

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**TÉCNICA NUMÉRICA HÍBRIDA MLPG-MoM
APLICADA A ESPALHAMENTO ELETROMAGNÉTICO**

Tiago Vilela Lima Amorim

19 de fevereiro de 2020



GAPTEM – Grupo de Antenas, Propagação e Teoria Eletromagnética

**Departamento de Engenharia Eletrônica
Escola de Engenharia
Universidade Federal de Minas Gerais**

Tiago Vilela Lima Amorim

Técnica Numérica Híbrida MLPG-MoM Aplicada a Espalhamento Eletromagnético

Dissertação submetida à banca examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG

Faculdade de Engenharia Elétrica

Programa de Pós-Graduação

Orientador: Fernando José da Silva Moreira

Coorientadora: Úrsula do Carmo Resende

Belo Horizonte, Brasil

19 de Fevereiro de 2020

Tiago Vilela Lima Amorim

Técnica Numérica Híbrida MLPG-MoM Aplicada a Espalhamento Eletromagnético/
Tiago Vilela Lima Amorim. – Belo Horizonte, Brasil, 19 de Fevereiro de 2020-
71p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Fernando José da Silva Moreira

Coorientadora: Úrsula do Carmo Resende

Tese (Mestrado) – Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG

Faculdade de Engenharia Elétrica

Programa de Pós-Graduação, 19 de Fevereiro de 2020.

1. Método sem Malha. 2. Método dos Momentos. 3. Espalhamento Eletromagnético. I. Orientador Fernando José da Silva Moreira. II. Universidade Federal de Minas Gerais. III. Escola de Engenharia Elétrica. IV. Técnica Numérica Híbrida MLPG-MoM Aplicada a Espalhamento Eletromagnético

**"Técnica Numérica Híbrida MLPG-Mom Aplicada a
Espalhamento Eletromagnético"**

Tiago Vilela Lima Amorim

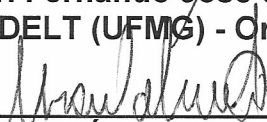
Dissertação de Mestrado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Aprovada em 19 de fevereiro de 2020.

Por:



Prof. Dr. Fernando José da Silva Moreira
DELT (UFMG) - Orientador



Profa. Dra. Úrsula do Carmo Resende
Depto. Engenharia Elétrica (CEFET/MG) - Coorientadora



Prof. Dr. Cássio Gonçalves do Rego
DELT (UFMG)



Prof. Dr. Ricardo Luiz da Silva Adriano
DEE (UFMG)

*Este trabalho é dedicado
à minha família e amigos.*

Agradecimentos

Durante esses dois anos de mestrado de muito estudo, esforço e empenho, gostaria de agradecer à algumas pessoas que me acompanharam e foram fundamentais na realização deste trabalho.

Em primeiro lugar, não posso deixar de agradecer ao meu orientador Prof. Fernando José da Silva Moreira e a minha coorientadora Prof^ª. Úrsula do Carmo Resende.

Agradecimentos especiais são direcionados à Escola de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), aos professores que encontrei nesta jornada e aos colegas de curso durante o mestrado.

Por último, quero agradecer à minha família e amigos pelo apoio incondicional.

*“Thoroughly conscious ignorance is the prelude
to every real advance in science.”
(James Clerk Maxwell)*

Resumo

Os métodos sem malha têm chamado cada vez mais atenção nos últimos anos. No entanto, de maneira similar ao Método dos Elementos Finitos (FEM, *Finite Element Method*), não podem lidar adequadamente com domínios ilimitados. Para problemas de espalhamento, todavia, o Método dos Momentos (MoM, *Method of Moments*) é bastante consolidado, eficiente e facilmente aplicado a meios homogêneos ilimitados. Este trabalho acopla o MoM utilizado para modelar o espaço livre ilimitado com o tradicional *Meshless Local Petrov-Galerkin* modelando um objeto dielétrico limitado. Na região interna, o método sem malha usa funções de forma geradas por interpolação radial de pontos com reprodução polinomial, enquanto que na região exterior, o MoM utiliza funções de forma triangulares para descrever as densidades de corrente superficiais. Como ambas funções de forma possuem a propriedade do delta de Kronecker, o acoplamento é imposto de forma direta forçando a continuidade das componentes tangenciais do campo eletromagnético. Para avaliar a convergência do método, foi analisado o espalhamento eletromagnético de uma onda plana com polarizações TE_z e TM_z por um cilindro circular dielétrico homogêneo, já que há solução analítica modal, proporcionando meios para estudar a precisão dos resultados numéricos. Todavia, a formulação é aplicável a qualquer forma de contorno cilíndrico arbitrária. Também sabendo que os métodos sem malha são bastante flexíveis para lidar com materiais não homogêneos, analisou-se uma lente de Lüneburg bidimensional, que tem um perfil de permissividade contínuo, e seus resultados foram comparados com soluções baseadas no FEM. Para ambas polarizações TM_z e TE_z, observou-se que a taxa de convergência permanece praticamente a mesma para o campo eletromagnético e para densidades de corrente equivalentes. Esta técnica também proporcionou um bom acordo para o campo eletromagnético em todo o espaço.

Palavras-chave: método sem malha. método dos momentos. espalhamento eletromagnético.

Abstract

Meshless methods have increasingly gained attention in recent years. Nonetheless, similar to the Finite Element Method (FEM), they cannot properly handle unbounded domains. For scattering problems, however, the Method of Moments (MoM) is fairly well consolidated, efficient, and easily applied to unbounded homogeneous mediums. This work couples the MoM used to model the unbounded free space, with the traditional Meshless Local Petrov-Galerkin modeling of a dielectric bounded object. In the inner region, the meshless method uses shape functions generated by radial point interpolation with polynomial reproduction, whereas in the outer region, the MoM uses triangular shape functions to describe the surface currents. As both shape functions possess the delta Kronecker property, the coupling is straightforwardly imposed by forcing the continuity of the tangential components of the electromagnetic field. In order to evaluate the convergence of the method, the TE_z and TM_z plane wave scattering from a homogeneous dielectric circular cylinder was analyzed since it has a modal analytical solution, providing means to study the precision of the numerical results. Nevertheless, the formulation is applicable to any arbitrary cylindrical contour shape. Also knowing that meshless methods are quite flexible to handle material inhomogeneity, a 2-dimensional Lüneburg lens, which has a continuous permittivity profile, was analyzed, and its results were compared to FEM solutions. For both TM_z and TE_z polarizations, it was observed that the convergence rate remains nearly the same for the electromagnetic field and equivalent current densities. This technique also provided a good agreement for the inner and outer electromagnetic field calculation.

Keywords: meshless method. method of moments. electromagnetic scattering.

Résumé

Les méthodes sans maillage ont de plus en plus retenu l'attention ces dernières années. Néanmoins, semblablement à la Méthode des Éléments Finis (FEM, *Finite Element Method*), ils ne peuvent pas gérer correctement les domaines illimités. Pour les problèmes de diffusion, cependant, la Méthode des Moments (MoM, *Method of Moments*) est assez bien consolidée, efficace et facilement applicable aux milieux homogènes sans bornes. Ce travail couple la MoM utilisée pour modéliser l'espace libre illimité, avec la traditionnelle *Meshless Local Petrov-Galerkin* qui modélise un objet délimité diélectrique. Dans la région intérieure, la méthode sans maillage utilise des fonctions de forme générées par interpolation radiale ponctuelle avec reproduction polynomiale, tandis que dans la région extérieure, la MoM utilise des fonctions de forme triangulaires pour décrire les densités de courant superficielles. Comme les deux fonctions de forme possèdent la propriété delta de Kronecker, le couplage est imposé de façon directe en forçant la continuité des composantes tangentielles du champ électromagnétique. Afin d'évaluer la convergence de la méthode, la dispersion des ondes planes avec polarisations TE_z et TM_z a été analysée par un cylindre circulaire diélectrique homogène car il y a une solution analytique modale, fournissant des moyens pour étudier la précision des résultats numériques. Néanmoins, la formulation est applicable à toute forme de contour cylindrique arbitraire. Sachant également que les méthodes sans maillage sont assez flexibles pour gérer l'inhomogénéité des matériaux, une lentille bidimensionnelle de Luneburg, qui a un profil de permittivité continue, a été analysée et ses résultats ont été comparés aux solutions basées sur FEM. Pour les polarisations TM_z et TE_z, il a été observé que le taux de convergence reste presque le même pour le champ électromagnétique et pour les densités de courant équivalentes. Cette technique a également fourni un bon accord pour le calcul du champ électromagnétique intérieur et extérieur.

Mots-clés: méthode sans maillage, méthode des moments, diffusion électromagnétique.

Resumen

Los métodos sin malla han llamado cada vez más la atención en los últimos años. Sin embargo, de manera similar al Método de los Elementos Finitos (FEM, *Finite Element Method*), no pueden manejar adecuadamente dominios ilimitados. No obstante, para problemas de dispersión, el Método de los Momentos (MoM, *Method of Moments*) es bastante consolidado, eficiente y fácilmente aplicado a medios homogéneos sin límites. Este trabajo combina el MoM utilizado para modelar el espacio libre ilimitado, con el tradicional *Meshless Local Petrov-Galerkin* modelando un objeto acotado dieléctrico. En la región interna, el método sin malla utiliza funciones de forma generadas por la interpolación de punto radial con reproducción polinómica, mientras que en la región externa, el MoM usa funciones de forma triangulares para describir las densidades de corrientes superficiales. Como ambas funciones de forma poseen la propiedad de delta de Kronecker, el acoplamiento se impone directamente al forzar la continuidad de los componentes tangenciales del campo electromagnético. Para evaluar la convergencia del método, fue analizada la dispersión de una onda plana con polarizaciones TE_z y TM_z por un cilindro circular dieléctrico homogéneo, ya que hay solución analítica modal, proporcionando medios para estudiar la precisión de los resultados numéricos. Con todo, la formulación es aplicable a cualquier forma de contorno cilíndrico arbitrario. También sabiendo que los métodos sin malla son bastante flexibles para manejar la falta de homogeneidad del material, se analizó un lente de Lüneburg bidimensional, que tiene un perfil de permitividad continua, y sus resultados se compararon con soluciones basadas en FEM. Para ambas polarizaciones TM_z y TE_z, se observó que la tasa de convergencia sigue siendo casi la misma para el campo electromagnético y las densidades de corriente equivalentes. Esta técnica también proporcionó un buen acuerdo para el cálculo del campo electromagnético interno y externo.

Palabras clave: método sin malla. método de los momentos. dispersión electromagnética.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Geometria com Múltiplas Regiões.	32
Figura 2 – Função Triangular.	36
Figura 3 – Ilustração da Discretização Utilizada no MoM.	36
Figura 4 – Relação Vetorial entre Regiões.	37
Figura 5 – Espalhamento Eletromagnético de uma Onda Plana com Polarização TMz.	40
Figura 6 – Polarização TMz - Densidade de Corrente Elétrica - MoM.	41
Figura 7 – Polarização TMz - Densidade de Corrente Magnética - MoM.	41
Figura 8 – Polarização TEz - Densidade de Corrente Elétrica - MoM.	42
Figura 9 – Polarização TEz - Densidade de Corrente Magnética - MoM.	42
Figura 10 – Função de Forma RPIM ($\alpha_c = 3,00$, $q = 1,03$ e $dc = 1,00$).	46
Figura 11 – Derivadas da Função de Forma RPIM ($\alpha_c = 3,00$, $q = 1,03$ e $dc = 1,00$).	46
Figura 12 – Estratégia de Escolha de Nós de Suporte.	47
Figura 13 – Ilustração do Método Sem Malha Proposto.	48
Figura 14 – Extensão da Função de Forma RPIM ($\alpha_c = 3,00$, $q = 1,03$ e $dc = 1,00$).	49
Figura 15 – Perfil de Permissividade Elétrica Relativa ($\rho_0 = 0,5$, $\epsilon_1 = 1$, $\epsilon_2 = 3$ e $\delta = 0,1$).	51
Figura 16 – Espalhamento Eletromagnético de uma Onda Plana com Polarização TMz.	51
Figura 17 – Distribuição Uniforme de Nós (1/4 do Domínio Computacional).	52
Figura 18 – Amplitude do Campo Elétrico para Polarização TMz sobre $y = 0$ - MLPG.	53
Figura 19 – Amplitude do Campo Magnético para Polarização TEz sobre $y = 0$ - MLPG.	53
Figura 20 – Ilustração dos Problemas Equivalentes do Método Híbrido.	55
Figura 21 – Espalhamento Eletromagnético de uma Onda Plana com Polarização TMz.	59
Figura 22 – Distribuição Uniforme de Nós (1/4 do Domínio Computacional).	60
Figura 23 – Amplitude da Densidade de Corrente Elétrica Normalizada - MLPG-MoM.	60
Figura 24 – Fase da Densidade de Corrente Elétrica - MLPG-MoM.	61
Figura 25 – Amplitude da Densidade de Corrente Magnética Normalizada - MLPG- MoM.	61
Figura 26 – Fase da Densidade de Corrente Magnética - MLPG-MoM.	61
Figura 27 – Amplitude dos Campos Elétrico e Magnético sobre $y = 0$ - MLPG-MoM	61
Figura 28 – Fase dos Campos Elétrico e Magnético sobre $y = 0$ - MLPG-MoM	62
Figura 29 – Análise da Taxa de Convergência - MLPG-MoM	62

Figura 30 – Ilustração Qualitativa da Lente de Lüneburg e seu Perfil de Permissividade.	63
Figura 31 – Malha e Camadas Utilizadas na Implementação FEM.	64
Figura 32 – Comparação da Amplitude dos Campos entre MoM-MLPG e FEM. . .	64
Figura 33 – Comparação da Fase dos Campos entre MoM-MLPG e FEM.	64
Figura 34 – Amplitude do Campo Elétrico - MLPG-MoM.	65
Figura 35 – Amplitude do Campo Magnético - MLPG-MoM.	65

Lista de tabelas

Tabela 1 – Parâmetros do Caso de Estudo - MoM	41
Tabela 2 – Parâmetros do Caso de Estudo - MLPG	52
Tabela 3 – Parâmetros do Caso de Estudo - MLPG-MoM - Caso Homogêneo . . .	60
Tabela 4 – Parâmetros do Caso de Estudo - MLPG-MoM - Caso Não Homogêneo	63

Lista de abreviaturas e siglas

CFIE	Equação Integral de Campos Combinada, <i>Combined Field Integral Equation</i>
EFG	<i>Element Free Galerkin Method</i>
EFIE	Equação Integral do Campo Elétrico, <i>Electric Field Integral Equation</i>
FEM	Método dos Elementos Finitos, <i>Finite Element Method</i>
MFIE	Equação Integral do Campo Magnético, <i>Magnetic Field Integral Equation</i>
MLPG	<i>Meshless Local Petrov-Galerkin Method</i>
MLS	Quadrados Mínimos Móveis, <i>Moving Least Squares</i>
MoM	Método dos Momentos, <i>Method of Moments</i>
PDF	Equação Diferencial Parcial, <i>Partial Differential Equation</i>
PML	Camada Perfeitamente Casada, <i>Perfectly Matched Layer</i>
RBF	Função de Base Radial, <i>Radial Base Function</i>
RPIM	Método de Interpolação Radial de Pontos, <i>Radial Point Interpolation Method</i>
SPH	<i>Smoothed Particle Hydrodynamics Method</i>
TE _z	Transversal Elétrica à componente z
TM _z	Transversal Magnética à componente z

Sumário

1	INTRODUÇÃO	27
1.1	Motivação e Justificativa	27
1.2	Objetivos	28
1.3	Estrutura da Dissertação	28
2	MÉTODO DOS MOMENTOS	31
2.1	Formulação Geral do MoM	31
2.2	MoM Aplicado a Espalhamento Eletromagnético	32
2.2.1	Modos Espúrios	33
2.2.2	Discretização das Equações Integrais	34
2.2.3	Imposição das Condições de Interface entre Regiões	35
2.3	Caso de Estudo: Cilindro Dielétrico	35
2.3.1	Escolha da Função de Base	36
2.3.2	Discretização do Problema	36
2.3.3	Polarização TM _z	37
2.3.4	Polarização TE _z	38
2.3.5	Cálculo Numérico	39
2.3.6	Cálculo dos Campos Elétrico e Magnético	40
2.4	Resultados Numéricos	40
2.5	Conclusões Parciais	42
3	MÉTODO SEM MALHA	43
3.1	Método dos Resíduos Ponderados	43
3.2	Função de Forma: Aproximação do RPIM	44
3.3	Formulação proposta para MLPG	46
3.3.1	Função de Teste	47
3.3.2	Nós de Suporte	47
3.3.3	Estratégia MLPG com Colocação	48
3.4	MLPG Aplicado a Espalhamento Eletromagnético	48
3.4.1	Tratamento de Descontinuidade	50
3.5	Resultados Numéricos	51
3.6	Conclusões Parciais	53
4	MÉTODO HÍBRIDO PROPOSTO MLPG-MOM	55
4.1	Formulação	55
4.1.1	Problema Interno	56

4.1.2	Problema Externo	56
4.1.2.1	Polarização TMz	56
4.1.2.2	Polarização TEz:	57
4.1.3	Acoplamento	58
4.1.4	Sistema Matricial Completo	58
4.2	Resultados Numéricos	59
4.2.1	Caso Homogêneo	59
4.2.2	Taxa de Convergência	62
4.2.3	Caso Não Homogêneo	63
4.3	Conclusão Parcial	66
5	CONCLUSÕES	67
5.1	Propostas de Continuação do Trabalho	68
	REFERÊNCIAS	69

1 Introdução

1.1 Motivação e Justificativa

Recentemente, um conjunto de métodos numéricos chamados métodos sem malha tem se tornado significativamente popular. Entre eles estão o *Smoothed Particle Hydrodynamics Method* (SPH) (LIU; LIU, 2010), o *Element Free Galerkin Method* (EFG) (LU; BELYTSCHKO; GU, 1994) e o *Meshless Local Petrov-Galerkin Method* (MLPG) (ATLURI; ZHU, 1998). A principal característica desses métodos, como o nome sugere, é que eles não requerem uma distribuição estruturada de nós na construção da solução numérica. Portanto, adicionar e remover nós é facilmente realizado objetivando a redução de erros em diferentes regiões. Tais métodos possuem flexibilidade de geometria, o que pode indicar sua utilização em uma vasta gama de problemas científicos e de engenharia (GINGOLD; MONAGHAN, 1977; NAGASHIMA, 1999; HO et al., 2001; ALFARO et al., 2006; HART; COX; DJIDJELI, 2011; LIEW; ZHAO; FERREIRA, 2011; MOHEBBI; ABBASZADEH; DEGHAN, 2013; JIN et al., 2014).

Ao se tratar de domínios ilimitados, como os problemas de espalhamento eletromagnético, a solução numérica é usualmente obtida pelo truncamento do domínio computacional utilizando o método EFG (RESENDE; COPPOLI; AFONSO, 2015) ou MLPG (NICOMEDES; MESQUITA; MOREIRA, 2012). Entre as diversas possibilidades, este truncamento é frequentemente realizado forçando os campos a obedecerem a condição de radiação de Sommerfeld a uma distância assintoticamente afastada do objeto (PETERSON; CASTILLO, 1989) ou que sejam absorvidos em uma Camada Perfeitamente Casada (PML, *Perfectly Matched Layer*) ao redor do objeto (MITTRA; PEKEL, 1995). Entre as desvantagens dessas abordagens estão o aumento do domínio computacional, erros provocados por reflexão e aproximações, e a complexidade em implementar PMLs.

Outro método também bastante utilizado é o Método dos Momentos (MoM, *Method of Moments*). Esse é bem consolidado, eficiente e facilmente aplicado a problemas ilimitados com meios homogêneos (GIBSON, 2014). Estas características levaram ao desenvolvimento de um método híbrido EFG-MoM (RESENDE et al., 2015), no qual o MoM modela o espaço livre que é ilimitado, enquanto o método EFG é utilizado em uma região limitada. Neste caso, as equações integrais do campo elétrico e magnético são impostas na interface entre os meios, podendo ser colocada sobre o contorno do objeto espalhador.

Este trabalho propõe uma nova formulação híbrida MLPG-MoM que pode ser aplicada a problemas de espalhamento eletromagnético na qual o espalhador é um cilindro dielétrico de contorno arbitrário. Neste caso, o MoM, utilizando funções de base e peso

triangulares (GIBSON, 2014), trata o espaço livre, enquanto o tradicional MLPG, utilizando funções de forma construídas baseadas no Método de Interpolação Radial de Pontos (RPIM, *Radial Point Interpolation Method*) com reprodução polinomial (LIU, 2009), modela o objeto dielétrico limitado. Visto que ambas funções, função de base no MoM e função de forma no MLPG, possuem a propriedade do delta de Kronecker (LIU, 2009), o acoplamento é imposto de forma direta forçando a continuidade das componentes tangenciais do campo eletromagnético sobre o contorno do dielétrico (HARRINGTON, 1961).

1.2 Objetivos

O principal objetivo deste trabalho é o desenvolvimento de uma formulação para o cálculo dos campos elétrico e magnético em todo o espaço para o problema do espalhamento eletromagnético de uma onda plana por um cilindro dielétrico infinito.

Diferentemente dos métodos existentes, pretende-se desenvolver um método verdadeiramente sem malha, sem qualquer malha de fundo, em que a condição de fronteira absorvente, comumente utilizada para o truncamento do domínio computacional, é realizada pelo MoM. A escolha do método MLPG com funções de forma baseadas em RPIM facilita a imposição das condições de contorno e a modelagem de meios não homogêneos enquanto a utilização do MoM possibilita a diminuição do domínio computacional e a redução de erros e complexidade derivados das técnicas de truncamento usuais.

1.3 Estrutura da Dissertação

No Capítulo 2, uma formulação generalizada do MoM aplicada a problemas de espalhamento eletromagnético em duas dimensões é estudada. Nesta formulação, as equações integrais do campo elétrico e magnético são resolvidas sobre a superfície do dielétrico. Os conceitos abordados neste capítulo são empregados na elaboração do método híbrido proposto.

No Capítulo 3 é proposta uma formulação alternativa do método MLPG aplicada a problemas de espalhamento eletromagnético em duas dimensões. Nesta formulação, as funções de forma são baseadas em RPIM com reprodução polinomial e as funções de teste têm domínio local circular. A condição de contorno é implementada por uma condição de radiação circular de primeira ordem. Os conceitos abordados neste capítulo são empregados na elaboração do método híbrido proposto.

No Capítulo 4 é proposto um método híbrido MLPG-MoM baseado nos estudos dos capítulos anteriores. Embora a formulação seja para um domínio arbitrário, os casos analisados em duas dimensões são: um cilindro dielétrico circular homogêneo, pois possui solução analítica e uma lente de Lüneburg também circular, visto que é um exemplo de

meio não homogêneo bem conhecido. Resultados como densidades de corrente elétrica e magnética equivalentes, e o cálculo de campo são apresentados, incluindo a taxa de convergência do método para o caso homogêneo.

Por fim, no [Capítulo 5](#) são apresentadas as conclusões finais e as propostas de continuação deste trabalho.

2 Método dos Momentos

Neste Capítulo é apresentada a formulação geral do método dos momentos e sua aplicação em problemas de espalhamento eletromagnético em duas dimensões. O formalismo empregado neste capítulo é destinado ao desenvolvimento do método híbrido estudado no [Capítulo 4](#).

2.1 Formulação Geral do MoM

Considerando um problema escalar generalizado dado pela equação:

$$\mathcal{L}(u(\mathbf{r})) = f(\mathbf{r}), \quad (2.1)$$

onde $\mathcal{L}$ é um operador linear, f é uma função forçante conhecida e u é uma função escalar desconhecida, onde ambas funções f e u variam com a posição espacial $\mathbf{r}$. Ao expandir u em uma soma ponderada de N funções de base u_n :

$$u = \sum_{n=1}^N a_n u_n, \quad (2.2)$$

onde a_n são coeficientes desconhecidos, dado que $\mathcal{L}$ é linear, substituindo a equação anterior na [Equação \(2.1\)](#), tem-se que:

$$\sum_{n=1}^N a_n \mathcal{L}(u_n) \approx f, \quad (2.3)$$

onde o residuo é:

$$R = f - \sum_{n=1}^N a_n \mathcal{L}(u_n). \quad (2.4)$$

Definindo o produto interno (ou momento) entre a função de base (ou função de forma) $u_n(\mathbf{r}')$ e a função de teste (ou função de peso) $u_m(\mathbf{r})$ por:

$$\langle u_m, u_n \rangle = \int_{u_m} u_m(\mathbf{r}) \cdot \int_{u_n} u_n(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' d\mathbf{r}, \quad (2.5)$$

onde $\mathbf{r}$ e $\mathbf{r}'$ são posições espaciais e os domínios de integração dependem das funções de base e teste. Para impor as condições de contorno, é requerido que o produto interno de cada função de teste com o residuo seja nulo ([GIBSON, 2014](#)), resultando em:

$$\sum_{n=1}^N a_n \langle u_m, \mathcal{L}(u_n) \rangle = \langle u_m, f \rangle, \quad (2.6)$$

levando a um sistema matricial $\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}$ em que os elementos de $\mathbf{K}$ são:

$$K_{mn} = \langle u_m, \mathcal{L}(u_n) \rangle, \quad (2.7)$$

e os elementos de $\mathbf{f}$ são:

$$f_m = \langle u_m, f \rangle. \quad (2.8)$$

Em problemas de espalhamento eletromagnético, $\mathcal{L}$ é um operador integral diferencial, u é uma densidade corrente desconhecida e f é o campo incidente. Como as funções bases interagem umas com as outras através da função de Green, o resultado é um sistema matricial cheio, oposto a outros métodos numéricos que resultam em matrizes tipicamente esparsas. Na maioria dos casos encontrados na literatura, a função de teste utilizada é a mesma função de base e o número de funções de base é igual ao número das funções de teste, também conhecido como método de Galerkin, levando à uma matriz quadrada simétrica e maior estabilidade numérica (GIBSON, 2014).

2.2 MoM Aplicado a Espalhamento Eletromagnético

O MoM é capaz de solucionar problemas de espalhamento eletromagnético em meios homogêneos por partes. A Figura 1 apresenta um domínio computacional em 2 dimensões com uma configuração mais complexa, onde os parâmetros de permissividade elétrica e permeabilidade magnética na região dielétrica R_l são μ_l e ϵ_l , respectivamente. Tais parâmetros podem ser complexos representando um materiais dispersivos. A região externa R_0 possui parâmetros do espaço livre μ_0 e ϵ_0 .

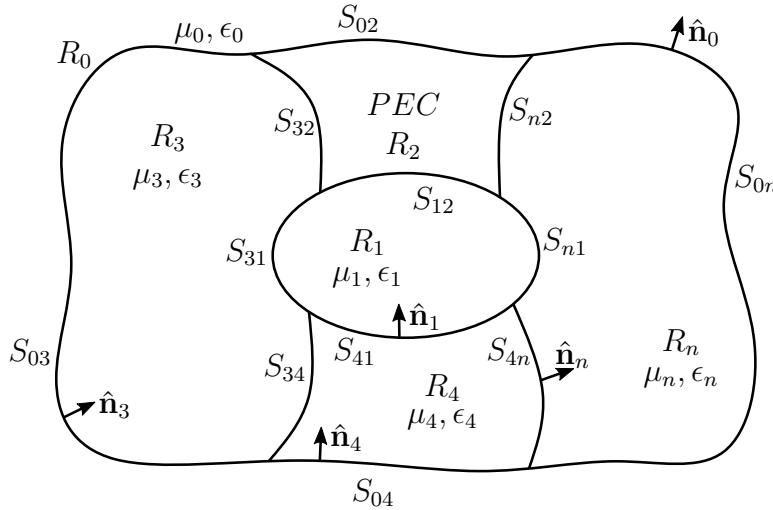


Figura 1 – Geometria com Múltiplas Regiões.

A interface entre duas regiões R_l e R_s é a superfície S_{lm} (ou S_{ml}), sendo que esta interface pode limitar totalmente ou parcialmente R_l ou R_m . O vetor normal $\hat{\mathbf{n}}_l$ se dirige para dentro das regiões em todas interfaces. É também possível tratar condutores fechados ou superfícies condutoras abertas.

Definindo o domínio computacional sobre o plano $x - y$ para problemas de espalhamento eletromagnético invariantes na direção z ($\partial/\partial z = 0$), para cada região dielétrica

R_l , as equações integrais de superfície são (GIBSON, 2014):

$$[j\omega\mu_l(\mathcal{L}\mathbf{J}_l)(\mathbf{x}) + (\mathcal{K}\mathbf{M}_l)(\mathbf{x})]_{tan} + \frac{1}{2}\hat{\mathbf{n}}_l(\mathbf{x}) \times \mathbf{M}_l(\mathbf{x}) = [\mathbf{E}_l^i(\mathbf{x})]_{tan}, \quad (2.9)$$

$$[j\omega\epsilon_l(\mathcal{L}\mathbf{M}_l)(\mathbf{x}) - (\mathcal{K}\mathbf{J}_l)(\mathbf{x})]_{tan} - \frac{1}{2}\hat{\mathbf{n}}_l(\rho) \times \mathbf{J}_l(\mathbf{x}) = [\mathbf{H}_l^i(\mathbf{x})]_{tan}, \quad (2.10)$$

onde os operadores $\mathcal{L}$ e $\mathcal{K}$ são:

$$(\mathcal{L}\mathbf{X})(\mathbf{x}) = \left[1 + \frac{1}{k_l^2}\nabla\nabla\cdot\right] \int_S G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\mathbf{X}(\mathbf{x}')d\mathbf{x}', \quad (2.11)$$

$$(\mathcal{K}\mathbf{X})(\mathbf{x}) = \nabla \times \int_S G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\mathbf{X}(\mathbf{x}')d\mathbf{x}', \quad (2.12)$$

em que a função de Green do espaço livre em duas dimensões é:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{j}{4}H_0^{(2)}(k_l|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) \quad (2.13)$$

com $H_0^{(2)}$ sendo a função de Hankel do segundo tipo e ordem zero, $\mathbf{E}^i$ e $\mathbf{H}^i$ sendo os campos incidentes elétrico e magnético, respectivamente, não nulos apenas em regiões em que excitações são aplicadas, e $\mathbf{J}$ e $\mathbf{M}$ sendo as densidades equivalentes de correntes elétrica e magnética, respectivamente. As posições espaciais $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}'$, vinculadas as funções de teste e base, respectivamente, são definidas sobre o plano $x - y$.

As Equações (2.9) e (2.10) utilizam as componentes tangenciais da Equação Integral do Campo Elétrico (EFIE, *Electric Field Integral Equation*) e da Equação Integral do Campo Magnético (MFIE, *Magnetic Field Integral Equation*), respectivamente.

2.2.1 Modos Espúrios

Para problemas com condutores fechados, a EFIE e a MFIE possuem soluções homogêneas (soluções produzidas por campos incidentes nulos). Essas soluções espúrias correspondem a modos ressonantes no interior de cavidades relacionados ao próprio objeto. O método mais utilizado para o tratamento deste problema é a combinação linear da EFIE com a MFIE, Equações (2.9) e (2.10), visto que o espaço nulo dessas equações são distintos. Essa estratégia acarreta na seguinte combinação chamada de Equação Integral de Campos Combinada (CFIE, *Combined Field Integral Equation*) (GIBSON, 2014):

$$\text{CFIE} = \alpha\text{EFIE} + (1 - \alpha)\eta_l\text{MFIE}, \quad (2.14)$$

onde a impedância característica da região é $\eta_l = \sqrt{\mu_l/\epsilon_l}$. O parâmetro α é ajustável de $0 \leq \alpha \leq 1$, mas é usualmente utilizado $\alpha = 0,5$ (GIBSON, 2014).

2.2.2 Discretização das Equações Integrais

Utilizando o MoM para discretizar as Equações (2.9) e (2.10), as densidades de corrente são aproximadas por uma soma ponderada de funções de base:

$$\mathbf{J}_l(\rho) = \sum_{n=1}^{N_J^{(l)}} I_n^{J(l)} \mathbf{f}_n(\mathbf{x}), \quad (2.15)$$

$$\mathbf{M}_l(\rho) = \sum_{n=1}^{N_M^{(l)}} I_n^{M(l)} \mathbf{g}_n(\mathbf{x}), \quad (2.16)$$

onde $I_n^{J(l)}$ e $I_n^{M(l)}$ são os coeficientes das densidades de corrente elétrica e magnética, respectivamente, $N_J^{(l)}$ e $N_M^{(l)}$ são o número de funções bases elétricas e magnéticas ($\mathbf{f}_n$ e $\mathbf{g}_n$, respectivamente) em uma região R_l , respectivamente.

Avaliando a EFIE, Equação (2.9), com a função de teste elétrica $\mathbf{f}_m(\mathbf{x})$ e a MFIE, Equação (2.10), com a função de teste magnética $\mathbf{g}_m(\mathbf{x})$, resulta para uma região R_l em:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}^{EJ(l)} & \mathbf{Z}^{EM(l)} \\ \mathbf{Z}^{HJ(l)} & \mathbf{Z}^{HM(l)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}^{J(l)} \\ \mathbf{I}^{M(l)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}^{E(l)} \\ \mathbf{V}^{H(l)} \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

onde os elementos da matriz são:

$$\begin{aligned} Z_{mn}^{EJ(l)} = j\omega\mu_l \int_{\mathbf{f}_m} \mathbf{f}_m(\mathbf{x}) \cdot \int_{\mathbf{f}_n} \mathbf{f}_n(\mathbf{x}') G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d\mathbf{x}' d\mathbf{x} \\ + \frac{j}{\omega\epsilon_l} \int_{\mathbf{f}_m} \mathbf{f}_m(\mathbf{x}) \cdot \left[\nabla \nabla \cdot \int_{\mathbf{f}_n} \mathbf{f}_n(\mathbf{x}') G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \right] d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} Z_{mn}^{EM(l)} = \int_{\mathbf{f}_m} \mathbf{f}_m(\mathbf{x}) \cdot \nabla \times \int_{\mathbf{g}_n} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \mathbf{g}_n(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' d\mathbf{x} \\ + \frac{1}{2} \int_{\mathbf{f}_m, \mathbf{g}_n} \mathbf{f}_m(\mathbf{x}) \cdot [\hat{\mathbf{n}}_l(\mathbf{x}) \times \mathbf{g}_n(\mathbf{x})] d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} Z_{mn}^{HJ(l)} = - \int_{\mathbf{g}_m} \mathbf{g}_m(\mathbf{x}) \cdot \nabla \times \int_{\mathbf{f}_n} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \mathbf{f}_n(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' d\mathbf{x} \\ - \frac{1}{2} \int_{\mathbf{g}_m, \mathbf{f}_n} \mathbf{g}_m(\mathbf{x}) \cdot [\hat{\mathbf{n}}_l(\mathbf{x}) \times \mathbf{f}_n(\mathbf{x})] d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} Z_{mn}^{HM(l)} = j\omega\epsilon_l \int_{\mathbf{g}_m} \mathbf{g}_m(\mathbf{x}) \cdot \int_{\mathbf{g}_n} \mathbf{g}_n(\mathbf{x}') G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d\mathbf{x}' d\mathbf{x} \\ + \frac{j}{\omega\mu_l} \int_{\mathbf{g}_m} \mathbf{g}_m(\mathbf{x}) \cdot \left[\nabla \nabla \cdot \int_{\mathbf{g}_n} \mathbf{g}_n(\mathbf{x}') G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \right] d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

e os vetores do lado direito são:

$$V_m^{E(l)} = \int_{\mathbf{f}_m} \mathbf{f}_m(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{E}_l^i(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (2.22)$$

$$V_m^{H(l)} = \int_{\mathbf{g}_m} \mathbf{g}_m(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{H}_l^i(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (2.23)$$

Por fim, considerando todas superfícies e todas regiões, o sistema global é montado da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{Z}^{(2)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{Z}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}^{(1)} \\ \mathbf{I}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{I}^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}^{(1)} \\ \mathbf{V}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{V}^{(n)} \end{bmatrix}, \quad (2.24)$$

em que seus elementos são:

$$\mathbf{Z}^{(l)} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}^{EJ(l)} & \mathbf{Z}^{EM(l)} \\ \mathbf{Z}^{HJ(l)} & \mathbf{Z}^{HJ(l)} \end{bmatrix}, \quad (2.25)$$

$$\mathbf{I}^{(l)} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}^{J(l)} \\ \mathbf{I}^{M(l)} \end{bmatrix}, \quad (2.26)$$

$$\mathbf{V}^{(l)} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}^{E(l)} \\ \mathbf{V}^{H(l)} \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

2.2.3 Imposição das Condições de Interface entre Regiões

As componentes tangenciais dos campos elétrico e magnético são descontínuas na interface de um dielétrico apenas se houver densidade de corrente elétrica ou magnética nesta interface (HARRINGTON, 1961). Como não há densidades de corrente elétrica e magnética reais nesta formulação, dado uma interface entre as regiões R_l e R_m , as densidades de corrente são equivalentes e fictícias, implicando que:

$$\mathbf{J}_l(\mathbf{x}) = -\mathbf{J}_m(\mathbf{x}), \quad (2.28)$$

$$\mathbf{M}_l(\mathbf{x}) = -\mathbf{M}_m(\mathbf{x}). \quad (2.29)$$

Caso as funções de base sejam definidas com sentidos opostos nos lados opostos de uma interface (ver Figura 4), as colunas da matriz da Equação (2.24) podem ser combinadas, podendo levar a um sistema sobredeterminado. Embora haja diversas formas de resolver esse problema, o mais utilizado é a abordagem Poggio-Miller-Chang-Harrington-Wu-Tsai (PMCHWT) (UMASHANKAR; TAFLOVE; RAO, 1986).

2.3 Caso de Estudo: Cilindro Dielétrico

O espalhamento eletromagnético de um cilindro dielétrico iluminado por uma onda plana com polarização TMz e TEz é estudado nessa seção.

2.3.1 Escolha da Função de Base

Visto que a característica mais importante de uma função de base é a representabilidade da solução, ou seja, funções que aproximem o comportamento das soluções, a função de base escolhida foi a triangular por partes, já que esta pode ser utilizada caso o operador linear contenha derivadas de primeira ordem e oferece uma variação linear entre os segmentos da solução. A Figura 2 apresenta um conjunto de funções triangulares onde tais funções são definidas por (GIBSON, 2014):

$$f_n(x) = \frac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} \quad x_{n-1} \leq x \leq x_n, \quad (2.30)$$

$$f_n(x) = \frac{x_{n+1} - x}{x_{n+1} - x_n} \quad x_n \leq x \leq x_{n+1}. \quad (2.31)$$

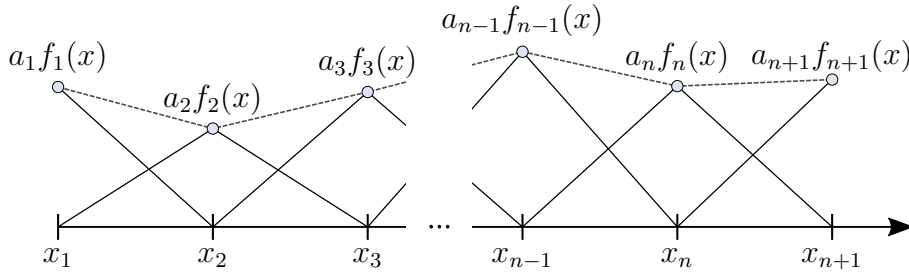


Figura 2 – Função Triangular.

2.3.2 Discretização do Problema

Para um cilindro dielétrico de contorno arbitrário, o problema é dividido em uma região interna R_1 e outra região externa R_0 com permissividade elétrica e permeabilidade magnética homogêneas. A Figura 3 mostra o sistema vetorial adotado para o meio externo. Já a relação vetorial entre as regiões interna e externa está representada na Figura 4.

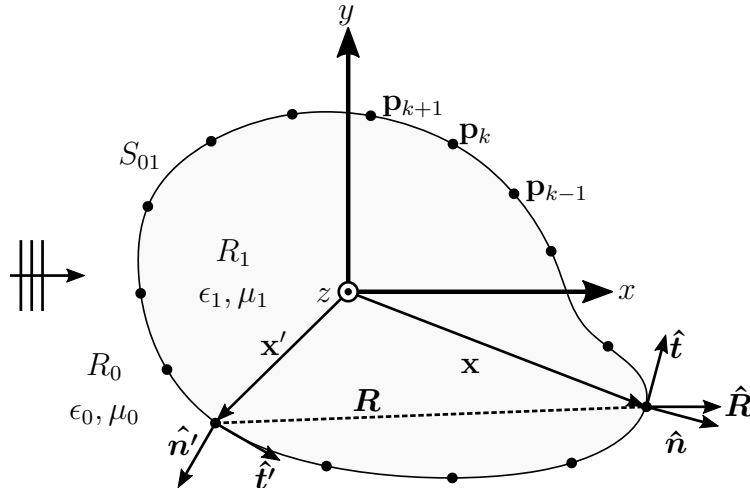


Figura 3 – Ilustração da Discretização Utilizada no MoM.

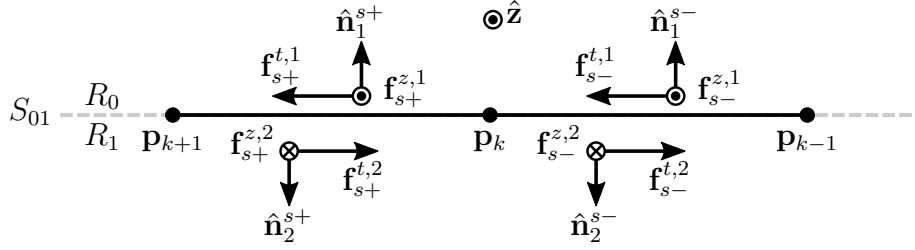


Figura 4 – Relação Vetorial entre Regiões.

2.3.3 Polarização TMz

Para polarização TMz, as densidades correntes elétrica e magnética são representadas pelas funções de base vetoriais $\mathbf{f}^z$ e $\mathbf{g}^t$, respectivamente. Os índices z e t representam a componente z e a componente tangente à interface (ortogonal a z), respectivamente. As Equações (2.9) e (2.10) são manipuladas e discretizadas levando ao seguinte sistema matricial (GIBSON, 2014):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}^{zz,TM} & \mathbf{Z}^{zt,TM} \\ \mathbf{Z}^{tz,TM} & \mathbf{Z}^{tt,TM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}^J \\ \mathbf{I}^M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}^{z,TM} \\ \mathbf{V}^{t,TM} \end{bmatrix}, \quad (2.32)$$

onde os elementos da matriz são:

$$\mathbf{Z}^{zz,TM} = \mathbf{L}^{zz}(\mathbf{f}_{S_0}^z, \mathbf{f}_{S_0}^z, R_0) + \mathbf{L}^{zz}(\mathbf{f}_{S_1}^z, \mathbf{f}_{S_1}^z, R_1), \quad (2.33)$$

$$\mathbf{Z}^{zt,TM} = \mathbf{K}^{zt}(\mathbf{f}_{S_0}^z, \mathbf{g}_{S_0}^t, R_0) + \mathbf{K}^{zt}(\mathbf{f}_{S_1}^z, \mathbf{g}_{S_1}^t, R_1), \quad (2.34)$$

$$\mathbf{Z}^{tz,TM} = -\mathbf{K}^{tz}(\mathbf{g}_{S_0}^t, \mathbf{f}_{S_0}^z, R_0) - \mathbf{K}^{tz}(\mathbf{g}_{S_1}^t, \mathbf{f}_{S_1}^z, R_1), \quad (2.35)$$

$$\mathbf{Z}^{tt,TM} = \frac{\epsilon_0}{\mu_0} \mathbf{L}^{tt}(\mathbf{g}_{S_0}^t, \mathbf{g}_{S_0}^t, R_0) + \frac{\epsilon_1}{\mu_1} \mathbf{L}^{tt}(\mathbf{g}_{S_1}^t, \mathbf{g}_{S_1}^t, R_1), \quad (2.36)$$

os elementos do lado direito são:

$$\mathbf{V}^{z,TM} = \mathbf{V}^E(\mathbf{f}_{S_0}^z, R_0), \quad (2.37)$$

$$\mathbf{V}^{t,TM} = \mathbf{V}^H(\mathbf{g}_{S_0}^t, R_0), \quad (2.38)$$

os coeficientes das densidades de corrente desconhecidas são:

$$\mathbf{I}^J = \mathbf{I}_{S_{01}}^{J,z}, \quad (2.39)$$

$$\mathbf{I}^M = \mathbf{I}_{S_{01}}^{M,t}, \quad (2.40)$$

e os elementos das funções matriciais e vetoriais são:

$$L_{mn}^{zz}(\mathbf{f}_m^z, \mathbf{f}_n^z, R_l) = \frac{\omega \mu_l}{4} \int_{\mathbf{f}_m^z} \mathbf{f}_m^z(\mathbf{x}) \cdot \int_{\mathbf{f}_n^z} \mathbf{f}_n^z(\mathbf{x}') H_0^{(2)}(k_l |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) d\mathbf{x}' d\mathbf{x}, \quad (2.41)$$

$$K_{mn}^{zt}(\mathbf{f}_m^z, \mathbf{g}_n^t, R_l) = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{f}_m^z = \mathbf{g}_n^t} \mathbf{f}_m^z(\mathbf{x}) \cdot [\hat{\mathbf{n}}_l \times \mathbf{g}_n^t(\mathbf{x})] d\mathbf{x} \\ - \frac{jk_l}{4} \int_{\mathbf{f}_m^z} \mathbf{f}_m^z(\mathbf{x}) \cdot \int_{\mathbf{g}_n^t} \mathbf{g}_n^t(\mathbf{x}') \times \hat{\mathbf{R}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') H_1^{(2)}(k_l|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) d\mathbf{x}' d\mathbf{x}, \quad (2.42)$$

$$K_{mn}^{tz}(\mathbf{g}_m^t, \mathbf{f}_n^z, R_l) = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{g}_m^t = \mathbf{f}_n^z} \mathbf{g}_m^t(\mathbf{x}) \cdot [\hat{\mathbf{n}}_l \times \mathbf{f}_n^z(\mathbf{x})] d\mathbf{x} \\ - \frac{jk_l}{4} \int_{\mathbf{g}_m^t} \mathbf{g}_m^t(\mathbf{x}) \cdot \int_{\mathbf{f}_n^z} \mathbf{f}_n^z(\mathbf{x}') \times \hat{\mathbf{R}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') H_1^{(2)}(k_l|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) d\mathbf{x}' d\mathbf{x}, \quad (2.43)$$

$$L_{mn}^{tt}(\mathbf{g}_m^t, \mathbf{g}_n^t, R_l) = \frac{\omega\mu_l}{4} \int_{\mathbf{g}_m^t} \mathbf{g}_m^t(\mathbf{x}) \cdot \int_{\mathbf{g}_n^t} \mathbf{g}_n^t(\mathbf{x}') H_0^{(2)}(k_l|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) d\mathbf{x}' d\mathbf{x} \\ - \frac{1}{4\omega\epsilon_l} \int_{\mathbf{g}_m^t} \nabla \cdot \mathbf{g}_m^t(\mathbf{x}) \int_{\mathbf{g}_n^t} \nabla' \cdot \mathbf{g}_n^t(\mathbf{x}') H_0^{(2)}(k_l|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) d\mathbf{x}' d\mathbf{x}, \quad (2.44)$$

$$V_m^E = \int_{\mathbf{f}_m^z} \mathbf{f}_m^z(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{E}^i(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (2.45)$$

$$V_m^H = \int_{\mathbf{g}_m^t} \mathbf{g}_m^t(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{H}^i(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (2.46)$$

onde:

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \mathbf{x} - \mathbf{x}'. \quad (2.47)$$

2.3.4 Polarização TEz

Para polarização TEz por outro lado, as densidades de corrente elétrica e magnética são representadas pelas funções de base vetoriais $\mathbf{f}^t$ e $\mathbf{g}^z$, respectivamente. As [Equações \(2.9\)](#) e [\(2.10\)](#) são manipuladas e discretizadas levando ao seguinte sistema matricial ([GIBSON, 2014](#)):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}^{tt,TE} & \mathbf{Z}^{tz,TE} \\ \mathbf{Z}^{zt,TE} & \mathbf{Z}^{zz,TE} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}^J \\ \mathbf{I}^M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}^{t,TE} \\ \mathbf{V}^{z,TE} \end{bmatrix}, \quad (2.48)$$

onde as matrizes do lado direito são:

$$\mathbf{Z}^{tt,TE} = \mathbf{L}^{tt}(\mathbf{f}_{S_0}^t, \mathbf{f}_{S_0}^t, R_0) + \mathbf{L}^{tt}(\mathbf{f}_{S_1}^t, \mathbf{f}_{S_1}^t, R_1), \quad (2.49)$$

$$\mathbf{Z}^{tz,TE} = \mathbf{K}^{tz}(\mathbf{f}_{S_0}^t, \mathbf{g}_{S_0}^z, R_0) + \mathbf{K}^{tz}(\mathbf{f}_{S_1}^t, \mathbf{g}_{S_1}^z, R_1), \quad (2.50)$$

$$\mathbf{Z}^{zt,TE} = -\mathbf{K}^{zt}(\mathbf{g}_{S_0}^z, \mathbf{f}_{S_0}^t, R_0) - \mathbf{K}^{zt}(\mathbf{g}_{S_1}^z, \mathbf{f}_{S_1}^t, R_1), \quad (2.51)$$

$$\mathbf{Z}^{zz,TE} = \frac{\epsilon_0}{\mu_0} \mathbf{L}^{zz}(\mathbf{g}_{S_0}^z, \mathbf{g}_{S_0}^z, R_0) + \frac{\epsilon_1}{\mu_1} \mathbf{L}^{zz}(\mathbf{g}_{S_1}^z, \mathbf{g}_{S_1}^z, R_1), \quad (2.52)$$

os vetores do lado direito são:

$$\mathbf{V}^{t,TE} = \mathbf{V}^E(\mathbf{f}_{S_0}^t, R_0), \quad (2.53)$$

$$\mathbf{V}^{z,TE} = \mathbf{V}^H(\mathbf{g}_{S_0}^z, R_0), \quad (2.54)$$

e os coeficientes das densidades de corrente desconhecidas são:

$$\mathbf{I}^J = \mathbf{I}_{S_{01}}^{J,t}, \quad (2.55)$$

$$\mathbf{I}^M = \mathbf{I}_{S_{01}}^{M,z}. \quad (2.56)$$

2.3.5 Cálculo Numérico

Os elementos das funções matriciais e vetorais são calculados por quadratura gaussiana (MA; ROKHLIN; WANDZURA, 1996). Suas formas discretizadas são:

$$L_{mn}^{zz}(\mathbf{f}_m^z, \mathbf{f}_n^z, R_l) = \frac{\omega\mu_l}{4} \sum_{p=1}^M w(\mathbf{x}_p) f_m^z(\mathbf{x}_p) \sum_{q=1}^N w(\mathbf{x}_q) f_n^z(\mathbf{x}_q) H_0^{(2)}(k_l |\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_q|), \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned} K_{mn}^{zt}(\mathbf{f}_m^z, \mathbf{g}_n^t, R_l) &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^M w(\mathbf{x}_p) f_m^z(\mathbf{x}_p) g_n^t(\mathbf{x}_p) \Big|_{\mathbf{f}_m^z = \mathbf{g}_n^t} \\ &\quad - \frac{jk_l}{4} \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^N w(\mathbf{x}_p) w(\mathbf{x}_q) \mathbf{f}_m^z(\mathbf{x}_q) \cdot \mathbf{g}_n^t(\mathbf{x}_p) \times \hat{\mathbf{R}}(\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_q) H_1^{(2)}(k_l |\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_q|), \end{aligned} \quad (2.58)$$

$$\begin{aligned} K_{mn}^{tz}(\mathbf{g}_m^t, \mathbf{f}_n^z, R_l) &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^M w(\mathbf{x}_p) g_m^t(\mathbf{x}_p) f_n^z(\mathbf{x}_p) \Big|_{\mathbf{g}_m^t = \mathbf{f}_n^z} \\ &\quad - \frac{jk}{4} \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^N w(\mathbf{x}_p) w(\mathbf{x}_q) \mathbf{g}_m^t(\mathbf{x}_p) \cdot \mathbf{f}_n^z(\mathbf{x}_q) \times \hat{\mathbf{R}}(\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_q) H_1^{(2)}(k_l |\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_q|), \end{aligned} \quad (2.59)$$

$$\begin{aligned} L_{mn}^{tt}(\mathbf{g}_m^t, \mathbf{g}_n^t, R_l) &= \frac{\omega\mu_l}{4} \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^N w(\mathbf{x}_p) \mathbf{g}_m^t(\mathbf{x}_p) \cdot w(\mathbf{x}_q) \mathbf{g}_n^t(\mathbf{x}_q) H_0^{(2)}(k_l |\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_q|) \\ &\quad - \frac{1}{4\omega\epsilon_l} \sum_{p=1}^M \nabla \cdot \mathbf{g}_m^t(\mathbf{x}_p) \sum_{q=1}^N \nabla' \cdot \mathbf{g}_n^t(\mathbf{x}_q) H_0^{(2)}(k_l |\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_q|), \end{aligned} \quad (2.60)$$

$$V_m^E(\mathbf{f}_m^z, R_l) = \sum_{p=1}^M w(\mathbf{x}_p) \mathbf{f}_m^z(\mathbf{x}_p) \cdot \mathbf{E}^i(\mathbf{x}_p), \quad (2.61)$$

$$V_m^H(\mathbf{g}_m^t, R_l) = \sum_{p=1}^M w(\mathbf{x}_p) \mathbf{g}_m^t(\mathbf{x}_p) \cdot \mathbf{H}^i(\mathbf{x}_p), \quad (2.62)$$

onde $w(\mathbf{x})$ é o peso da quadratura gaussiana, N e M são a quantidade de pontos de integração para função de base e teste, respectivamente. Para remover a singularidade da função de Hankel, basta escolher um número ímpar para M e par para N (ou vice-versa) quando as funções de base e peso coincidirem.

2.3.6 Cálculo dos Campos Elétrico e Magnético

Uma vez em que $\mathbf{I}^{J(l)}$ e $\mathbf{I}^{M(l)}$ são encontrados, o campo em uma região é dado pela [Equação \(2.63\)](#) para polarização TMz e pela [Equação \(2.64\)](#) para polarização TEz ([GIBSON, 2014](#)):

$$E_z(\mathbf{x}) = -\frac{k_l^2}{4\omega\epsilon_l} \int_S \mathbf{J}(\mathbf{x}') H_0^{(2)}(k_l|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) d\mathbf{x}' - j\frac{k_l}{4} \int_S (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \times \mathbf{M}(\mathbf{x}') \frac{H_1^{(2)}(k_l|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}' + E_z^i(\mathbf{x}), \quad (2.63)$$

$$H_z(\mathbf{x}) = -\frac{k_l^2}{4\omega\mu_l} \int_S \mathbf{M}(\mathbf{x}') H_0^{(2)}(k_l|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) d\mathbf{x}' + j\frac{k_l}{4} \int_S (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \times \mathbf{J}(\mathbf{x}') \frac{H_1^{(2)}(k_l|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}' + H_z^i(\mathbf{x}). \quad (2.64)$$

2.4 Resultados Numéricos

A fim de avaliar o funcionamento do método, o problema canônico do espalhamento eletromagnético de uma onda plana por um cilindro circular dielétrico foi estudado, visto que há solução modal para comparação ([HARRINGTON, 1961](#)). O cilindro considerado possui raio a , permissividade elétrica relativa ϵ_r e permeabilidade magnética relativa μ_r . Os nós que formam o domínio das funções de base e das funções de peso foram espalhados uniformemente no contorno do cilindro como apresentado na [Figura 5](#). A integração numérica foi realizada utilizando quadratura gaussiana com $M = 2$ e $N = 3$ (ver [Seção 2.3.5](#)). Os principais parâmetros estão resumidos na [Tabela 1](#).

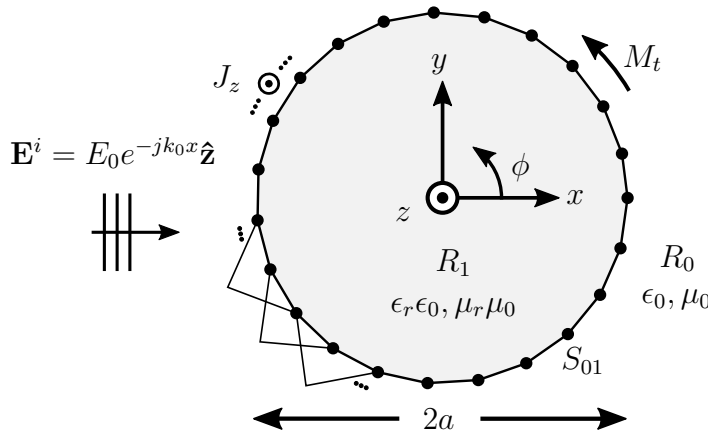


Figura 5 – Espalhamento Eletromagnético de uma Onda Plana com Polarização TMz.

As densidades de corrente obtidas estão apresentadas nas [Figuras 6 e 7](#) para polarização TMz e nas [Figuras 8 e 9](#) para polarização TEz. Os resultados numéricos foram comparados com a solução modal incluindo os 50 primeiros termos ([HARRINGTON,](#)

Tabela 1 – Parâmetros do Caso de Estudo - MoM

Propriedades	Valores
Permissividade Elétrica Relativa $[\epsilon_r]$	2,0
Permeabilidade Magnética Relativa $[\mu_r]$	1,0
Raio do Cilindro $[a]$	$1,0 \lambda_0$
Número de Nós	300

1961). Visto que o cálculo do campo elétrico ou magnético é um processo integral das densidades de corrente elétrica e magnética (ver Seção 2.3.6), os resultados apresentados são suficientes para garantir a convergência do método.

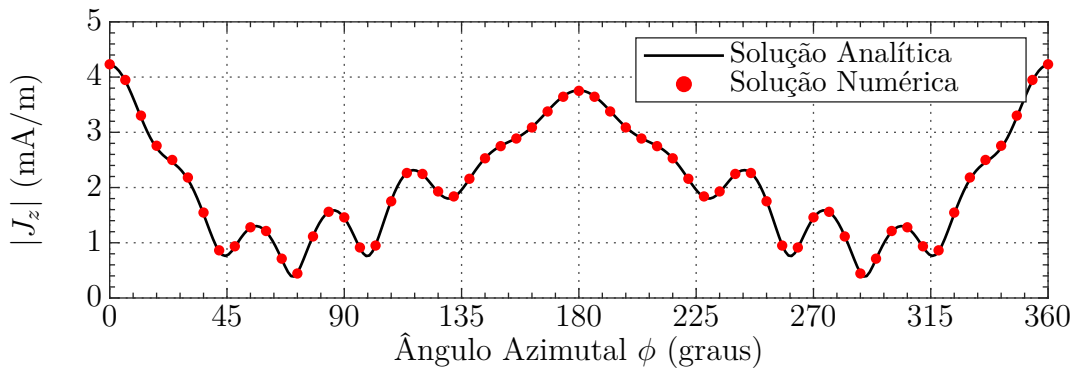


Figura 6 – Polarização TMz - Densidade de Corrente Elétrica - MoM.

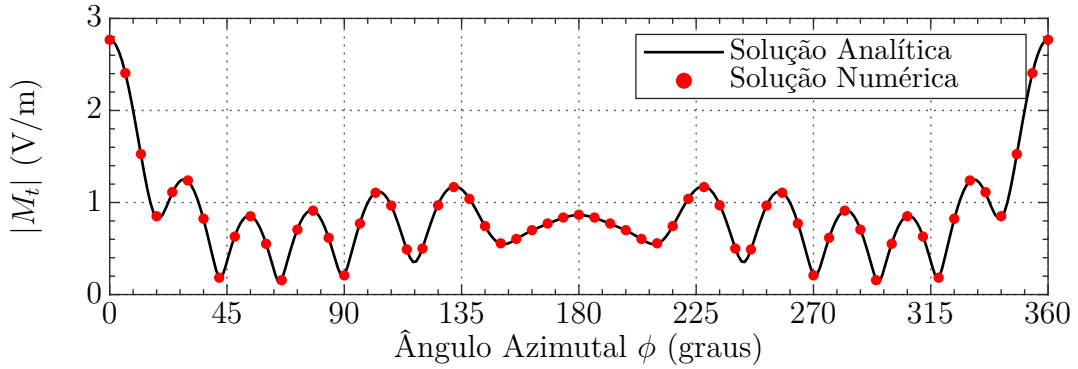


Figura 7 – Polarização TMz - Densidade de Corrente Magnética - MoM.

Para ambas polarizações os resultados numéricos são próximos dos resultados analíticos. Nota-se também que para ambos os casos, a densidade de corrente elétrica não tem a mesma ordem de grandeza da densidade de corrente magnética. Portanto, a pré multiplicação da base elétrica por um fator η_0 pode melhorar a estabilidade do método.

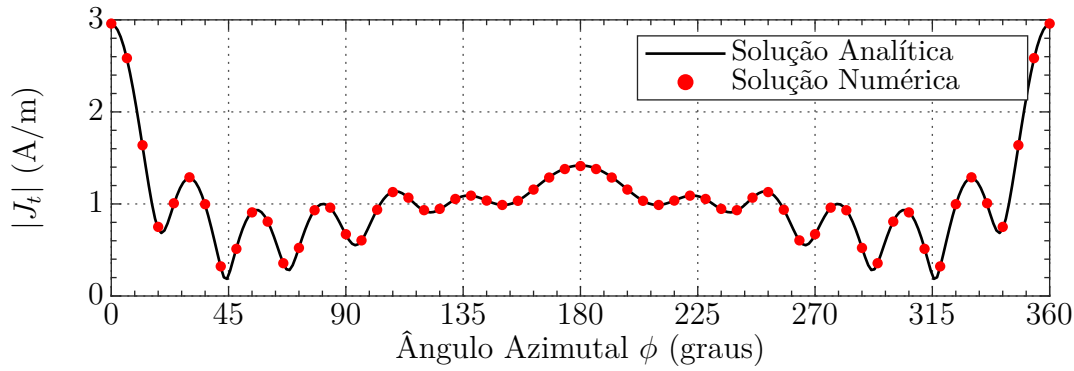


Figura 8 – Polarização TEz - Densidade de Corrente Elétrica - MoM.

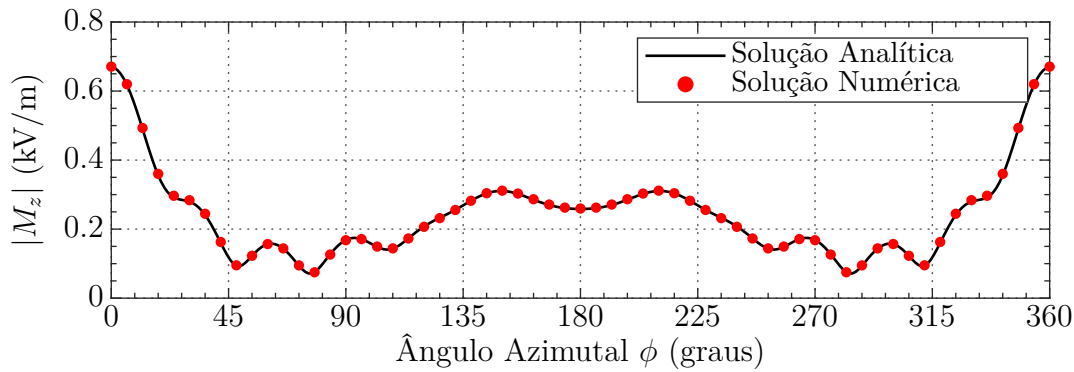


Figura 9 – Polarização TEz - Densidade de Corrente Magnética - MoM.

2.5 Conclusões Parciais

Como visto, o MoM utiliza a aproximação das equações integrais do campo elétrico e magnético. Os resultados encontrados são bons desde que o número de bases utilizadas seja no mínimo 10 por comprimento de onda no perímetro do dielétrico, em que este comprimento de onda é o menor entre todas as regiões. Embora o método possua matrizes cheias, o número de funções de base, e consequentemente o número de nós, é relativamente menor que em outros métodos numéricos, visto que as integrais são de linhas e não de áreas. Todavia, a desvantagem deste método é que não é possível modelar meios não homogêneos, já que seria necessário um altíssimo número de regiões para modelar a transição da permissividade ou permeabilidade, o tornando ineficiente comparados aos demais métodos numéricos.

No Capítulo a seguir o mesmo problema de espalhamento eletromagnético é abordado, todavia utilizando uma técnica numérica sem malha capaz de modelar materiais não homogêneos.

3 Método sem Malha

Neste Capítulo é apresentada uma formulação do MLPG e sua aplicação a problemas de espalhamento eletromagnético em duas dimensões. O formalismo empregado aqui é destinado ao desenvolvimento do método híbrido estudado no [Capítulo 4](#).

3.1 Método dos Resíduos Ponderados

O método dos resíduos ponderados é um método clássico e simples, mas extremamente poderoso na aproximação de sistemas de Equações Diferenciais Parciais (PDFs, *Partial Differential Equations*) em sua formulação fraca ([LIU, 2009](#)). Considerando uma PDF genérica definida em uma região Ω_0 limitada por uma fronteira Γ_0 em notação funcional:

$$\mathbf{L}(u(\mathbf{x})) = 0, \quad (3.1)$$

onde $\mathbf{L}$ é um funcional linear e $u(\mathbf{x})$ é uma função escalar desconhecida que varia com a posição espacial $\mathbf{x}$. Em problemas de espalhamento eletromagnético em duas dimensões, assumindo que não há variação na direção z ($\partial/\partial z = 0$), a equação a ser solucionada é a equação de Helmholtz não homogênea na forma forte ([PETERSON et al., 1998](#)):

$$\mathbf{L}(u(\mathbf{x})) = \nabla \cdot \left(\frac{1}{p(\mathbf{x})} \nabla u(\mathbf{x}) \right) + k_0^2 q(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}). \quad (3.2)$$

Para polarização TMz, u é a componente z do campo elétrico E_z , p é a permeabilidade magnética relativa μ_r , e q é a permissividade elétrica relativa ϵ_r . Para a polarização TEz, u é a componente z do campo magnético H_z , p é a permissividade elétrica relativa ϵ_r , e q é a permeabilidade magnética relativa μ_r . Nos dois casos, k_0 é o número de onda do espaço livre ($k_0 = 2\pi/\lambda_0$, onde λ_0 é o comprimento de onda do espaço livre) e f representa as fontes (excitações), caso existam.

Em geral, é difícil obter a solução exata $u(\mathbf{x})$ que satisfaz a [Equação \(3.1\)](#). Utiliza-se, portanto, uma aproximação $u^h(\mathbf{x})$ construída a partir da soma de funções de forma conhecidas, gerando um resíduo:

$$R(\mathbf{x}) = \mathbf{L}(u^h(\mathbf{x})) \neq 0. \quad (3.3)$$

Então, se faz necessário encontrar uma função de teste $\psi(\mathbf{x})$, também definida em Ω_0 , tal que o resíduo se torne nulo em uma integral ponderada sobre o domínio do problema. Esta abordagem é conhecida como método dos resíduos ponderados ([LIU, 2009](#)):

$$\int_{\Omega_0} \psi(\mathbf{x}) R(\mathbf{x}) d\Omega = 0. \quad (3.4)$$

Através do método dos resíduos ponderados, a forma fraca da [Equação \(3.2\)](#) é:

$$\int_{\Omega_0} \psi(\mathbf{x}) \nabla \cdot \left(\frac{1}{p(\mathbf{x})} \nabla u^h(\mathbf{x}) \right) d\Omega + \int_{\Omega_0} \psi(\mathbf{x}) k_0^2 q(\mathbf{x}) u^h(\mathbf{x}) d\Omega = \int_{\Omega_0} \psi(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\Omega. \quad (3.5)$$

Para reduzir a ordem de diferenciabilidade sobre a função de forma, aplica-se a identidade vetorial $\nabla \cdot (f \mathbf{A}) = f(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla f)$ e o teorema da divergência no primeiro termo da [Equação \(3.5\)](#) ([STEWART, 2012](#)), o que resulta em:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} \frac{\nabla \psi(\mathbf{x}) \cdot \nabla u^h(\mathbf{x})}{p(\mathbf{x})} d\Omega - \int_{\Omega_0} \psi(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) k_0^2 u^h(\mathbf{x}) d\Omega \\ - \int_{\Gamma_0} \frac{\psi(\mathbf{x}) \nabla u^h(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{n}}}{p(\mathbf{x})} d\Gamma = \int_{\Omega_0} \psi(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\Omega. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Vale ressaltar que o domínio de quadratura não é necessariamente o domínio total do problema. Quando domínios locais de quadratura são utilizados, o método é conhecido por “Método dos Resíduos Ponderados Local”, neste caso a união dos domínios locais deve ser igual ao domínio total Ω_0 ([LIU, 2009](#)).

3.2 Função de Forma: Aproximação do RPIM

Na aproximação da função de forma utilizando RPIM com reprodução polinomial ([LIU, 2009](#)), u^h em um ponto $\mathbf{x}$ é:

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n R_i(\mathbf{x}) a_i + \sum_{j=1}^m P_j(\mathbf{x}) b_j = \mathbf{R}^T(\mathbf{x}) \mathbf{a} + \mathbf{P}^T(\mathbf{x}) \mathbf{b}, \quad (3.7)$$

onde a_i é o coeficiente da Função de Base Radial (RBF, *Radial Base Function*) R_i , b_j é o coeficiente do monômio P_j da base polinomial, n é o número de nós do domínio de suporte de $\mathbf{x}$ e m é o número de monômios da base polinomial. Em notação vetorial:

$$\mathbf{R}^T(\mathbf{x}) = [R_1(\mathbf{x}), R_2(\mathbf{x}), \dots, R_n(\mathbf{x})], \quad (3.8)$$

$$\mathbf{P}^T(\mathbf{x}) = [P_1(\mathbf{x}), P_2(\mathbf{x}), \dots, P_m(\mathbf{x})]. \quad (3.9)$$

Para RBF R_i , entre as diversas possibilidades, as duas mais utilizadas são as funções multiquadrática e exponencial, cujos parâmetros independem da dimensão, apresentadas nas [Equações \(3.10\)](#) e [\(3.11\)](#) ([LIU, 2009](#)), respectivamente:

$$R_i(\mathbf{x}) = (r_i^2 + (\alpha_c d_c)^2)^q, \quad (3.10)$$

$$R_i(\mathbf{x}) = \exp \left[-\alpha_c \left(\frac{r_i}{d_c} \right)^2 \right], \quad (3.11)$$

em que $r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$, α_c e q são parâmetros adimensionais, e d_c é a distância característica, para a qual usualmente se utiliza a distância internodal média.

Definindo os vetores $\mathbf{a}^T = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ e $\mathbf{b}^T = [b_1, b_2, \dots, b_n]$, seus coeficientes são calculados forçando a interpolação pelos n nós do domínio de suporte:

$$\mathbf{u}_s = \mathbf{R}_Q \mathbf{a} + \mathbf{P}_m \mathbf{b}, \quad (3.12)$$

onde as matrizes de momento $\mathbf{R}_Q$ e $\mathbf{P}_m$ são dadas por:

$$\mathbf{R}_Q = \begin{bmatrix} R_1(r_1) & R_2(r_1) & \dots & R_m(r_1) \\ R_1(r_2) & R_2(r_2) & \dots & R_m(r_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_1(r_n) & R_2(r_n) & \dots & R_m(r_n) \end{bmatrix}_{(n \times m)}, \quad (3.13)$$

$$\mathbf{P}_m^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_m(\mathbf{x}_1) & P_m(\mathbf{x}_2) & \dots & P_m(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix}_{(m \times n)}. \quad (3.14)$$

O termo polinomial deve satisfazer uma condição extra para garantir que a aproximação seja única (GOLBERG; CHEN; BOWMAN, 1999):

$$\mathbf{P}_m^T \mathbf{a} = 0. \quad (3.15)$$

Além da possibilidade de resolver diretamente o sistema formado pelas Equações (3.12) e (3.15), dado que uma delas é homogênea e $\mathbf{R}_Q$ é definida positiva, uma estratégia mais eficiente é dada pela manipulação:

$$u^h(\mathbf{x}) = [\mathbf{R}^T(\mathbf{x})\mathbf{S}_a + \mathbf{P}^T(\mathbf{x})\mathbf{S}_b]\mathbf{u}_s = \Phi(\mathbf{x})\mathbf{u}_s, \quad (3.16)$$

onde:

$$\mathbf{b} = \mathbf{S}_b \mathbf{u}_s, \quad \mathbf{S}_b = [\mathbf{P}_m^T \mathbf{R}_Q^{-1} \mathbf{P}_m]^{-1} [\mathbf{R}_Q^{-1} \mathbf{P}_m]^T, \quad (3.17)$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{S}_a \mathbf{u}_s, \quad \mathbf{S}_a = \mathbf{R}_Q^{-1} - \mathbf{R}_Q^{-1} \mathbf{P}_m \mathbf{S}_b, \quad (3.18)$$

em que $\mathbf{u}_s$ contém os coeficientes desconhecidos e Φ^T contém as funções de forma para cada nó de suporte. As funções de forma e suas derivadas direcionais são:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{R}^T(\mathbf{x})\mathbf{S}_a + \mathbf{P}^T(\mathbf{x})\mathbf{S}_b, \quad (3.19)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \Phi(\mathbf{x}) = \frac{\partial \Phi(\mathbf{x})}{\partial n} = \frac{\partial \mathbf{R}^T(\mathbf{x})}{\partial n} \mathbf{S}_a + \frac{\partial \mathbf{P}^T(\mathbf{x})}{\partial n} \mathbf{S}_b. \quad (3.20)$$

As Figuras 10 e 11 apresentam a função de forma e suas derivadas cartesianas de primeira ordem associadas ao nó situado na origem, respectivamente. Em sua construção foram utilizados 25 nós de suporte uniformemente distribuídos em $x \in [-2, 2]$ e $y \in [-2, 2]$.

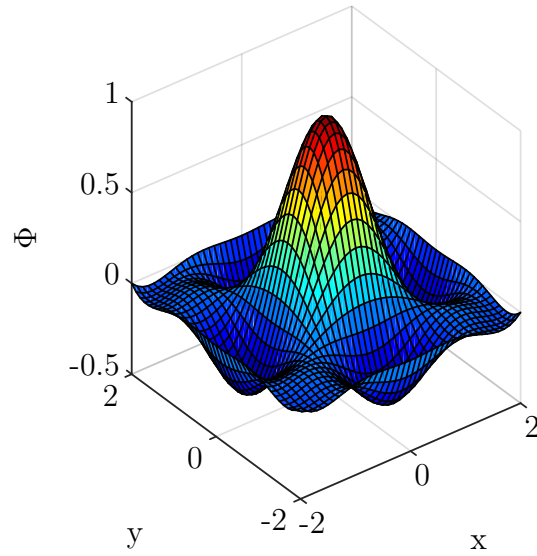


Figura 10 – Função de Forma RPIM ($\alpha_c = 3,00$, $q = 1,03$ e $dc = 1,00$).

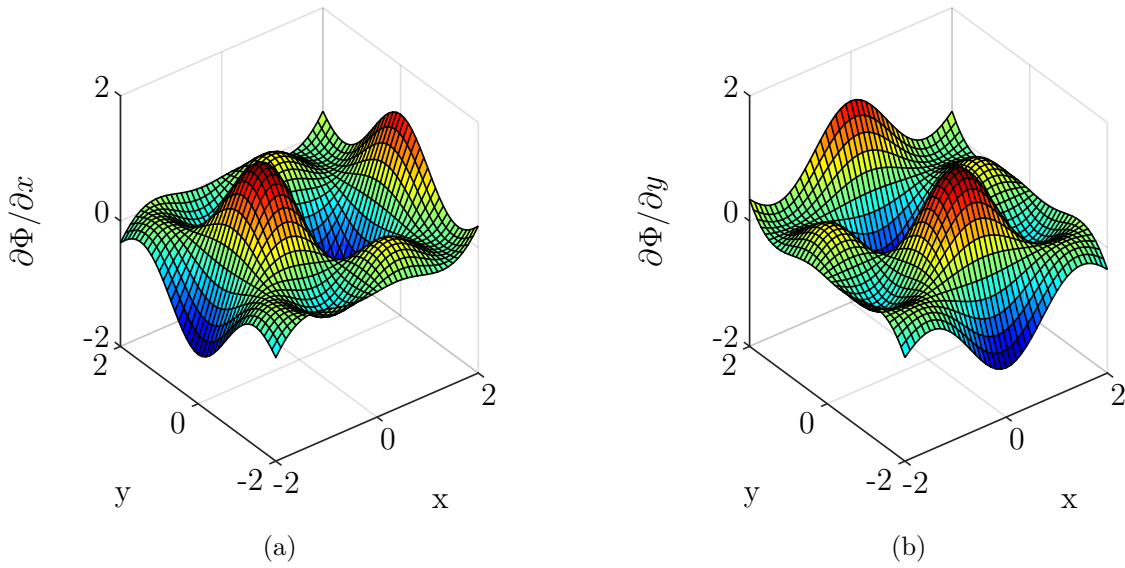


Figura 11 – Derivadas da Função de Forma RPIM ($\alpha_c = 3,00$, $q = 1,03$ e $dc = 1,00$).

3.3 Formulação proposta para MLPG

Diferentemente do método original ([ATLURI; ZHU, 1998](#)), em que funções de forma são construídas baseadas no método dos Mínimos Quadrados Móveis (MLS, *Moving Least Squares*), a formulação proposta utiliza funções de forma baseadas em RPIM e as condições de contorno são impostas por colocação ([NICOMEDES; MESQUITA; MOREIRA, 2012](#)).

3.3.1 Função de Teste

Como na formulação geral do MLPG há liberdade de escolha da função de teste independente da função de forma (LIU, 2009), escolheu-se como função de teste a *spline* cúbica com domínio circular (LIU; GU, 2005):

$$\psi(s) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4s^2 + 4s^3 & s < \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4s + 4s^2 - \frac{4}{3}s^3 & \frac{1}{2} \leq s < 1 \\ 0 & s \geq 1 \end{cases} \quad (3.21)$$

em que $s = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|/R_c$, onde $\mathbf{x}$ é o ponto em que a função é aproximada, $\mathbf{x}_i$ é o nó no centro do domínio de teste e R_c é o raio do domínio de teste. Mesmo não sendo obrigatório que o domínio de quadratura (subdomínio), onde as integrais são calculadas numericamente, seja o mesmo domínio da função de teste (domínio de teste), nesta formulação os dois são iguais visto que tal escolha acarreta na simplificação da Equação (3.6).

3.3.2 Nós de Suporte

A Figura 12 apresenta à esquerda a formulação normalmente utilizada e à direita a formulação proposta. Na formulação usual, o domínio de teste é definido utilizando o esquema T2L e os nós de suporte de cada ponto de integração são escolhidos através do esquema T6 (LIU, 2009). Na formulação proposta, o domínio de teste é circular e os nós de suporte são escolhidos de modo que todos pontos de integração estejam dentro de uma região de interpolação, esta região sendo definida pelo polígono formado pelos nós de suporte. Sendo implementado por uma área de procura maior que o domínio de teste.

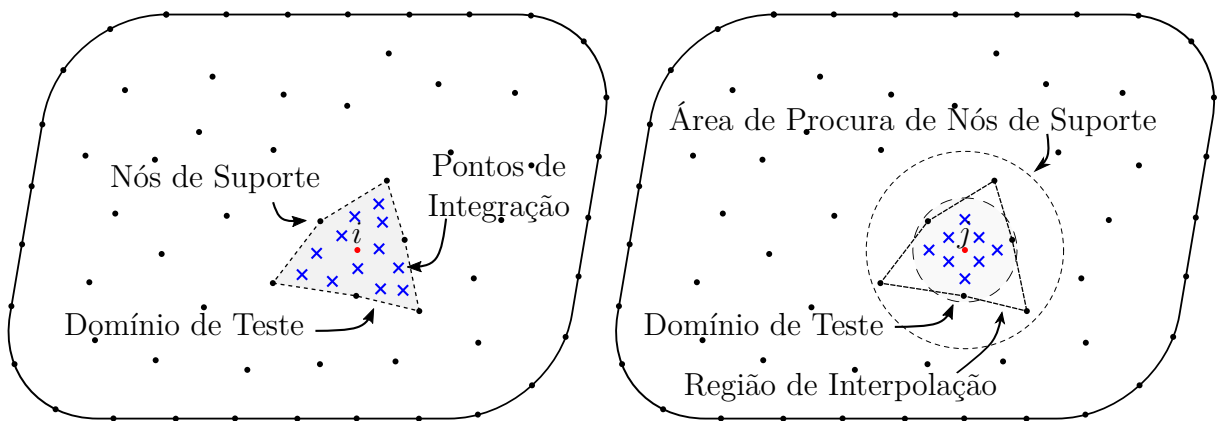


Figura 12 – Estratégia de Escolha de Nós de Suporte.

A vantagem desta formulação proposta é a diminuição da complexidade de implementação do método sem malha visto que a integração é realizada em domínios circulares e a não necessidade de uma malha de fundo para buscar os nós de suporte.

3.3.3 Estratégia MLPG com Colocação

Essa estratégia, ilustrada na Figura 13, começa espalhando nós pelo domínio computacional. Esses nós são divididos em dois grupos, o primeiro composto pelos nós internos N^i e o segundo composto pelos nós na fronteira N^e . Para cada nó, uma função de forma ϕ é associada e seus nós de suporte são escolhidos dentro de um raio R_s . Para nós internos, uma função teste ψ também é associada. Essa função teste tem um domínio circular com raio R_c .

Para o nó i , o qual o domínio de teste associado Ω_i definido por Γ_i não intercepta Γ_0 , a integração numérica é realizada normalmente construindo as funções de forma utilizando todos os nós de suporte dentro de R_s . Para os demais nós internos em Ω_0 , cujos domínios de teste interceptam Γ_0 , como o nó j , seus domínios de teste Γ_j são diminuídos para oscular Γ_0 . Todavia, R_s continua inalterado. Finalmente, os nós na borda como k são tratados pelo método de colocação.

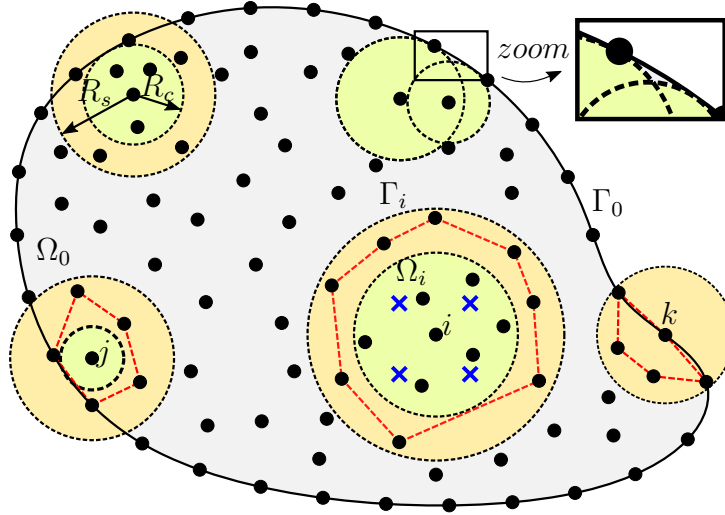


Figura 13 – Ilustração do Método Sem Malha Proposto.

Nota-se que o método é conforme visto que não há descontinuidade das funções de forma, já que todos os nós de suporte são utilizados em um subdomínio. Ademais, resalta-se a importância da escolha de R_c e R_s para que os nós de integração estejam dentro da região de interpolação. A Figura 14 apresenta a mesma função da Figura 10, com os mesmos nós de suporte, mas com seu domínio estendido para $x \in [-4, 4]$ e $y \in [-4, 4]$. Nota-se que a função diverge, podendo levar a divergência do método.

3.4 MLPG Aplicado a Espalhamento Eletromagnético

Em espalhamento eletromagnético de cilindros dielétricos iluminados por ondas planas, uma condição absorvente é colocada distante do objeto espalhador para truncar o domínio computacional. Na região interior, para os nós internos N^i , onde não há presença

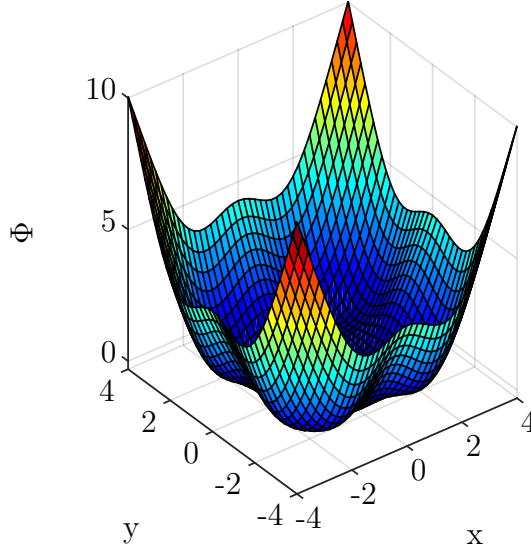


Figura 14 – Extensão da Função de Forma RPIM ($\alpha_c = 3,00$, $q = 1,03$ e $dc = 1,00$).

de fontes, o problema pode ser modelado pela [Equação \(3.6\)](#), no subdomínio Ω_i :

$$\int_{\Omega_i} \frac{\nabla \psi(\mathbf{x}) \cdot \nabla u^h(\mathbf{x})}{p(\mathbf{x})} d\Omega - \int_{\Omega_i} \psi(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) k_0^2 u^h(\mathbf{x}) d\Omega - \int_{\Gamma_i} \frac{\psi(\mathbf{x}) \nabla u^h(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{n}}}{p(\mathbf{x})} d\Gamma = 0, \quad (3.22)$$

onde $p(\mathbf{x})$ e $q(\mathbf{x})$ são contínuos. Devido a estratégia adotada, visto que ψ se anula em Γ_i , essa equação é simplificada, levando a:

$$\int_{\Omega_i} \frac{\nabla \psi(\mathbf{x}) \cdot \nabla u^h(\mathbf{x})}{p(\mathbf{x})} d\Omega - \int_{\Omega_i} \psi(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) k_0^2 u^h(\mathbf{x}) d\Omega = 0. \quad (3.23)$$

A [Equação \(3.23\)](#) é descrita em forma matricial na forma $\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}$. Onde a iteração entre os nós globais i e j é dada por $\mathbf{K}$ e seus elementos são:

$$K_{ij} = \int_{\Omega_i} \frac{\nabla \psi_i(\mathbf{x}) \cdot \nabla \phi_j(\mathbf{x})}{p(\mathbf{x})} d\Omega - \int_{\Omega_i} k_0^2 q(\mathbf{x}) \psi_i(\mathbf{x}) \phi_j(\mathbf{x}) d\Omega. \quad (3.24)$$

Se o nó global j associado à função de forma ϕ_j não fizer parte dos nós de suporte do subdomínio associado ao nó i com função de teste ψ_i , K_{ij} é nulo. Já f_i é nulo para todos nós internos, visto que não há fontes.

Na condição absorvente, ou seja, nos nós na fronteira N^e , o método de colocação é utilizado para impor as condições de contorno. Em espalhamento eletromagnético, uma condição absorvente comumente utilizada é a condição de radiação de primeira ordem de Bayliss-Turkel ([JIN, 2015](#)):

$$\nabla u^s(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{n}} + \left(jk_0 + \frac{1}{2|\rho|} \right) u^s(\mathbf{x}), \quad (3.25)$$

onde $|\rho|$ é a distância da fronteira circular até a origem do sistema de coordenadas e o índice s indica a componente espalhada do campo.

Como a variável de interesse é o campo total e sabe-se que o este é a soma do campo incidente mais o campo espalhado, $u(\mathbf{x}) = u^i(\mathbf{x}) + u^s(\mathbf{x})$, tem-se que:

$$\nabla u(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{n}} + \left(jk_0 + \frac{1}{2|\rho|} \right) u(\mathbf{x}) = \nabla u^i(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{n}} + \left(jk_0 + \frac{1}{2|\rho|} \right) u^i(\mathbf{x}). \quad (3.26)$$

Finalmente, os nós sobre a fronteira são agregados ao sistema matricial. A equação [Equação \(3.26\)](#) em forma matricial é dada por:

$$K_{ij} = \nabla \phi_j(\mathbf{x}_i) \cdot \hat{\mathbf{n}} + \left(jk_0 + \frac{1}{2|\rho|} \right) \phi_j(\mathbf{x}_i), \quad (3.27)$$

$$f_i = \nabla u^i(\mathbf{x}_i) \cdot \hat{\mathbf{n}} + \left(jk_0 + \frac{1}{2|\rho|} \right) u^i(\mathbf{x}_i), \quad (3.28)$$

em que u^i é o campo incidente da onda plana, portanto conhecido.

Por fim, o sistema é matricial é resolvido e a [Equação \(3.16\)](#) é utilizada para calcular o campo. Vale ressaltar, que para garantir a convergência do método é necessário que a distribuição dos nós internos seja feita de forma que ([NICOMEDES; MESQUITA; MOREIRA, 2012](#)):

$$\bigcup_{i \in N^i} \Omega_i \approx \Omega_0, \quad (3.29)$$

como ilustrado na [Figura 13](#).

3.4.1 Tratamento de Descontinuidade

No espalhamento eletromagnético de uma onda plana com polarização TE_z, na troca do dielétrico para o espaço livre, há uma descontinuidade da primeira derivada do campo magnético:

$$\frac{1}{\epsilon_r^-} \nabla H_z^- \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{\epsilon_r^+} \nabla H_z^+ \cdot \hat{\mathbf{n}}, \quad (3.30)$$

onde H_z^- é o campo magnético em um lado da interface e H_z^+ é o campo do outro lado. Para o caso geral, $p(\mathbf{x})$ é descontínuo.

Como as funções de forma utilizadas são contínuas com derivadas de primeira ordem também contínua, esse comportamento não pode ser reproduzido. Uma forma de resolver esse problema é criando uma interface sobre a descontinuidade ([LI et al., 2003](#)). Outra forma considerada neste trabalho é utilizando a ideia de aproximar a descontinuidade por uma função contínua de ordem alta. Por exemplo, para modelar um cilindro dielétrico circular com uma variação constante de permissividade dielétrica, utiliza-se a seguinte função ([KASHDAN; TURKEL, 2006](#)):

$$\epsilon(z) = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{2} \frac{315}{128} z \left(1 - \frac{4z^2}{3} + \frac{6z^4}{5} - \frac{4z^6}{7} + \frac{z^8}{9} \right), \quad (3.31)$$

onde $z = \frac{\rho - \rho_0}{\delta}$. Neste caso, a transição é feita de forma contínua entre $\rho_0 - \delta$ e $\rho_0 + \delta$.

Um perfil de descontinuidade aproximado pela [Equação \(3.31\)](#) é apresentado na [Figura 15](#). Observa-se a transição suave da permissividade elétrica relativa e também esta função tem as quatro primeiras derivadas contínuas.

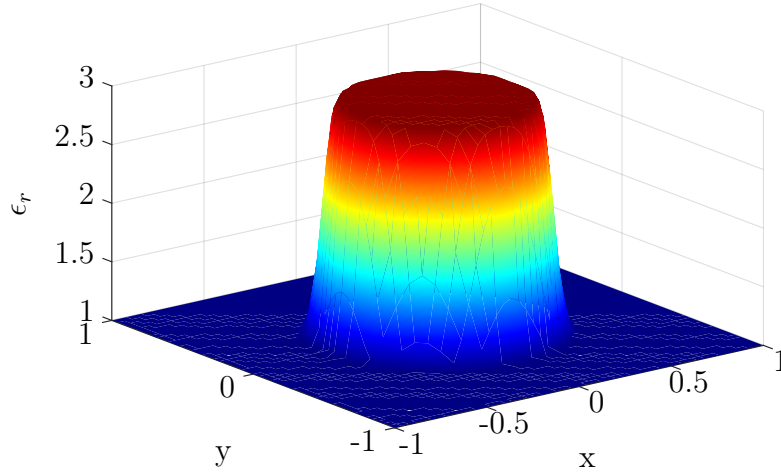


Figura 15 – Perfil de Permissividade Elétrica Relativa ($\rho_0 = 0,5$, $\epsilon_1 = 1$, $\epsilon_2 = 3$ e $\delta = 0,1$).

3.5 Resultados Numéricos

A fim de avaliar o funcionamento do método, o mesmo problema canônico resolvido no capítulo anterior foi analisado ([Seção 2.4](#)). O cilindro considerado possui raio a , permissividade elétrica relativa ϵ_r e permeabilidade magnética relativa μ_r . O caso estudado está ilustrado na [Figura 16](#).

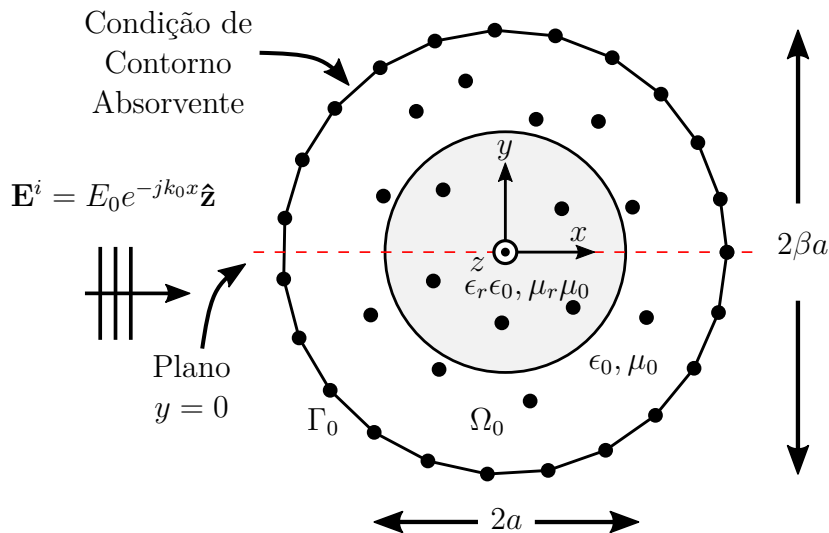


Figura 16 – Espalhamento Eletromagnético de uma Onda Plana com Polarização TMz.

Os nós foram espalhados no domínio computacional e em sua borda uniformemente como ilustrado na [Figura 17](#). A integração numérica foi realizada utilizando quadratura gaussiana com 60 pontos de integração em cada domínio de teste. A função de forma foi construída pela aproximação RPIM com reprodução de polinômios de primeira ordem. Embora ambas RBFs apresentadas tenham sido testadas, [Equações \(3.10\) e \(3.11\)](#), a multiquadrática obteve menores erros com os parâmetros $\alpha_c = 3,00$ e $q = 1,03$ ([LIU, 2009](#)), sendo a RBF adotada. Os principais parâmetros estão apresentados na [Tabela 2](#).

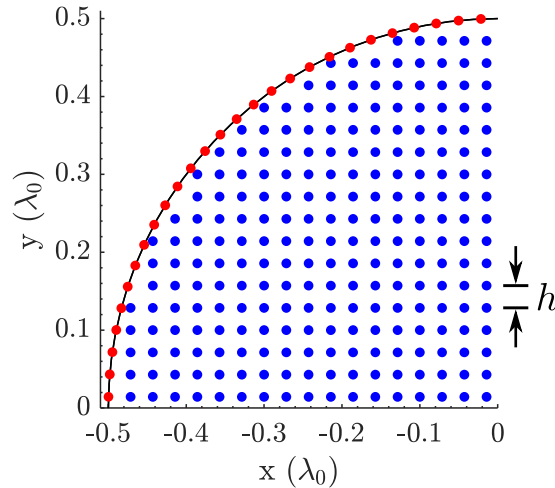


Figura 17 – Distribuição Uniforme de Nós (1/4 do Domínio Computacional).

Tabela 2 – Parâmetros do Caso de Estudo - MLPG

Propriedades	Valores
Permissividade Elétrica Relativa $[\epsilon_r]$	3,0
Permeabilidade Magnética Relativa $[\mu_r]$	1,0
Raio do Cilindro $[a]$	$1/3 \lambda_0$
Fator de Distância $[\beta]$	3,0
Delta de Transição $[\delta]$	$1/3 h$
Raio do Domínio de Teste $[R_c]$	$1,5 h$
Raio de Procura dos Nós de Suporte $[R_s]$	2,0
Número de Nós Internos TMz	936
Número de Nós Internos TEz	1462
Número de Nós na Fronteira TMz	109
Número de Nós na Fronteira TEz	138

Os resultados dos campos calculados estão apresentados na [Figura 18](#) e na [Figura 19](#) para polarização TMz e TEz, respectivamente. Os campos foram calculados e comparados com a solução modal analítica utilizando sobre o plano $y = 0$ (ver [Figura 16](#)). Percebe-se que em ambos os casos, os resultados concordam com a solução analítica. Observa-se também, que o campo magnético na polarização TEz representado na [Figura 19](#) é contínuo mas possui derivada descontínua de primeira ordem na transição do espaço livre para o dielétrico.

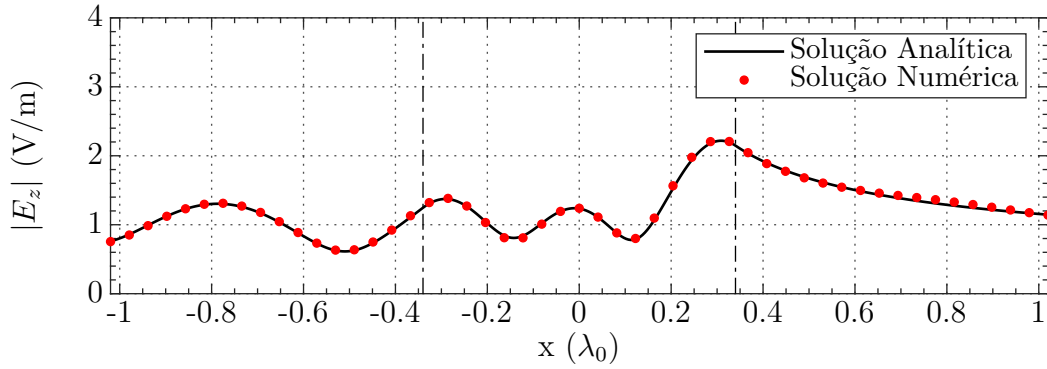


Figura 18 – Amplitude do Campo Elétrico para Polarização TMz sobre $y = 0$ - MLPG.

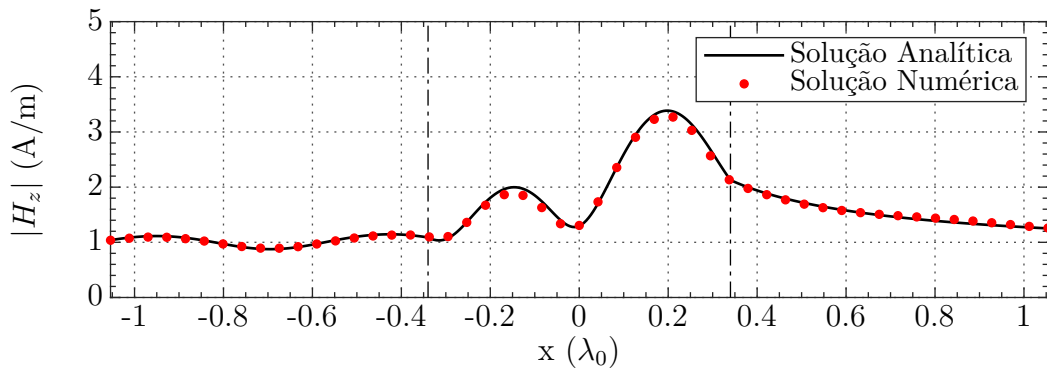


Figura 19 – Amplitude do Campo Magnético para Polarização TEz sobre $y = 0$ - MLPG.

3.6 Conclusões Parciais

Como visto, o método sem malha utiliza a equação de Helmholtz não homogênea para os nós internos e a condição de radiação de primeira ordem de Bayliss-Turkel imposta na fronteira por colocação. Os resultados encontrados são bons caso a fronteira esteja suficientemente afastada do objeto. Caso isto não aconteça, há uma oscilação do campo numérico externo devido a reflexão do campo na fronteira, já que o casamento não é perfeito. Percebeu-se também que o número de nós no caso TEz foi maior que no caso TMz para obter erros relativos próximos nos dois casos devido ao tratamento de descontinuidade. Ademais, houve um aumento considerável no número de nós comparado ao MoM.

No Capítulo a seguir o mesmo problema de espalhamento eletromagnético é abordado, todavia utilizando uma técnica numérica híbrida entre o MLPG e o MoM.

4 Método Híbrido Proposto MLPG-MoM

Neste Capítulo é apresentada uma formulação proposta de um método numérico híbrido entre o método sem malha e o método dos momentos. Tal formulação é aplicada a problemas de espalhamento eletromagnético em duas dimensões.

4.1 Formulação

A formulação proposta para unir o método sem malha e o método dos momentos é derivada diretamente do teorema da equivalência (HARRINGTON, 1961). Neste caso em específico, todo espaço contendo uma região de material dielétrico é dividido em dois problemas equivalentes como apresentado na Figura 20. O primeiro problema contém a região com material dielétrico Ω_0 que possui permissividade elétrica relativa ϵ_r e permeabilidade magnética relativa μ_r . O segundo problema contém a porção restante do espaço, ou seja, o espaço livre R_0 com parâmetros ϵ_0 e μ_0 . Assim sendo, nós são espalhados no domínio Ω_0 , inclusive sobre seu limite Γ_0 .

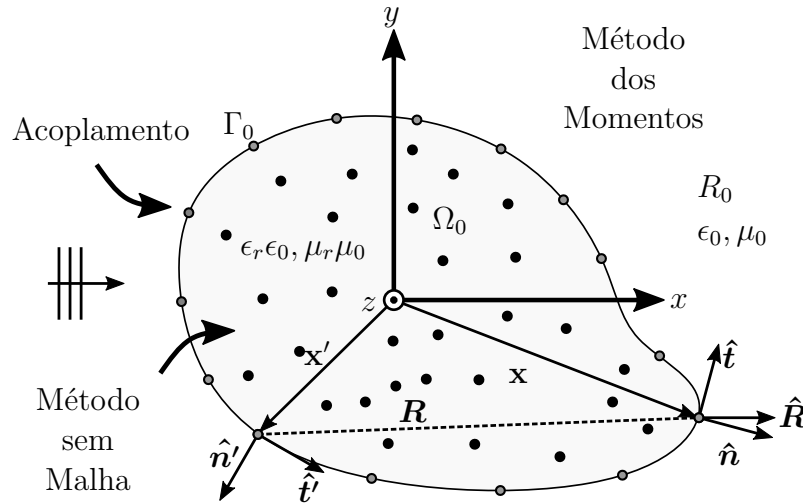


Figura 20 – Ilustração dos Problemas Equivalentes do Método Híbrido.

O problema da região interna é resolvido utilizando o método sem malha apresentado no Capítulo 3 e a região externa é solucionada utilizando o MoM apresentado no Capítulo 2. Por fim, é realizado o acoplamento das regiões impondo a continuidade das componentes tangenciais do campo eletromagnético e o sistema final é resolvido.

4.1.1 Problema Interno

O tratamento do problema interno é feito de forma análoga à utilizada no método sem malha puro (Seção 3.4). Entretanto, neste caso a fronteira é colocada sobre o contorno do dielétrico a fim de reduzir o domínio computacional. Para os nós internos a equação a ser resolvida é:

$$\int_{\Omega_i} \frac{\nabla \psi(\mathbf{x}) \cdot \nabla u^h(\mathbf{x})}{p(\mathbf{x})} d\Omega - \int_{\Omega_i} \psi(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) k_0^2 u^h(\mathbf{x}) d\Omega = 0, \quad (4.1)$$

A Equação (4.1) é descrita em forma matricial na forma $\mathbf{K}\mathbf{u} = 0$, onde a iteração entre os nós globais i e j é dada por $\mathbf{K}$ e seus elementos são:

$$K_{ij} = \int_{\Omega_i} \frac{\nabla \psi_i(\mathbf{x}) \cdot \nabla \phi_j(\mathbf{x})}{p(\mathbf{x})} d\Omega - \int_{\Omega_i} k_0^2 q(\mathbf{x}) \psi_i(\mathbf{x}) \phi_j(\mathbf{x}) d\Omega. \quad (4.2)$$

Diferentemente do método sem malha puro, os nós sobre a fronteira são utilizados na etapa de acoplamento entre os métodos.

4.1.2 Problema Externo

O problema externo é tratado de forma análoga ao apresentado no Capítulo 2. Nesse caso, as equações modelam apenas a região de espaço livre.

4.1.2.1 Polarização TMz

As equações a serem discretizadas são as Equações (2.9) e (2.10). Para polarização TMz, a representação do sistema em forma matricial é:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}^{zz, TM} & \mathbf{Z}^{zt, TM} \\ \mathbf{Z}^{tz, TM} & \mathbf{Z}^{tt, TM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}^J \\ \mathbf{I}^M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}^{z, TM} \\ \mathbf{V}^{t, TM} \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

onde os elementos da matriz são:

$$\mathbf{Z}^{zz, TM} = \mathbf{L}^{zz}(\mathbf{f}_{\Gamma_0}^z, \mathbf{f}_{\Gamma_0}^z, R_0), \quad (4.4)$$

$$\mathbf{Z}^{zt, TM} = \mathbf{K}^{zt}(\mathbf{f}_{\Gamma_0}^z, \mathbf{g}_{\Gamma_0}^t, R_0), \quad (4.5)$$

$$\mathbf{Z}^{tz, TM} = -\mathbf{K}^{tz}(\mathbf{g}_{\Gamma_0}^t, \mathbf{f}_{\Gamma_0}^z, R_0), \quad (4.6)$$

$$\mathbf{Z}^{tt, TM} = \frac{\epsilon_0}{\mu_0} \mathbf{L}^{tt}(\mathbf{g}_{\Gamma_0}^t, \mathbf{g}_{\Gamma_0}^t, R_0), \quad (4.7)$$

os elementos do lado direito são:

$$\mathbf{V}^{z, TM} = \mathbf{V}^E(\mathbf{f}_{\Gamma_0}^z, R_0), \quad (4.8)$$

$$\mathbf{V}^{t,TM} = \mathbf{V}^H(\mathbf{g}_{\Gamma_0}^t, R_0), \quad (4.9)$$

e os coeficientes das densidades de corrente desconhecidas são:

$$\mathbf{I}^J = \mathbf{I}_{\Gamma_0}^{J,z}, \quad (4.10)$$

$$\mathbf{I}^M = \mathbf{I}_{\Gamma_0}^{M,t}. \quad (4.11)$$

4.1.2.2 Polarização TEz:

Novamente as equações a serem discretizadas são as [Equações \(2.9\)](#) e [\(2.10\)](#). A representação do sistema em forma matricial é:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}^{tt,TE} & \mathbf{Z}^{tz,TE} \\ \mathbf{Z}^{zt,TE} & \mathbf{Z}^{zz,TE} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}^J \\ \mathbf{I}^M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}^{t,TE} \\ \mathbf{V}^{z,TE} \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

onde os elementos da matriz são:

$$\mathbf{Z}^{tt,TE} = \mathbf{L}^{tt}(\mathbf{f}_{\Gamma_0}^t, \mathbf{f}_{\Gamma_0}^t, R_0), \quad (4.13)$$

$$\mathbf{Z}^{tz,TE} = \mathbf{K}^{tz}(\mathbf{f}_{\Gamma_0}^t, \mathbf{g}_{\Gamma_0}^z, R_0), \quad (4.14)$$

$$\mathbf{Z}^{zt,TE} = -\mathbf{K}^{zt}(\mathbf{g}_{\Gamma_0}^z, \mathbf{f}_{\Gamma_0}^t, R_0), \quad (4.15)$$

$$\mathbf{Z}^{zz,TE} = \frac{\epsilon_0}{\mu_0} \mathbf{L}^{zz}(\mathbf{g}_{\Gamma_0}^z, \mathbf{g}_{\Gamma_0}^z, R_0), \quad (4.16)$$

os vetores do lado direito são:

$$\mathbf{V}^{t,TE} = \mathbf{V}^E(\mathbf{f}_{\Gamma_0}^t, R_0), \quad (4.17)$$

$$\mathbf{V}^{z,TE} = \mathbf{V}^H(\mathbf{g}_{\Gamma_0}^z, R_0), \quad (4.18)$$

e os coeficientes das densidades de corrente desconhecidas são:

$$\mathbf{I}^J = \mathbf{I}_{\Gamma_0}^{J,t}, \quad (4.19)$$

$$\mathbf{I}^M = \mathbf{I}_{\Gamma_0}^{M,z}. \quad (4.20)$$

4.1.3 Acoplamento

Como os dois métodos possuem funções de forma com a propriedade do delta de Kronecker, o acoplamento é feito de forma fácil e direta. É realizado simplesmente impondo a continuidade das componentes tangenciais do campo eletromagnético (HARRINGTON, 1961) na fronteira do dielétrico:

$$\mathbf{J} = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}, \quad (4.21)$$

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{M}. \quad (4.22)$$

Para polarização TMz, usando o método de colocação, a Equação (4.21) é imposta diretamente no sistema matricial do problema interno por:

$$K_{ij} = \nabla \phi_j(\mathbf{x}_i) \cdot \hat{\mathbf{n}}, \quad (4.23)$$

$$J_{ij}^K = \begin{cases} 0 & \forall i \in \Omega_0 \\ -j\omega\mu_r\mu_0\phi_j(\mathbf{x}_i) & \forall i \in \Gamma_0 \end{cases}, \quad (4.24)$$

Visto que J_z é definido apenas sobre Γ_0 , as colunas de J_{ij}^K associadas aos nós j que estão em Ω_0 são eliminadas. A equação Equação (4.22) é tratada da mesma forma, levando à:

$$\begin{cases} U_{ij} = +\phi_j(\mathbf{x}_i) & \forall i \in \Gamma_0 \\ M_{ij}^U = -\phi_j(\mathbf{x}_i) & \forall i \in \Gamma_0 \end{cases}. \quad (4.25)$$

Para polarização TEz, no entanto, a Equação (4.22) é imposta diretamente no sistema matricial do problema interior:

$$K_{ij} = \nabla \phi_j(\mathbf{x}_i) \cdot \hat{\mathbf{n}}, \quad (4.26)$$

$$M_{ij}^K = \begin{cases} 0 & \forall i \in \Omega_0 \\ j\omega\epsilon_r\epsilon_0\phi_j(\mathbf{x}_i) & \forall i \in \Gamma_0 \end{cases}. \quad (4.27)$$

E pelo mesmo motivo da polarização TMz, as colunas de M_{ij}^K associadas aos nós j que estão em Ω_0 são eliminadas.

$$\begin{cases} U_{ij} = +\phi_j(\mathbf{x}_i) & \forall i \in \Gamma_0 \\ J_{ij}^U = +\phi_j(\mathbf{x}_i) & \forall i \in \Gamma_0 \end{cases}. \quad (4.28)$$

4.1.4 Sistema Matricial Completo

O sistema matricial do método híbrido é finalmente montado e é dado por:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{(n \times n)} & \mathbf{J}_{(n \times m)}^K & \mathbf{M}_{(n \times m)}^K \\ \mathbf{U}_{(m \times n)} & \mathbf{J}_{(m \times m)}^U & \mathbf{M}_{(m \times m)}^U \\ 0_{(m \times n)} & \mathbf{Z}_{(m \times m)}^J & \mathbf{Z}_{(m \times m)}^M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{I}^J \\ \mathbf{I}^M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{(n \times 1)} \\ 0_{(m \times 1)} \\ \mathbf{Z}_{(m \times 1)}^V \end{bmatrix}, \quad (4.29)$$

onde n é o número total de nós e m é o número de nós na fronteira. Para polarização TMz, todos os elementos de $\mathbf{M}^K$ e $\mathbf{J}^U$ são nulos, enquanto para polarização TEz todos os elementos de $\mathbf{J}^K$ e $\mathbf{M}^U$ são nulos. Considerando que há mais equações que variáveis desconhecidas, as matrizes $\mathbf{Z}^J$, $\mathbf{Z}^M$ e $\mathbf{Z}^V$ são construídas combinando linearmente ambas EFIE e MFIE, resultando em:

$$TM : \begin{cases} \mathbf{Z}^J &= \alpha \mathbf{Z}^{zz, TM} + (1 - \alpha) \eta_0 \mathbf{Z}^{tz, TM} \\ \mathbf{Z}^M &= \alpha \mathbf{Z}^{zt, TM} + (1 - \alpha) \eta_0 \mathbf{Z}^{tt, TM} \\ \mathbf{Z}^V &= \alpha \mathbf{V}^{E, TM} + (1 - \alpha) \eta_0 \mathbf{V}^{H, TM} \end{cases}, \quad (4.30)$$

$$TE : \begin{cases} \mathbf{Z}^J &= \alpha \mathbf{Z}^{tt, TE} + (1 - \alpha) \eta_0 \mathbf{Z}^{zt, TE} \\ \mathbf{Z}^M &= \alpha \mathbf{Z}^{tz, TE} + (1 - \alpha) \eta_0 \mathbf{Z}^{zz, TE} \\ \mathbf{Z}^V &= \alpha \mathbf{V}^{E, TE} + (1 - \alpha) \eta_0 \mathbf{V}^{H, TE} \end{cases}, \quad (4.31)$$

onde $\alpha = 0,5$ corresponde a CFIE comumente utilizada (Seção 2.2.1).

4.2 Resultados Numéricos

Para avaliar o método MLPG-MoM proposto, o mesmo problema canônico resolvido nos capítulos anteriores foi estudado (Seções 2.4 e 3.5). O cilindro foi posicionado com seu centro na origem do sistema de coordenadas. A Figura 21 apresenta o problema.

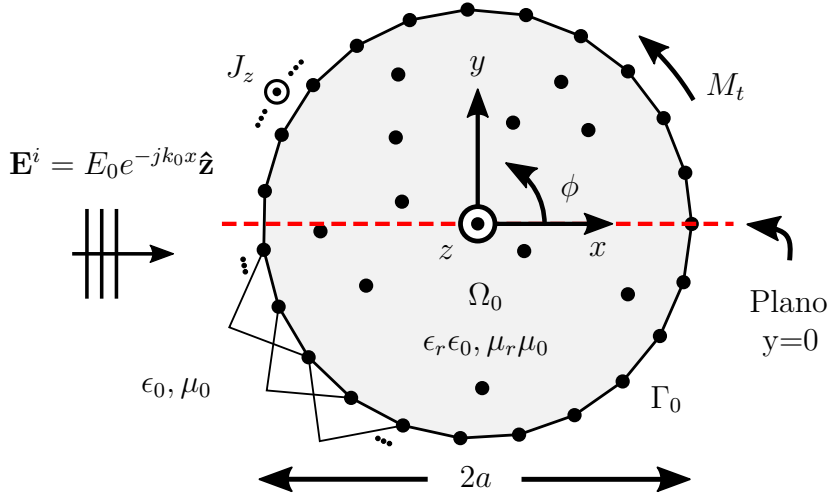


Figura 21 – Espalhamento Eletromagnético de uma Onda Plana com Polarização TMz.

4.2.1 Caso Homogêneo

Inicialmente, o material do cilindro é assumido homogêneo e dispersivo. O campo elétrico incidente é $E_z^i = e^{-jk_0 x}$ para polarização TMz e $H_z^i = e^{-jk_0 x}$ para polarização TEz. Os parâmetros mais importantes estão representados na Tabela 3, os demais parâmetros são os mesmos utilizados na Seção 3.5. Os nós foram espalhados uniformemente no domínio computacional como visto na Figura 22.

Tabela 3 – Parâmetros do Caso de Estudo - MLPG-MoM - Caso Homogêneo

Propriedades	Valores
Permissividade Elétrica Relativa $[\epsilon_r]$	3-0,25j
Raio do Cilindro $[a]$	0,5 λ_0
Número Total de Nós	1045
Número de Nós na Borda	109

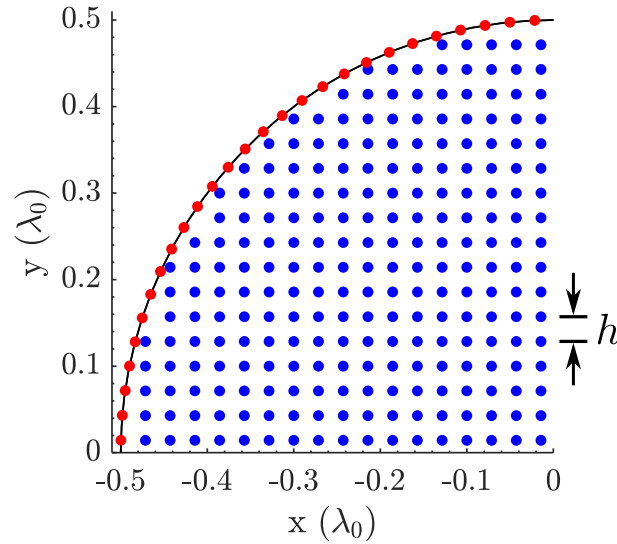


Figura 22 – Distribuição Uniforme de Nós (1/4 do Domínio Computacional).

Para ambas polarizações, as Figuras 23 a 26 apresentam as densidades de corrente elétrica e magnética equivalentes no contorno do cilindro dielétrico. Ademais, a Figura 27 apresenta a amplitude do campo elétrico para polarização TMz e a amplitude do campo magnético para polarização TEz. Ambos resultados foram calculados na seção transversal do cilindro dielétrico passando pelo centro na direção de propagação da onda plana, ou seja, no plano $y = 0$ (ver Figura 21).

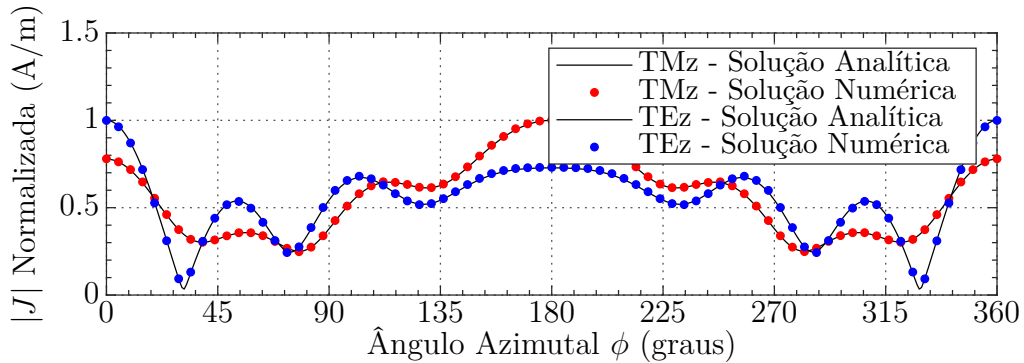


Figura 23 – Amplitude da Densidade de Corrente Elétrica Normalizada - MLPG-MoM.

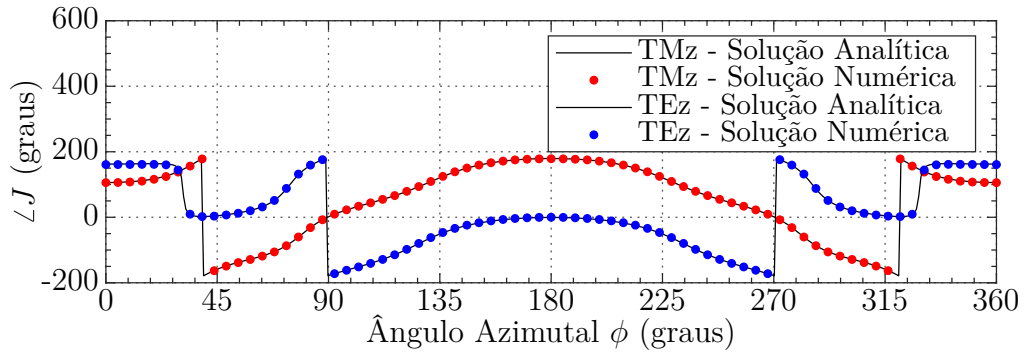


Figura 24 – Fase da Densidade de Corrente Elétrica - MLPG-MoM.

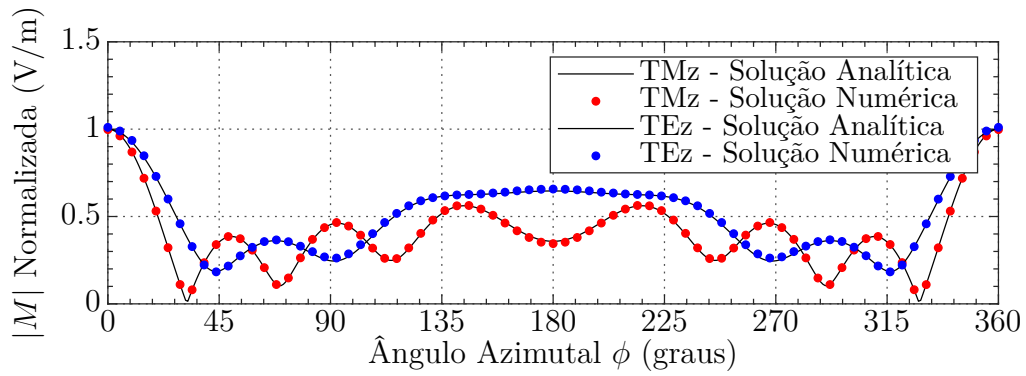


Figura 25 – Amplitude da Densidade de Corrente Magnética Normalizada - MLPG-MoM.

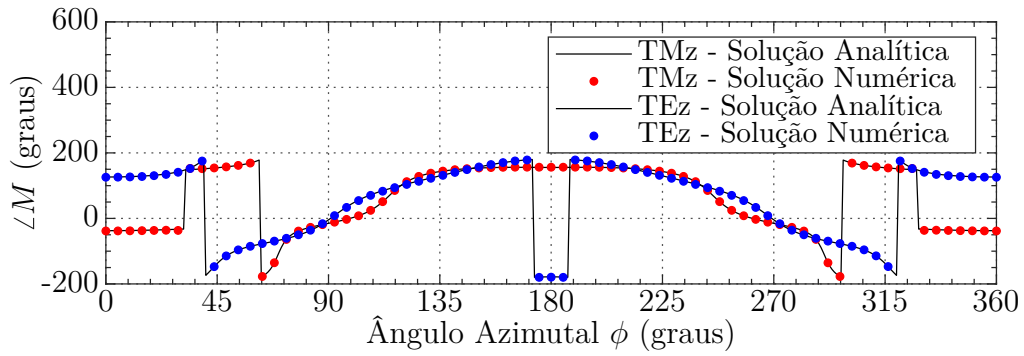
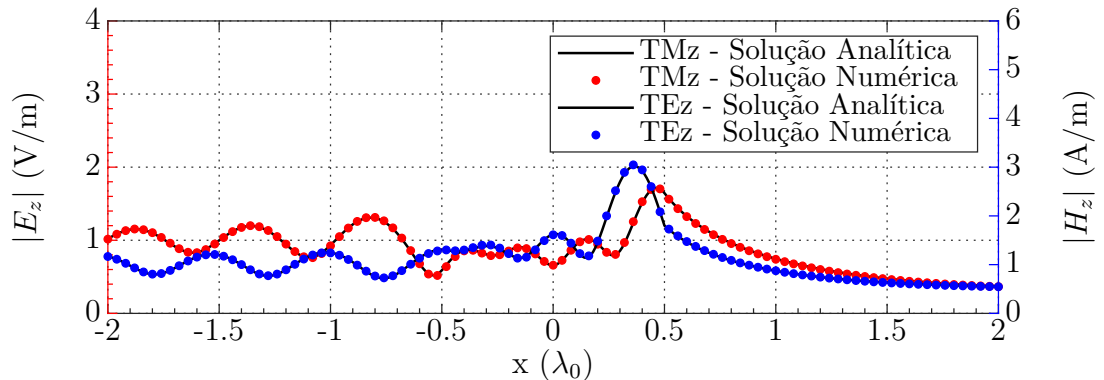


Figura 26 – Fase da Densidade de Corrente Magnética - MLPG-MoM.

Figura 27 – Amplitude dos Campos Elétrico e Magnético sobre $y = 0$ - MLPG-MoM

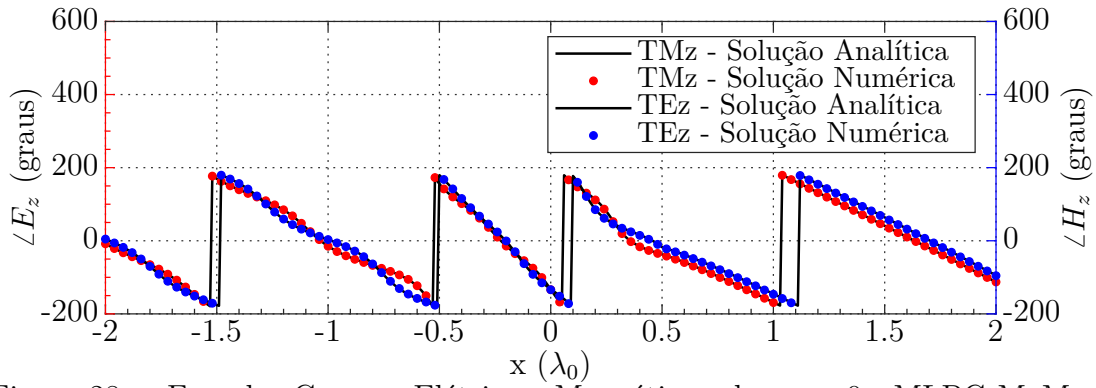


Figura 28 – Fase dos Campos Elétrico e Magnético sobre $y = 0$ - MLPG-MoM

4.2.2 Taxa de Convergência

Para determinar a convergência do método MLPG-MoM híbrido, visto que o espalhamento eletromagnético de um cilindro circular por uma onda plana tem solução analítica, o erro relativo foi calculado para o campo eletromagnético e para as densidades de corrente equivalentes. Os resultados estão apresentados na Figura 29, onde a análise da taxa de convergência considera a distância de discretização h como a distância internodal média (ver Figura 22).

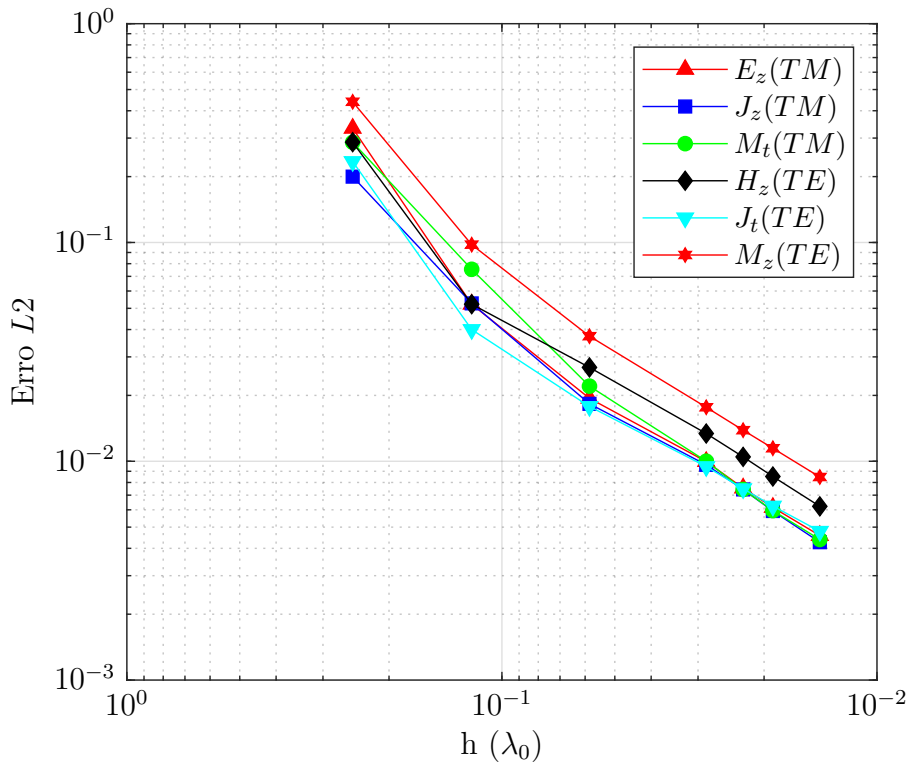


Figura 29 – Análise da Taxa de Convergência - MLPG-MoM

O erro relativo é calculado pela razão entre a norma L^2 da diferença das soluções

numérica e analítica, e a norma L^2 da solução analítica:

$$L_2(X) = \frac{\sqrt{\int_{\nu_0} |X^{\text{Numérico}} - X^{\text{Analítico}}|^2 d\nu}}{\sqrt{\int_{\nu_0} |X^{\text{Analítico}}|^2 d\nu}} \quad (4.32)$$

onde ν é Ω para o campo eletromagnético e Γ para a densidade de corrente equivalente.

4.2.3 Caso Não Homogêneo

Métodos sem malha são conhecidos pela facilidade de lidar com meios não homogêneos. Para tratar esses problemas, uma lente de Lüneburg cilíndrica em duas dimensões foi analisada (LUNEBURG; HERZBERGER, 1964). Essa é uma lente bem conhecida e pode ser utilizada para convergir a energia de uma onda plana. A variação de sua permissividade elétrica relativa é apresentada na Figura 30.

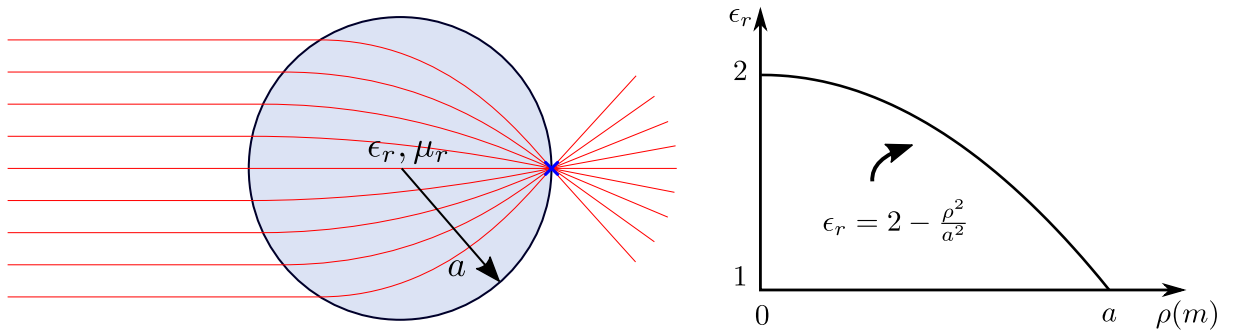


Figura 30 – Ilustração Qualitativa da Lente de Lüneburg e seu Perfil de Permissividade.

Neste caso, como no homogêneo, o campo incidente é $E_z^i = e^{-jk_0x}$ para polarização TMz e $H_z^i = e^{-jk_0x}$ para polarização TEz. Os nós novamente foram uniformemente espalhados no domínio computacional, como ilustrado anteriormente na Figura 22. Os parâmetros mais importantes estão resumidos na Tabela 4, os demais parâmetros são os mesmos utilizados na Seção 3.5

Tabela 4 – Parâmetros do Caso de Estudo - MLPG-MoM - Caso Não Homogêneo

Propriedades	Valores
Raio do Cilindro $[a]$	$2,0 \lambda_0$
Número Total de Nós	2512
Nós na Fronteira	172
Número de Elementos (FEM)	69058
Número de Nós (FEM)	34859

Visto que não há solução analítica para esse problema em particular, a solução numérica foi comparada com uma solução em FEM. O domínio computacional utilizado no FEM tem um raio de $3\lambda_0$ mais uma camada PML de $0,6\lambda_0$. A implementação utiliza elementos de primeira ordem com uma formulação PML local conforme (ÖZGÜN; KUZUOĞLU, 2018). A estrutura é apresentada na Figura 31.

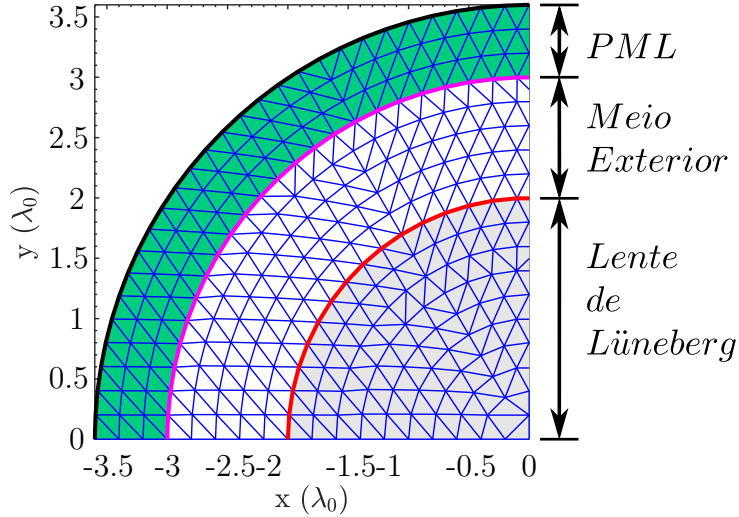


Figura 31 – Malha e Camadas Utilizadas na Implementação FEM.

Da mesma forma que no caso homogêneo, as Figuras 32 e 33 apresentam as amplitudes e fases dos campos nas duas polarizações sobre o plano $y = 0$ (ver Figura 21). Como é observado, os resultados apresentam uma boa concordância com as soluções em FEM. É também notório a continuidade dos campos e de suas primeiras derivadas devido a continuidade do perfil de permissividade elétrica (ver Figura 30).

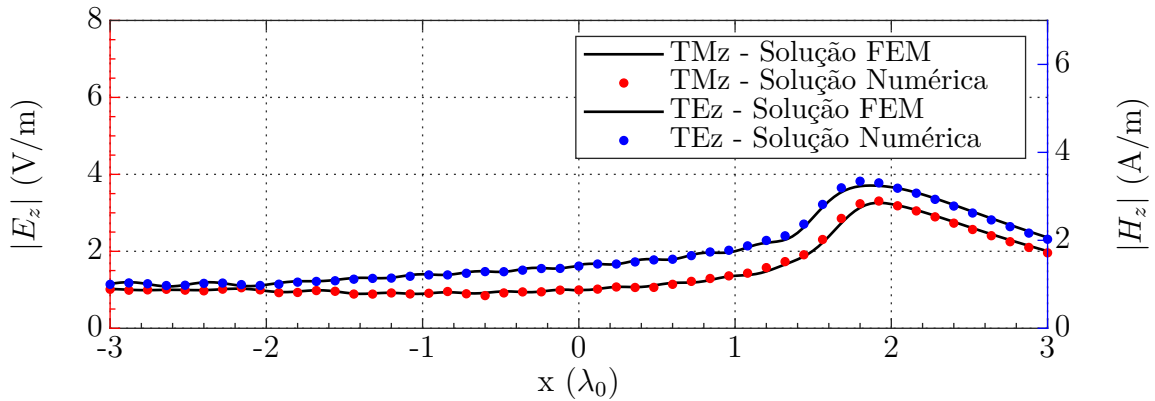


Figura 32 – Comparação da Amplitude dos Campos entre MoM-MLPG e FEM.

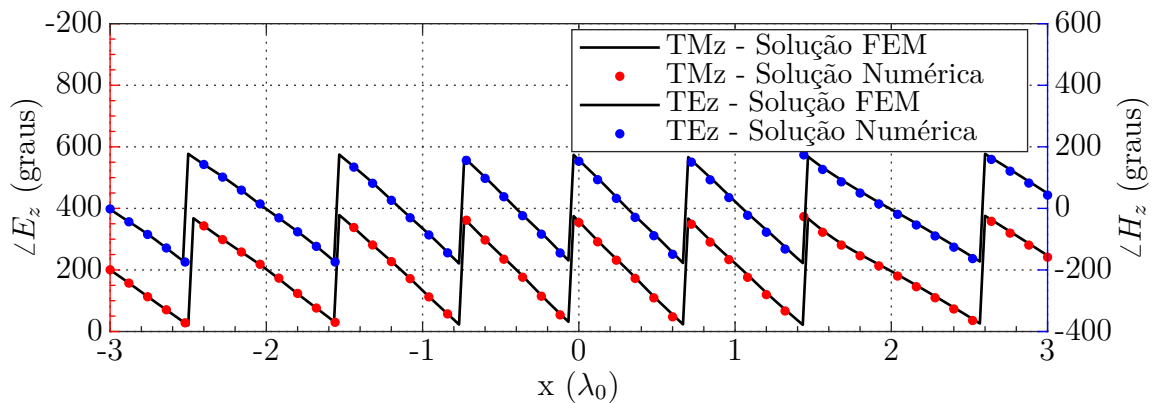


Figura 33 – Comparação da Fase dos Campos entre MoM-MLPG e FEM.

Já que a formulação adotada permite calcular os campos em todo o espaço, as Figuras 34 e 35 apresentam a solução numérica em uma área de $64\lambda_0^2$ ao redor da lente de Lüneburg. O campo na região interior é calculado utilizando MLPG e o campo exterior é calculado utilizando as densidades de correntes equivalentes do MoM. Os resultados apresentados concordam com a expectativa qualitativa de uma lente de Lüneburg (LUNEBURG; HERZBERGER, 1964).

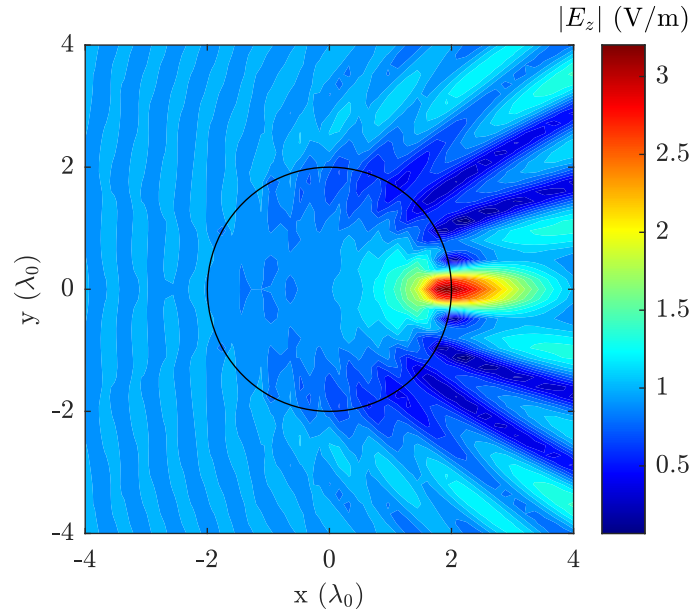


Figura 34 – Amplitude do Campo Elétrico - MLPG-MoM.

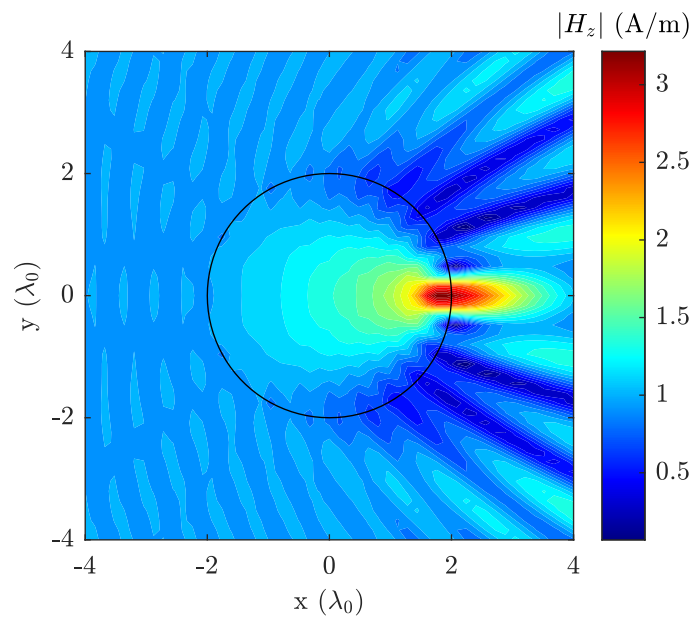


Figura 35 – Amplitude do Campo Magnético - MLPG-MoM.

4.3 Conclusão Parcial

Como visto, o método híbrido trata dois problemas equivalentes. A região interna é modelada pela equação de Helmholtz pelo método MLPG, enquanto a região externa é modelada pela combinação linear das equações integrais do campo elétrico e magnético através do MoM. Os resultados mostram boa concordância entre as soluções numéricas e as soluções referência, analítica no caso homogêneo e baseada no FEM no caso não homogêneo. Observa-se também que não há qualquer reflexão, portanto o MoM age como uma condição de contorno perfeitamente casada.

Comparando com os métodos anteriores, este método híbrido é robusto, utiliza eficientemente o espaço computacional e é capaz de modelar meios não homogêneos.

5 Conclusões

Este trabalho apresentou uma formulação híbrida alternativa de um método sem malha para tratamento de problemas de espalhamento em que o domínio computacional não é finito. Uma região limitada é tratada utilizando um método sem malha capaz de lidar com geometrias complexas e materiais não homogêneos, onde a região externa constituída do espaço livre, é modelada utilizando o MoM que é eficiente e facilmente aplicado a regiões ilimitadas cujos materiais são homogêneos.

A fim de desenvolver o método híbrido, os métodos supracitados foram implementados em suas versões puras. A formulação do MoM baseou-se na resolução das equações diferenciais integrais dos campos elétrico e magnético sobre superfícies enquanto a formulação do MLPG embasou-se na equação de Helmholtz não homogênea com truncamento realizado pela condição de radiação de primeira ordem de Bayliss-Turkel. Os resultados numéricos apresentados para os casos de estudo foram próximos das soluções analíticas.

O método híbrido MLPG-MoM proposto combina um método sem malha, o qual não requer estrutura em malha, e o método dos momentos, em que as densidades de corrente elétrica e magnética são determinadas apenas na superfície do objeto espalhador, possibilitando assim o cálculo do campo em todo o espaço. Além da diminuição do domínio computacional, devido ao truncamento do mesmo sobre a superfície do objeto espalhador, o método sem malha aplicado na região interna pode lidar com geometrias complexas e perfis de permissividade elétrica e permeabilidade magnética não homogêneos. Ademais, diferente de métodos sem malha puros, essa implementação híbrida é capaz de lidar naturalmente com descontinuidades na interface entre os meios.

Para ambas polarizações TM_z e TE_z , a precisão da formulação híbrida foram verificadas analisando o espalhamento eletromagnético de uma onda plana por um cilindro dielétrico circular homogêneo e não homogêneo. Em ambos os casos, os resultados concordaram com as soluções de referência. Ademais, percebeu-se que a taxa de convergência no caso homogêneo independe da polarização.

Dado o exposto, entre as diversas possibilidades de truncamento do domínio computacional existentes, este trabalho utiliza uma implementação baseada em MoM. Diferentemente de condições absorventes, as quais devem ser posicionadas assintoticamente distantes do objeto espalhador, e PMLs, que são colocadas relativamente próximas do objeto espalhador mas ocupam uma região e têm uma complexidade de construção inerente, o truncamento utilizando MoM gera uma condição de contorno perfeitamente casada e sua construção é comparativamente simples.

5.1 Propostas de Continuação do Trabalho

Visto que métodos sem malha é um campo de estudo ainda relativamente recente. Existem diversas possibilidades de continuação deste trabalho. Entre elas, a principal é a extensão da formulação e implementação em três dimensões para problemas de espalhamento eletromagnético. Em casos gerais é necessário resolver as polarizações TE_z e TM_z simultaneamente, e o MoM é aplicado sobre uma superfície tridimensional.

Existe a possibilidade de alterar a formulação do método sem malha empregada no problema interno por um método MLPG mais convencional. Porém, será necessário o calculo sobre as intersecções entre os domínios de teste e o domínio global. Outra sugestão é o estudo para nós aleatoriamente espalhados. Neste caso, distribuições de nós podem ser propostas e os parâmetros das bases radiais utilizados devem ser analisados.

As possibilidades não se restringem somente ao espalhamento eletromagnético no espaço livre. Entre vários problemas possíveis, guias de onda também podem ser estudados. Neste caso, seu interior é modelado pelo MLPG e o truncamento domínio computacional pode ser realizado pelo MoM.

Referências

- ALFARO, I. et al. Meshless methods with application to metal forming. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 195, n. 48-49, p. 6661–6675, 2006. Citado na página 27.
- ATLURI, S. N.; ZHU, T. A new meshless local petrov-galerkin (mlpg) approach in computational mechanics. *Computational mechanics*, Springer, v. 22, n. 2, p. 117–127, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 46.
- GIBSON, W. C. *The method of moments in electromagnetics*. [S.l.]: Chapman and Hall/CRC, 2014. Citado 9 vezes nas páginas 27, 28, 31, 32, 33, 36, 37, 38 e 40.
- GINGOLD, R. A.; MONAGHAN, J. J. Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars. *Monthly notices of the royal astronomical society*, Oxford University Press Oxford, UK, v. 181, n. 3, p. 375–389, 1977. Citado na página 27.
- GOLBERG, M.; CHEN, C.; BOWMAN, H. Some recent results and proposals for the use of radial basis functions in the bem. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 23, n. 4, p. 285–296, 1999. Citado na página 45.
- HARRINGTON, R. F. *Time-harmonic electromagnetic fields*. [S.l.]: McGraw-Hill, 1961. Citado 6 vezes nas páginas 28, 35, 40, 41, 55 e 58.
- HART, E. E.; COX, S. J.; DJIDJELI, K. Compact rbf meshless methods for photonic crystal modelling. *Journal of computational physics*, Elsevier, v. 230, n. 12, p. 4910–4921, 2011. Citado na página 27.
- HO, S. et al. Application of a meshless method in electromagnetics. *IEEE transactions on magnetics*, IEEE, v. 37, n. 5, p. 3198–3202, 2001. Citado na página 27.
- JIN, J.-M. *The finite element method in electromagnetics*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2015. Citado na página 49.
- JIN, X. et al. Meshless algorithm for soft tissue cutting in surgical simulation. *Computer methods in biomechanics and biomedical engineering*, Taylor & Francis, v. 17, n. 7, p. 800–811, 2014. Citado na página 27.
- KASHDAN, E.; TURKEL, E. High-order accurate modeling of electromagnetic wave propagation across media-grid conforming bodies. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 218, n. 2, p. 816–835, 2006. Citado na página 50.
- LI, Q. et al. Application of meshless local petrov-galerkin (mlpg) to problems with singularities, and material discontinuities, in 3-d elasticity. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, TECH SCIENCE PRESS, v. 4, n. 5, p. 571–586, 2003. Citado na página 50.
- LIEW, K. M.; ZHAO, X.; FERREIRA, A. J. A review of meshless methods for laminated and functionally graded plates and shells. *Composite Structures*, Elsevier, v. 93, n. 8, p. 2031–2041, 2011. Citado na página 27.

- LIU, G.-R. *Meshfree methods: moving beyond the finite element method*. [S.l.]: CRC press, 2009. Citado 5 vezes nas páginas 28, 43, 44, 47 e 52.
- LIU, G.-R.; GU, Y.-T. *An introduction to meshfree methods and their programming*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2005. Citado na página 47.
- LIU, M.; LIU, G. Smoothed particle hydrodynamics (sph): an overview and recent developments. *Archives of computational methods in engineering*, Springer, v. 17, n. 1, p. 25–76, 2010. Citado na página 27.
- LU, Y.; BELYTSCHKO, T.; GU, L. A new implementation of the element free galerkin method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Elsevier, v. 113, n. 3-4, p. 397–414, 1994. Citado na página 27.
- LUNEBURG, R. K.; HERZBERGER, M. *Mathematical theory of optics*. [S.l.]: Univ of California Press, 1964. Citado 2 vezes nas páginas 63 e 65.
- MA, J.; ROKHLIN, V.; WANDZURA, S. Generalized gaussian quadrature rules for systems of arbitrary functions. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, SIAM, v. 33, n. 3, p. 971–996, 1996. Citado na página 39.
- MITTRA, R.; PEKEL, U. A new look at the perfectly matched layer (pml) concept for the reflectionless absorption of electromagnetic waves. *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, IEEE, v. 5, n. 3, p. 84–86, 1995. Citado na página 27.
- MOHEBBI, A.; ABBASZADEH, M.; DEHGHAN, M. The use of a meshless technique based on collocation and radial basis functions for solving the time fractional nonlinear schrödinger equation arising in quantum mechanics. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 37, n. 2, p. 475–485, 2013. Citado na página 27.
- NAGASHIMA, T. Node-by-node meshless approach and its applications to structural analyses. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 46, n. 3, p. 341–385, 1999. Citado na página 27.
- NICOMEDES, W. L.; MESQUITA, R. C.; MOREIRA, F. J. S. The meshless local petrov–galerkin method in two-dimensional electromagnetic wave analysis. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, IEEE, v. 60, n. 4, p. 1957–1968, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 27, 46 e 50.
- ÖZGÜN, Ö.; KUZUOĞLU, M. *MATLAB-based Finite Element Programming in Electromagnetic Modeling*. [S.l.]: CRC Press, 2018. Citado na página 63.
- PETERSON, A. F.; CASTILLO, S. P. A frequency-domain differential equation formulation for electromagnetic scattering from inhomogeneous cylinders. *IEEE Transactions on antennas and propagation*, IEEE, v. 37, n. 5, p. 601–607, 1989. Citado na página 27.
- PETERSON, A. F. et al. *Computational methods for electromagnetics*. [S.l.]: IEEE press New York, 1998. v. 2. Citado na página 43.
- RESENDE, U. C.; COPPOLI, E. H. R.; AFONSO, M. M. A meshless approach using efg interpolating moving least-squares method in 2-d electromagnetic scattering analysis. *IEEE Transactions on Magnetics*, IEEE, v. 51, n. 3, p. 1–4, 2015. Citado na página 27.

RESENDE, U. C. et al. A new meshless-mom hybrid method applied to the analisys of 2d electromagnetic scattering. In: *ISEF20 15*. [S.l.]: Valence, 2015. Citado na página 27.

STEWART, J. *Essential calculus: Early transcendentals*. [S.l.]: Cengage Learning, 2012. Citado na página 44.

UMASHANKAR, K.; TAFLOVE, A.; RAO, S. Electromagnetic scattering by arbitrary shaped three-dimensional homogeneous lossy dielectric objects. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, IEEE, v. 34, n. 6, p. 758–766, 1986. Citado na página 35.