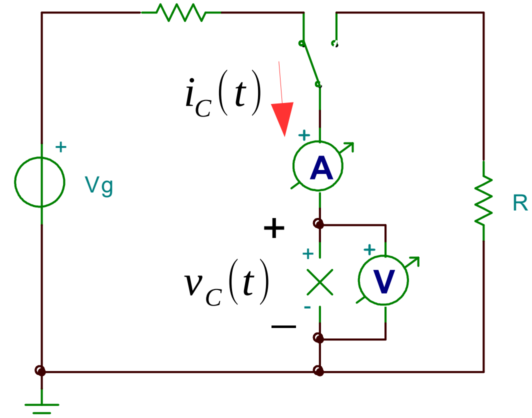
- **Exemplos:**



Resposta natural RC

- **Considerando que a chave esteve na posição 1 por um longo tempo → *regime permanente*.**

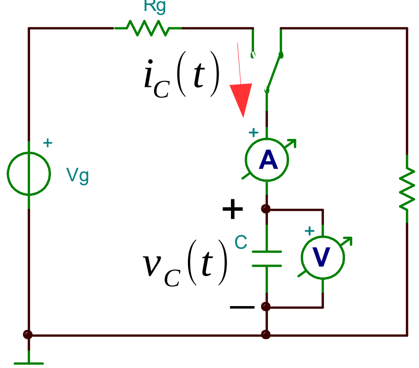


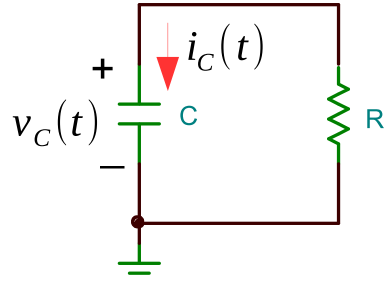


$$v_C(0^-) = V_g$$

$$i_C(0^-) = 0$$

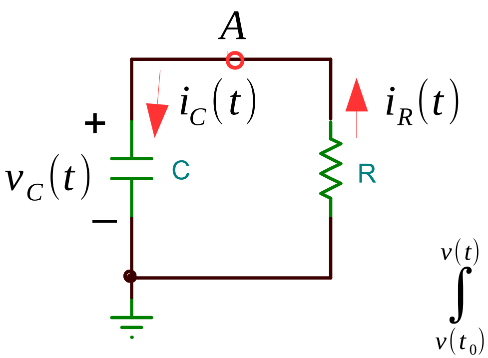
- **Em *t* = 0 muda para a posição 2:**





RESPOSTA NATURAL DO CIRCUITO RC.

Resposta natural RC



No nó A:

$$i_C - i_R = 0 \longrightarrow i_C = i_R \longrightarrow C\frac{d}{dt}v = -\frac{v}{R} \longrightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{1}{RC}dt$$

$$\int_{v(t_0)}^{v(t)} \frac{dx}{x}dt = -\frac{1}{RC}\int_{t_0}^{t} dy \longrightarrow \ln(x)\Big|_{v(t_0)}^{v(t)} = -\frac{1}{RC}(y)\Big|_{t_0}^{t} \longrightarrow \ln\frac{v(t)}{v(t_0)} = -\frac{1}{RC}(t-t_0)$$

$$\boxed{v_C(t) = v_C(t_0)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)}}$$

Se t_0 = 0:

$$i_C(t) = C\frac{d}{dt}v_C(t) = \cancel{C}\left[-\frac{1}{R\cancel{C}}v_C(t_0)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)}\right]$$

$$\boxed{i_C(t) = -\frac{v_C(t_0)}{R}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} v_C(t) &= v_C(0)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t} \\ i_C(t) &= -\frac{v_C(0)}{R}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t} \end{aligned}}$$

Constante de tempo, potência e energia

$$v_C(t)=v_C(0)\,e^{-\frac{1}{RC}t}$$

$$i_C(t)=-\frac{v_C(0)}{R}\,e^{-\frac{1}{RC}t}$$

$$f(t)=f(t_0)\,e^{-\frac{t}{\tau}} \longrightarrow \boxed{\tau=RC\,(s)}$$

$$p_R(t)=v_R(t)\,i_R(t)=\frac{v_C^2(0)}{R}\,e^{-\frac{2}{RC}t}\,W$$

$$w=\int_0^t p(t)\,dt=\frac{1}{2}C\,v_C^2(0)\left(1-e^{-\frac{2}{RC}t}\right)J$$

Exemplo 7.3

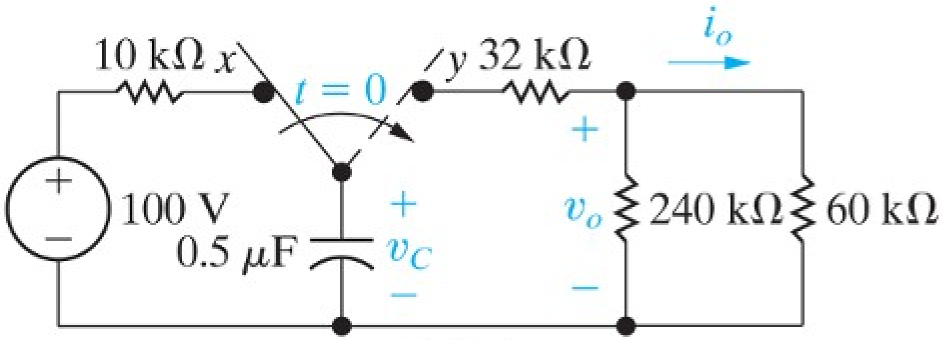


Figure: 07-13Ex7.3

Determine:
vc(t), ic(t).
τ
vo(t), io(t).
Esboço de vc(t) e ic(t).

Exemplo 7.3

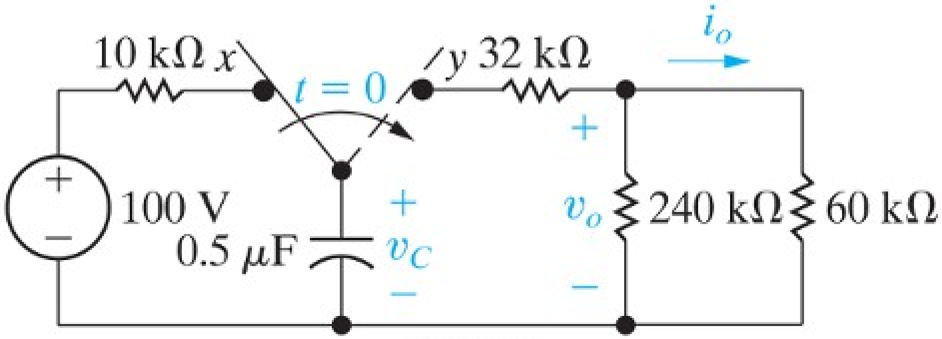


Figure: 07-13Ex7.3

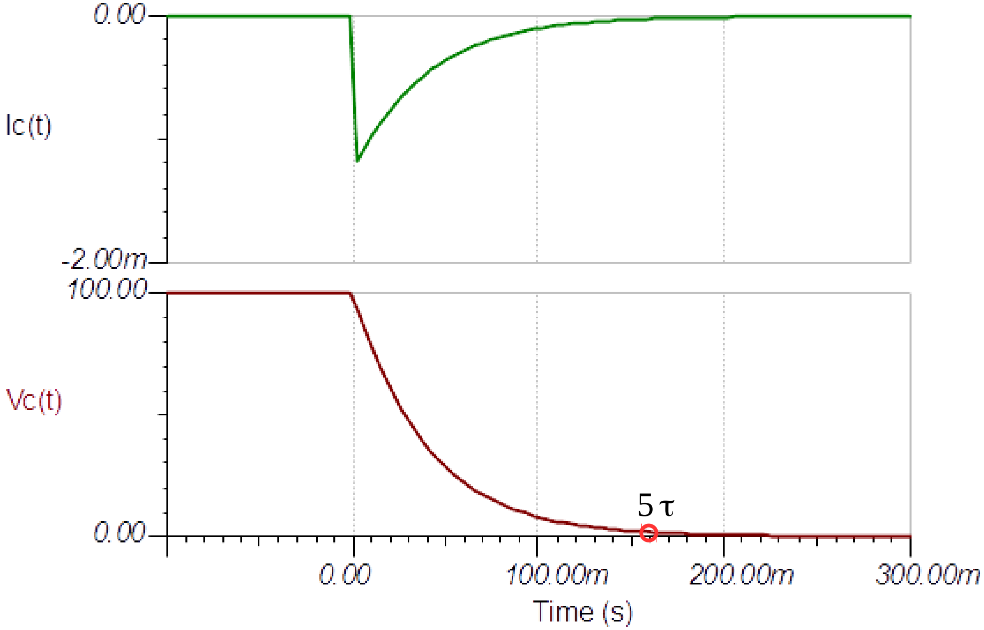
$$v_C(t)=100\,e^{-25t}\,V$$

$$i_C(t)=-1{,}25\,e^{-25t}\,mA$$

$$\tau=0{,}5\,\mu\cdot 80\,k=40\,ms$$

$$v_o(t)=60\,e^{-25t}\,V$$

$$i_o(t)=1\,e^{-25t}\,mA$$



Respostas ao degrau

- **Resposta ao degrau → aplicação repentina de fontes de tensão ou corrente CC:**
  - **Descreve como a energia é armazenada nos elementos.**
- **Circuito RL alimentado por uma fonte CC.**

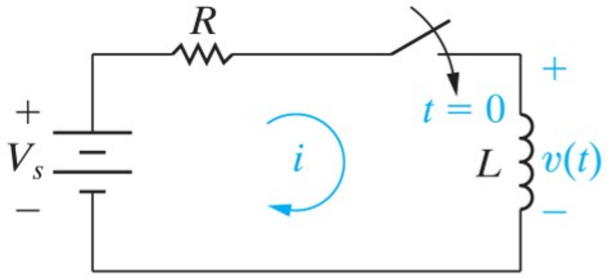


Figure: 07-16

$$V_s = R\,i(t) + L\frac{d}{dt}i(t) \longrightarrow \frac{d}{dt}i(t) = \frac{1}{L}\left[V_s - R\,i(t)\right] \longrightarrow$$

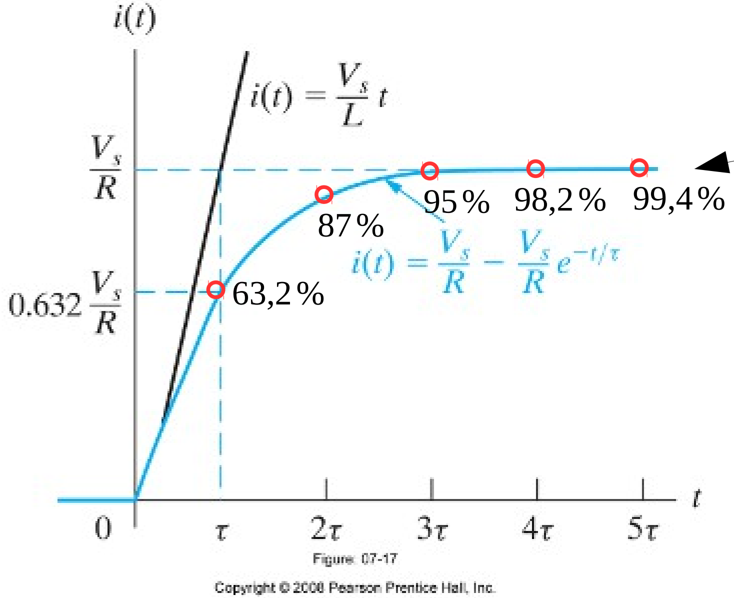
$$\frac{d}{dt}i(t) = -\frac{R}{L}\left[i(t) - \frac{V_s}{R}\right] \longrightarrow \frac{di(t)}{i(t) - V_s/R} = -\frac{R}{L}dt \longrightarrow$$

$$\int_{i(t_0)}^{i(t)} \frac{dx}{x - V_s/R} = -\frac{R}{L}\int_{t_0}^{t} dy \longrightarrow \ln\left(x - V_s/R\right)\Big|_{i(t_0)}^{i(t)} = -\frac{R}{L}t \longrightarrow \boxed{i(t) = \frac{V_s}{R} + \left[i(t_0) - \frac{V_s}{R}\right]e^{-\frac{R}{L}t}}$$

Se a energia inicial for nula $\longrightarrow \boxed{i(t) = \frac{V_s}{R} - \frac{V_s}{R}e^{-\frac{R}{L}t}}$

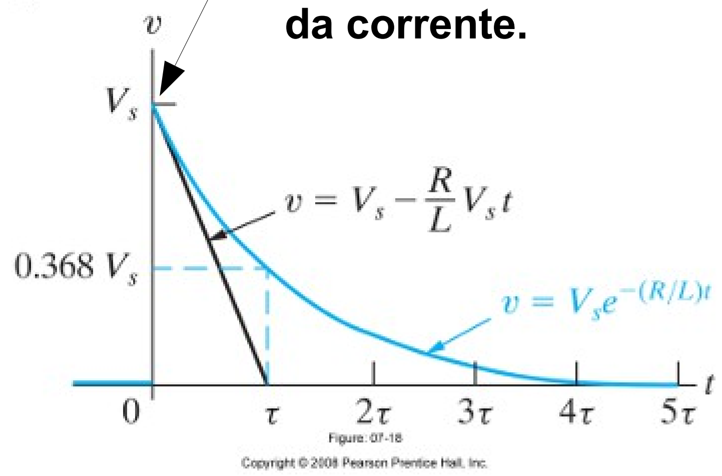
Resposta ao degrau do circuito RL

$$i(t) = \frac{V_s}{R} - \frac{V_s}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$$



Notar o crescimento gradativo da corrente.

Notar avariação abrupta na tensão para garantir o crescimento gradativo da corrente.



$$v(t) = L\frac{d}{dt}i(t) \longrightarrow \boxed{v(t) = [V_s - R\,i(t_0)]\,e^{-\frac{R}{L}t}}$$

Se a energia inicial for nula $\longrightarrow \boxed{v(t) = V_s e^{-\frac{R}{L}t}}$

Exemplo

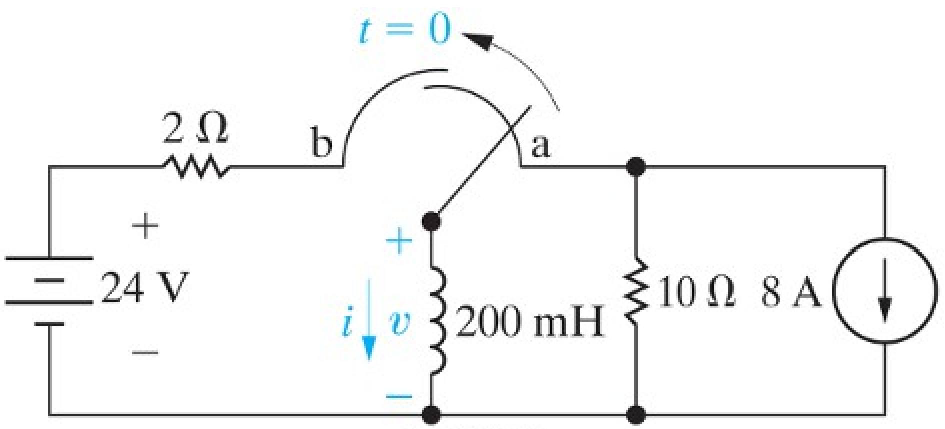


Figure: 07-19Ex7.5

Determine:
iL(t), vL(t)
τ
Esboço de iL(t) e vL(t)

Exemplo

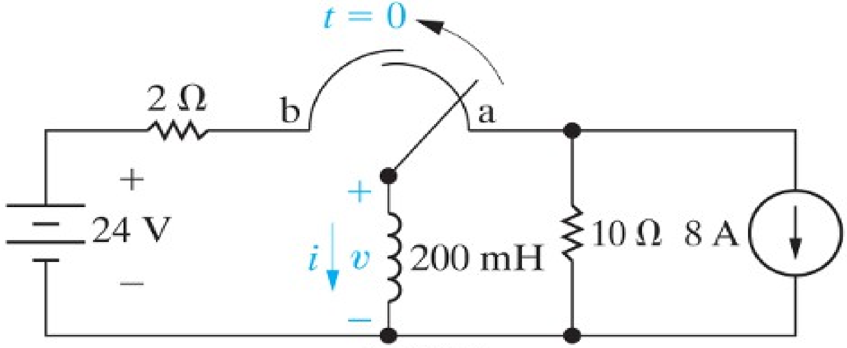
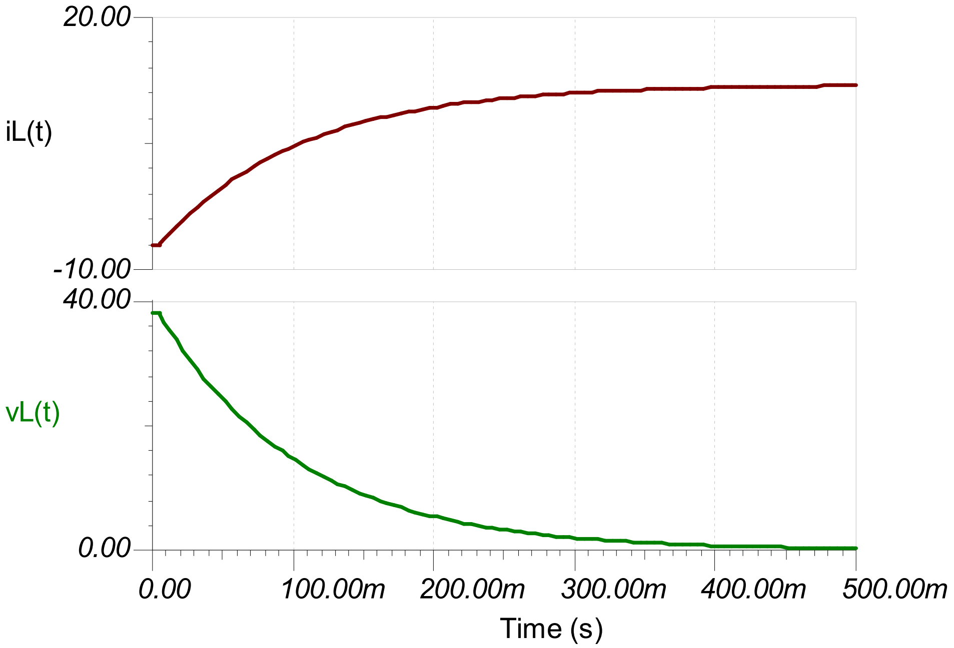


Figure: 07-19Ex7.5

$$\tau = \frac{L}{R} = 100\,ms$$

$$i(t) = 12 - 20\,e^{-10t}\,A$$

$$v(t) = 40\,e^{-10t}\,V$$



Resposta ao degrau do circuito RC

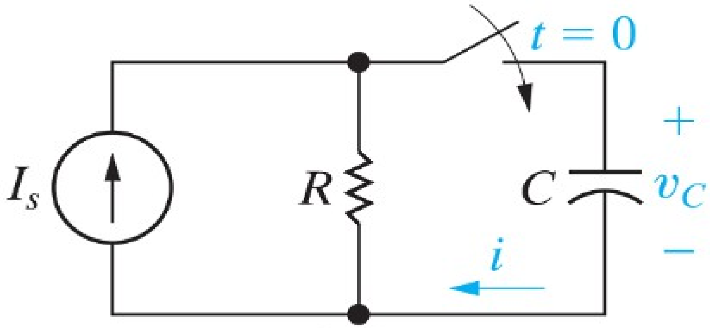


Figure: 07-21

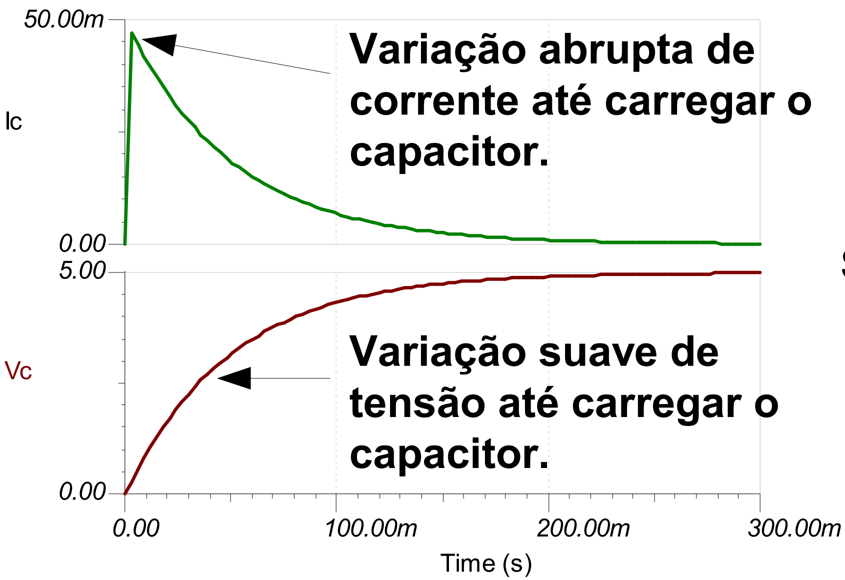
$$I_s = i_R + i_C = \frac{v_C}{R} + C\frac{d}{dt}v_C \longrightarrow \frac{d}{dt}v_C + \frac{1}{RC}v_C = \frac{I_s}{C}$$

Resolvendo:

$$\boxed{v_C(t) = RI_s + [v_C(t_0) - R\,I_s]\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}}$$

$$i_C(t) = C\frac{d}{dt}v_C(t) \longrightarrow \boxed{i_C(t) = \left[I_s - \frac{v_C(t_0)}{R}\right]\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}}$$

$$\boxed{\tau = RC}$$



Se a energia inicial for nula:

$$\boxed{v_C(t) = RI_s - R\,I_s\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}}$$

$$\boxed{i_C(t) = I_s\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}}$$

Exemplo

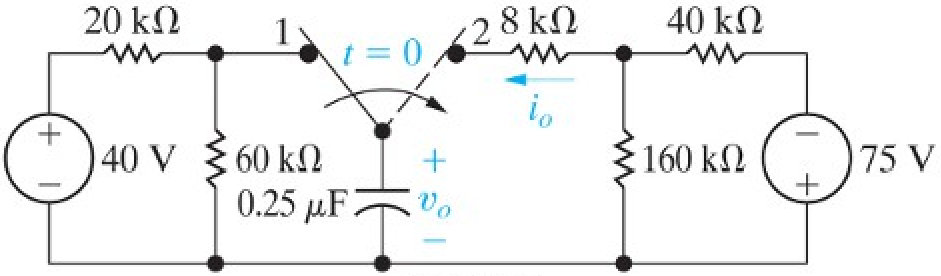


Figure: 07-22Ex7.6

Determine:
ic(t), vc(t)
τ
Esboço de ic(t) e vc(t)

Exemplo

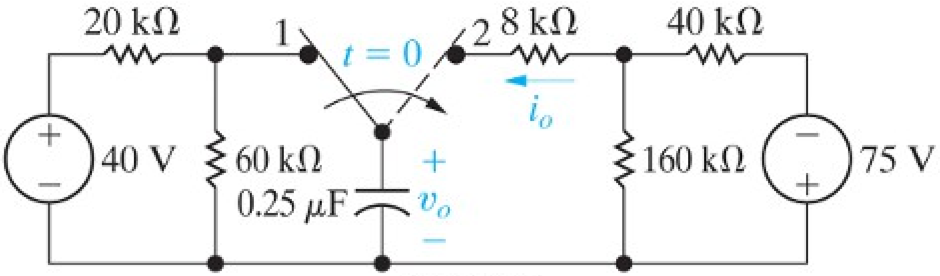
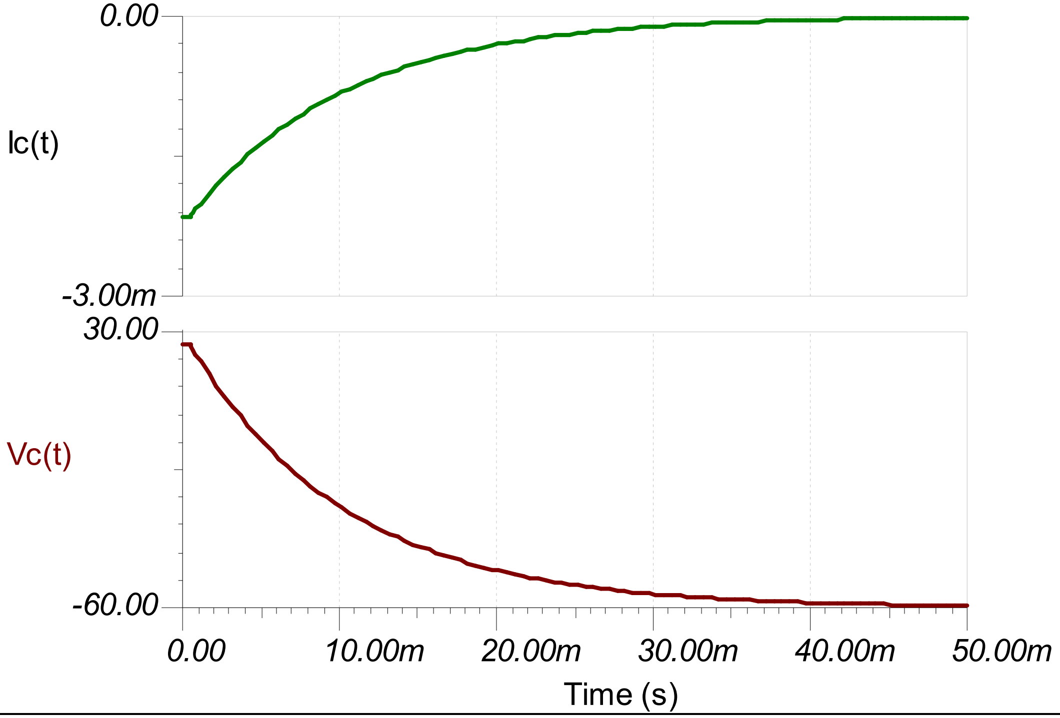


Figure: 07-22Ex7.6

$\tau = 0{,}01\ s$

$v_C(t) = -60 + 90\,e^{-100t}\ V$

$i_C(t) = -2{,}25\,e^{-100t}\ mA$



Solução geral para transitórios em circuitos de 1ª ordem

$$\boxed{x(t) = x_f + \left[x(t_0) - x_f\right] e^{-\frac{(t - t_0)}{\tau}}}$$

Instante inicial

Tensão ou corrente no elemento

Valor final

Valor inicial

Constante de tempo

Exemplo

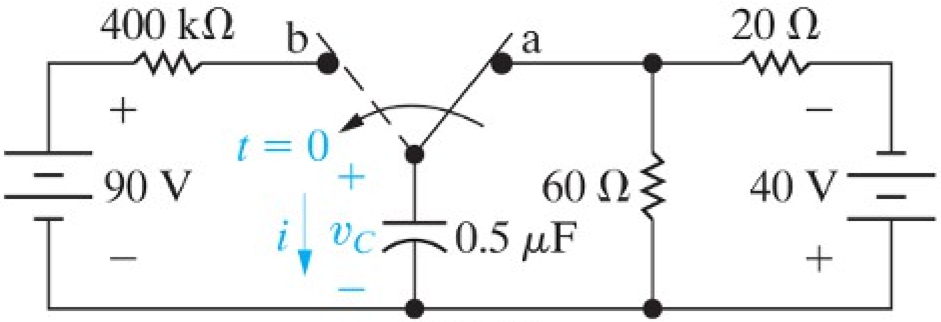


Figure: 07-25Ex7.7

$$x(t)=x_f+[x(t_0)-x_f]e^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}}$$

$$v_C(t)=v_{Cf}+[v_C(t_0)-v_{Cf}]e^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}}$$

$$i_C(t)=i_{Cf}+[i_C(t_0)-i_{Cf}]e^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}}$$

$$v_C(t_0)=-30\,V$$

$$v_{Cf}=90\,V$$

$$\tau=0{,}5\,\mu F\cdot 400\,k\Omega=200\,ms$$

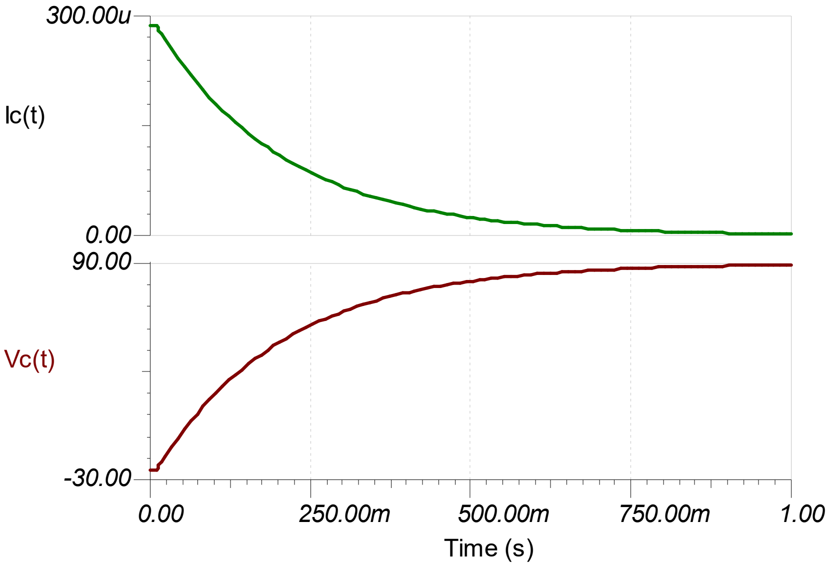
$$v_C(t)=90+[-30-90]e^{-\frac{t}{0{,}2}} \longrightarrow v_C(t)=90-120\,e^{-5t}\,V$$

$$i_C(t_0^+)=300\,\mu A$$

$$i_{Cf}=0\,A$$

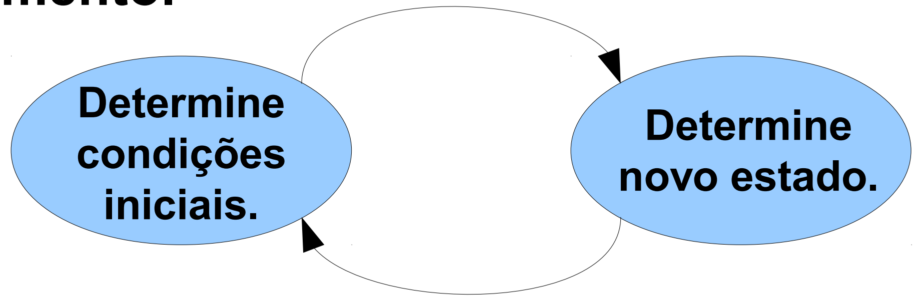
$$\tau=200\,ms$$

$$i_C(t)=0+[300\mu-0]e^{-\frac{t}{0{,}2}} \longrightarrow i_C(t)=300\,e^{-5t}\,\mu A$$



Chaveamento sequencial

- Chaveamentos sequenciais ocorrem quando:
  - há mudanças na mesma chave (ex.: liga-desliga-liga...).
  - Há mudanças sequenciais em duas ou mais chaves.
- O instante $t = 0$ não é mais genérico → tem que ser atualizado a cada chaveamento.



- Lembretes:
  - Correntes nos indutores e tensões nos capacitores → não podem variar instantaneamente.
  - Calcule primeiro correntes nos indutores e tensões nos capacitores.
  - Útil → atualizar o diagrama a cada chaveamento.

Exemplo

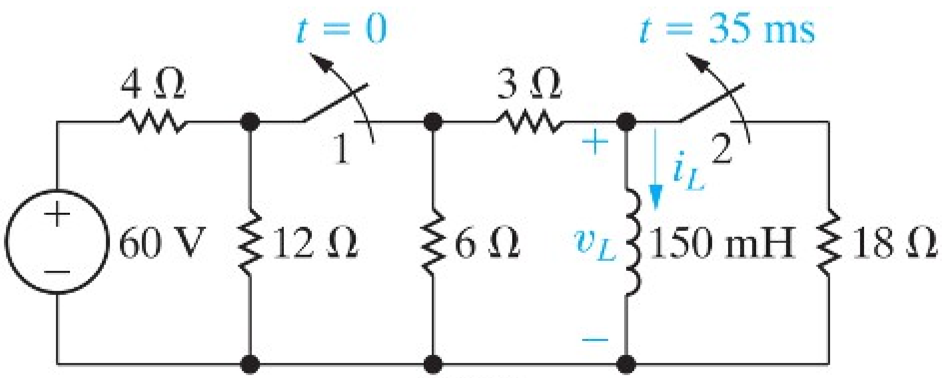
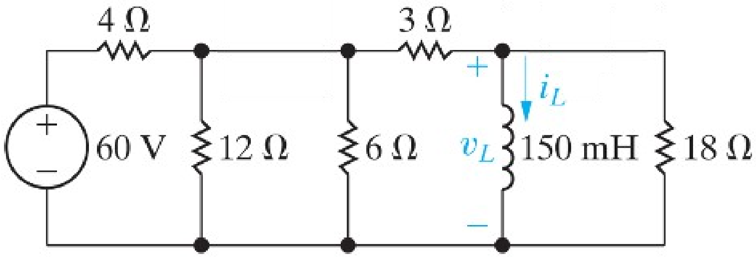


Figure: 07-31

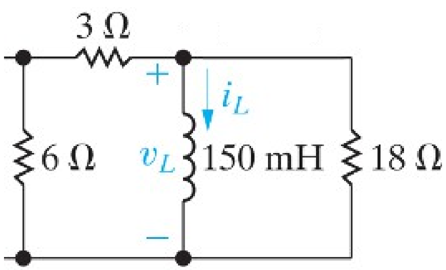
Exemplo

Para t < 0 s:



$$i_L(0^-) = 6\,A$$

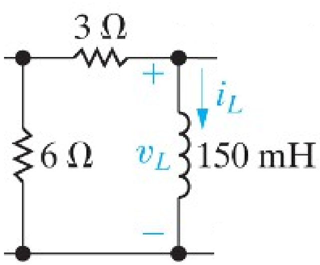
Para 0 < t < 35ms:



$$i_L(t) = 6\,e^{-40t}\,A$$

$$v_L(t) = -36\,e^{-40t}\,V$$

Para t > 35ms:



Corrente no indutor não pode variar instantaneamente:

$$i_L(35\,ms) = 6\,e^{-40\cdot 35\,m} = 1{,}48\,A$$

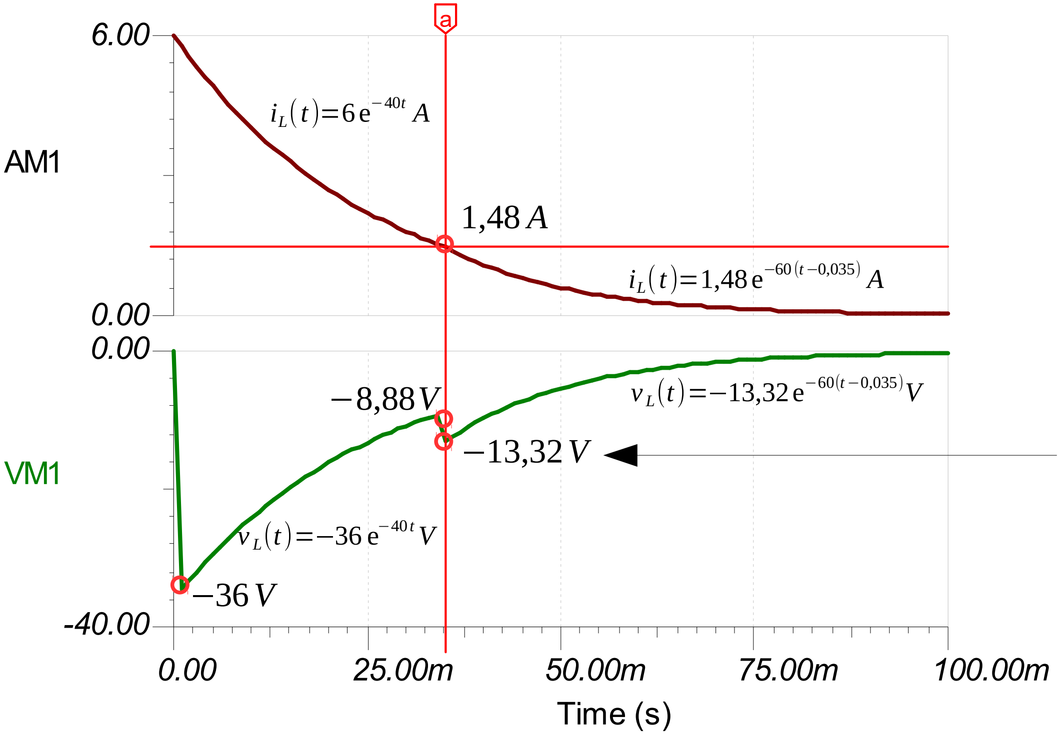
$$\downarrow$$

$$i_L(t) = 1{,}48\,e^{-60(t-0{,}035)}\,A$$

A tensão final será função da corrente:

$$v_L(t) = -1{,}48\,e^{-60(t-0{,}035)} \cdot 9\,\Omega = -13{,}32\,e^{-60(t-0{,}035)}\,V$$

Exemplo



Notar a variação instantânea da tensão para manter a corrente constante.

Exemplo

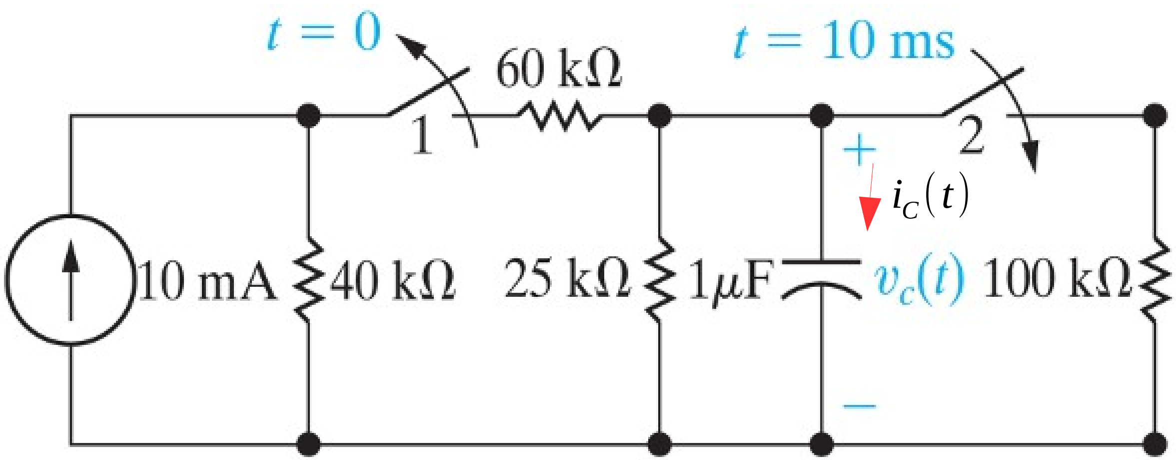
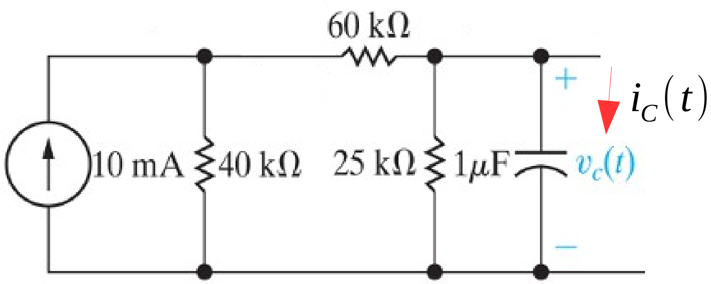


Figure: 07-36-01AO3-7.7

Exemplo

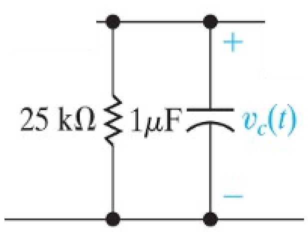
Para t < 0 s:



$$i_C(0^-)=0$$

$$v_C(0^-)=80\,V$$

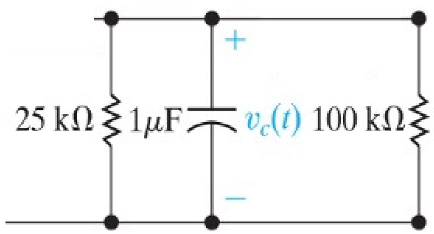
Para 0 < t < 10 ms:



$$v_C(t)=80\,e^{-\frac{1}{25k\,1\mu}t}=80\,e^{-40t}\,V$$

$$i_C(t)=-\frac{80}{25\,k}e^{-40t}=-3{,}2\,e^{-40t}\,mA$$

Para t > 10 ms:



Tensão no capacitor não pode variar instantaneamente

$$v_C(10\,ms)=80\,e^{-40\cdot 10\,m}=53{,}63\,V$$

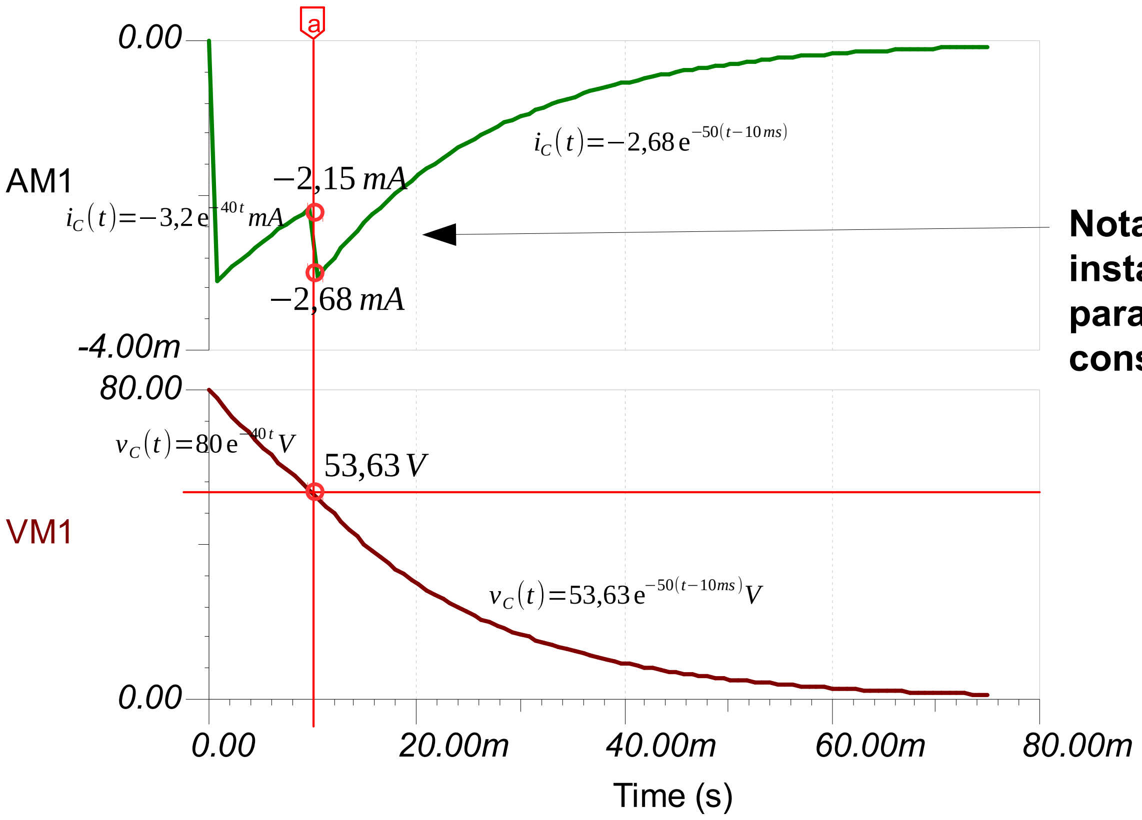
$$v_C(t)=53{,}63\,e^{-\frac{1}{(25\,k\|100\,k)\cdot 1\,\mu}(t-10\,ms)}=$$

$$=53{,}63\,e^{-50(t-10\,ms)}\,V$$

A corrente será função da tensão:

$$i_C(t)=-\frac{53{,}63}{25\,k\|100\,k}e^{-50(t-10\,ms)}=-2{,}68\,e^{-50(t-10\,ms)}$$

Exemplo



Notar a variação instantânea da corrente para manter a tensão constante.

Exemplo

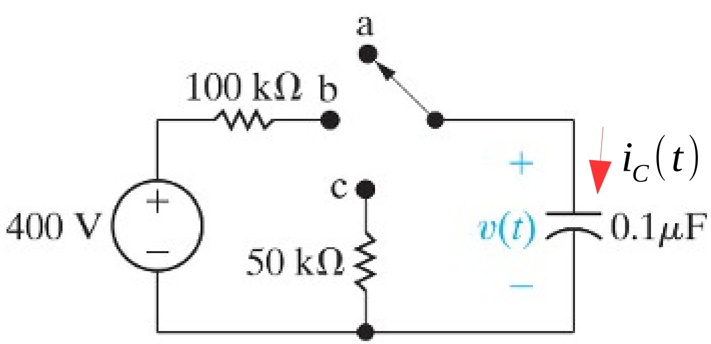


Figure: 07-35Ex7.12

a → b em *t* = 0.

b → c em *t* = 15 ms

Exemplo

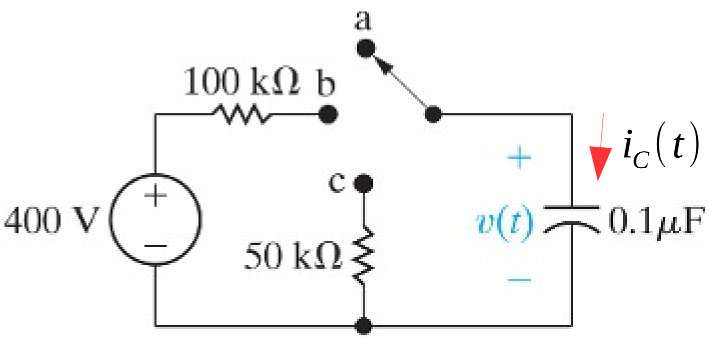


Figure: 07-35Ex7.12

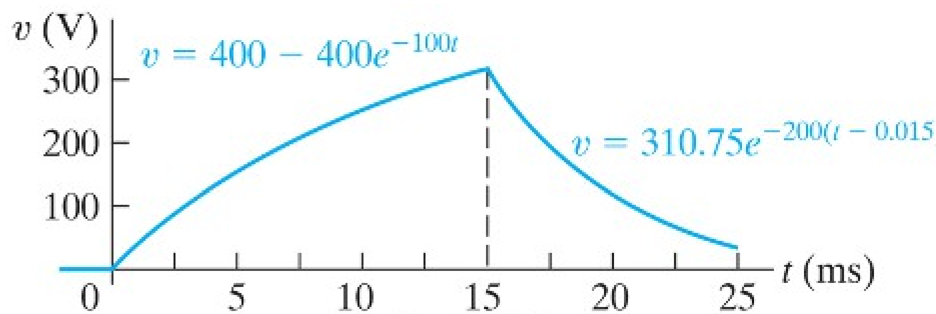
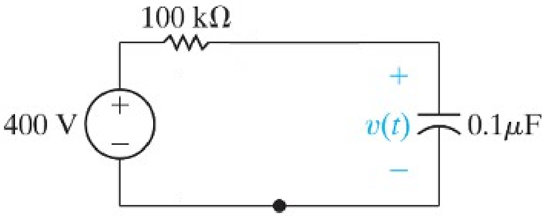


Figure: 07-36Ex7.12

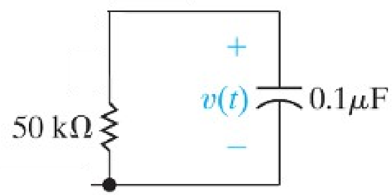
Para 0 < t < 15ms:



$$v_C(t) = 400 - 400\,e^{-100t}\,V$$

$$i_C(t) = 4\,e^{-100\,t}\,mA$$

Para t > 15ms:



Tensão no capacitor não pode variar instantaneamente

$$v_C(400\,ms) = 400 - 400\,e^{-100\cdot 15\,ms}\,V =$$
$$= 310{,}75\,V$$

$$v_C(t) = 310{,}75\,e^{-\frac{1}{50\,k\cdot 0.1\,\mu}(t-15\,ms)} = 310{,}75\,e^{-200(t-0{,}015)}\,V$$

Corrente será função da tensão:

$$i_C(t) = -\frac{310{,}75}{50\,k}\,e^{-200(t-0{,}015)}\,mA = -6{,}215\,e^{-200(t-0{,}015)}\,mA$$

Resposta crescente (instabilidade)

- **Resposta instáveis podem ocorrer em circuitos com fontes dependentes (modelos de transistores, amplificadores, etc.).**
- **Resistência de Thévenin *negativa***
  - **Constante de tempo negativa!.**
  - **Em circuitos reais → destruição do componente ou saturação.**

Exemplo

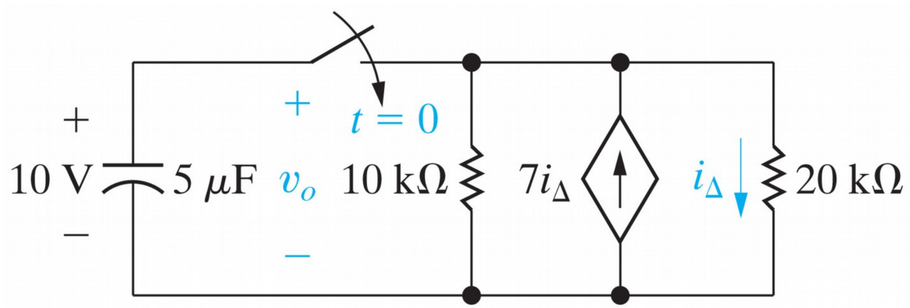


Figure: 07-37Ex7.13

Circuito de Thévenin nos terminais do capacitor:

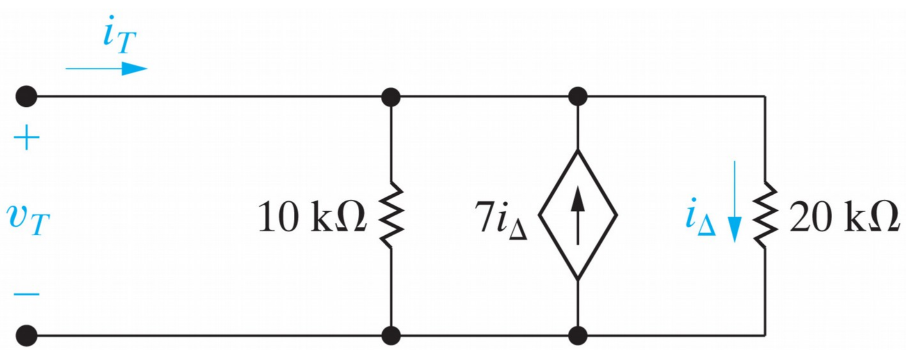


Figure: 07-38Ex7.13

$$i_T = i_{10k} + i_\Delta - 7\,i_\Delta$$

$$= \frac{v_T}{10k} + \frac{v_T}{20k} - 7\,\frac{v_T}{20k}$$

$$= \frac{2v_T + v_T - 7v_T}{20k}$$

$$= -\frac{4v_T}{20k} \longrightarrow \frac{v_T}{i_T} = -\frac{20k}{4} = -5k$$

Exemplo

Mas:

$$\frac{v_T}{i_T} = -5k = R_T$$

Circuito equivalente:

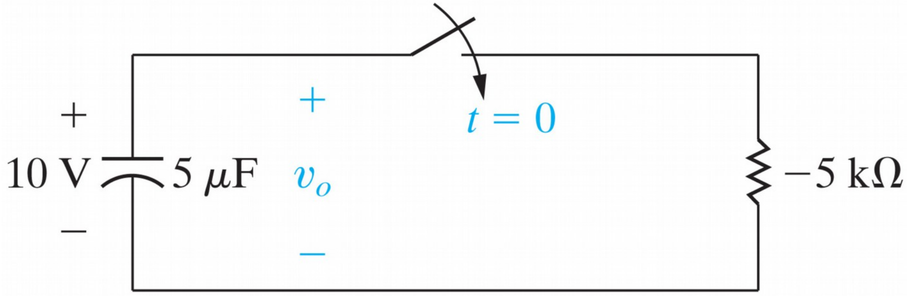


Figure: 07-39Ex7.13

$$v_o(t) = v_o(0)\,e^{\frac{-1}{RC}t}$$

$$= 10\,e^{\frac{-1}{(-5k)5\mu}t}$$

$$v_o(t) = 10\,e^{+40t}\,V$$

Exponencial crescente!

Circuitos de 1ª ordem com amplificadores operacionais

- **Amplificador integrador**

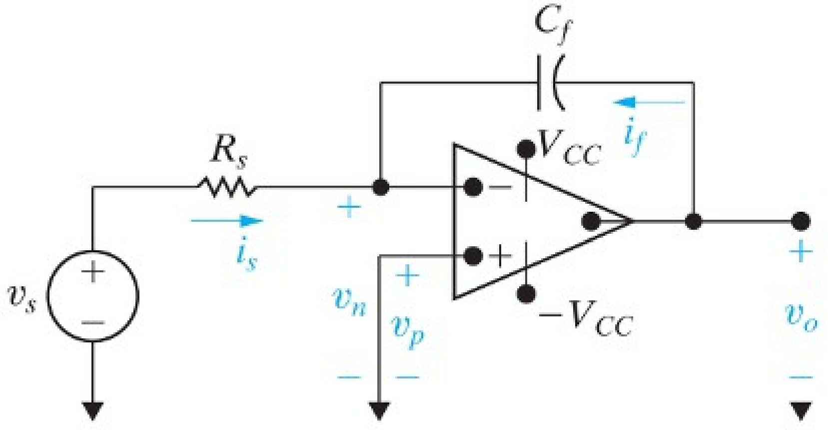


Figure: 07-40

$$i_s + i_f = 0 \longrightarrow \frac{v_s}{R_s} + C_f \frac{d}{dt} v_o = 0 \longrightarrow$$

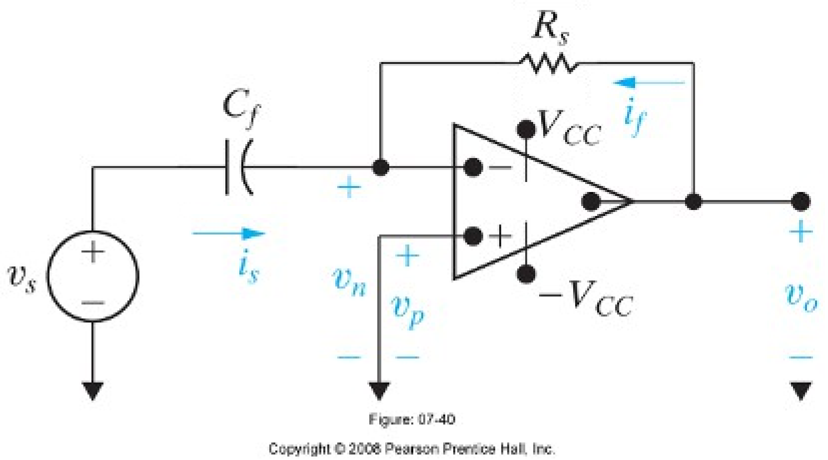
$$\frac{d}{dt} v_o = -\frac{1}{R_s C_f} v_s \longrightarrow dv_o = -\frac{1}{R_s C_f} v_s \, dt$$

$$\boxed{v_o = -\frac{1}{R_s C_f} \int_{t_0}^{t} v_s \, dt}$$

Problema prático → satura com qualquer pequena componente DC na entrada (ex.: tensão de offset do amplificador operacional.

Circuitos de 1ª ordem com amplificadores operacionais

- **Amplificador diferenciador**



$$i_s + i_f = 0 \longrightarrow C_f \frac{d}{dt} v_s + \frac{v_o}{R_s} = 0 \longrightarrow$$

$$\boxed{v_o = -R_s C_f \frac{d}{dt} v_s}$$

Problema prático → amplifica ruídos.

Exemplo

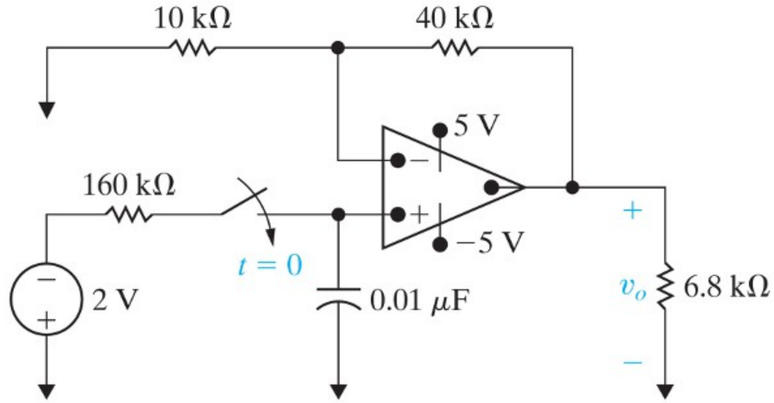


Figure: 07-44-01AO4-7.10

Determine vo(t) considerando que não há energia armazenada no capacitor em *t* = 0 e um amplificador operacional ideal.

Exemplo

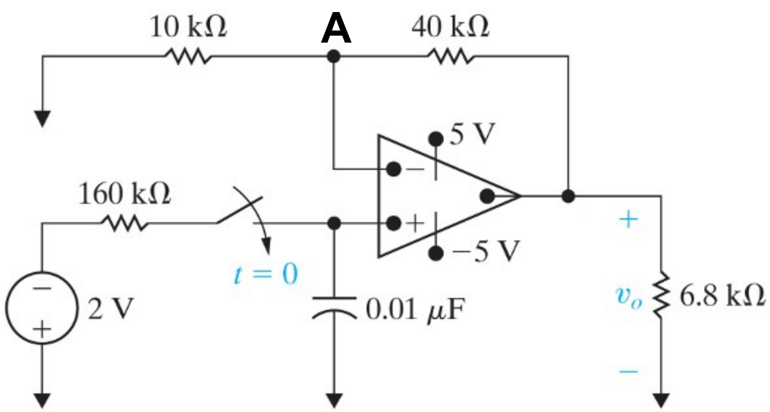


Figure: 07-44-01AO4-7.10

Na entrada não inversora do amp. op.:

$$v^+(t)=v_C(t)=-2+2\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{160\,k\cdot 0{,}01\,\mu}t}=$$

$$\downarrow$$

$$v^+(t)=-2+2\,\mathrm{e}^{-625\,t}\,V$$

Equação de nó no nó A:

$$\frac{v^-}{10\,k}+\frac{v^- - v_o}{40\,k}=0 \longrightarrow v_o(t)=5\,v^-(t)$$

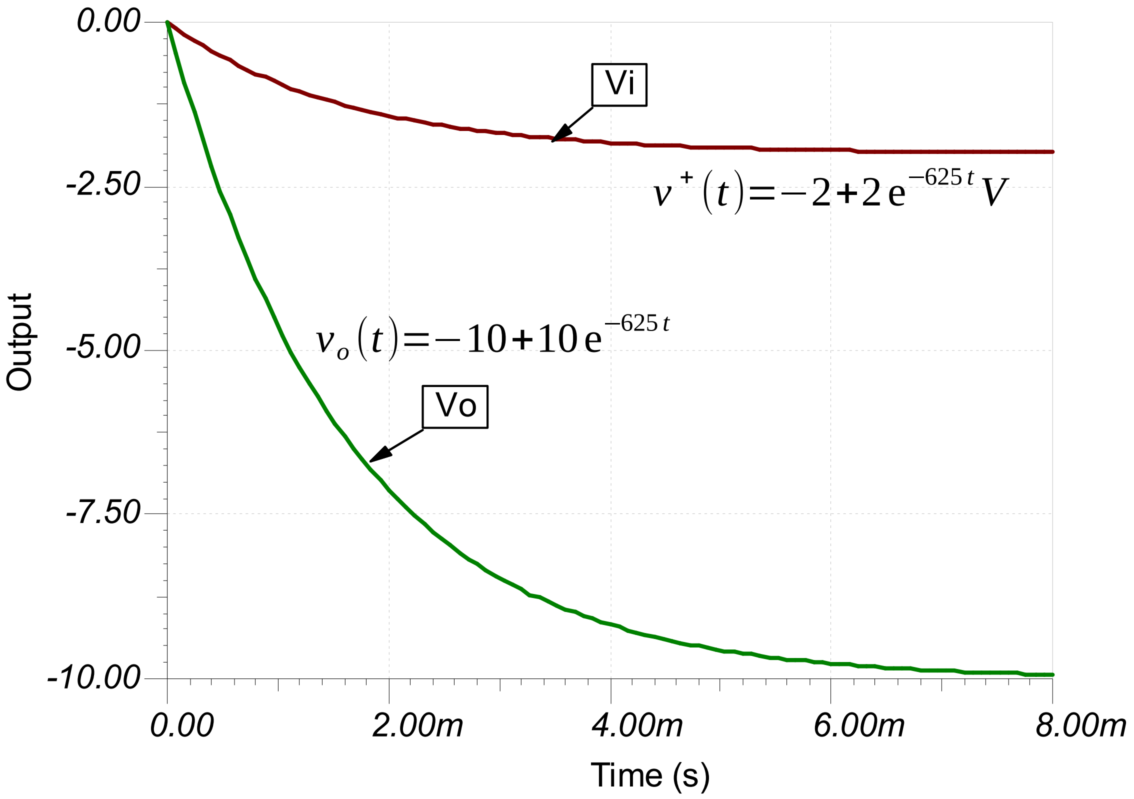
Mas:

$$v^-(t)=v^+(t)=-2+2\,\mathrm{e}^{-625t}\,V \longrightarrow v_o(t)=5\cdot\left(-2+2\,\mathrm{e}^{-625\,t}\right)$$

$$\downarrow$$

$$v_o(t)=-10+10\,\mathrm{e}^{-625\,t}$$

Exemplo



0.00
-2.50
-5.00
-7.50
-10.00
Output
0.00
2.00m
4.00m
6.00m
8.00m
Time (s)
Vi
Vo
$v^{+}(t) = -2 + 2e^{-625t}\,V$
$v_o(t) = -10 + 10e^{-625t}$