

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

TESE DE DOUTORADO

**APLICAÇÃO DE ÓPTICA GEOMÉTRICA NA SÍNTESE DE
ANTENAS DUPLO-REFLETORAS OFFSET E DE
LENTES DIELÉTRICAS SEM SIMETRIA CIRCULAR**

Aline Rocha de Assis

29 de maio de 2020



GAPTEM – Grupo de Antenas, Propagação e Teoria Eletromagnética

**Departamento de Engenharia Eletrônica
Escola de Engenharia
Universidade Federal de Minas Gerais**

Universidade Federal de Minas Gerais

Escola de Engenharia

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

**APLICAÇÃO DE ÓPTICA GEOMÉTRICA NA SÍNTESE DE
ANTENAS DUPLO-REFLETORAS OFFSET E DE LENTES
DIELÉTRICAS SEM SIMETRIA CIRCULAR**

Aline Rocha de Assis

Tese de Doutorado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção do Título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Orientador: Fernando José da Silva Moreira

Coorientador: José Ricardo Bergmann

Belo Horizonte – MG

Maio de 2020

A848a	Assis, Aline Rocha de. Aplicação de óptica geométrica na síntese de antenas duplo-refletores <i>offset</i> e de lentes dielétricas sem simetria circular [recurso eletrônico] / Aline Rocha de Assis. - 2020. 1 recurso online (220 f. : il., color.) : pdf. Orientador: Fernando José da Silva Moreira. Coorientador: José Ricardo Bergmann. Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia. Apêndice: f. 219-220. Bibliografia: f. 214-218. Exigências do sistema: Adobe Acrobat Reader. 1. Engenharia elétrica - Teses. 2. Antenas refletoras - Teses. 3. Óptica geométrica - Teses. 4. Monge-Ampere, Equações de – Teses. I. Moreira, Fernando José da Silva. II. Bergmann, José Ricardo. III. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. IV. Título.
	CDU: 621.3(043)

"Aplicação de Óptica Geométrica na Síntese de Antenas Duplo-Refletores Offset e de Lentes Dielétricas sem Simetria Circular"

Aline Rocha de Assis

Tese de Doutorado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica.

Aprovada em 29 de maio de 2020.

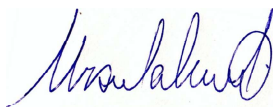
Por:



Prof. Dr. Fernando José da Silva Moreira
DELT (UFMG) - Orientador



Prof. Dr. José Ricardo Bergmann
CETUC (PUC-Rio) - Coorientador



Profa. Dra. Úrsula do Carmo Resende
Engenharia Elétrica (CEFET-MG)



Prof. Dr. Sandro Trindade Mordente Gonçalves
Engenharia Elétrica (CEFET-MG)



Prof. Dr. Guilherme Simon da Rosa
CETUC (PUC-Rio)



Prof. Dr. Cássio Gonçalves do Rego
DELT (UFMG)



Prof. Dr. Elson José da Silva
DEE (UFMG)

Aos meus pais, Lázaro e Fátima.

Agradecimentos

- Ao Prof. Fernando José da Silva Moreira, meu orientador, pela confiança a mim depositada para desenvolver este tema de doutorado e pela análise e revisão do artigo publicado e desta tese;
- ao Prof. José Ricardo Bergmann, meu coorientador, pela orientação, ensinamentos, paciência, receptividade, e pela ótima condução no desenvolvimento deste trabalho;
- à UFOP e aos colegas de trabalho no DEELT, pelo afastamento em tempo integral no período de maio de 2017 a julho de 2019;
- ao CETUC-PUC-Rio pela disponibilidade de uso dos laboratórios e *softwares* computacionais para o desenvolvimento deste trabalho;
- à CAPES, pelo apoio financeiro para realização da Missão de Estudos na PUC-Rio nos períodos de junho 2017 a novembro de 2017 e de abril de 2018 a setembro de 2018;
- ao PPGE-UFMG, pelo ensino público, gratuito e de qualidade;
- e a todos aqueles, que direta ou indiretamente, contribuíram para o meu crescimento pessoal e profissional durante o período de doutoramento.

*Mas é preciso ter força,
é preciso ter raça,
é preciso ter gana sempre.*

Milton Nascimento e Fernando Brant

Resumo

O presente trabalho investiga um procedimento numérico alternativo para a solução de uma formulação exata baseada nos princípios de Óptica Geométrica (GO) para a síntese de antenas duplo-refletoras *offset* e de lentes dielétricas sem simetria circular. A solução do problema de síntese consiste em avaliar uma equação diferencial parcial não-linear de segunda ordem do tipo Monge-Ampère como um problema de valor de contorno em coordenadas complexas. Para isso, foram desenvolvidos algoritmos iterativos baseados no método de Newton que utilizam superfícies quádricas confocais com eixos deslocados para representar localmente as superfícies sintetizadas. Desta forma, as derivadas parciais envolvidas na formulação podem ser expressas analiticamente. Para ilustrar o método numérico, antenas duplo-refletoras *offset* foram sintetizadas para prover distribuição Gaussiana para a densidade de potência na abertura, em situações com fase uniforme e não-uniforme, e para contornos circular, elíptico e super-elíptico, a fim de gerar diagramas de radiação com feixes modelados. As superfícies sintetizadas foram posteriormente interpoladas por pseudo-*splines* de quinta ordem e analisadas via aproximações da Óptica Física (PO) com correções das correntes de borda, considerando os sistemas duplo-refletores *offset* operando em 11,725 GHz e 30 GHz. O algoritmo de síntese conseguiu projetar duplo-refletores *offset* com eficiência de iluminação de até 86,46% para uma abertura circular uniforme. Visto a robustez da técnica de solução numérica empregada na síntese de duplo-refletores *offset*, o procedimento numérico foi posteriormente aplicado para modelar lentes dielétricas sem simetria circular, visando controlar a largura de feixe transmitido, bem como a densidade de potência na região de cobertura da lente. Para isso, a formulação matemática exata, baseada nos princípios da GO, foi desenvolvida para o problema de síntese de uma lente dielétrica sem simetria circular em coordenadas complexas. As superfícies das lentes foram posteriormente interpoladas por *splines* cúbicas e analisadas por um método híbrido clássico, combinando os princípios da GO e da PO, que calcula o diagrama de radiação em campo distante das lentes dielétricas modeladas, operando em 30 GHz, 60 GHz e 120 GHz.

Palavras-chave

Antenas duplo-refletoras *offset*, lentes dielétricas, Óptica Geométrica, coordenadas complexas, superfície quádrica confocal com eixo deslocado, equação de Monge-Ampère.

Abstract

This work investigates an alternative numerical procedure for the solution of an exact formulation based on Geometrical Optics (GO) principles to the synthesis of offset dual reflector antennas and dielectric lenses without circular symmetry. The solution to synthesis problem consists in to evaluate a second-order nonlinear partial differential equation of the Monge-Ampère type as a boundary value problem in complex coordinates. For such, iterative algorithms based on Newton method were developed, using axis-displaced confocal quadrics to locally represent the synthesized surfaces, so that partial derivatives involved in the formulation were analytically expressed. To illustrate the numerical method, offset dual reflector antennas were synthesized to provide an aperture Gaussian power density distribution with uniform and non-uniform phase distributions, within circular, elliptical and super-elliptical contours, to yield radiation patterns with shaped beams. The synthesized reflector surfaces were further interpolated by quintic pseudo-splines and analyzed by Physical Optics (PO) with equivalent edge currents, at 11.725 GHz and 30 GHz. The algorithm synthesized offset dual reflectors with illumination efficiency up to 86.46% for a uniform circular aperture. Verified the robustness of the numerical technique employed in the synthesis of dual offset reflectors, the procedure was further applied to design dielectric lenses without circular symmetry, aiming to control beam width as well as the power density in the coverage region of a lens. For this, an exact mathematical formulation, based on GO principles, was developed for the synthesis problem of dielectric lenses without circular symmetry in complex coordinates. The synthesized surfaces were further interpolated by cubic splines and analyzed by a classical hybrid method, combining GO and PO principles, to compute the far-field radiation patterns of the designed dielectric lenses, at 30 GHz, 60 GHz and 120 GHz.

Keywords

Offset dual reflector antennas, dielectric lenses, Geometrical Optics, complex coordinates, axis-displaced confocal quadrics, Monge-Ampère equation.

Lista de Figuras

Figura 1.1	Geometria da antena duplo-refletora <i>offset</i> (configuração Gregorian).	23
Figura 1.2	Geometria da antena duplo-refletora <i>offset</i> (configuração Cassegrain).	24
Figura 1.3	Lente dielétrica homogênea integrada ao alimentador.	28
Figura 2.1	Projeção estereográfica da esfera unitária.	34
Figura 2.2	Geometria do problema de síntese de duplo-refletores.	36
Figura 2.3	Seção de cônica com eixo deslocado [2].	39
Figura 2.4	Superfície quádrlica confocal com eixo deslocado [2].	40
Figura 2.5	Sistemas de coordenadas principal e sistema de coordenadas auxiliar do alimentador.	44
Figura 2.6	Grade regular polar $J \times K = 10 \times 10$, $\alpha = 1$, no domínio $\theta' \phi'$	46
Figura 2.7	Grade regular polar $J \times K = 10 \times 30$, $\alpha = 1$, no domínio $\theta' \phi'$	47
Figura 2.8	Grade polar não-uniforme $J \times K = 10 \times 30$, $\alpha = 0,6$, no domínio $\theta' \phi'$.	47
Figura 2.9	Grade regular polar $J \times K = 10 \times 30$, $\alpha = 1$, no plano complexo auxiliar η'	48
Figura 2.10	Grade regular polar $J \times K = 10 \times 30$, $\alpha = 1$, no plano complexo auxiliar η'	49
Figura 2.11	Grade polar não-uniforme $J \times K = 10 \times 30$, $\alpha = 0,6$, no plano complexo auxiliar η'	49
Figura 2.12	Grade regular polar $J \times K = 10 \times 30$, $\alpha = 1$, no plano complexo inverso $1/\eta'$	50
Figura 2.13	Grade regular polar $J \times K = 10 \times 30$, $\alpha = 1$, no plano complexo inverso $1/\eta'$	50
Figura 2.14	Grade polar não-uniforme $J \times K = 10 \times 30$, $\alpha = 0,6$, no plano complexo inverso $1/\eta'$	51
Figura 2.15	Grade regular polar $J \times K = 10 \times 30$, $\alpha = 1$, no plano complexo η .	51
Figura 2.16	Grade regular polar $J \times K = 10 \times 30$, $\alpha = 1$, no plano complexo η .	52
Figura 2.17	Grade polar não-uniforme $J \times K = 10 \times 30$, $\alpha = 0,6$, no plano complexo η	52
Figura 2.18	Grade polar com células triangulares [2].	53
Figura 2.19	Célula triangular com quatro pontos [2].	54
Figura 2.20	Célula triangular j, k no centro da grade [2].	59

Figura 2.21	Célula triangular no primeiro anel da grade [2].	60
Figura 2.22	Célula triangular nas bordas da grade [2].	61
Figura 2.23	Contorno super-elíptico na abertura.	68
Figura 2.24	Diagrama de blocos do algoritmo de síntese.	73
Figura 3.1	Geometria do problema de síntese de um sistema duplo-refletor com fase uniforme na abertura como um problema de valor de contorno.	76
Figura 3.2	Configuração TB (Gregorian) com a abertura definida na direção do semi espaço z -positivo.	80
Figura 3.3	Configuração TT (Cassegrain) com a abertura definida na direção do semi espaço z -positivo.	80
Figura 3.4	Diagrama de radiação do alimentador no plano $1/\eta'$	85
Figura 3.5	Diagrama de radiação do alimentador em 3D.	86
Figura 3.6	Direções de incidência da solução inicial no plano $1/\eta'$ dos casos A.1, A.2 e A.3.	87
Figura 3.7	Direções de reflexão da solução inicial no plano xy dos casos A.1, A.2 e A.3.	88
Figura 3.8	Traçado de raios da solução inicial no plano xz dos casos A.1, A.2 e A.3.	88
Figura 3.9	Direções de reflexão da superfície sintetizada no plano xy do caso A.1.	90
Figura 3.10	Traçado de raios da superfície sintetizada no plano xz do caso A.1.	90
Figura 3.11	Desvio em graus da superfície modelada em relação ao resultado da síntese do caso A.1.	91
Figura 3.12	Diagrama de radiação da superfície modelada no caso A.1.	92
Figura 3.13	Direções de reflexão da superfície sintetizada no plano xy do caso A.2.	93
Figura 3.14	Traçado de raios da superfície sintetizada no plano xz do caso A.2.	93
Figura 3.15	Desvio em graus da superfície modelada em relação ao resultado da síntese do caso A.2.	94
Figura 3.16	Diagrama de radiação da superfície modelada no caso A.2.	94
Figura 3.17	Direções de reflexão da superfície sintetizada no plano xy do caso A.3.	96
Figura 3.18	Traçado de raios da superfície sintetizada no plano xz do caso A.3.	96
Figura 3.19	Desvio em graus da superfície modelada em relação ao resultado da síntese do caso A.3.	97
Figura 3.20	Diagrama de radiação da superfície modelada no caso A.3.	97
Figura 3.21	Direções de reflexão da superfície sintetizada no plano xy do caso A.4.	99

Figura 3.22	Traçado de raios da superfície sintetizada no plano xz do caso A.4.	99
Figura 3.23	Desvio em graus da superfície modelada em relação ao resultado da síntese do caso A.4.	100
Figura 3.24	Diagrama de radiação da superfície modelada no caso A.4.	100
Figura 3.25	Direções de incidência da solução inicial no plano $1/\eta'$ dos casos B.1.	102
Figura 3.26	Direções de reflexão da solução inicial no plano xy dos casos B.1.	102
Figura 3.27	Traçado de raios da solução inicial no plano xz dos casos B.1.	103
Figura 3.28	Direções de reflexão da superfície sintetizada no plano xy do caso B.1.	104
Figura 3.29	Traçado de raios da superfície sintetizada no plano xz do caso B.1.	105
Figura 3.30	Desvio em graus da superfície modelada em relação ao resultado da síntese do caso B.1.	105
Figura 3.31	Diagrama de radiação da superfície modelada no caso B.1.	106
Figura 3.32	Direções de reflexão da superfície sintetizada no plano xy do caso B.2.	107
Figura 3.33	Traçado de raios da superfície sintetizada no plano xz do caso B.2.	107
Figura 3.34	Desvio em graus da superfície modelada em relação ao resultado da síntese do caso B.2.	108
Figura 3.35	Diagrama de radiação da superfície modelada no caso B.2.	108
Figura 3.36	Direções de reflexão da superfície sintetizada no plano xy do caso B.3.	110
Figura 3.37	Traçado de raios da superfície sintetizada no plano xz do caso B.3.	110
Figura 3.38	Desvio em graus da superfície modelada em relação ao resultado da síntese do caso B.3.	111
Figura 3.39	Diagrama de radiação da superfície modelada no caso B.3.	111
Figura 3.40	Direções de reflexão da superfície sintetizada no plano xy do caso B.4.	112
Figura 3.41	Traçado de raios da superfície sintetizada no plano xz do caso B.4.	113
Figura 3.42	Desvio em graus da superfície modelada em relação ao resultado da síntese do caso B.4.	113
Figura 3.43	Diagrama de radiação da superfície modelada no caso B.4.	114
Figura 4.1	Geometria do problema de síntese de um sistema duplo-refletor <i>off-set</i> com fase não-uniforme na abertura como um problema de valor de contorno.	116
Figura 4.2	Diagrama de blocos do algoritmo de mapeamento para a fase não-uniforme.	118
Figura 4.3	Configuração TB (Gregorian) com a abertura definida na direção do semi espaço z -negativo.	120
Figura 4.4	Configuração TT (Cassegrain) com a abertura definida na direção do semi espaço z -negativo.	121
Figura 4.5	Configuração do duplo-refletor com fase linear na abertura.	130
Figura 4.6	Direções de incidência da solução inicial no plano $1/\eta'$.	133

Figura 4.7	Direções de reflexão da solução inicial no plano xy .	134
Figura 4.8	Traçado de raios da solução inicial no plano xz .	134
Figura 4.9	Direções de reflexão da superfície sintetizada no plano xy .	135
Figura 4.10	Traçado de raios da superfície sintetizada no plano xz .	135
Figura 4.11	Desvio em graus da superfície modelada em relação ao resultado da síntese.	136
Figura 4.12	Diagrama de radiação da superfície modelada.	137
Figura 4.13	Direções de incidência da solução inicial no plano $1/\eta'$.	139
Figura 4.14	Direções de reflexão da solução inicial no plano xy .	140
Figura 4.15	Traçado de raios da solução inicial no plano xz .	140
Figura 4.16	Direções de reflexão da superfície sintetizada no plano xy .	141
Figura 4.17	Traçado de raios da superfície sintetizada no plano xz .	141
Figura 4.18	Desvio em graus da superfície modelada em relação ao resultado da síntese.	142
Figura 4.19	Diagrama de radiação no plano uv - polarização principal.	143
Figura 4.20	Diagrama de radiação no plano uv - polarização cruzada.	143
Figura 4.21	Direções de incidência da solução inicial no plano $1/\eta'$.	144
Figura 4.22	Direções de reflexão da solução inicial no plano xy .	145
Figura 4.23	Traçado de raios da solução inicial no plano xz .	145
Figura 4.24	Direções de reflexão da superfície sintetizada no plano xy .	146
Figura 4.25	Traçado de raios da superfície sintetizada no plano xz .	147
Figura 4.26	Desvio em graus da superfície modelada em relação ao resultado da síntese.	147
Figura 4.27	Diagrama de radiação no plano uv - polarização principal.	148
Figura 4.28	Diagrama de radiação no plano uv - polarização cruzada.	148
Figura 5.1	Geometria do problema de síntese da lente.	151
Figura 5.2	Geometria de uma lente dielétrica como um problema de valor de contorno.	159
Figura 5.3	Contorno super-elíptico na região de cobertura.	160
Figura 5.4	Diagrama de blocos do algoritmo de síntese da lente.	166
Figura 5.5	Direção dos raios refratados no plano complexo ζ para o caso I-a.	170
Figura 5.6	Traçado de raios da lente sintetizada para o caso I-a.	171
Figura 5.7	Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^\circ$ com a lente operando na frequência de 30 GHz para o caso I-a.	172
Figura 5.8	Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^\circ$ com a lente operando na frequência de 60 GHz para o caso I-a.	173
Figura 5.9	Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^\circ$ com a lente operando na frequência de 120 GHz para o caso I-a.	173

Figura 5.10 Direção dos raios refratados no plano complexo ζ para o caso I-b. .	174
Figura 5.11 Traçado de raios da lente sintetizada para o caso I-b.	175
Figura 5.12 Direção dos raios refratados no plano complexo ζ para o caso II-a. .	176
Figura 5.13 Traçado de raios da lente sintetizada para o caso II-a.	177
Figura 5.14 Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^0$ com a lente operando na frequência de 30 GHz para o caso II-a.	177
Figura 5.15 Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^0$ com a lente operando na frequência de 60 GHz para o caso II-a.	178
Figura 5.16 Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^0$ com a lente operando na frequência de 120 GHz para o caso II-a.	178
Figura 5.17 Direção dos raios refratados no plano complexo ζ para o caso II-b. .	180
Figura 5.18 Traçado de raios da lente sintetizada para o caso II-b.	180
Figura 5.19 Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^0$ com a lente operando na frequência de 30 GHz para o caso II-b.	181
Figura 5.20 Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^0$ com a lente operando na frequência de 60 GHz para o caso II-b.	181
Figura 5.21 Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^0$ com a lente operando na frequência de 120 GHz para o caso II-b.	182
Figura 5.22 Direção dos raios refratados no plano complexo ζ para o caso II-c. .	183
Figura 5.23 Traçado de raios da lente sintetizada para o caso II-c.	184
Figura 5.24 Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^0$ com a lente operando na frequência de 30 GHz para o caso II-c.	184
Figura 5.25 Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^0$ com a lente operando na frequência de 60 GHz para o caso II-c.	185
Figura 5.26 Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^0$ com a lente operando na frequência de 120 GHz para o caso II-c.	185
Figura 5.27 Direção dos raios refratados no plano complexo ζ para o caso II-d. .	187
Figura 5.28 Traçado de raios da lente sintetizada para o caso II-d.	187
Figura 5.29 Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^0$ com a lente operando na frequência de 30 GHz para o caso II-d.	188
Figura 5.30 Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^0$ com a lente operando na frequência de 60 GHz para o caso II-d.	188
Figura 5.31 Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^0$ com a lente operando na frequência de 120 GHz para o caso II-d.	189
Figura 5.32 Direção dos raios refratados no plano complexo ζ para o caso III-a. .	190
Figura 5.33 Traçado de raios da lente sintetizada para o caso III-a.	191
Figura 5.34 Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^0$ com a lente operando na frequência de 30 GHz para o caso III-a.	192

Figura 5.35 Diagrama de radiação no plano $\phi = 90^0$ com a lente operando na frequência de 30 GHz para o caso III-a.	192
Figura 5.36 Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^0$ com a lente operando na frequência de 60 GHz para o caso III-a.	193
Figura 5.37 Diagrama de radiação no plano $\phi = 90^0$ com a lente operando na frequência de 60 GHz para o caso III-a.	193
Figura 5.38 Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^0$ com a lente operando na frequência de 120 GHz para o caso III-a.	194
Figura 5.39 Diagrama de radiação no plano $\phi = 90^0$ com a lente operando na frequência de 120 GHz para o caso III-a.	194
Figura 5.40 Direção dos raios refratados no plano complexo ζ para o caso III-b.	196
Figura 5.41 Traçado de raios da lente sintetizada para o caso III-b.	196
Figura 5.42 Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^0$ com a lente operando na frequência de 30 GHz para o caso III-b.	197
Figura 5.43 Diagrama de radiação no plano $\phi = 90^0$ com a lente operando na frequência de 120 GHz para o caso III-b.	197
Figura 5.44 Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^0$ com a lente operando na frequência de 60 GHz para o caso III-b.	198
Figura 5.45 Diagrama de radiação no plano $\phi = 90^0$ com a lente operando na frequência de 60 GHz para o caso III-b.	198
Figura 5.46 Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^0$ com a lente operando na frequência de 120 GHz para o caso III-b.	199
Figura 5.47 Diagrama de radiação no plano $\phi = 90^0$ com a lente operando na frequência de 120 GHz para o caso III-b.	199
Figura 5.48 Direção dos raios refratados no plano complexo ζ para o caso III-c.	200
Figura 5.49 Traçado de raios da lente sintetizada para o caso III-c.	201
Figura 5.50 Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^0$ com a lente operando na frequência de 30 GHz para o caso III-c.	202
Figura 5.51 Diagrama de radiação no plano $\phi = 90^0$ com a lente operando na frequência de 30 GHz para o caso III-c.	202
Figura 5.52 Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^0$ com a lente operando na frequência de 60 GHz para o caso III-c.	203
Figura 5.53 Diagrama de radiação no plano $\phi = 90^0$ com a lente operando na frequência de 60 GHz para o caso III-c.	203
Figura 5.54 Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^0$ com a lente operando na frequência de 120 GHz para o caso III-c.	204
Figura 5.55 Diagrama de radiação no plano $\phi = 90^0$ com a lente operando na frequência de 120 GHz para o caso III-c.	204
Figura 5.56 Direção dos raios refratados no plano complexo ζ para o caso III-d.	205

Figura 5.57	Traçado de raios da lente sintetizada para o caso III-d.	206
Figura 5.58	Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^0$ com a lente operando na frequência de 30 GHz para o caso III-d.	207
Figura 5.59	Diagrama de radiação no plano $\phi = 90^0$ com a lente operando na frequência de 30 GHz para o caso III-d.	207
Figura 5.60	Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^0$ com a lente operando na frequência de 60 GHz para o caso III-d.	208
Figura 5.61	Diagrama de radiação no plano $\phi = 90^0$ com a lente operando na frequência de 60 GHz para o caso III-d.	208
Figura 5.62	Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^0$ com a lente operando na frequência de 120 GHz para o caso III-d.	209
Figura 5.63	Diagrama de radiação no plano $\phi = 90^0$ com a lente operando na frequência de 120 GHz para o caso III-d.	209
Figura A.1	Geometria da lente com foco virtual no ponto $P(\rho_0, Z_0)$ [46].	220

Lista de Símbolos

$\hat{p}$	Vetor unitário na direção do raio incidente no subrefletor e na lente
$\hat{t}$	Vetor unitário na direção do raio refletido pelo subrefletor ou pelo raio transmitido pela lente
$\hat{q}$	Vetor unitário na direção do raio refletido pelo refletor principal
$\vec{r}$	Vetor posição na superfície do subrefletor ou da lente
r	Magnitude do vetor posição $\vec{r}$
$\vec{s}$	Vetor que representa o raio refletido pelo subrefletor em direção ao refletor principal
$\vec{v}$	Vetor que conecta a origem O ao ponto Q na abertura
$\vec{r} + \vec{s}$	Vetor que representa a superfície do refletor principal
η	Coordenada complexa na direção do vetor unitário $\hat{p}$
η_r	Parte real da coordenada η
ω	Coordenada complexa do ponto Q na abertura
ω_r	Parte real da coordenada ω
ξ	Coordenada complexa na direção do vetor $\vec{s}$
ζ	Coordenada complexa na direção do vetor unitário $\hat{q}$ na síntese do duplo-refletor e do vetor unitário $\hat{t}$ na síntese da lente
$L(\eta)$	Função real de variável complexa relacionada à superfície r
$l(\omega)$	Fase na abertura
z_d	Distância do plano da abertura à origem O do sistema de coordenadas
$I(\eta)$	Densidade de potência por ângulo sólido do alimentador
$G(\omega)$	Fluxo de densidade de potência por unidade de área normal à abertura
$G_{ob}(\omega)$	Densidade de potência desejada na abertura
$G_{sq}(\omega)$	Densidade de potência refletida na abertura
a	<i>Semi-latus rectum</i> da superfície quádrlica confocal
b	Parâmetro da superfície quádrlica confocal
c	Parâmetro da superfície quádrlica confocal
d	Parâmetro da superfície quádrlica confocal
L_η	Derivada de $L(\eta)$ em relação à variável complexa η

$L_{\eta\eta}$	Derivada de segunda ordem de $L(\eta)$ em relação à η
$L_{\bar{\eta}\bar{\eta}}$	Derivada de segunda ordem de $L(\eta)$ em relação ao complexo conjugado de η
$L_{\eta\bar{\eta}}$	Derivada de segunda ordem cruzada de $L(\eta)$
j	Anel da grade polar
k	Radial da grade polar
J	Quantidade de anéis da grade polar
K	Quantidade de radiais da grade polar
$a_{j,k}$	<i>Semi-latus rectum</i> da superfície quádrlica confocal que interpola a superfície sintetizada no ponto j, k da grade polar
$b_{j,k}$	Parâmetro b da superfície quádrlica confocal que interpola a superfície sintetizada no ponto j, k da grade polar
$c_{j,k}$	Parâmetro c da superfície quádrlica confocal que interpola a superfície sintetizada no ponto j, k da grade polar
$d_{j,k}$	Parâmetro d da superfície quádrlica confocal que interpola a superfície sintetizada no ponto j, k da grade polar
α	Especifica a regularidade da grade polar em θ
θ_c	Ângulo que define o cone de alimentação do alimentador
θ_0	Ângulo de <i>offset</i> do alimentador em relação ao eixo z positivo
r_0	Distância do centro de fase do alimentador O ao centro do subrefletor
ω_c	Centro da abertura sobre o eixo x
L_0	Valor da superfície no centro da grade
ra_x	Raio do contorno da abertura super-elíptica ao longo do eixo x
ra_y	Raio do contorno da abertura super-elíptica ao longo do eixo y
σ	Parâmetro que define o formato da super-elipse
$\Gamma[L]$	Operador não-linear
$\Gamma_{j,k}[L]$	Valor do operador não-linear no ponto j, k da grade polar
Γ_c	Valor do operador $\Gamma[L]$ sobre um ponto do contorno
n	Parâmetro do modelo cosseno elevado do diagrama do alimentador
I_0	Densidade de potência máxima do diagrama do alimentador
L_e	Atenuação do diagrama do alimentador na borda do subrefletor ou da lente
G_0	Densidade de potência máxima na abertura ou na região de cobertura
L_G	Atenuação da densidade de potência na borda da abertura ou da região cobertura
ψ	Fator de atenuação da distribuição de densidade de potência da abertura ou da região de cobertura
μ	Passo intermediário do algoritmo de síntese
θ_A	Ângulo do cone de alimentação a partir do ponto P_0
$I_A(\zeta)$	Representação do diagrama de radiação da Óptica Geométrica (GO)
$\hat{n}$	Vetor unitário normal à superfície da lente
θ_i	Ângulo de incidência

θ_t	Ângulo de transmissão
N	Índice de refração da lente sintetizada
$G(\zeta)$	Densidade de potência por ângulo sólido na região de campo distante
Z_A	Espessura da lente
Ω''	Contorno da abertura ou da região de cobertura
α_u	Abertura angular do diagrama de radiação ao longo do eixo u
α_v	Abertura angular do diagrama de radiação ao longo do eixo v
α_0	Ângulo de <i>offset</i> da região de cobertura em relação ao eixo z positivo
$G_{ob}(\zeta)$	Densidade de potência desejada na região de cobertura
$G_{sq}(\zeta)$	Densidade de potência transmitida na região de cobertura
$T_{\perp}$	Coeficiente de transmissão de Fresnel para polarização perpendicular função de η e ζ
$T_{\parallel}$	Coeficiente de transmissão de Fresnel para polarização paralela função de η e ζ
t_{12}	Transmitância da superfície
λ_0	Comprimento de onda no ar (espaço-livre)
δ_d	Tangente de perdas do material dielétrico
$\vec{k}_i$	Vetor na direção do raio incidente
$\vec{k}_t$	Vetor na direção do raio transmitido
E_i	Campo elétrico incidente
$E_{i\perp}$	Componente perpendicular do campo elétrico incidente
$E_{i\parallel}$	Componente paralela do campo elétrico incidente
$H_{i\parallel}$	Componente paralela do campo magnético incidente
$E_{t\perp}$	Componente perpendicular do campo elétrico transmitido
$E_{t\parallel}$	Componente paralela do campo elétrico transmitido
$H_{t\parallel}$	Componente paralela do campo magnético transmitido
E_t	Campo elétrico transmitido
H_t	Campo magnético transmitido
$t_{\perp}$	Coeficiente de transmissão de Fresnel para polarização perpendicular função de θ e ϕ
$t_{\parallel}$	Coeficiente de transmissão de Fresnel para polarização paralela função de θ e ϕ
$\vec{J}_s(P)$	Corrente equivalente elétrica na superfície do material dielétrico
$\vec{M}_s(P)$	Corrente equivalente magnética na superfície do material dielétrico
$\vec{u}_0$	Vetor posição na região de cobertura
Z_0	Impedância do ar
Z_1	Impedância do material dielétrico
n_1	Índice de refração de um material dielétrico
n_0	Índice de refração do ar
k_0	Número da onda no espaço-livre (ou no ar)
ε_r	Permissividade elétrica relativa

Sumário

1	Introdução	22
1.1	O Problema de Síntese Rigorosa de Antenas Refletoras <i>Offset</i>	24
1.2	Lentes Dielétricas	27
1.2.1	O Problema de Síntese Rigorosa de Lentes Dielétricas	28
1.3	Objetivos	29
1.3.1	Objetivos Específicos	30
1.4	Contribuições do Trabalho	30
1.5	Organização do Trabalho	31
2	Síntese Óptica de Antenas Duplo-Refletoras <i>Offset</i>	33
2.1	Notação em Coordenadas Complexas	33
2.2	Formulação do Problema de Síntese	35
2.3	Superfície Quádrica Confocal com Eixo Deslocado	38
2.3.1	Definição e Equações Gerais	39
2.3.2	Derivadas Parciais	42
2.4	Solução Numérica do Problema de Síntese	43
2.4.1	Grade Polar	44
2.4.2	Interpolação Local de uma Superfície por Quádricas Confocais com Eixos Deslocados	53
2.4.3	Operador Não-Linear $\Gamma[L]$	58
2.4.4	Método Iterativo de Newton	58
2.4.5	Matriz Jacobiana do Operador $\Gamma[L]$	62
2.5	Condição de Contorno	67
2.6	Modelo para o Diagrama do Alimentador	69
2.7	Modelo de Distribuição de Densidade de Potência na Abertura	71
2.8	Algoritmo de Síntese	73
2.9	Considerações Finais	74
3	Antenas Duplo-Refletoras <i>Offset</i> com Fase Uniforme na Abertura	75
3.1	Geometria do Problema de Síntese	75
3.2	Mapeamento $\eta \rightarrow \omega$	76
3.3	Equação de Monge-Ampère	77

3.4	Coordenadas do Refletor Principal	78
3.5	Exemplo de Solução Analítica para a Síntese de Duplo-Refletores com Fase Uniforme na Abertura	78
3.6	Densidade de Potência Refletida na Abertura	80
3.7	Solução Numérica do Problema de Síntese	82
3.8	Estudos de Casos	84
3.8.1	Projeto de Sistemas Duplo-Refletores com Abertura Circular	86
3.8.2	Projeto de Sistemas Duplo-Refletores com Abertura Elíptico	101
3.9	Considerações Finais	114
4	Antenas Duplo-Refletoras <i>Offset</i> com Fase Não-Uniforme na Abertura	115
4.1	Geometria do Problema de Síntese	115
4.2	Mapeamento $\eta \rightarrow \omega$	116
4.3	Coordenadas do Refletor Principal	119
4.4	Exemplo de Solução Analítica para a Síntese de Duplo-Refletores com Fase Uniforme na Abertura	119
4.5	Densidade de Potência Refletida na Abertura	122
4.6	Solução Numérica do Problema de Síntese	123
4.7	Estudos de Casos	129
4.7.1	Controle do Diagrama de Radiação em Cobertura Circular	129
4.7.2	Controle do Diagrama de Radiação em Cobertura com Formato de Bumerangue	137
4.7.3	Projeto de um Sistema Duplo-Refletor com Abertura Super-Elíptica	144
4.8	Considerações Finais	149
5	Síntese Óptica de Lentes Dielétricas sem Simetria Circular	150
5.1	Formulação e Geometria do Problema de Síntese	150
5.2	Mapeamento $\eta \rightarrow \zeta$	152
5.3	Equação de Monge-Ampère	154
5.4	Densidade de Potência na Região de Cobertura	155
5.5	Solução Numérica do Problema de Síntese	156
5.6	Condição de Contorno	159
5.7	Modelo de Distribuição de Densidade de Potência na Região de Cobertura	161
5.8	Perdas por Reflexão	163
5.9	Algoritmo de Síntese para a Lente Dielétrica	165
5.10	Método de Análise de uma Lente Dielétrica	167
5.11	Estudos de Casos	169
5.11.1	Projeto de Lentes Dielétricas com Cobertura Circular ($0 \leq \theta \leq 90^\circ$)	170
5.11.2	Projeto de Lentes Dielétricas com Cobertura Circular ($0 \leq \theta \leq 60^\circ$)	175
5.11.3	Projeto de Lentes Dielétricas com Cobertura Elíptica ($0 \leq \theta \leq 60^\circ$)	189

5.12	Considerações Finais	210
6	Conclusões e Trabalhos Futuros	211
6.1	Trabalhos Futuros	213
	Referências	214
	Apêndice	218
A	Lente Circularmente Simétrica	219

Capítulo 1

Introdução

De acordo com Balanis [1], uma antena é definida como um dispositivo para a radiação ou a recepção de ondas de rádio. Nos avançados sistemas de comunicação sem fio (*wireless*), além da recepção e transmissão de energia, é usualmente exigido que a antena otimize ou reforce a energia de radiação em determinadas direções e que a suprima em outras. Uma antena ideal é aquela que radiará, em uma direção ou direções desejadas, toda a potência a ela fornecida pelo transmissor. No entanto, esse desempenho ideal jamais pode ser obtido na prática, mas um desempenho próximo deste pode ser alcançado. Existem diversos tipos de antena, e cada uma tem uma forma geométrica diferente de modo a atingir as características de radiação desejadas para a aplicação pretendida.

Antenas do tipo refletoras têm sido usadas desde a descoberta da propagação de ondas eletromagnéticas por Hertz em 1888. Entretanto, a arte de analisar e projetar refletores de diversas formas geométricas não progrediu até a época da Segunda Guerra Mundial, quando foram desenvolvidas numerosas aplicações de radar. A subsequente demanda por refletores para uso em radioastronomia, comunicação em micro-ondas e rastreamento por satélites resultou em um espetacular progresso e desenvolvimento de sofisticadas técnicas analíticas e experimentais para a modelagem de superfícies refletoras e otimização da iluminação de suas aberturas para maximizar o seu ganho [1].

As antenas refletoras assumem diversas configurações geométricas. Um exemplo comum é o refletor parabólico. Uma outra possível geometria de antenas refletoras são as antenas refletoras *offset*, que podem ter um único refletor ou ser duplo-refletoras [2], [3], [4]. A principal vantagem desta configuração assimétrica é evitar o bloqueio da abertura [2], conforme ilustrado nas Figuras 1.1 e 1.2. As geometrias assimétricas representam um grande avanço comparadas às geometrias simétricas, pois evitam espalhamento eletromagnético causado pelo alimentador ou subrefletor e suas respectivas estruturas de sustentação, minimizando os níveis dos lóbulos laterais e aumentando a eficiência do sistema. Assim, essas antenas modeladas podem ser empregadas para fornecer uma cober-

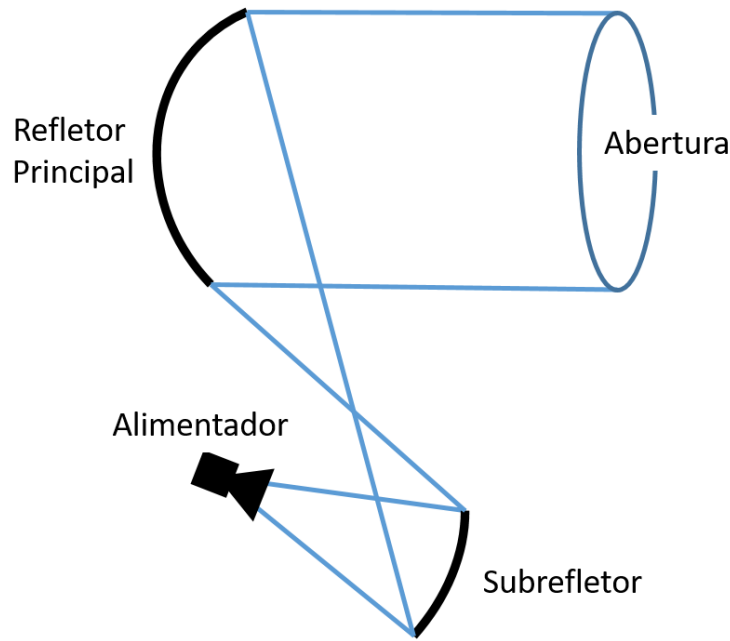


Figura 1.1: Geometria da antena duplo-refletora *offset* (configuração Gregorian).

tura otimizada com alto ganho e baixa interferência co-canal [5]. Outro aspecto positivo é conseguir isolar a estrutura de alimentação da energia refletida na região central da superfície refletora, minimizando a perda de retorno do alimentador [3]. Em contrapartida, a grande desvantagem dos sistemas *offset* reside na complexidade e custos de implementação da estrutura mecânica de sustentação dos refletores e alimentador [6]. Do ponto de vista eletromagnético, a principal desvantagem é a polarização cruzada gerada quando alimentada por uma fonte com polarização linear ou circular [2], [7].

A solução clássica para o projeto de antenas refletoras *offset* é o uso de superfícies quádricas confocais [8], por exemplo, elipsóides, parabolóides e hiperbolóides. Entretanto, a rotação na polarização imposta pela geometria torna-se um grande inconveniente quando a aplicação requerida exige baixos níveis de polarização cruzada. Na segunda metade da década de 1970, foi demonstrado em [9] e [10] que antenas duplo-refletoras *offset* podem ser projetadas de tal forma que, quando alimentadas por uma fonte linearmente polarizada, a despolarização decorrida da assimetria dos refletores pode ser largamente reduzida, proporcionando baixo nível de polarização cruzada. O princípio utilizado consiste em obter uma condição em que ocorra o casamento do campo espalhado do subrefletor com aquele proveniente do refletor principal. Nesta condição a componente de polarização cruzada na abertura causada pela assimetria do refletor principal pode ser compensada pela assimetria do subrefletor, desde que, sejam utilizados determinados ângulos de rotação do alimentador. Do ponto de vista da Óptica Geométrica (GO), pode-se mostrar que o perfeito casamento é atingido quando a condição de Mizugutch é respeitada e, nestes casos, círculos concêntricos no alimentador são mapeados em círculos concêntricos na abertura da antena [2], [11].

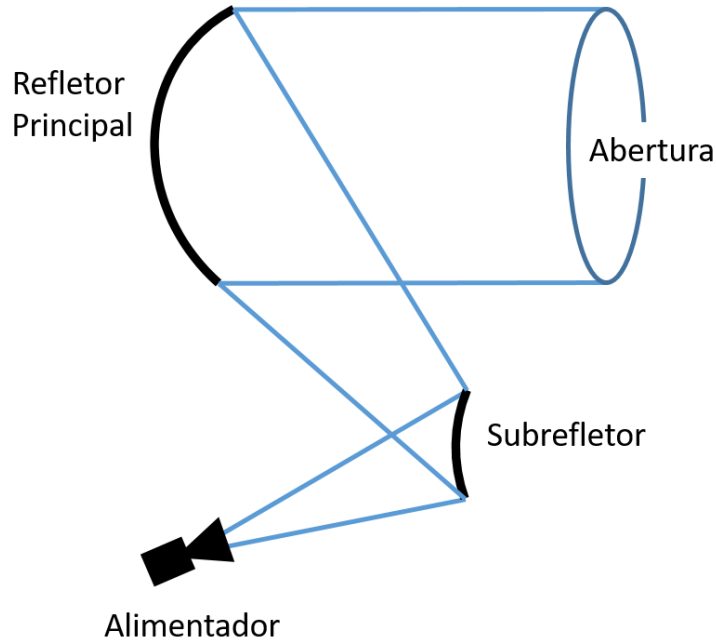


Figura 1.2: Geometria da antena duplo-refletora *offset* (configuração Cassegrain).

1.1 O Problema de Síntese Rigorosa de Antenas Refletoras *Offset*

Uma análise matemática rigorosa para o problema de síntese de antenas refletoras *offset* com um único refletor e contorno da abertura geral foi inicialmente apresentado em [12]. Nesse trabalho, são utilizadas variáveis paramétricas para representar as direções espaciais, substituindo assim, expressões trigonométricas por expressões algébricas, levando a importantes simplificações nas expressões de síntese. Nessa abordagem, a Lei de Snell é aplicada na equação de conservação da energia, resultando em uma equação diferencial parcial não-linear de segunda ordem do tipo Monge-Ampère elíptica, que representa fisicamente a transformação da densidade de potência contida em um tubo de raios.

Com a abordagem proposta em [12] e utilizando cálculo tensorial, em [13] as mesmas expressões são obtidas para a síntese de superfícies refletoras iluminadas por uma fonte pontual para gerar um diagrama de radiação específico utilizando as aproximações da GO. A solução numérica da equação de Monge-Ampère é apresentada em [14] para o caso elíptico e em [15] e [16] para o caso hiperbólico, onde uma antena com um refletor *offset* é projetada para o contorno circular na região de campo distante. O algoritmo desenvolvido consiste em um procedimento iterativo em que aproximações baseadas em diferenças finitas são aplicadas a uma forma linearizada de um operador diferencial.

Em [17] os problemas de síntese explorados em [12] - [16] são abordados utilizando coordenadas complexas e unificadas em uma única equação diferencial de Monge-Ampère elíptica ou hiperbólica, a depender de um sinal. O sistema de coordenadas complexas é

definido através da projeção estereográfica de uma esfera de raio unitário sobre um plano complexo [18]. Com esse novo formalismo é mostrado que, para o mapeamento entre um raio incidente e refletido, pode ser utilizada qualquer transformação analítica, em particular, uma transformação analítica conformal nos casos onde a distorção é uniforme.

Com a notação de [17], [19] apresenta a relação entre a distribuição de fase e densidade de potência proveniente de uma fonte pontual no plano de abertura, considerando sistemas refletores *offset* com um único refletor e com dois refletores. Ainda em [19], é demonstrado que, para os sistemas duplo-refletores, ambas as distribuições de fase e densidade de potência podem ser obtidas no plano de abertura sem as aproximações feitas em [20] e [21]. Além disso, verifica-se que a transformação da densidade de potência em um tubo de raios também é representada por uma equação do tipo Monge-Ampère. Particularizando a solução para o caso de simetria axial, duas equações diferenciais ordinárias são obtidas e avaliadas com as mesmas condições iniciais assumidas em [22].

Já no trabalho [23], Westcott e Brickel utilizam coordenadas complexas e demonstram que a equação diferencial parcial não-linear de primeira ordem numericamente avaliada em [24] pode ser resolvida analiticamente. Também, demonstra-se que para o caso de fase uniforme na abertura, o sistema deve ter necessariamente um plano de simetria para se obter a condição de polarização cruzada nula. Em [25], o problema de polarização cruzada nula é novamente examinado e conclui-se que, em princípio, a modelagem pode compensar não somente a assimetria dos refletores, mas também assimetrias provenientes do diagrama de radiação do alimentador.

Utilizando a formulação proposta em [19], em [26] o problema de síntese de antenas duplo-refletores *offset* é particularizado para uma abertura circular com fase uniforme. A formulação matemática exata é apresentada, e novamente uma equação diferencial parcial do tipo Monge-Ampère é avaliada utilizando uma adaptação da técnica desenvolvida para sistemas com um único refletor [13]. Como solução, um conjunto de funções reais associadas ao refletor principal é obtido. A solução mais apropriada é feita pela escolha de uma constante que define a distância do centro do sistema de coordenadas ao ponto central do refletor. Em [27], a formulação é particularizada para sistemas duplo-refletores com fase uniforme e abertura elíptica.

Um aspecto bastante controverso e pouco significativo para o projeto de antenas refletores *offset* modeladas é a existência de solução para a equação de Monge-Ampère e a unicidade dessa solução. É bem verdade que ainda não foi provado matematicamente que a solução exista para uma abertura com geometria arbitrária [2]. Entretanto, diversos trabalhos, entre eles [28], [29] e [30], demonstraram através de resultados numéricos a existência de solução para vários contornos de abertura. Em [31], além da tradicional abertura circular, diversos outros tipos de abertura com geometrias elípticas e modeladas

foram amplamente estudados e sintetizados com sucesso. Para validação do método, resultados de análise difrativa foram apresentados para as antenas sintetizadas. Com relação à unicidade da solução, de fato não se pode garantir que ao mudar a condição inicial do problema ter-se-á a mesma resposta inicialmente obtida.

Em [32], Caffarelli e Osher estabeleceram a existência de soluções fracas para a equação de Monge-Ampère sob certos termos. Em [33], utilizando uma abordagem similar à proposta em [32], um novo método de síntese rigoroso é apresentado para sistemas *offset* com um único refletor. A técnica utiliza uma coleção de elipsóides confocais para compor a superfície refletora sintetizada. Para a solução do mapeamento, é desenvolvido um algoritmo iterativo para solução do problema de redistribuição de energia, na forma integral, de cada uma das elipses que compõem a superfície em vez de avaliar a equação diferencial de Monge-Ampère numericamente. Outra abordagem alternativa para a síntese geométrica de sistemas duplo-refletores é explorada em [34] e [35] onde a redistribuição de energia é formulada e resolvida como um problema de transferência de Monge-Kantorovich.

Apesar da síntese rigorosa de antenas refletoras *offset* baseada na equação de Monge-Ampère ter sido amplamente estudada durante quase duas décadas [12], [31], o problema de aumento exponencial do erro de discretização na região central das grades polares ainda é um dos inconvenientes do método. Segundo [31], este erro ocorre em virtude do procedimento numérico empregado ser baseado em diferenças finitas, levando a erros de truncamento nas derivadas parciais de primeira e segunda ordem que são proporcionais a $1/\rho$ e $1/\rho^2$, respectivamente, onde ρ é o raio da grade polar. Como consequência, o erro na distribuição de fase e amplitude na região central da grade é maior do que nas bordas.

Recentemente, [2] avaliou o problema da síntese rigorosa de antenas refletoras *offset* utilizando coordenadas complexas, assim como em [17]. No entanto, ao contrário de [26] que adota um procedimento numérico iterativo em que aproximações baseadas em diferenças finitas são aplicadas a uma forma linearizada de um operador diferencial, [2] utiliza superfícies quádricas confocais com eixos deslocados para representar localmente a superfície refletora sintetizada a fim de reduzir o erro de discretização das derivadas parciais discutido em [31], uma vez que se tem a expressão analítica exata para a função de mapeamento local e suas derivadas, sendo necessário apenas determinar os parâmetros que definem cada quádrica. Para ilustrar o método, [2] apresenta antenas modeladas com um único refletor para prover diagramas de radiação Gaussianos em contornos de cobertura circular, elíptico e super-elíptico.

1.2 Lentes Dielétricas

O uso de uma lente dielétrica como parte de uma antena é tão antigo quanto a demonstração da existência das ondas eletromagnéticas por Hertz. Em 1888, Oliver Logde usou uma lente dielétrica em seu experimento de comprimento de onda de 1 m. No entanto, assim, como as antenas refletoras, a pesquisa sobre antenas lentes não progrediu até a Segunda Guerra Mundial. As lentes eram usadas para transformar o diagrama de radiação de uma fonte primária em um padrão de radiação de alto ganho, para aplicações com feixe fixo ou de varredura. Mas naquela época, as lentes foram substituídas pelas antenas refletoras, menos volumosas e mais leves nas faixas de micro-ondas [36].

Com o avanço da tecnologia nas últimas décadas, em particular na tecnologia de circuitos de ondas milimétricas e submilimétricas, o interesse por antenas lentes foi renovado, visto que o tamanho das lentes torna-se aceitável nessas frequências. Atualmente, as lentes têm sido exploradas em diversas aplicações, como por exemplo, para imagens [37], comunicação sem fio *indoor* [38], sistemas de radar [39], espectroscopia temporal [40], radioastronomia [41], comunicações via satélite [42], entre outras.

As lentes podem ser usadas para modificar a fase ou a amplitude (ou ambas) do padrão de radiação de um alimentador primário, a fim de transformá-lo em um padrão de radiação de saída especificado. Nesse sentido, as lentes são equivalentes aos refletores. No entanto, em vez da reflexão, o princípio de operação da lente é baseado na refração das ondas eletromagnéticas nas superfícies da lente (no caso de lentes homogêneas isotrópicas) ou no material dielétrico da lente no caso de lentes de índice de refração não uniforme.

Uma principal vantagem das lentes sobre os refletores é que a alimentação e sua estrutura de suporte não bloqueiam a abertura da antena. Esse recurso de retroalimentação foi essencial para o desenvolvimento do conceito de lente integrada de onda milimétrica e submilimétrica, onde a base da lente é posicionada diretamente em contato com a alimentação (vide Fig. 1.3) para produzir um padrão de radiação diretivo de feixe único ou de feixe múltiplo. A estrutura da lente integrada é muito flexível e permite obter especificações exigentes de padrões de radiação de saída, enquanto várias camadas podem ser adicionadas, por exemplo, para aumentar os graus de liberdade do projeto, mantendo uma estrutura compacta. Isso contrasta com os sistemas multi-refletores, onde os problemas de bloqueio forçam grandes estruturas complexas [36].

Além disso, as lentes dielétricas convencionais são relativamente baratas, têm boa tolerância de fabricação, possuem grande largura de banda, sendo limitadas apenas pela largura de banda de alimentação, e apresentam baixas perdas dissipativas [37], [38], [39], [40], [42], [43].

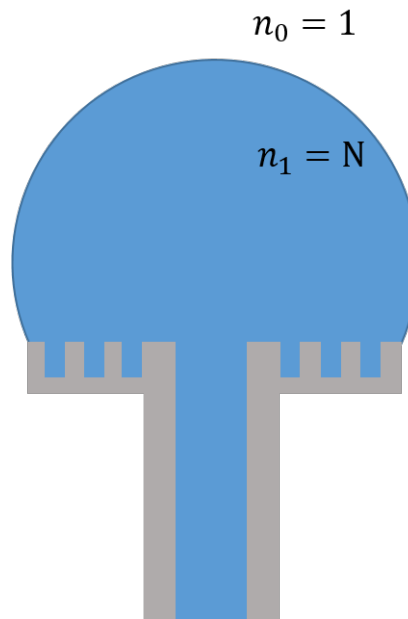


Figura 1.3: Lente dielétrica homogênea integrada ao alimentador.

1.2.1 O Problema de Síntese Rigorosa de Lentes Dielétricas

As lentes dielétricas apresentadas na literatura têm, em geral, formas geométricas canônicas, podendo ser constituídas por uma única superfície refrativa (por exemplo, esférica, hiperbólica), ou de duas superfícies refrativas (por exemplo, bihiperbólicas). Há também lentes montadas sobre substratos com perfis elípticos ou hemisférico estendido. Suas funcionalidades básicas consistem em controlar a diretividade da antena e eventualmente a distribuição Gaussiana do feixe radiado [43].

A partir da década de 1980, alguns trabalhos dedicados à análise matemática rigorosa do problema de síntese de lentes dielétricas, assim como foi feito para antenas refletoras *offset* na década de 1970. O mais relevante deles foi em 1986, quando Westcott e Brickell usaram os princípios de GO para estudar a refração através de uma interface em coordenadas complexas [44]. A relação de mapeamento, lei de Snell da refração, entre as direções dos raios incidentes e refratados foi obtida analiticamente. Nesse mesmo trabalho, Westcott e Brickell formularam teoricamente o problema de modelar um material dielétrico duplo-refrativo para produzir uma distribuição de potência arbitrária sobre uma abertura com fase uniforme. A formulação matemática conduziu a uma equação diferencial parcial não-linear do tipo Monge-Ampère. No entanto, as perdas por reflexão no interior do dielétrico foram desprezadas.

Mais tarde, em 1993, Westcott formulou o problema de síntese de um refletor *offset* alimentado por um cone dielétrico sob os princípios da GO usando a notação em coordenadas complexas para traçar as direções dos raios e suas polarizações. As perdas por reflexão foram incluídas na teoria apresentada. Assim como na metodologia de projeto

de sistemas duplo-refletores formulada em [19], [26], as superfícies do refletor e da lente são obtidas simultaneamente. O problema de modelar o refletor e a superfície dielétrica para controlar as distribuições de potência e fase na abertura é formulado e também requer a solução de uma equação diferencial parcial não-linear do tipo Monge-Ampère [45].

Em 1996, Lemaire *et al.* projetaram uma lente dielétrica com simetria cilíndrica usando os princípios da GO para estabelecer o perfil da lente. No entanto, foi adicionado um segundo passo no procedimento de projeto para corrigir o diagrama de radiação da lente. Nesse estudo foi construído um protótipo de uma antena lente de 7 cm de diâmetro alimentado por um guia de onda circular excitado com o modo TE_{11} com polarização circular e seu diagrama de radiação foi mensurado com o sistema operando na frequência de 62,5 GHz.

Em 2005, uma lente dielétrica homogênea tridimensional de formato arbitrário foi sintetizada [43]. O objetivo era encontrar um perfil de lente que transformasse o diagrama de radiação de uma fonte de alimentação primária em um diagrama de radiação de saída com amplitude desejada. Para isso, a geometria da lente 3D foi rigorosamente derivada usando os princípios da GO resultando em uma equação diferencial parcial de segunda ordem do tipo Monge-Ampère. A formulação foi apresentada em coordenadas esféricas e o algoritmo iterativo proposto baseia-se em aproximar as derivadas parciais presentes na formulação por diferenças finitas. Para alcançar o padrão de saída especificado, os resultados obtidos na síntese da GO foram otimizados usando uma aproximação baseada na Óptica Física (PO). Antes da etapa de otimização, os resultados obtidos com a GO tiveram boa concordância com aqueles preditos. No entanto, surgiram oscilações no lóbulo principal das lentes mensuradas evidenciando uma forte diferença entre os padrões desejados e medidos. Esta discrepância somente foi reduzida com a etapa de otimização da lente.

Recentemente, uma fórmula simples foi derivada em [46] para descrever a geratriz de lentes circularmente simétricas baseando-se no princípio de Fermat. A espessura da lente é projetada para minimizar as perdas por reflexão no interior da lente. Embora a largura do feixe principal possa ser especificada, a amplitude da distribuição de potência na região de campo distante não pode ser controlada.

1.3 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo obter soluções numéricas para a síntese de antenas duplo-refletores *offset* e lentes dielétricas sem simetria circular, e que gerem um diagrama de radiação com feixes modelados. A solução do problema de síntese consiste em avaliar uma equação diferencial parcial não-linear de segunda ordem do tipo Monge-Ampère como um problema de valor de contorno em coordenadas complexas. Para isso, este estudo

aplica a técnica de solução numérica da equação de Monge-Ampère proposta em [2], que utiliza superfícies quádricas confocais com eixos deslocados para representar localmente a superfície sintetizada, permitindo a representação analítica das derivadas parciais da equação de Monge-Ampère e sua subsequente simplificação.

1.3.1 Objetivos Específicos

O presente trabalho tem como objetivos específicos:

- desenvolvimento de modelagem para a síntese de antenas duplo-refletoras *offset* com fase uniforme na abertura;
- desenvolvimento de modelagem para a síntese de antenas duplo-refletoras *offset* com fase não-uniforme na abertura;
- desenvolvimento de uma formulação matemática exata, baseada nos princípios da GO, da equação de Monge-Ampère para o problema de síntese de lentes dielétricas homogêneas com uma superfície refrativa em coordenadas complexas;
- desenvolvimento de modelagem para a síntese de lentes dielétricas não-circularmente simétricas com uma superfície refrativa;
- implementação de um algoritmo de análise de lentes dielétricas não-circularmente simétricas com uma superfície refrativa baseado em um método híbrido GO-PO.

1.4 Contribuições do Trabalho

Este trabalho contribui cientificamente com o desenvolvimento de modelagem para a síntese numérica de antenas duplo-refletoras *offset* (com fase uniforme e não-uniforme na abertura) e de lentes dielétricas sem simetria circular. Para a síntese numérica de lentes dielétricas foi desenvolvida uma formulação matemática inédita, baseada nos princípios da GO, que conduziu a uma equação diferencial parcial não-linear de segunda ordem do tipo Monge-Ampère em coordenadas complexas.

A partir dos resultados obtidos com o desenvolvimento de modelagem para a síntese numérica de sistemas duplo-refletores *offset* com fase uniforme na abertura foi publicado o seguinte artigo científico:

- ASSIS, A. R.; MOREIRA, F. J. S.; BERGMANN, J. R. “GO Synthesis of Offset Dual Reflector Antennas Using Local Axis-Displaced Confocal Quadrics”, *Journal of Microwaves, Optoelectronics and Electromagnetic Applications*, v. 19, no. 2, pp. 177-190, 2020.

Além disso, após a defesa da tese, serão submetidos dois artigos técnico-científicos em periódicos especializados da área com os seguintes temas:

- (i) síntese óptica de duplo-refletores *offset* para gerar feixes modelados na região de cobertura;
- (ii) síntese óptica de lentes dielétricas sem simetria circular.

O artigo com tema (i) será elaborado a partir dos resultados obtidos com o desenvolvimento de modelagem para a síntese numérica de sistemas duplo-refletores *offset* com fase não-uniforme na abertura. E o artigo com tema (ii) conterá a formulação matemática inédita para a síntese de lentes dielétricas, bem como o desenvolvimento de modelagem e os resultados da síntese numérica.

1.5 Organização do Trabalho

O presente trabalho aborda o emprego de superfícies quádricas confocais no procedimento de síntese de superfícies duplo-refletoras *offset* e lentes dielétricas assimétricas. A formulação matemática para o desenvolvimento dos algoritmos computacionais, bem como os resultados obtidos, são apresentados conforme descrito a seguir.

No Capítulo 2 é descrita a formulação matemática, em coordenadas complexas, para a síntese de sistemas duplo-refletores *offset* presente na literatura [19]. Em seguida, é apresentada a representação em coordenadas complexas do equacionamento de superfícies quádricas confocais com eixos deslocados que são utilizadas neste trabalho para representar localmente as superfícies sintetizadas, utilizadas anteriormente por [2] na síntese de refletores *offset*. Também é apresentada a estratégia numérica para solução do problema de síntese, que consiste em um algoritmo baseado no método de Newton. Para completar a solução numérica do problema de síntese, é definida a condição de contorno para a equação de Monge-Ampère. Além disso, são descritos os modelos do alimentador e do campo na abertura adotados na síntese dos duplo-refletores com fase uniforme.

No Capítulo 3, o problema de síntese descrito no Capítulo 2 é particularizado para fase uniforme na abertura, sendo a superfície do subrefletor representada localmente por quádricas confocais com eixos deslocados. Em seguida, são apresentadas a solução inicial adotada para o algoritmo de síntese e a matriz Jacobiana obtida analiticamente para a solução deste problema. As superfícies obtidas pelo algoritmo de síntese são interpoladas por pseudo-*splines* de quinta ordem e, então, analisadas via aproximações da PO com correções das correntes de borda [47], [48], considerando-se a antena operando na frequência de 11,725 GHz.

No Capítulo 4, o problema de síntese descrito no Capítulo 2 é implementado para

o caso geral, ou seja, considerando fase não-uniforme na abertura. É apresentado o procedimento numérico adotado para a função de mapeamento na abertura. Os detalhes para implementar a matriz Jacobiana analiticamente são descritos e o algoritmo de fase não-uniforme é principiado com uma solução inicial com fase uniforme na abertura. Para validar o algoritmo são apresentadas antenas duplo-refletores que geram feixes modelados na região de campo distante, como, por exemplo, feixe circular com distribuição de amplitude uniforme, feixe no formato de boomerang e feixe gerado de uma abertura super-elíptica. As antenas foram analisadas operando na frequência de 30 GHz.

No Capítulo 5, o problema de síntese rigorosa de lentes dielétricas homogêneas é formulado em coordenadas complexas. A formulação exata baseada nos princípios da GO conduz a uma equação diferencial parcial não-linear do tipo Monge-Ampère. O cálculo analítico da matriz Jacobiana é apresentado, bem como, as perdas por reflexão na interface dielétrico-ar [45]. A solução inicial adotada para iniciar o algoritmo de síntese é uma lente circularmente simétrica proposta em [46]. Além disso, também é apresentado o método de análise das lentes dielétricas baseado em um método híbrido GO-PO [43]. Na sequência, são apresentados estudos de casos para validar os algoritmos desenvolvidos.

Por fim, no Capítulo 6 são sumarizadas as conclusões obtidas a partir dos algoritmos desenvolvidos e dos resultados numéricos obtidos para os problemas de síntese de sistemas duplo-refletores *offset* e lentes dielétricas sem simetria circular. Além disso, são apresentadas as propostas futuras para este trabalho.

Capítulo 2

Síntese Óptica de Antenas Duplo-Refletoras *Offset*

Neste capítulo são apresentadas as bases teóricas que fundamentam o algoritmo de síntese de antenas duplo-refletoras *offset*. Inicialmente, é apresentada a notação em coordenadas complexas adotada neste trabalho que consiste na mesma abordagem de [17]. A descrição do problema de síntese de sistemas duplo-refletores *offset* formulado em [19] é apresentada bem como a superfície quádrlica confocal com eixo deslocado usada para aproximar localmente uma superfície refletora, que consiste no diferencial da solução numérica do problema síntese proposto em [2]. Além disso, são abordadas a grade polar usada para discretizar o subrefletor e o desenvolvimento do algoritmo de síntese, que é baseado no método de Newton para a solução de um operador não-linear como um problema de contorno. Para concluir o capítulo, são apresentados a condição de contorno e os modelos adotados para o diagrama do alimentador e para a distribuição de densidade de potência na abertura, respectivamente. Para finalizar o capítulo, o algoritmo descrito é apresentado em diagrama de blocos.

2.1 Notação em Coordenadas Complexas

Seja um ponto P sobre uma esfera de raio unitário definido em coordenadas esféricas pelas variáveis θ e ϕ em relação à origem O do sistema de coordenadas. Através da projeção estereográfica a partir do ponto $N(0, 0, 1)$, P projeta o ponto P' no plano $z = 0$, conforme ilustrado na Figura 2.1. A coordenada complexa η do ponto P' associada ao vetor unitário $\hat{p} = \overline{OP}$ é definida como

$$\eta = \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi} = x + iy, \quad (2.1)$$

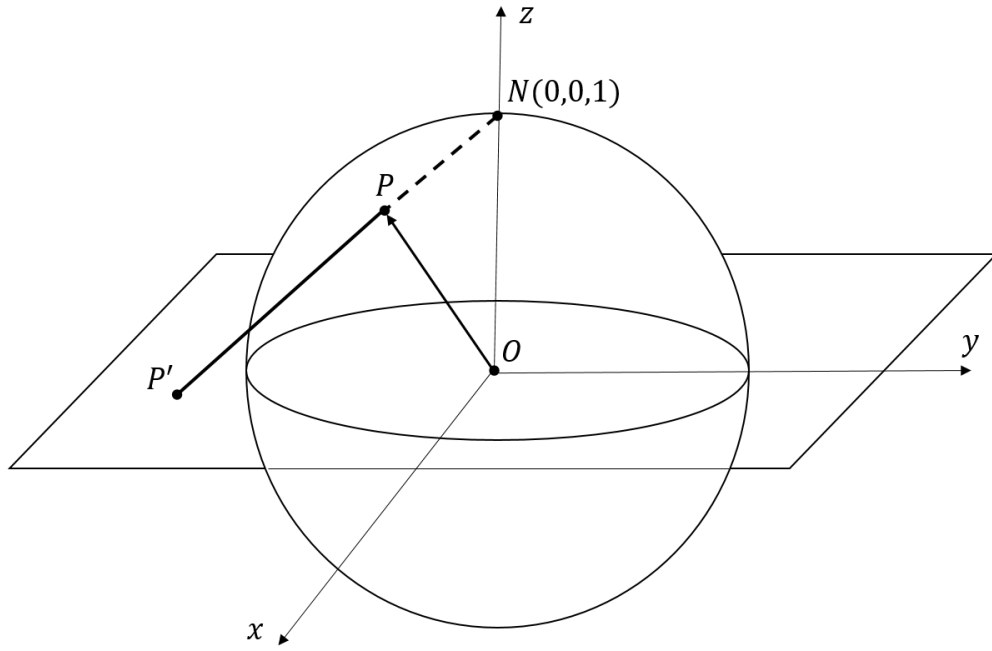


Figura 2.1: Projeção estereográfica da esfera unitária.

onde $(x, y, z = 0)$ são as coordenadas cartesianas do ponto P' . Manipulando a equação (2.1), pode-se mostrar que

$$\phi = \frac{1}{2i} \ln \left(\frac{\eta}{\bar{\eta}} \right), \quad (2.2)$$

onde a coordenada esférica ϕ é expressa em função da variável complexa η e seu complexo conjugado $\bar{\eta}$. Manipulando novamente a equação (2.1) obtém-se expressões relacionando a coordenada esférica θ à coordenada complexa η :

$$\cos \theta = \frac{|\eta|^2 - 1}{|\eta|^2 + 1}, \quad (2.3a)$$

$$\sin \theta = \frac{2|\eta|}{|\eta|^2 + 1}. \quad (2.3b)$$

Utilizando a fórmula de Euler, obtém-se ainda outras duas expressões relacionando a coordenada esférica ϕ à coordenada complexa η :

$$\cos \phi = \frac{\bar{\eta} + \eta}{2|\eta|}, \quad (2.4a)$$

$$\sin \phi = \frac{i(\bar{\eta} - \eta)}{2|\eta|}. \quad (2.4b)$$

Agora, seja um vetor qualquer $\vec{a}$ que possui o conjunto de componentes (a_1, a_2, a_3) em relação ao sistema de coordenadas Cartesianas. Seja (α, a_3) uma outra representação para esse conjunto, onde α é o número complexo $a_1 + ia_2$. Usando esta notação, as

componentes do vetor unitário $\hat{p}$ são expressas em termos de sua coordenada complexa η como

$$\left(\frac{2\eta}{|\eta|^2 + 1}, \frac{|\eta|^2 - 1}{|\eta|^2 + 1} \right). \quad (2.5)$$

Devido à notação em coordenadas complexas, é conveniente introduzir suas derivadas com respeito a esta coordenada. Dada a função f de $\eta = x + iy$ (em geral, f é uma função complexa) define-se

$$f_\eta = \frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad f_{\bar{\eta}} = \frac{\partial f}{\partial \bar{\eta}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right),$$

e que satisfazem as relações

$$\bar{f}_\eta = \overline{(f_{\bar{\eta}})}, \quad \bar{f}_{\bar{\eta}} = \overline{(f_\eta)},$$

onde $\bar{f}$ é o complexo conjugado da função f . Consequentemente, $f_{\eta\bar{\eta}} = f_{\bar{\eta}\eta}$.

As equações diferenciais parciais que surgem neste trabalho têm a forma

$$|L_{\eta\eta} - A|^2 - (L_{\eta\bar{\eta}} - B)^2 = \mathcal{H} \quad (2.6)$$

onde L é uma função real de η e os termos A , B e $\mathcal{H}$ são funções de η , L e de derivadas parciais de primeira ordem de L . Além disso, as funções B e $\mathcal{H}$ são reais. Pode ser visto que (2.6) é uma equação diferencial parcial não-linear de segunda ordem de Monge-Ampère, do tipo elíptica se $\mathcal{H} < 0$ ou hiperbólica se $\mathcal{H} > 0$.

2.2 Formulação do Problema de Síntese

A Figura 2.2 mostra o percurso de um raio proveniente da fonte O de radiação que é refletido nos pontos R e S sobre o subrefletor e o refletor principal, respectivamente, e passa através do plano de abertura do refletor principal em Q da esquerda para a direita. Os vetores unitários nas direções de $\overrightarrow{OR}$, $\overrightarrow{RS}$ e $\overrightarrow{SQ}$ são representados por $\hat{p}$, $\hat{t}$ e $\hat{q}$ respectivamente. Também será usada a seguinte representação: $\overrightarrow{OR} = \vec{r}$, $\overrightarrow{RS} = \vec{s}$ e $\overrightarrow{OQ} = \vec{v}$. Escolhendo o sistema de coordenadas Cartesianas retangulares com origem em O e o eixo z perpendicular à abertura, as coordenadas complexas de $\hat{p}$, $\hat{t}$ e $\hat{q}$ relativas a este sistema são denotadas por η , ξ e ζ respectivamente. As componentes do vetor $\vec{v}$ são expressas como (ω, z_d) , tal que z_d é a distância perpendicular de O à abertura e ω é a coordenada complexa de Q .

A função fase $l(\omega)$ é definida assumindo que passa um único raio através de cada

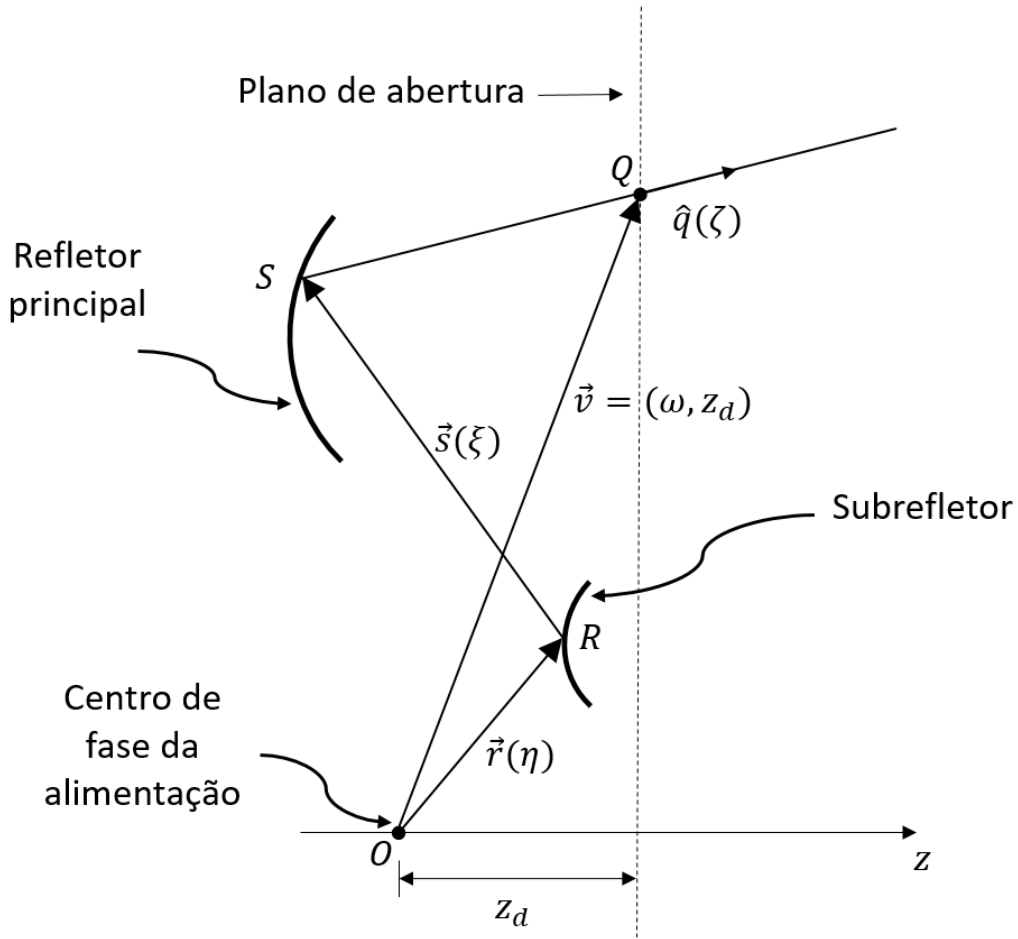


Figura 2.2: Geometria do problema de síntese de duplo-refletores.

ponto da abertura do refletor principal. Esta condição proíbe qualquer cáustica sobre a abertura. As derivadas da função $l(\omega)$ determinam ζ como uma função de ω e estas relações foram obtidas em [19] aplicando o teorema de Malus que conduz às seguintes relações em coordenadas complexas:

$$l_{\omega} = \frac{\bar{\zeta}}{1 + |\zeta|^2} \quad \text{e} \quad l_{\bar{\omega}} = \frac{\zeta}{1 + |\zeta|^2}, \quad (2.7)$$

que, após algumas manipulações matemáticas, permite obter a equação que fornece ζ a partir das funções l_{ω} e $l_{\bar{\omega}}$ [19]:

$$\zeta = \frac{2l_{\bar{\omega}}}{1 + (1 - 4|l_{\omega}|^2)^{1/2}}. \quad (2.8)$$

Da equação (2.8) é possível observar que a função fase deve satisfazer necessariamente à desigualdade $|l_{\omega}| \leq \frac{1}{2}$.

Agora suponha que o subrefletor da Figura 2.2 seja representado pela equação

$\vec{r} = \vec{r}(\eta)$. As componentes Cartesianas de $\vec{r}$ são

$$r \left(\frac{2\eta}{1 + |\eta|^2}, \frac{|\eta|^2 - 1}{|\eta|^2 + 1} \right). \quad (2.9)$$

É definida a função real $L(\eta)$ de variável complexa relacionada à função $r(\eta)$ através da seguinte expressão [17]:

$$r = (|\eta|^2 + 1)e^{L(\eta)}. \quad (2.10)$$

Introduzindo a notação $\tau = e^{L(\eta)}$, as componentes da expressão (2.9) podem ser reescritas como

$$(2\eta\tau, \tau(|\eta|^2 - 1)). \quad (2.11)$$

Brickell *et al.* mostrou em [17] que a lei de Snell da reflexão no subrefletor pode ser expressa em termos da derivada da função $L(\eta)$ como

$$L_\eta = \frac{1}{\xi - \eta}. \quad (2.12)$$

Além disso, foi demonstrado em [19] que a variável complexa que representa o raio refletido pelo subrefletor é dada por

$$\xi = \frac{l + z_d - 2\tau|\eta|^2 - (\omega - 2\eta\tau)\bar{\zeta}}{\bar{\omega} - 2\bar{\eta}\tau + (2\tau + z_d - l)\bar{\zeta}}. \quad (2.13)$$

Substituindo (2.13) na equação (2.12), obtém-se a seguinte expressão [19]:

$$L_\eta = \frac{\bar{\omega} - 2\bar{\eta}\tau + (2\tau + z_d - l)\bar{\zeta}}{l + z_d - \omega\bar{\zeta} - \bar{\omega}\eta + (l - z_d)\bar{\zeta}\eta}. \quad (2.14)$$

A equação (2.14) estabelece uma relação de mapeamento $\eta \rightarrow \omega$ entre a esfera unitária de centro O e a abertura. Este mapeamento depende da função fase e do subrefletor. Uma vez determinados η , o subrefletor e a função fase, o refletor principal é obtido a partir da seguinte expressão [19]:

$$\vec{r} + \vec{s} = \vec{v} - (H/2K)\vec{q}, \quad (2.15)$$

onde H e K são funções de ω e η a saber:

$$\begin{aligned} H &= (l - r)^2 - |\vec{v} - \vec{r}|^2 = l^2 - |\vec{v}|^2 - 2r(l - \hat{p} \cdot \vec{v}) \\ &= l^2 - |\omega|^2 - z_d^2 - 2\tau [l(1 + |\eta|^2) + z_d(1 - |\eta|^2) - \bar{\eta}\omega - \eta\bar{\omega}], \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned}
K &= (l - r) - \hat{q} \cdot (\vec{v} - \vec{r}) \\
&= \frac{l(1 + |\zeta|^2) + z_d(1 - |\zeta|^2) - \bar{\zeta}\omega - \zeta\bar{\omega} + 2\tau(\bar{\eta}\zeta + \eta\bar{\zeta} - |\eta|^2 - |\zeta|^2)}{1 + |\zeta|^2}.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Sendo $I(\eta)$ a densidade de potência de uma fonte pontual em O e $G(\omega)$ o fluxo de densidade de potência normal à abertura, então a transferência de energia da fonte para a abertura é obtida comparando as áreas elementares de um tubo de raios atravessando uma esfera de raio unitário e centro O e, depois de duas reflexões, atravessando o plano de abertura. Tal conceito conduz à seguinte expressão da lei da Conservação da Energia em coordenadas complexas [19]:

$$\frac{I(\eta)}{G(\omega)} = \frac{(1 + |\eta|^2)^2}{4} ||\omega_\eta|^2 - |\omega_{\bar{\eta}}|^2|, \tag{2.18}$$

onde ω_η e $\omega_{\bar{\eta}}$ são as derivadas parciais de ω em relação à η e $\bar{\eta}$, respectivamente. Substituindo ω_η e $\omega_{\bar{\eta}}$, obtidas com o auxílio da equação (2.14), na equação (2.18) obtém-se a desejada relação entre as funções l , G e L [19]:

$$(L_{\eta\bar{\eta}} - B)^2 - |L_{\eta\eta} - L_\eta^2|^2 = \pm \mathcal{H}(\eta, \omega) \tag{2.19}$$

onde

$$\begin{aligned}
B &= -\frac{2e^L\gamma}{\beta - \frac{1}{2}h\delta}, \quad V = \frac{4\gamma^2}{(1 - \delta)(\beta - \frac{1}{2}h\delta)^2(1 + |\eta|^2)^2}, \\
\beta &= l + z_d - 2e^L|\eta|^2, \quad \gamma = |1 + \eta L_\eta|^2, \quad \delta = 1 + (1 - 4|l_\omega|^2)^{1/2}, \quad h = H/K
\end{aligned}$$

e

$$\mathcal{H}(\eta, \omega) = V\{[hl_{\omega\bar{\omega}} - (1 - 2|l_\omega|^2)] - |hl_{\omega\omega} + 2l_\omega^2|^2\} \frac{I(\eta)}{G(\omega)}.$$

A equação (2.19) é uma equação diferencial parcial não-linear de segunda ordem do tipo Monge-Ampère na forma complexa. A escolha do sinal corresponde às formas elíptica (sinal +) e hiperbólica (sinal -) da equação¹.

2.3 Superfície Quádrica Confocal com Eixo Deslocado

Para a solução numérica do problema de síntese descrito na Seção 2.2, o subrefletor será representado localmente por superfícies quádricas confocais com eixos deslocados. Esse tipo de superfície é muito utilizado em antenas refletoras devido a suas propriedades ópticas. As quádricas confocais são formadas a partir da revolução de uma cônica sobre seu próprio eixo. Nesta seção é apresentada a equação que define esta classe de quádricas e suas derivadas parciais utilizando a notação em coordenadas complexas.

¹As formas elíptica e hiperbólica da equação de Monge-Ampère são analisadas por Westcott em [49].

2.3.1 Definição e Equações Gerais

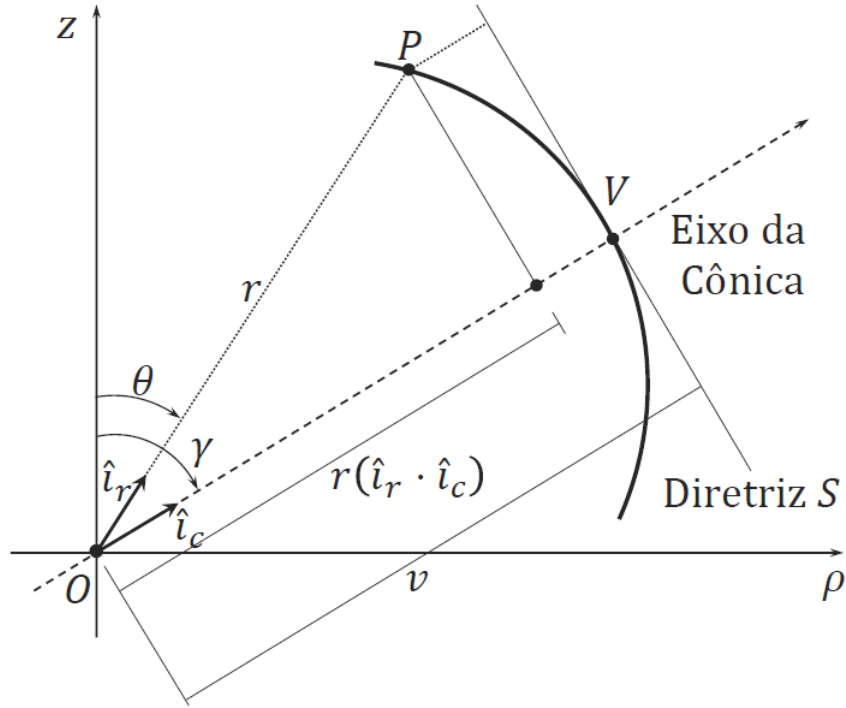


Figura 2.3: Seção de cônica com eixo deslocado [2].

A equação polar de uma seção cônica assume formas simples quando um dos focos está na origem O do sistemas de coordenadas polares e a reta diretriz S é perpendicular ao eixo da cônica, como ilustrado na Figura 2.3. Para determinar a equação polar da cônica utiliza-se a seguinte proposição: uma cônica é o lugar geométrico dos pontos do plano $P = (r, \theta)$ tais que

$$\overline{OP} = e\overline{PS}, \quad (2.20)$$

onde e é a excentricidade e

$$\overline{PS} = v \pm r(\hat{i}_r \cdot \hat{i}_c), \quad (2.21)$$

em que v é a distância entre o foco O e a diretriz S , $\hat{i}_r$ é a direção unitária do vetor $\overline{OP}$ e $\hat{i}_c$ é a direção unitária do eixo de simetria da cônica (direção perpendicular à reta diretriz) [2]. Assumindo que os vetores $\hat{i}_r$ e $\hat{i}_c$ estão no espaço, e não no plano, tem-se, então, uma superfície quádrlica confocal, conforme ilustra a Figura 2.4. Os vetores $\hat{i}_r$ e $\hat{i}_c$ são definidos como:

$$\hat{i}_r(\theta, \phi) = \sin \theta \cos \phi \hat{x} + \sin \theta \sin \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z} \quad (2.22a)$$

$$\hat{i}_c(\gamma, \varphi) = \sin \gamma \cos \varphi \hat{x} + \sin \gamma \sin \varphi \hat{y} + \cos \gamma \hat{z} \quad (2.22b)$$

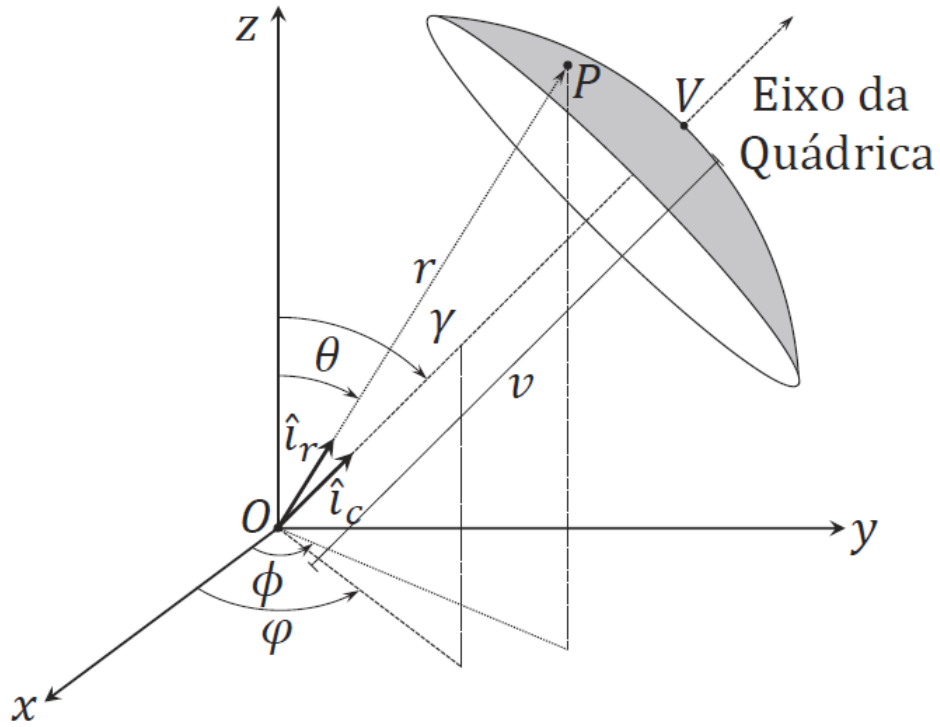


Figura 2.4: Superfície quádrlica confocal com eixo deslocado [2].

onde γ é o ângulo de elevação do eixo da cônica em relação ao eixo z e φ é o azimute do eixo da cônica em relação ao eixo x conforme pode ser visto na Figura 2.4. Na equação (2.21) o sinal negativo ($-$) indica que a diretriz S está à esquerda do pólo e o sinal positivo ($+$) indica que está à direita. No presente trabalho considerou-se a diretriz à esquerda e, conseqüentemente, o sinal negativo. Fazendo,

$$\overline{OP} = r \quad (2.23)$$

e com a ajuda da equação (2.21), a equação (2.20) pode ser escrita como

$$r = e \left[v + r(\hat{i}_r \cdot \hat{i}_c) \right] \quad (2.24)$$

e, após algumas manipulações, reescrita na forma

$$r = \frac{-ev}{e(\hat{i}_r \cdot \hat{i}_c) - 1}. \quad (2.25)$$

Substituindo as equações (2.22a) e (2.22b) em (2.25) encontra-se [2]:

$$r = \frac{a}{b \sin \theta \cos \phi + c \sin \theta \sin \phi + d \cos \theta - 1}, \quad (2.26)$$

onde os parâmetros da quádrlica são

$$a = -ev, \quad (2.27a)$$

$$b = e \sin \gamma \cos \varphi, \quad (2.27b)$$

$$c = e \sin \gamma \sin \varphi, \quad (2.27c)$$

$$d = e \cos \gamma, \quad (2.27d)$$

onde a é o *semi-latus rectum*, e é a excentricidade, γ e φ são os ângulos do eixo de simetria em elevação e azimuth, respectivamente. Conforme já mencionado, a representação das direções em coordenadas complexas simplifica a formulação do presente método de síntese. Desta forma, substituindo as identidades (2.3a) e (2.3b) em (2.26), tem-se que

$$r = \frac{a}{b \left(\frac{2|\eta|}{|\eta|^2+1} \right) \cos \phi + c \left(\frac{2|\eta|}{|\eta|^2+1} \right) \sin \phi + d \left(\frac{|\eta|^2-1}{|\eta|^2+1} \right) - 1} \quad (2.28)$$

que pode ser reescrito na forma

$$r = \frac{a(|\eta|^2 + 1)}{(2|\eta| \cos \phi)b + (2|\eta| \sin \phi)c + (|\eta|^2 - 1)d - |\eta|^2 - 1}. \quad (2.29)$$

Substituindo a relação (2.10) em (2.29) obtém-se

$$ae^{-L(\eta)} = (2|\eta| \cos \phi)b + (2|\eta| \sin \phi)c + (|\eta|^2 - 1)d - |\eta|^2 - 1. \quad (2.30)$$

Como o auxílio das identidades (2.4a) e (2.4b), a equação da quádrlica (2.30) pode ser escrita em função das coordenadas complexas como [2]:

$$ae^{-L(\eta)} = (\bar{\eta} + \eta)b + i(\bar{\eta} - \eta)c + (|\eta|^2 - 1)d - |\eta|^2 - 1. \quad (2.31)$$

Alternativamente, a equação (2.31) pode ser expressa por [2]:

$$ae^{-L(\eta)} = (d - 1)\eta\bar{\eta} + (b - ic)\eta + (b + ic)\bar{\eta} - d - 1. \quad (2.32)$$

Além das duas formas apresentadas acima, pode-se obter uma expressão para a função $L(\eta)$ em função dos parâmetros a , b , c e d manipulando a equação (2.31) e é escrita na forma [2]:

$$L(\eta) = \ln \left[\frac{a}{(\bar{\eta} + \eta)b + i(\bar{\eta} - \eta)c + (|\eta|^2 - 1)d - |\eta|^2 - 1} \right]. \quad (2.33)$$

2.3.2 Derivadas Parciais

Conforme apresentado na Seção 2.2, a equação diferencial parcial do tipo Monge-Ampère (2.19) é escrita em função das derivadas parciais de primeira e segunda ordem da função L em relação as variáveis η e seu complexo conjugado $\bar{\eta}$. Assim, diferenciando a equação (2.32) em relação a η :

$$\frac{\partial}{\partial \eta}[ae^{-L(\eta)}] = \frac{\partial}{\partial \eta}[(d-1)\eta\bar{\eta} + (b-ic)\eta + (b+ic)\bar{\eta} - d - 1]. \quad (2.34)$$

Sabendo que, por definição

$$\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \eta} = 0, \quad (2.35)$$

faz-se a derivação da equação (2.34), resultando em

$$-ae^{-L(\eta)} \frac{\partial L(\eta)}{\partial \eta} = [(d-1)\eta + (b-ic)]. \quad (2.36)$$

Substituindo a equação (2.32) em (2.36) obtém-se [2]:

$$L_{\eta}(\eta) = -\frac{(d-1)\bar{\eta} + (b-ic)}{(d-1)\eta\bar{\eta} + (b-ic)\eta + (b+ic)\bar{\eta} - d - 1}, \quad (2.37)$$

onde L_{η} é a derivada da função real L em relação à variável complexa η . A derivada da função L em relação à variável $\bar{\eta}$ é obtida de forma direta observando a propriedade $\overline{L_{\eta}} = L_{\bar{\eta}}$, válida para qualquer função real [2]. Logo,

$$L_{\bar{\eta}}(\eta) = -\frac{(d-1)\eta + (b+ic)}{(d-1)\eta\bar{\eta} + (b-ic)\eta + (b+ic)\bar{\eta} - d - 1}. \quad (2.38)$$

As derivadas de segunda ordem são obtidas a partir das derivadas já obtidas. Logo, derivando novamente a equação (2.37) em relação a η :

$$\frac{\partial}{\partial \eta}[L_{\eta}(\eta)] = \frac{\partial}{\partial \eta} \left[-\frac{(d-1)\bar{\eta} + (b-ic)}{(d-1)\eta\bar{\eta} + (b-ic)\eta + (b+ic)\bar{\eta} - d - 1} \right]. \quad (2.39)$$

Após algumas manipulações matemáticas, mostra-se que [2]:

$$L_{\eta\eta}(\eta) = \left[\frac{(d-1)\bar{\eta} + (b-ic)}{(d-1)\eta\bar{\eta} + (b-ic)\eta + (b+ic)\bar{\eta} - d - 1} \right]^2, \quad (2.40)$$

onde $L_{\eta\eta}$ é a derivada de segunda ordem da função real L em relação à variável complexa

η . Comparando as equações (2.37) e (2.40), é possível constatar que [2]:

$$L_{\eta\eta}(\eta) = [L_{\eta}(\eta)]^2, \quad (2.41)$$

conduzindo à uma importante simplificação na equação de Monge-Ampère. Outra derivada de segunda ordem pode ser obtida derivando-se a equação (2.38) em relação a $\bar{\eta}$:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\eta}}[L_{\eta}(\eta)] = \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \left[-\frac{(d-1)\eta + (b+ic)}{(d-1)\eta\bar{\eta} + (b-ic)\eta + (b+ic)\bar{\eta} - d - 1} \right]. \quad (2.42)$$

Após algumas manipulações, a equação (2.42) é reduzida a [2]:

$$L_{\eta\bar{\eta}}(\eta) = \left[\frac{(d-1)\eta + (b+ic)}{(d-1)\eta\bar{\eta} + (b-ic)\eta + (b+ic)\bar{\eta} - d - 1} \right]^2, \quad (2.43)$$

onde $L_{\eta\bar{\eta}}$ é a derivada de segunda ordem da função L em relação à variável complexa $\bar{\eta}$. Por fim, a derivada cruzada de segunda ordem é obtida derivando novamente (2.37), porém agora em relação à variável complexa $\bar{\eta}$:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\eta}}[L_{\eta}(\eta)] = \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \left[-\frac{(d-1)\bar{\eta} + (b-ic)}{(d-1)\eta\bar{\eta} + (b-ic)\eta + (b+ic)\bar{\eta} - d - 1} \right]. \quad (2.44)$$

Reescrevendo (2.44) obtém-se [2]:

$$L_{\eta\bar{\eta}}(\eta) = \frac{b^2 + c^2 + d^2 - 1}{[(d-1)\eta\bar{\eta} + (b-ic)\eta + (b+ic)\bar{\eta} - d - 1]^2}. \quad (2.45)$$

Como a função $L(\eta)$ é uma função real de variável complexa, mostra-se facilmente que [2]:

$$L_{\eta\bar{\eta}}(\eta) = L_{\bar{\eta}\eta}(\eta). \quad (2.46)$$

2.4 Solução Numérica do Problema de Síntese

A solução do problema de síntese de sistemas duplo-refletores *offset* consiste em avaliar numericamente a equação diferencial parcial de Monge-Ampère (2.19) como um problema de contorno. Para a solução de (2.19), será empregado um método numérico alternativo proposto em [2] para a síntese de um sistema *offset* composto por um único refletor e é baseado no Método de Newton. Neste trabalho, a metodologia alternativa consiste em representar localmente a superfície do subrefletor por um conjunto de superfícies quádricas confocais com eixos deslocados (descritas na Seção 2.3), ou seja, cada quádrica individualmente representa apenas uma área local do subrefletor. É importante ressaltar

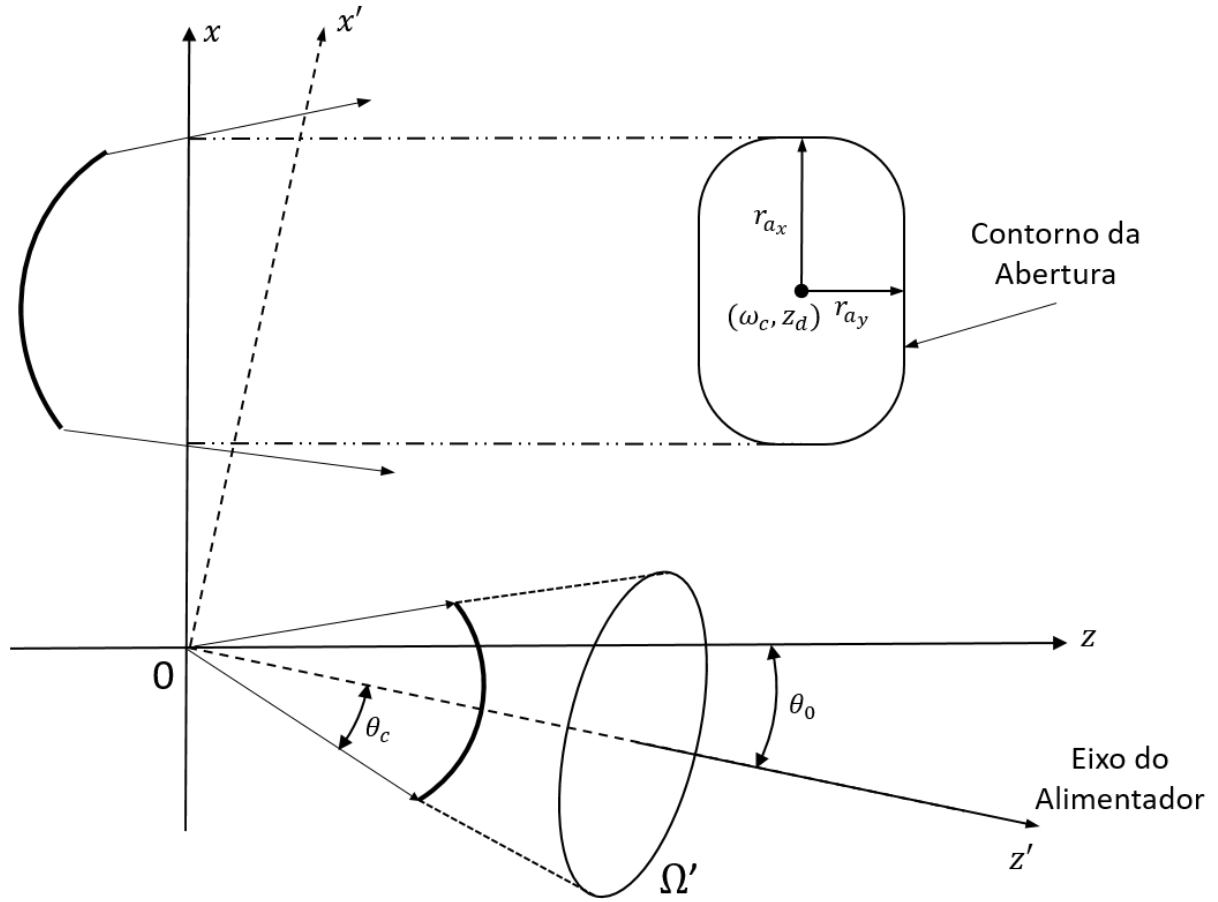


Figura 2.5: Sistemas de coordenadas principal e sistema de coordenadas auxiliar do alimentador.

que cada quádrlica confocal local que compõe a superfície do subrefletor é circularmente simétrica em relação ao seu eixo de simetria, eixo que está deslocado do eixo z pelo ângulo de elevação γ e pelo ângulo de azimute φ em relação ao eixo x , conforme visto na Figura 2.4. Assim, a possibilidade de deslocamento do eixo de simetria de cada quádrlica em elevação e azimute permite a representação de superfícies assimétricas e, conseqüentemente, a obtenção de diagramas de radiação em função de duas variáveis.

2.4.1 Grade Polar

Para aplicar o método numérico na solução do problema de síntese será usada uma grade polar para discretizar a superfície do subrefletor, que é feita no sistema de coordenadas auxiliar $x'y'z'$ ilustrado na Figura 2.5. A função $L(\eta)$, solução da equação de Monge-Ampère (2.19), é uma função real e contínua que descreve a superfície do subrefletor, solução para o problema de síntese ilustrado na Figura 2.2. Do ponto de vista

numérico, a solução de (2.19) é um conjunto finito de valores representado por

$$L[L_{1,1}, \dots, L_{j,k}, \dots, L_{J,K}] \quad \text{onde } j = 1, \dots, J, \quad k = 1, \dots, K, \quad (2.47)$$

e os valores de J e K definem o número máximo de anéis e radiais em uma grade polar disposta em um domínio Ω' no plano η' associado ao cone de alimentação (vide Figura 2.5), enquanto que os índices j e k especificam um anel e uma radial nesta grade, respectivamente.

Em aplicações práticas, uma corneta cônica corrugada, cujo diagrama de radiação é circularmente simétrico, é frequentemente adotada como alimentador de antenas refletoras. Em função disto, o contorno Ω' associado ao cone do alimentador é assumido circularmente simétrico e definido por

$$\eta' = \eta_c = \cot \left(\frac{\theta_c}{2} \right), \quad (2.48)$$

onde θ_c é o ângulo que define o cone de iluminação do alimentador, conforme ilustra a Figura 2.5. Para discretizar a superfície refletora, é adotada uma grade polar definida pelas coordenadas θ', ϕ' no sistema de coordenadas auxiliar ($'$) do alimentador. A distância angular entre os anéis ($\Delta\theta'$) pode ser variável, enquanto que a distância entre as radiais ($\Delta\phi'$) é mantida constante. Para o ângulo de borda θ_c , o anel θ'_j é obtido por

$$\theta'_j = \theta_c \left(\frac{j}{J} \right)^\alpha. \quad (2.49)$$

Quando $\alpha = 1$ a distância angular entre os anéis é constante e a grade é dita regular. Quando $\alpha < 1$ a distância angular entre os anéis é maior próximo ao centro e quando $\alpha > 1$ a distância angular entre os anéis será maior próxima à borda. Por analogia, a radial ϕ'_k é definida como

$$\phi'_k = 2\pi \frac{k}{K}. \quad (2.50)$$

Como exemplo, considere uma grade regular polar ($\alpha = 1$) com 100 pontos ($N = J \times K$), onde $J = 10$ e $K = 10$ e $\theta_c = 30^\circ$, conforme ilustrado na Figura 2.6. Observe que, como a distância entre os pontos é proporcional a θ' , a distância entre os pontos de um mesmo anel na região central da grade é muito menor que na região próxima à borda. A grande vantagem de se trabalhar com grades polares é, evidentemente, a possibilidade de descrever com precisão contornos polares. Entretanto, o modelo trivial de discretização gera uma distribuição não uniforme dos pontos. Para melhorar a discretização na borda, pode-se aumentar o número de radiais para $K = 30$, como ilustra a Figura 2.7. Entretanto, essa estratégia é viável até certo limite, já que os pontos na região central ficam cada vez mais próximos, podendo ocasionar erros numéricos. Uma estratégia adotada para

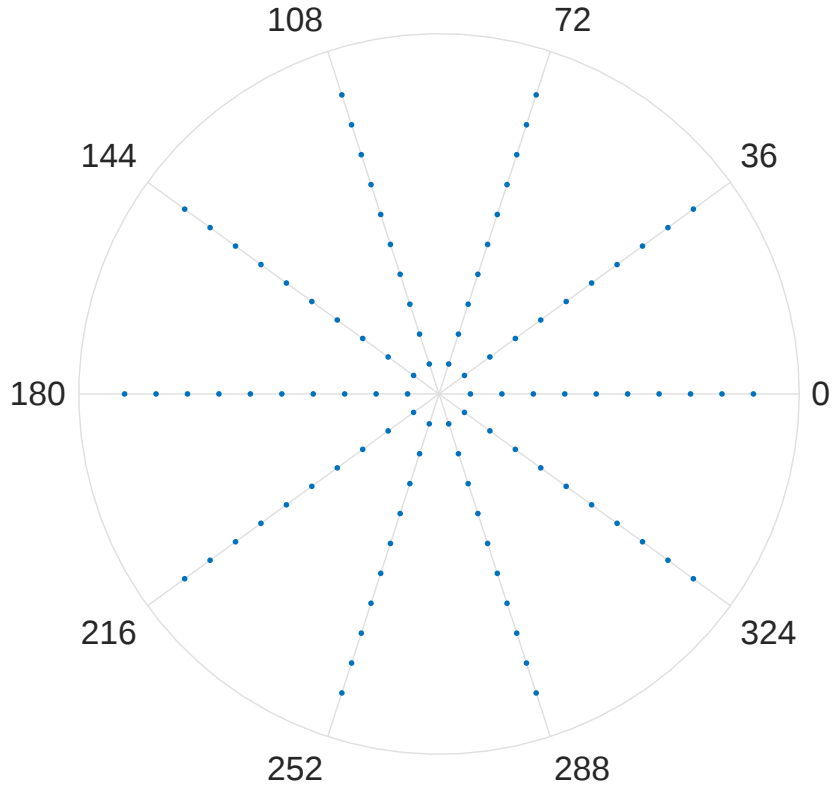


Figura 2.6: Grade regular polar $J \times K = 10 \times 10$, $\alpha = 1$, no domínio $\theta'\phi'$.

contornar esse problema é usar uma grade polar não-uniforme em relação à θ' , fazendo α diferente de 1 na equação (2.49). A Figura 2.8 ilustra uma grade polar $J \times K = 10 \times 30$ com $\alpha = 0,6$. Observe que os pontos dos anéis próximos à região central ficaram mais distantes entre si, enquanto que os pontos dos anéis próximos à borda ficaram menos espaçados entre si.

Os gráficos resultantes da conversão das grades polares apresentadas nas Figuras 2.6, 2.7 e 2.8 para o sistema de coordenadas complexas são ilustrados nas Figuras 2.9, 2.10 e 2.11, respectivamente. A transformação é feita através da definição da variável complexa η em (2.1). Pode-se verificar que a distância entre os anéis não é constante. Na região central da grade a distância entre os anéis é menor, e aumenta na medida que se aproxima da borda. A razão deste comportamento é facilmente verificável analisando o comportamento do módulo da equação (2.1):

$$|\eta'| = \cot\left(\frac{\theta'}{2}\right) \approx \frac{2}{\theta'}. \quad (2.51)$$

Logo, o módulo de η' é aproximadamente inversamente proporcional à θ' e, consequentemente, quanto menor o valor de θ' (anéis mais internos da grade definida nas coordenadas θ', ϕ') maior será o valor de $|\eta'|$ (anéis mais externos no plano complexo). Por conta disto, é conveniente visualizar os pontos no plano complexo inverso $1/\eta'$, con-

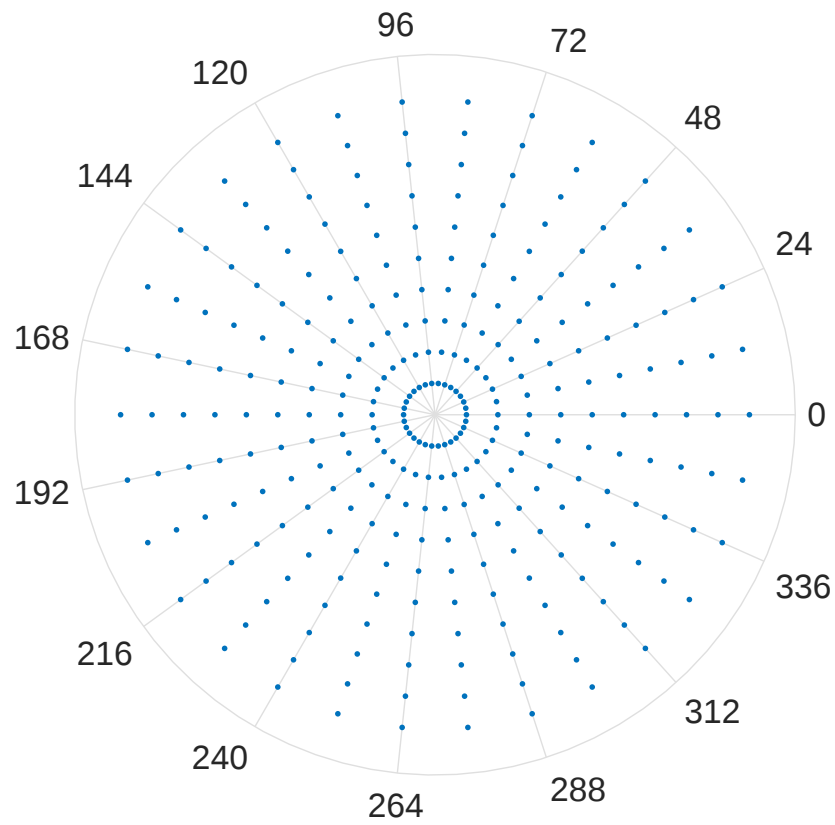


Figura 2.7: Grade regular polar $J \times K = 10 \times 30$, $\alpha = 1$, no domínio $\theta'\phi'$.

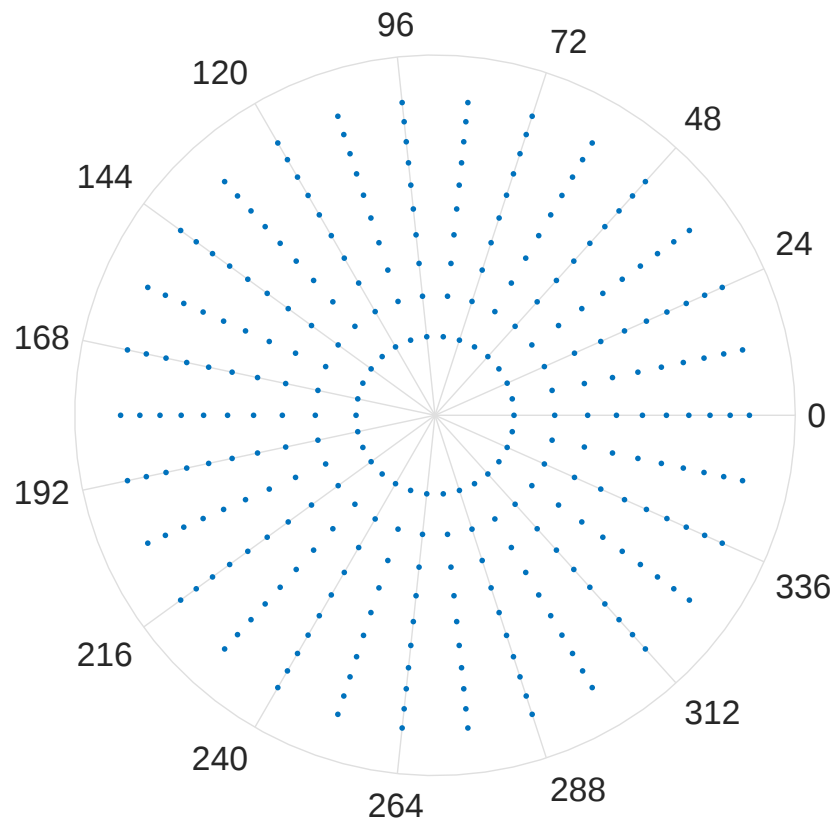


Figura 2.8: Grade polar não-uniforme $J \times K = 10 \times 30$, $\alpha = 0,6$, no domínio $\theta'\phi'$.

forme ilustrado nas Figuras 2.12, 2.13 e 2.14. Neste caso, há correspondência direta entre o primeiro anel da grade definida em θ', ϕ' com o primeiro anel no plano $1/\eta'$ e o último anel da grade em θ', ϕ' com o último anel no plano $1/\eta'$. Em razão desta conveniência, os gráficos utilizados para representar as direções de incidência serão representados em seus respectivos planos complexos inversos.

A relação entre os sistemas de coordenadas principal e auxiliar do alimentador é dada pela seguinte transformação linear fracionária [26]:

$$\eta' = \frac{\eta_0 \eta + 1}{\eta_0 - \eta}, \quad (2.52a)$$

$$\eta = \frac{\eta_0 \eta' - 1}{\eta_0 + \eta'}, \quad (2.52b)$$

onde η_0 é uma constante definida por

$$\eta_0 = \cot \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \quad (2.53)$$

e θ_0 é o ângulo de *offset* do alimentador em relação ao eixo z positivo. Os resultados da aplicação da transformação (2.52b) nas grades $J \times K = 10 \times 10$ e $J \times K = 10 \times 30$ são apresentados nas Figuras 2.15, 2.16 e 2.17.

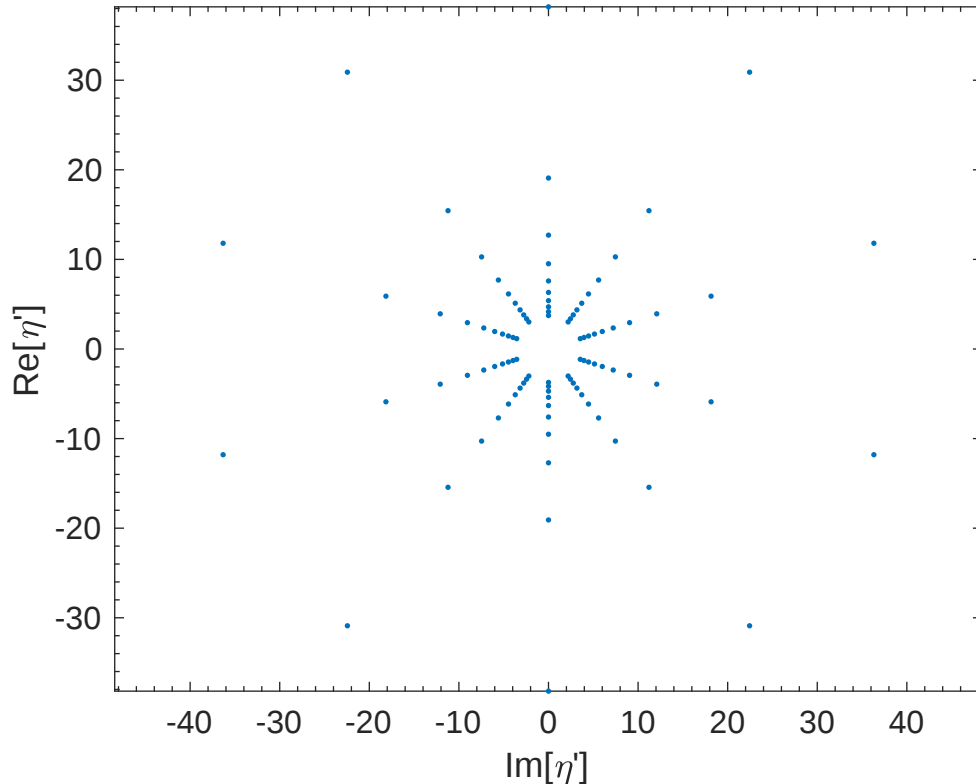


Figura 2.9: Grade regular polar $J \times K = 10 \times 30$, $\alpha = 1$, no plano complexo auxiliar η' .

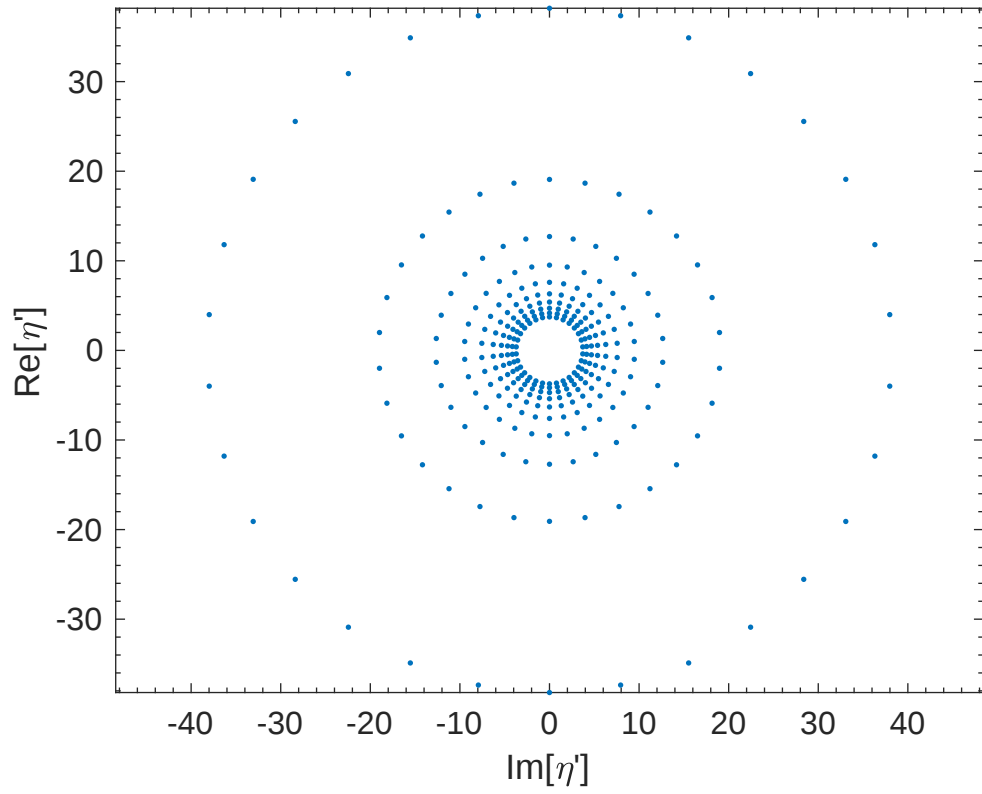


Figura 2.10: Grade regular polar $J \times K = 10 \times 30$, $\alpha = 1$, no plano complexo auxiliar η' .

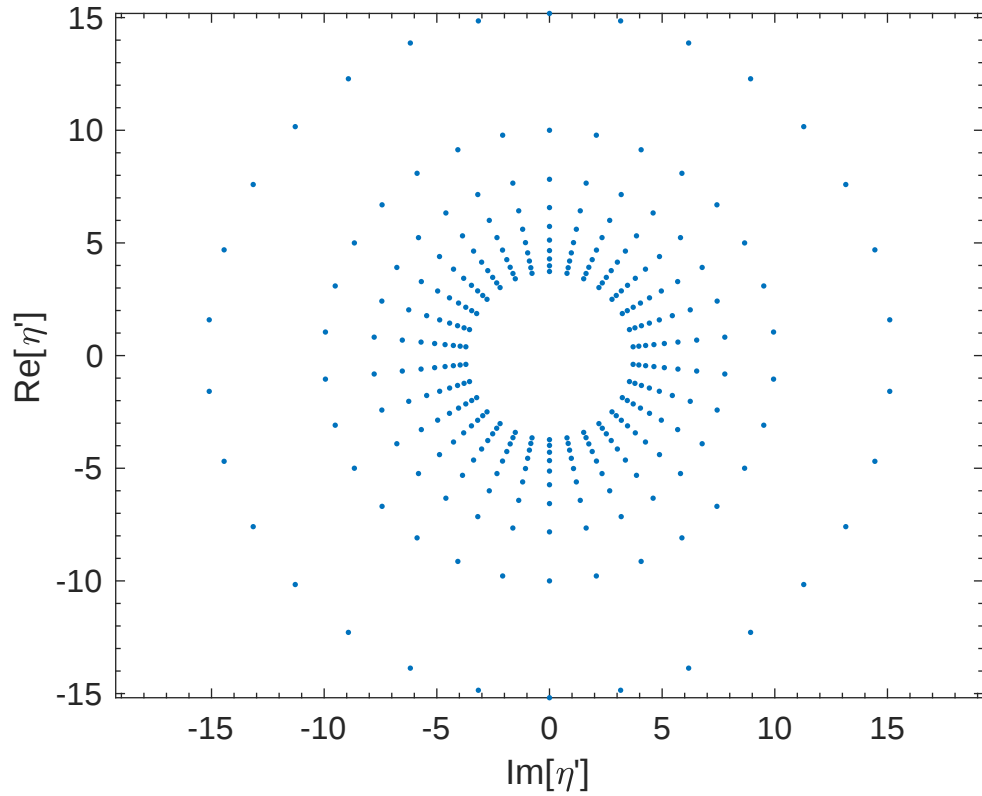


Figura 2.11: Grade polar não-uniforme $J \times K = 10 \times 30$, $\alpha = 0,6$, no plano complexo auxiliar η' .

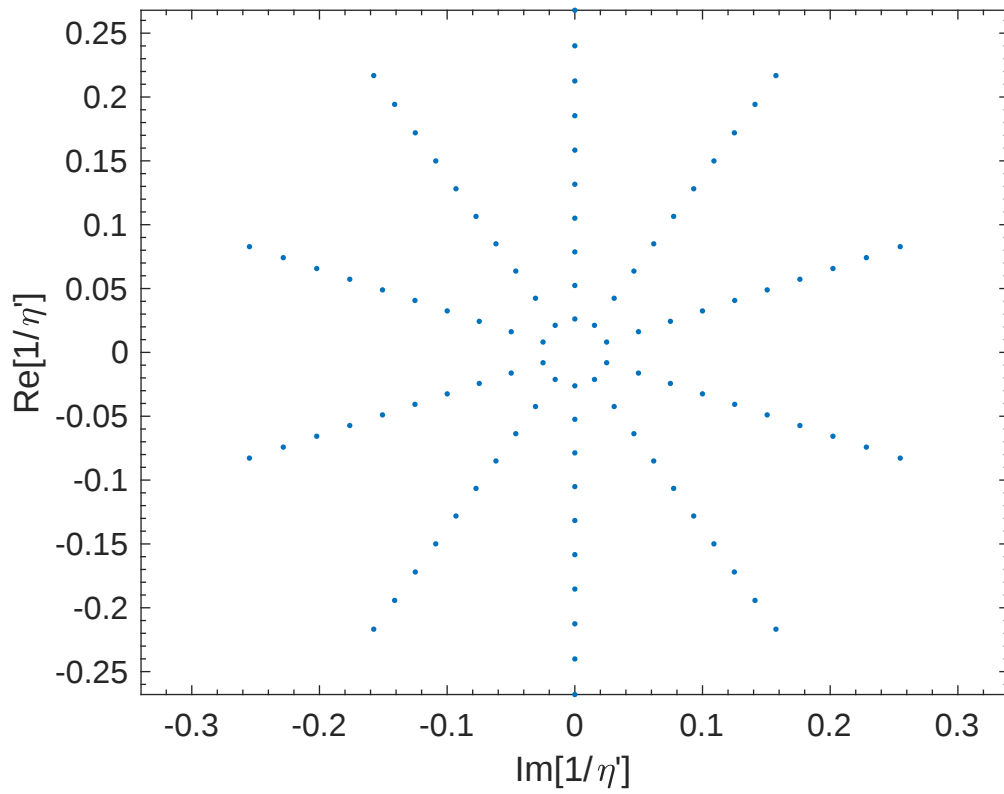


Figura 2.12: Grade regular polar $J \times K = 10 \times 30$, $\alpha = 1$, no plano complexo inverso $1/\eta'$.

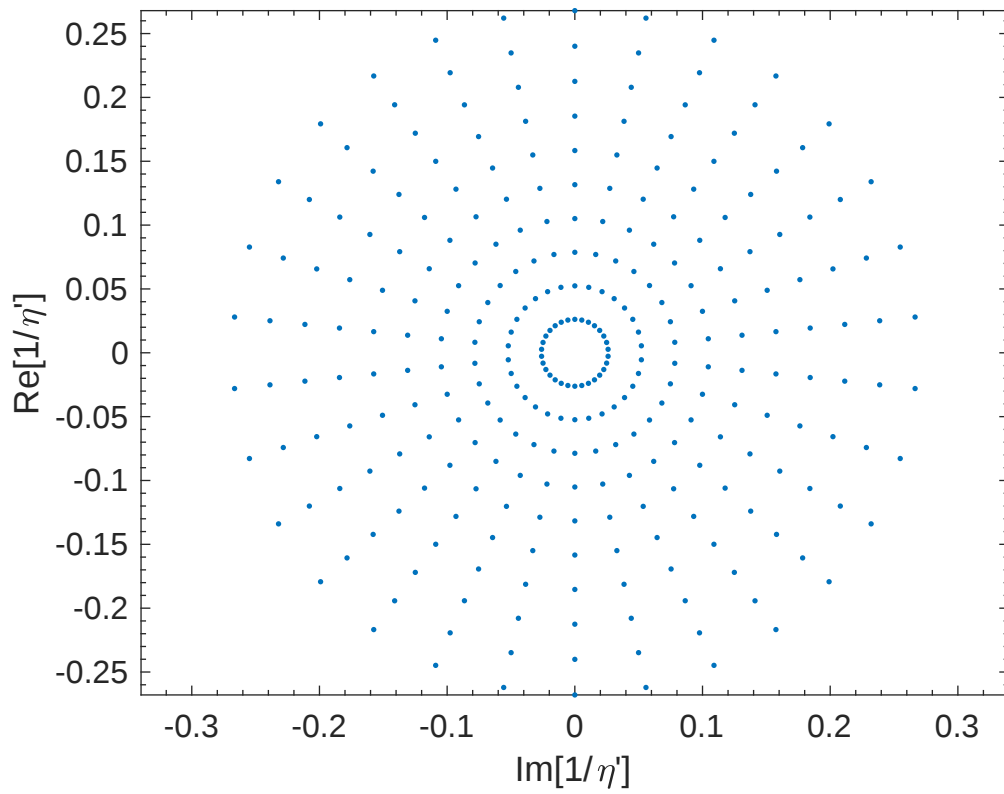


Figura 2.13: Grade regular polar $J \times K = 10 \times 30$, $\alpha = 1$, no plano complexo inverso $1/\eta'$.

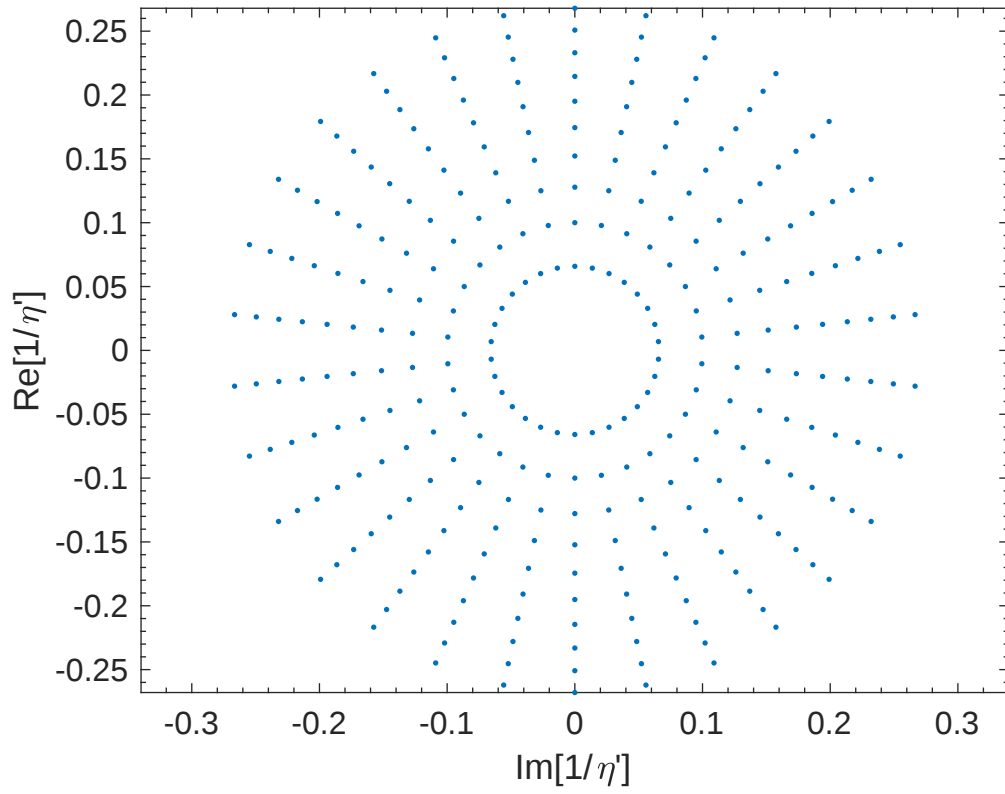


Figura 2.14: Grade polar não-uniforme $J \times K = 10 \times 30$, $\alpha = 0,6$, no plano complexo inverso $1/\eta'$.

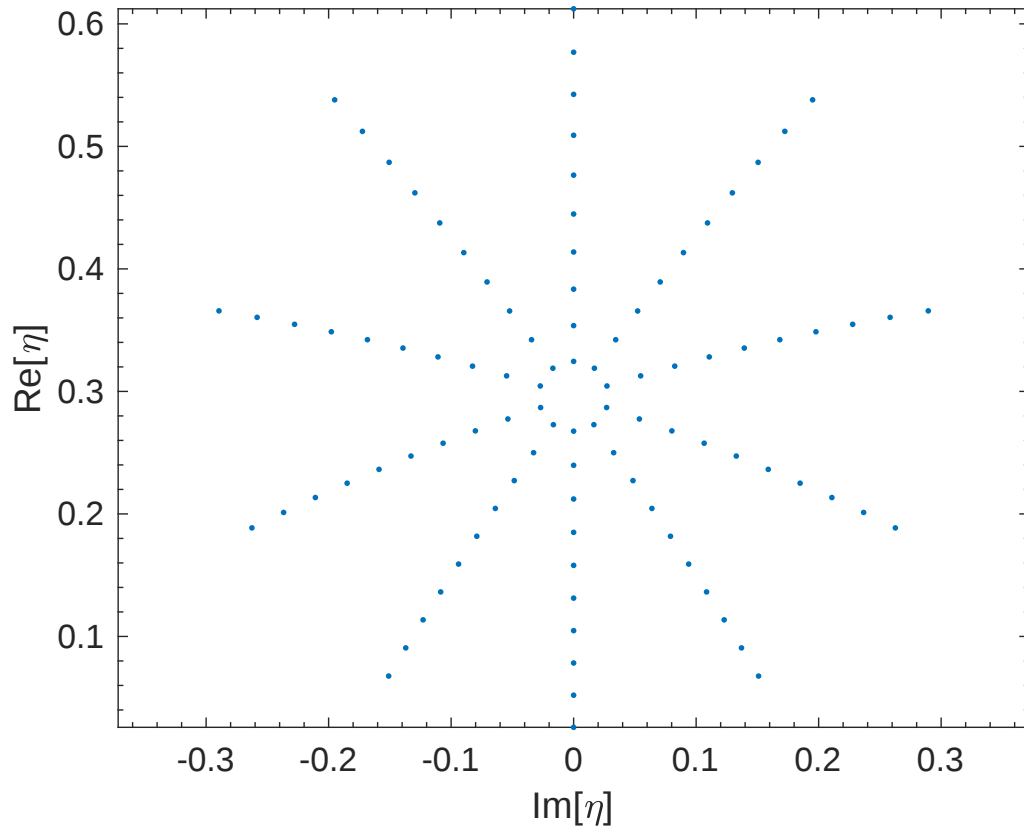


Figura 2.15: Grade regular polar $J \times K = 10 \times 30$, $\alpha = 1$, no plano complexo η .

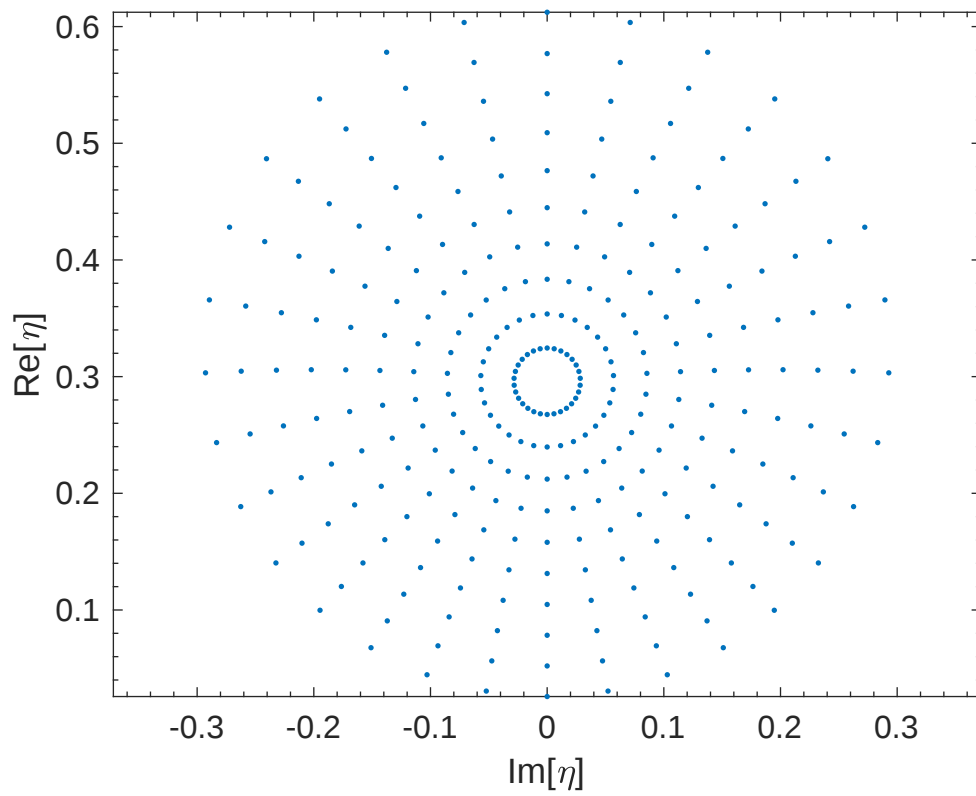


Figura 2.16: Grade regular polar $J \times K = 10 \times 30$, $\alpha = 1$, no plano complexo η .

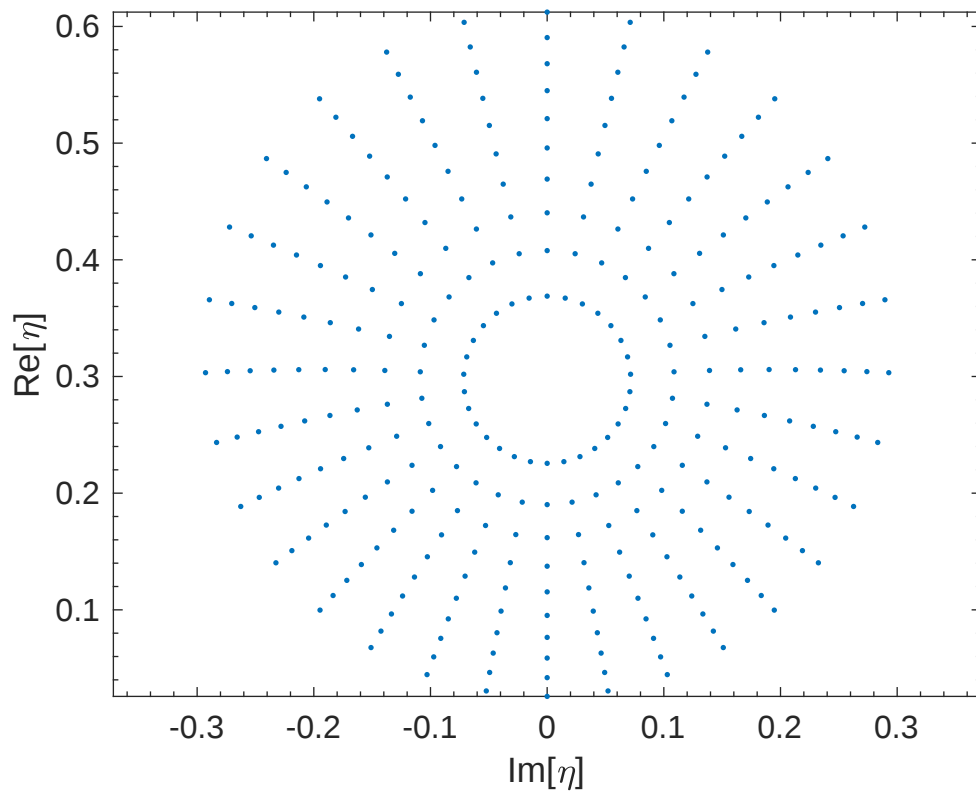


Figura 2.17: Grade polar não-uniforme $J \times K = 10 \times 30$, $\alpha = 0,6$, no plano complexo η .

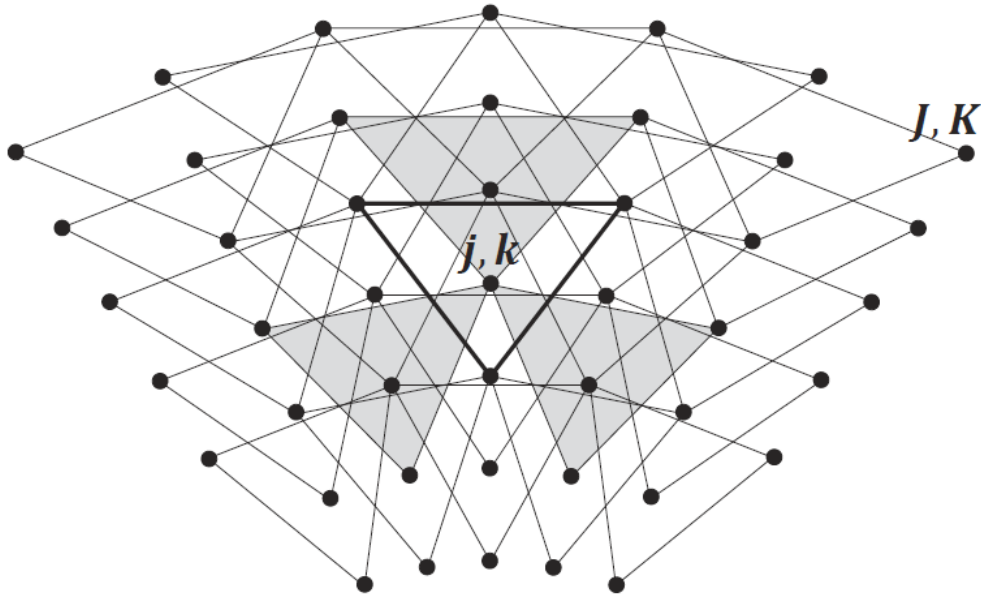


Figura 2.18: Grade polar com células triangulares [2].

2.4.2 Interpolação Local de uma Superfície por Quádricas Confocais com Eixos Deslocados

Neste trabalho, será introduzida a modificação proposta em [2] no procedimento numérico de solução da equação de Monge-Ampère e esta modificação ocorre na forma como a superfície sintetizada é localmente representada. Diferentemente da técnica numérica utilizada em [26], [31] e [43] que emprega diferenças finitas para representar as derivadas de primeira e segunda ordem de L em cada ponto da grade, a superfície sintetizada será localmente representada por um conjunto de superfícies quádricas confocais com eixos deslocados, ou seja, cada quádrica individualmente representa apenas uma seção local do subrefletor. Neste caso, ao invés de células locais com nove pontos, é utilizado um esquema com células triangulares com quatro pontos, conforme ilustrado na Figura 2.18. Como principal vantagem, este tratamento possibilita determinar de forma analítica as derivadas presentes na equação de Monge-Ampère.

Partindo do pressuposto que sejam conhecidos os valores de $L_{j,k}$ sobre a grade, cada quádrica local j, k é descrita por um conjunto de quatro coeficientes $a_{j,k}$, $b_{j,k}$, $c_{j,k}$ e $d_{j,k}$ conforme a equação (2.33). Para determinar estes quatro parâmetros, são escolhidos o próprio ponto j, k e os outros três pontos adjacentes formando uma célula triangular, conforme ilustrado na Figura 2.19. Portanto, deseja-se obter os parâmetros da quádrica que passa simultaneamente pelos quatro pontos que definem a célula triangular. Por simplicidade, cada um desses pontos é representado pelo índice inteiro m ($m = 1, 2, 3, 4$) (observe a Figura 2.19). Logo, tem-se as seguintes correspondências entre os índices: $(j, k) \rightarrow m = 1$, $(j - 1, k) \rightarrow m = 2$, $(j + 1, k - 1) \rightarrow m = 3$ e $(j + 1, k + 1) \rightarrow m = 4$.

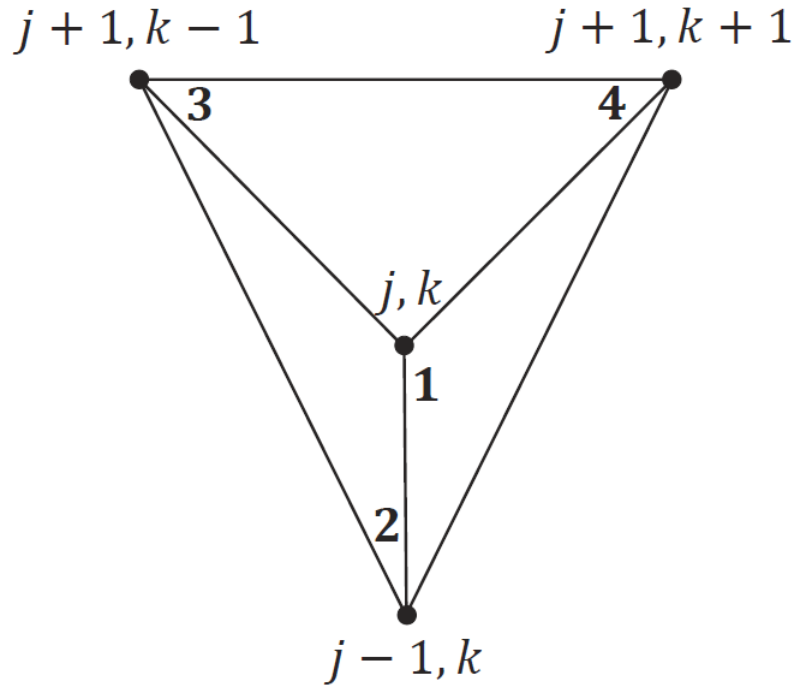


Figura 2.19: Célula triangular com quatro pontos [2].

Logo, a quádriga associada ao ponto (j, k) passa pelos quatro pontos onde

$$L_1 = L_{j,k}, \quad (2.54a)$$

$$L_2 = L_{j-1,k}, \quad (2.54b)$$

$$L_3 = L_{j+1,k-1}, \quad (2.54c)$$

$$L_4 = L_{j+1,k+1}. \quad (2.54d)$$

Pode-se, então, formar um sistema de quatro equações lineares cuja solução permite obter os valores de $a_{j,k}$, $b_{j,k}$, $c_{j,k}$ e $d_{j,k}$. Assim, reescrevendo a equação (2.31) para o ponto m , resulta na seguinte equação linear [2]:

$$\alpha_m a_{j,k} + \beta_m b_{j,k} + \gamma_m c_{j,k} + \delta_m d_{j,k} = \varepsilon_m \quad (2.55)$$

onde α_m para $m = 1, 2, 3, 4$ é

$$\alpha_1 = -e^{-L_1}, \quad (2.56a)$$

$$\alpha_2 = -e^{-L_2}, \quad (2.56b)$$

$$\alpha_3 = -e^{-L_3}, \quad (2.56c)$$

$$\alpha_4 = -e^{-L_4}, \quad (2.56d)$$

β_m para $m = 1, 2, 3, 4$ é

$$\beta_1 = \eta_1 + \bar{\eta}_1, \quad (2.57a)$$

$$\beta_2 = \eta_2 + \bar{\eta}_2, \quad (2.57b)$$

$$\beta_3 = \eta_3 + \bar{\eta}_3, \quad (2.57c)$$

$$\beta_4 = \eta_4 + \bar{\eta}_4, \quad (2.57d)$$

γ para $m = 1, 2, 3, 4$ é

$$\gamma_1 = i(\bar{\eta}_1 - \eta_1), \quad (2.58a)$$

$$\gamma_2 = i(\bar{\eta}_2 - \eta_2), \quad (2.58b)$$

$$\gamma_3 = i(\bar{\eta}_3 - \eta_3), \quad (2.58c)$$

$$\gamma_4 = i(\bar{\eta}_4 - \eta_4), \quad (2.58d)$$

δ_m para $m = 1, 2, 3, 4$ é

$$\delta_1 = |\eta_1|^2 - 1, \quad (2.59a)$$

$$\delta_2 = |\eta_2|^2 - 1, \quad (2.59b)$$

$$\delta_3 = |\eta_3|^2 - 1, \quad (2.59c)$$

$$\delta_4 = |\eta_4|^2 - 1, \quad (2.59d)$$

ε_m para $m = 1, 2, 3, 4$ é

$$\varepsilon_1 = |\eta_1|^2 + 1, \quad (2.60a)$$

$$\varepsilon_2 = |\eta_2|^2 + 1, \quad (2.60b)$$

$$\varepsilon_3 = |\eta_3|^2 + 1, \quad (2.60c)$$

$$\varepsilon_4 = |\eta_4|^2 + 1. \quad (2.60d)$$

Utilizando os valores de η_m e L_m nos quatro pontos da célula triangular ($m = 1, 2, 3, 4$), tem-se o seguinte sistema de equações [2]:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & \delta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{j,k} \\ b_{j,k} \\ c_{j,k} \\ d_{j,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \end{bmatrix}, \quad (2.61)$$

que pode ser resolvido analiticamente pela Regra de Crammer. Definindo a matriz de

coeficientes por $\bar{\bar{Z}}$, o determinante de $\bar{\bar{Z}}$ é tal que

$$\begin{aligned} \det(\bar{\bar{Z}}) = & \alpha_1 \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \\ \beta_4 & \gamma_4 & \delta_4 \end{vmatrix} + \beta_1 \times (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} \alpha_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \gamma_3 & \delta_3 \\ \alpha_4 & \gamma_4 & \delta_4 \end{vmatrix} \\ & + \gamma_1 \times (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \delta_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \delta_4 \end{vmatrix} + \delta_1 \times (-1)^{1+4} \times \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Resolvendo os determinantes das matrizes 3×3 , obtém-se

$$\begin{aligned} \det(\bar{\bar{Z}}) = & \alpha_1(\beta_2\gamma_3\delta_4 + \gamma_2\delta_3\beta_4 + \delta_2\beta_3\gamma_4 - \delta_2\gamma_3\beta_4 - \gamma_2\beta_3\delta_4 - \beta_2\delta_3\gamma_4) \\ & - \beta_1(\alpha_2\gamma_3\delta_4 + \gamma_2\delta_3\alpha_4 + \delta_2\alpha_3\gamma_4 - \delta_2\gamma_3\alpha_4 - \gamma_2\alpha_3\delta_4 - \alpha_2\delta_3\gamma_4) \\ & + \gamma_1(\alpha_2\beta_3\delta_4 + \beta_2\delta_3\alpha_4 + \delta_2\alpha_3\beta_4 - \delta_2\beta_3\alpha_4 - \beta_2\alpha_3\delta_4 - \alpha_2\delta_3\beta_4) \\ & - \delta_1(\alpha_2\beta_3\gamma_4 + \beta_2\gamma_3\alpha_4 + \gamma_2\alpha_3\beta_4 - \gamma_2\beta_3\alpha_4 - \beta_2\alpha_3\gamma_4 - \alpha_2\gamma_3\beta_4), \end{aligned} \quad (2.63)$$

que pode ser reescrito na forma

$$\det(\bar{\bar{Z}}) = f_1\alpha_1 + f_2\alpha_2 + f_3\alpha_3 + f_4\alpha_4, \quad (2.64)$$

onde as funções auxiliares f_1 , f_2 , f_3 e f_4 são dadas por

$$f_1 = \beta_2(\gamma_3\delta_4 - \delta_3\gamma_4) + \beta_3(\delta_2\gamma_4 - \gamma_2\delta_4) + \beta_4(\gamma_2\delta_3 - \delta_2\gamma_3), \quad (2.65a)$$

$$f_2 = \beta_1(\delta_3\gamma_4 - \gamma_3\delta_4) + \beta_3(\gamma_1\delta_4 - \delta_1\gamma_4) + \beta_4(\delta_1\gamma_3 - \gamma_1\delta_3), \quad (2.65b)$$

$$f_3 = \beta_1(\gamma_2\delta_4 - \delta_2\gamma_4) + \beta_2(\delta_1\gamma_4 - \gamma_1\delta_4) + \beta_4(\gamma_1\delta_2 - \delta_1\gamma_2), \quad (2.65c)$$

$$f_4 = \beta_1(\delta_2\gamma_3 - \gamma_2\delta_3) + \beta_2(\gamma_1\delta_3 - \delta_1\gamma_3) + \beta_3(\delta_1\gamma_2 - \gamma_1\delta_2). \quad (2.65d)$$

Definindo agora as matrizes de coeficientes

$$\begin{aligned} \det(\bar{\bar{Z}}_\alpha) = & \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \varepsilon_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \varepsilon_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \\ \varepsilon_4 & \beta_4 & \gamma_4 & \delta_4 \end{bmatrix}, \det(\bar{\bar{Z}}_\beta) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \varepsilon_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \varepsilon_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \varepsilon_3 & \gamma_3 & \delta_3 \\ \alpha_4 & \varepsilon_4 & \gamma_4 & \delta_4 \end{bmatrix}, \\ \det(\bar{\bar{Z}}_\gamma) = & \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \varepsilon_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \varepsilon_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \varepsilon_3 & \delta_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \varepsilon_4 & \delta_4 \end{bmatrix}, \det(\bar{\bar{Z}}_\delta) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \varepsilon_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \varepsilon_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \varepsilon_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & \varepsilon_4 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.66)$$

seus respectivos determinantes são expressos por

$$\det(\bar{\bar{Z}}_\alpha) = f_1\varepsilon_1 + f_2\varepsilon_2 + f_3\varepsilon_3 + f_4\varepsilon_4, \quad (2.67a)$$

$$\det(\bar{\bar{Z}}_\beta) = g_1\alpha_1 + g_2\alpha_2 + g_3\alpha_3 + g_4\alpha_4, \quad (2.67b)$$

$$\det(\bar{\bar{Z}}_\gamma) = h_1\alpha_1 + h_2\alpha_2 + h_3\alpha_3 + h_4\alpha_4, \quad (2.67c)$$

$$\det(\bar{\bar{Z}}_\delta) = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4\alpha_4, \quad (2.67d)$$

onde as funções auxiliares g_1 , g_2 , g_3 e g_4 são dadas por

$$g_1 = \varepsilon_2(\gamma_3\delta_4 - \delta_3\gamma_4) + \varepsilon_3(\delta_2\gamma_4 - \gamma_2\delta_4) + \varepsilon_4(\gamma_2\delta_3 - \delta_2\gamma_3), \quad (2.68a)$$

$$g_2 = \varepsilon_1(\delta_3\gamma_4 - \gamma_3\delta_4) + \varepsilon_3(\gamma_1\delta_4 - \delta_1\gamma_4) + \varepsilon_4(\delta_1\gamma_3 - \gamma_1\delta_3), \quad (2.68b)$$

$$g_3 = \varepsilon_1(\gamma_2\delta_4 - \delta_2\gamma_4) + \varepsilon_2(\delta_1\gamma_4 - \gamma_1\delta_4) + \varepsilon_4(\gamma_1\delta_2 - \delta_1\gamma_2), \quad (2.68c)$$

$$g_4 = \varepsilon_1(\delta_2\gamma_3 - \gamma_2\delta_3) + \varepsilon_2(\gamma_1\delta_3 - \delta_1\gamma_3) + \varepsilon_3(\delta_1\gamma_2 - \gamma_1\delta_2), \quad (2.68d)$$

as funções auxiliares h_1 , h_2 , h_3 e h_4 são dadas por

$$h_1 = \beta_2(\varepsilon_3\delta_4 - \delta_3\varepsilon_4) + \beta_3(\delta_2\varepsilon_4 - \varepsilon_2\delta_4) + \beta_4(\varepsilon_2\delta_3 - \delta_2\varepsilon_3), \quad (2.69a)$$

$$h_2 = \beta_1(\delta_3\varepsilon_4 - \varepsilon_3\delta_4) + \beta_3(\varepsilon_1\delta_4 - \delta_1\varepsilon_4) + \beta_4(\delta_1\varepsilon_3 - \varepsilon_1\delta_3), \quad (2.69b)$$

$$h_3 = \beta_1(\varepsilon_2\delta_4 - \delta_2\varepsilon_4) + \beta_2(\delta_1\varepsilon_4 - \varepsilon_1\delta_4) + \beta_4(\varepsilon_1\delta_2 - \delta_1\varepsilon_2), \quad (2.69c)$$

$$h_4 = \beta_1(\delta_2\varepsilon_3 - \varepsilon_2\delta_3) + \beta_2(\varepsilon_1\delta_3 - \delta_1\varepsilon_3) + \beta_3(\delta_1\varepsilon_2 - \varepsilon_1\delta_2), \quad (2.69d)$$

e as funções auxiliares k_1 , k_2 , k_3 e k_4 são dadas por

$$k_1 = \beta_2(\gamma_3\varepsilon_4 - \varepsilon_3\gamma_4) + \beta_3(\varepsilon_2\gamma_4 - \gamma_2\varepsilon_4) + \beta_4(\gamma_2\varepsilon_3 - \varepsilon_2\gamma_3), \quad (2.70a)$$

$$k_2 = \beta_1(\varepsilon_3\gamma_4 - \gamma_3\varepsilon_4) + \beta_3(\gamma_1\varepsilon_4 - \varepsilon_1\gamma_4) + \beta_4(\varepsilon_1\gamma_3 - \gamma_1\varepsilon_3), \quad (2.70b)$$

$$k_3 = \beta_1(\gamma_2\varepsilon_4 - \varepsilon_2\gamma_4) + \beta_2(\varepsilon_1\gamma_4 - \gamma_1\varepsilon_4) + \beta_4(\gamma_1\varepsilon_2 - \varepsilon_1\gamma_2), \quad (2.70c)$$

$$k_4 = \beta_1(\varepsilon_2\gamma_3 - \gamma_2\varepsilon_3) + \beta_2(\gamma_1\varepsilon_3 - \varepsilon_1\gamma_3) + \beta_3(\varepsilon_1\gamma_2 - \gamma_1\varepsilon_2). \quad (2.70d)$$

Pela Regra de Crammer, os parâmetros da quádrlica são calculados através de [2]:

$$a_{j,k} = \frac{\det(\bar{\bar{Z}}_\alpha)}{\det(\bar{\bar{Z}})}, \quad (2.71a)$$

$$b_{j,k} = \frac{\det(\bar{\bar{Z}}_\beta)}{\det(\bar{\bar{Z}})}, \quad (2.71b)$$

$$c_{j,k} = \frac{\det(\bar{\bar{Z}}_\gamma)}{\det(\bar{\bar{Z}})}, \quad (2.71c)$$

$$d_{j,k} = \frac{\det(\bar{\bar{Z}}_\delta)}{\det(\bar{\bar{Z}})}. \quad (2.71d)$$

Logo,

$$a_{j,k} = \frac{f_1\varepsilon_1 + f_2\varepsilon_2 + f_3\varepsilon_3 + f_4\varepsilon_4}{f_1\alpha_1 + f_2\alpha_2 + f_3\alpha_3 + f_4\alpha_4}, \quad (2.72a)$$

$$b_{j,k} = \frac{g_1\alpha_1 + g_2\alpha_2 + g_3\alpha_3 + g_4\alpha_4}{f_1\alpha_1 + f_2\alpha_2 + f_3\alpha_3 + f_4\alpha_4}, \quad (2.72b)$$

$$c_{j,k} = \frac{h_1\alpha_1 + h_2\alpha_2 + h_3\alpha_3 + h_4\alpha_4}{f_1\alpha_1 + f_2\alpha_2 + f_3\alpha_3 + f_4\alpha_4}, \quad (2.72c)$$

$$d_{j,k} = \frac{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4\alpha_4}{f_1\alpha_1 + f_2\alpha_2 + f_3\alpha_3 + f_4\alpha_4}. \quad (2.72d)$$

2.4.3 Operador Não-Linear $\Gamma[L]$

Para a solução numérica de (2.19) será definido um operador $\Gamma[L]$ associado aos resíduos da equação de Monge-Ampère [31]:

$$\Gamma[L] \equiv |L_{\eta\eta} - L_\eta^2|^2 - (L_{\eta\bar{\eta}} - B)^2 \pm \mathcal{H}(\eta, \omega) = 0. \quad (2.73)$$

Para aplicar o método numérico proposto em [2], a superfície a ser sintetizada é representada localmente por um conjunto de superfícies quádricas confocais e o operador $\Gamma[L]$ expresso em (2.73) deve ser aplicado em cada ponto da grade j, k . Assim, substituindo a expressão da quádrica confocal (2.33) em (2.73), o termo $|L_{\eta\eta} - L_\eta^2|^2 = 0$, e a expressão local para (2.73) torna-se [2]:

$$\Gamma[L] \equiv \pm \mathcal{H}(\eta, \omega) - (L_{\eta\bar{\eta}} - B)^2. \quad (2.74)$$

Analisando a equação do operador (2.74) constata-se que ela é função dos quatro parâmetros da superfície quádrica confocal: $a_{j,k}$, $b_{j,k}$, $c_{j,k}$ e $d_{j,k}$, e o problema numérico a ser resolvido consiste em aplicar o operador (2.74) aos pontos da grade e reduzir os resíduos associados a um valor menor que o critério de convergência a ser adotado.

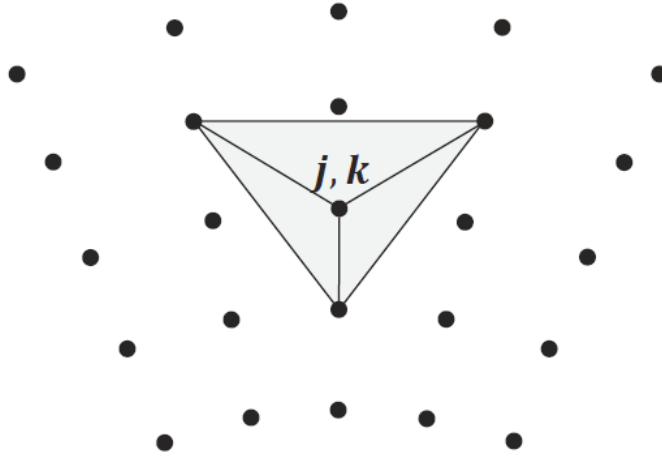
2.4.4 Método Iterativo de Newton

Aplicando o operador (2.74) aos pontos que definem a superfície refletora em (2.47), obtém-se um sistema de equações não-lineares representado por

$$\Gamma[L] = 0. \quad (2.75)$$

Assumindo que o operador Γ seja diferenciável, a equação (2.74) pode ser expandida em uma série de Taylor na forma

$$\Gamma[L] = \Gamma[L^{(n)}] + \Gamma'[L^{(n)}](L^* - L^{(n)}) + \epsilon(\Delta L^2), \quad (2.76)$$

Figura 2.20: Célula triangular j, k no centro da grade [2].

onde L^* é uma solução na vizinhança de L , $\Gamma[L^{(n)}]$ são as derivadas do operador em relação à $L^{(n)}$, n representa a n -ésima iteração e ϵ é o erro de truncamento da série onde foram suprimidos os termos de alta ordem. Definindo uma solução $L^* = L^{(n+1)}$ e desprezando ϵ , tem-se [2]:

$$[L^{(n+1)}] = [L^{(n)}] - \Gamma'[L^{(n)}]^{-1} \Gamma[L^{(n)}]. \quad (2.77)$$

Observe que a equação (2.77) é a expressão do Método de Newton [50] para encontrar as raízes de uma equação $f(x) = 0$.

Para aplicar o método em (2.74) deve-se, inicialmente, expandir o operador em série, observando que ele é função de quatro valores de L definidos em cada ponto da célula triangular [2]. Logo, para a célula j, k ilustrada na Figura 2.20:

$$\begin{aligned} \Gamma_{j,k}[L] \approx & \Gamma_{j,k}^{(n)}[L] + \frac{\partial \Gamma_{j,k}^{(n)}[L]}{\partial L_{j,k}} \left(L_{j,k}^{(n+1)} - L_{j,k}^{(n)} \right) + \frac{\partial \Gamma_{j,k}^{(n)}[L]}{\partial L_{j-1,k}} \left(L_{j-1,k}^{(n+1)} - L_{j-1,k}^{(n)} \right) \\ & + \frac{\partial \Gamma_{j,k}^{(n)}[L]}{\partial L_{j+1,k-1}} \left(L_{j+1,k-1}^{(n+1)} - L_{j+1,k-1}^{(n)} \right) + \frac{\partial \Gamma_{j,k}^{(n)}[L]}{\partial L_{j+1,k+1}} \left(L_{j+1,k+1}^{(n+1)} - L_{j+1,k+1}^{(n)} \right). \end{aligned} \quad (2.78)$$

Definindo

$$D_1^{(n)} = \frac{\partial \Gamma_{j,k}^{(n)}[L]}{\partial L_{j,k}}, \quad (2.79a)$$

$$D_2^{(n)} = \frac{\partial \Gamma_{j,k}^{(n)}[L]}{\partial L_{j-1,k}}, \quad (2.79b)$$

$$D_3^{(n)} = \frac{\partial \Gamma_{j,k}^{(n)}[L]}{\partial L_{j+1,k-1}}, \quad (2.79c)$$

$$D_4^{(n)} = \frac{\partial \Gamma_{j,k}^{(n)}[L]}{\partial L_{j+1,k+1}}, \quad (2.79d)$$

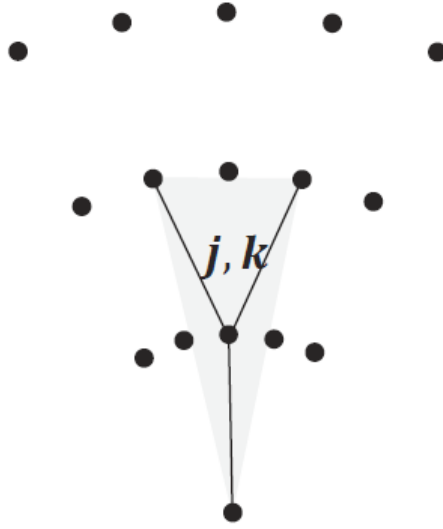


Figura 2.21: Célula triangular no primeiro anel da grade [2].

utilizando as definições em (2.54) e desprezando o erro de truncamento da série, encontra-se

$$\begin{aligned} \Gamma_{j,k}^{(n)}[L] + D_1^{(n)} \left(L_1^{(n+1)} - L_1^{(n)} \right) + D_2^{(n)} \left(L_2^{(n+1)} - L_2^{(n)} \right) \\ + D_3^{(n)} \left(L_3^{(n+1)} - L_3^{(n)} \right) + D_4^{(n)} \left(L_4^{(n+1)} - L_4^{(n)} \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Reescrevendo (2.80), obtém-se

$$D_1^{(n)} L_1^{(n+1)} + D_2^{(n)} L_2^{(n+1)} + D_3^{(n)} L_3^{(n+1)} + D_4^{(n)} L_4^{(n+1)} = V_{j,k}^{(n)}, \quad (2.81)$$

onde

$$V_{j,k}^{(n)} = -\Gamma_{j,k}^{(n)}[L] + D_1^{(n)} L_1^{(n)} + D_2^{(n)} L_2^{(n)} + D_3^{(n)} L_3^{(n)} + D_4^{(n)} L_4^{(n)}. \quad (2.82)$$

A equação (2.81) representa um sistema de equações lineares da forma [2]:

$$D^{(n)} L^{(n+1)} = V^{(n)}, \quad (2.83)$$

onde os termos da iteração $(n + 1)$ são desconhecidos.

Para os pontos que compõem o primeiro anel ($j = 1$) e, conseqüentemente, utilizam o valor da função L no ponto central da grade (conforme ilustrado na Figura 2.21) é necessário um cuidado especial na determinação dos coeficientes da matriz $D^{(n)}$. É assumido que, nesse ponto, a solução do mapeamento é conhecida, ou seja,

$$L_0^{(n+1)} = L_0^{(n)}. \quad (2.84)$$

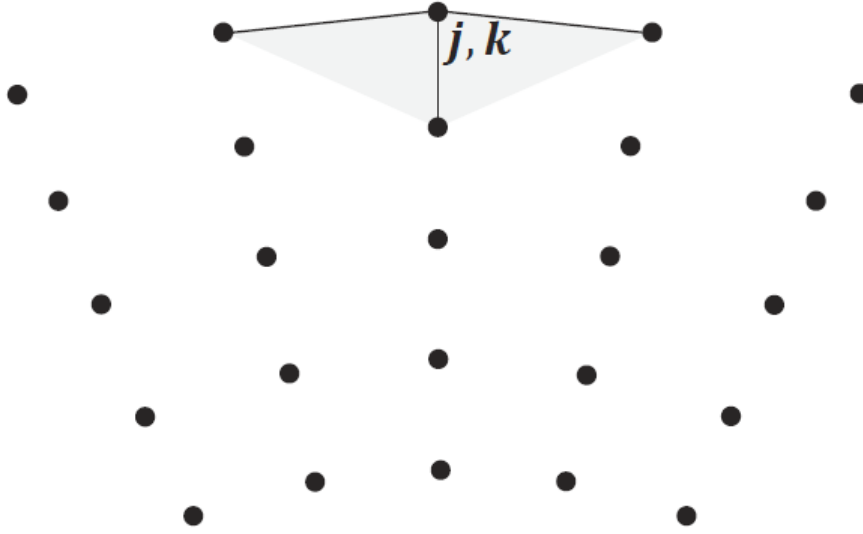


Figura 2.22: Célula triangular nas bordas da grade [2].

Logo, a equação (2.81) deve ser reescrita como [2]:

$$D_1^{(n)} L_1^{(n+1)} + D_3^{(n)} L_3^{(n+1)} + D_4^{(n)} L_4^{(n+1)} = V_{j,k}^{(n)}, \quad (2.85)$$

onde

$$V_{j,k}^{(n)} = -\Gamma_{j,k}^{(n)}[L] + D_1^{(n)} L_1^{(n)} + D_3^{(n)} L_3^{(n)} + D_4^{(n)} L_4^{(n)}. \quad (2.86)$$

A Figura 2.22 ilustra quando o ponto da grade polar pertence ao último anel ($j = J$). Nesse caso são adotados os pontos laterais e, conseqüentemente, o índice $j + 1$ dever ser alterado para j . Logo, em (2.54) e (2.79) deve-se adotar a seguinte notação para a função L [2]:

$$L_3 = L_{j,k-1}, \quad (2.87a)$$

$$L_4 = L_{j,k+1}, \quad (2.87b)$$

e para as derivadas

$$D_3^{(n)} = \frac{\partial \Gamma_{j,k}^{(n)}[L]}{\partial L_{j,k-1}}, \quad (2.88a)$$

$$D_4^{(n)} = \frac{\partial \Gamma_{j,k}^{(n)}[L]}{\partial L_{j,k+1}}. \quad (2.88b)$$

Para qualquer ponto (j, k) , os elementos discretos do operador $\Gamma_{j,k}^{(n)}$ envolvem somente pontos de sua vizinhança e, conseqüentemente, a matriz Jacobiana é uma matriz esparsa.

2.4.5 Matriz Jacobiana do Operador $\Gamma[L]$

Para obter a matriz Jacobiana do operador $\Gamma_{j,k}[L]$ linearizado é necessário que as seguintes derivadas em relação a L_1 , L_2 , L_3 e L_4 sejam determinadas [2]:

$$\frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial L_1} = \frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial a_{j,k}} \frac{\partial a_{j,k}}{\partial L_1} + \frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial b_{j,k}} \frac{\partial b_{j,k}}{\partial L_1} + \frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial c_{j,k}} \frac{\partial c_{j,k}}{\partial L_1} + \frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial d_{j,k}} \frac{\partial d_{j,k}}{\partial L_1}, \quad (2.89a)$$

$$\frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial L_2} = \frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial a_{j,k}} \frac{\partial a_{j,k}}{\partial L_2} + \frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial b_{j,k}} \frac{\partial b_{j,k}}{\partial L_2} + \frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial c_{j,k}} \frac{\partial c_{j,k}}{\partial L_2} + \frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial d_{j,k}} \frac{\partial d_{j,k}}{\partial L_2}, \quad (2.89b)$$

$$\frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial L_3} = \frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial a_{j,k}} \frac{\partial a_{j,k}}{\partial L_3} + \frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial b_{j,k}} \frac{\partial b_{j,k}}{\partial L_3} + \frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial c_{j,k}} \frac{\partial c_{j,k}}{\partial L_3} + \frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial d_{j,k}} \frac{\partial d_{j,k}}{\partial L_3}, \quad (2.89c)$$

$$\frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial L_4} = \frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial a_{j,k}} \frac{\partial a_{j,k}}{\partial L_4} + \frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial b_{j,k}} \frac{\partial b_{j,k}}{\partial L_4} + \frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial c_{j,k}} \frac{\partial c_{j,k}}{\partial L_4} + \frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial d_{j,k}} \frac{\partial d_{j,k}}{\partial L_4}. \quad (2.89d)$$

Observe que a matriz Jacobiana requer o cálculo das derivadas parciais de $\Gamma_{j,k}$ em relação aos coeficientes da superfície quádrlica $a_{j,k}$, $b_{j,k}$, $c_{j,k}$ e $d_{j,k}$ e também das derivadas dos coeficientes da superfície quádrlica $a_{j,k}$, $b_{j,k}$, $c_{j,k}$ e $d_{j,k}$ em relação a L_1 , L_2 , L_3 e L_4 . O primeiro conjunto de derivadas depende da função fase $l(\omega)$ que é assumida no problema de síntese. Por isso, estas derivadas serão apresentadas no Capítulo 3 para o caso particular onde é considerada fase uniforme na abertura e no Capítulo 4 para o caso geral onde é considerada fase não-uniforme na abertura. Já o segundo conjunto de derivadas, ou seja, as derivadas de $a_{j,k}$, $b_{j,k}$, $c_{j,k}$ e $d_{j,k}$ em relação a L_1 , L_2 , L_3 e L_4 , dependem da superfície adotada para modelar localmente o subrefletor e são descritas a seguir.

As derivadas de $a_{j,k}$ em relação à função L nos pontos da célula são dadas por:

$$\frac{\partial a_{j,k}}{\partial L_1} = \frac{\partial a_{j,k}}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial L_1}, \quad (2.90a)$$

$$\frac{\partial a_{j,k}}{\partial L_2} = \frac{\partial a_{j,k}}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial L_2}, \quad (2.90b)$$

$$\frac{\partial a_{j,k}}{\partial L_3} = \frac{\partial a_{j,k}}{\partial \alpha_3} \frac{\partial \alpha_3}{\partial L_3}, \quad (2.90c)$$

$$\frac{\partial a_{j,k}}{\partial L_4} = \frac{\partial a_{j,k}}{\partial \alpha_4} \frac{\partial \alpha_4}{\partial L_4}. \quad (2.90d)$$

Derivando (2.56) em relação a L_1 , L_2 , L_3 e L_4 , tem-se que:

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial L_1} = -\alpha_1, \quad (2.91a)$$

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial L_2} = -\alpha_2, \quad (2.91b)$$

$$\frac{\partial \alpha_3}{\partial L_3} = -\alpha_3, \quad (2.91c)$$

$$\frac{\partial \alpha_4}{\partial L_4} = -\alpha_4. \quad (2.91d)$$

Utilizando os resultados em (2.65), vê-se que

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} [f_1, f_2, f_3, f_4] = 0, \quad (2.92a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_2} [f_1, f_2, f_3, f_4] = 0, \quad (2.92b)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_3} [f_1, f_2, f_3, f_4] = 0, \quad (2.92c)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_4} [f_1, f_2, f_3, f_4] = 0, \quad (2.92d)$$

e derivando (2.72a), é fácil demonstrar que [2]:

$$\frac{\partial a_{j,k}}{\partial L_1} = \alpha_1 f_1 \frac{f_1 \varepsilon_1 + f_2 \varepsilon_2 + f_3 \varepsilon_3 + f_4 \varepsilon_4}{(f_1 \alpha_1 + f_2 \alpha_2 + f_3 \alpha_3 + f_4 \alpha_4)^2}, \quad (2.93a)$$

$$\frac{\partial a_{j,k}}{\partial L_2} = \alpha_2 f_2 \frac{f_1 \varepsilon_1 + f_2 \varepsilon_2 + f_3 \varepsilon_3 + f_4 \varepsilon_4}{(f_1 \alpha_1 + f_2 \alpha_2 + f_3 \alpha_3 + f_4 \alpha_4)^2}, \quad (2.93b)$$

$$\frac{\partial a_{j,k}}{\partial L_3} = \alpha_3 f_3 \frac{f_1 \varepsilon_1 + f_2 \varepsilon_2 + f_3 \varepsilon_3 + f_4 \varepsilon_4}{(f_1 \alpha_1 + f_2 \alpha_2 + f_3 \alpha_3 + f_4 \alpha_4)^2}, \quad (2.93c)$$

$$\frac{\partial a_{j,k}}{\partial L_4} = \alpha_4 f_4 \frac{f_1 \varepsilon_1 + f_2 \varepsilon_2 + f_3 \varepsilon_3 + f_4 \varepsilon_4}{(f_1 \alpha_1 + f_2 \alpha_2 + f_3 \alpha_3 + f_4 \alpha_4)^2}. \quad (2.93d)$$

A derivada de $b_{j,k}$ em relação à L_1 , L_2 , L_3 e L_4 é dada por

$$\frac{\partial b_{j,k}}{\partial L_1} = \frac{\partial b_{j,k}}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial L_1}, \quad (2.94a)$$

$$\frac{\partial b_{j,k}}{\partial L_2} = \frac{\partial b_{j,k}}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial L_2}, \quad (2.94b)$$

$$\frac{\partial b_{j,k}}{\partial L_3} = \frac{\partial b_{j,k}}{\partial \alpha_3} \frac{\partial \alpha_3}{\partial L_3}, \quad (2.94c)$$

$$\frac{\partial b_{j,k}}{\partial L_4} = \frac{\partial b_{j,k}}{\partial \alpha_4} \frac{\partial \alpha_4}{\partial L_4}. \quad (2.94d)$$

Analisando (2.68), pode-se verificar que

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} [g_1, g_2, g_3, g_4] = 0, \quad (2.95a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_2} [g_1, g_2, g_3, g_4] = 0, \quad (2.95b)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_3} [g_1, g_2, g_3, g_4] = 0, \quad (2.95c)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_4} [g_1, g_2, g_3, g_4] = 0. \quad (2.95d)$$

Utilizando os resultados em (2.91) e (2.95), mostra-se que [2]:

$$\frac{\partial b_{j,k}}{\partial L_1} = \alpha_1 \frac{\alpha_2(f_1g_2 - f_2g_1) + \alpha_3(f_1g_3 - f_3g_1) + \alpha_4(f_1g_4 - f_4g_1)}{(f_1\alpha_1 + f_2\alpha_2 + f_3\alpha_3 + f_4\alpha_4)^2}, \quad (2.96a)$$

$$\frac{\partial b_{j,k}}{\partial L_2} = \alpha_2 \frac{\alpha_1(f_2g_1 - f_1g_2) + \alpha_3(f_2g_3 - f_3g_2) + \alpha_4(f_2g_4 - f_4g_2)}{(f_1\alpha_1 + f_2\alpha_2 + f_3\alpha_3 + f_4\alpha_4)^2}, \quad (2.96b)$$

$$\frac{\partial b_{j,k}}{\partial L_3} = \alpha_3 \frac{\alpha_1(f_3g_1 - f_1g_3) + \alpha_2(f_3g_2 - f_2g_3) + \alpha_4(f_3g_4 - f_4g_3)}{(f_1\alpha_1 + f_2\alpha_2 + f_3\alpha_3 + f_4\alpha_4)^2}, \quad (2.96c)$$

$$\frac{\partial b_{j,k}}{\partial L_4} = \alpha_4 \frac{\alpha_1(f_4g_1 - f_1g_4) + \alpha_2(f_4g_2 - f_2g_4) + \alpha_3(f_4g_3 - f_3g_4)}{(f_1\alpha_1 + f_2\alpha_2 + f_3\alpha_3 + f_4\alpha_4)^2}. \quad (2.96d)$$

Derivando $c_{j,k}$ em relação à L_1 , L_2 , L_3 e L_4 , tem-se que

$$\frac{\partial c_{j,k}}{\partial L_1} = \frac{\partial c_{j,k}}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial L_1}, \quad (2.97a)$$

$$\frac{\partial c_{j,k}}{\partial L_2} = \frac{\partial c_{j,k}}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial L_2}, \quad (2.97b)$$

$$\frac{\partial c_{j,k}}{\partial L_3} = \frac{\partial c_{j,k}}{\partial \alpha_3} \frac{\partial \alpha_3}{\partial L_3}, \quad (2.97c)$$

$$\frac{\partial c_{j,k}}{\partial L_4} = \frac{\partial c_{j,k}}{\partial \alpha_4} \frac{\partial \alpha_4}{\partial L_4}. \quad (2.97d)$$

Da equação (2.69) pode-se demonstrar que

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1}[h_1, h_2, h_3, h_4] = 0, \quad (2.98a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_2}[h_1, h_2, h_3, h_4] = 0, \quad (2.98b)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_3}[h_1, h_2, h_3, h_4] = 0, \quad (2.98c)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_4}[h_1, h_2, h_3, h_4] = 0. \quad (2.98d)$$

Com o auxílio de (2.91) e (2.98) mostra-se que as derivadas de (2.72c) podem ser escritas como [2]:

$$\frac{\partial c_{j,k}}{\partial L_1} = \alpha_1 \frac{\alpha_2(f_1h_2 - f_2h_1) + \alpha_3(f_1h_3 - f_3h_1) + \alpha_4(f_1h_4 - f_4h_1)}{(f_1\alpha_1 + f_2\alpha_2 + f_3\alpha_3 + f_4\alpha_4)^2}, \quad (2.99a)$$

$$\frac{\partial c_{j,k}}{\partial L_2} = \alpha_2 \frac{\alpha_1(f_2h_1 - f_1h_2) + \alpha_3(f_2h_3 - f_3h_2) + \alpha_4(f_2h_4 - f_4h_2)}{(f_1\alpha_1 + f_2\alpha_2 + f_3\alpha_3 + f_4\alpha_4)^2}, \quad (2.99b)$$

$$\frac{\partial c_{j,k}}{\partial L_3} = \alpha_3 \frac{\alpha_1(f_3h_1 - f_1h_3) + \alpha_2(f_3h_2 - f_2h_3) + \alpha_4(f_3h_4 - f_4h_3)}{(f_1\alpha_1 + f_2\alpha_2 + f_3\alpha_3 + f_4\alpha_4)^2}, \quad (2.99c)$$

$$\frac{\partial c_{j,k}}{\partial L_4} = \alpha_4 \frac{\alpha_1(f_4h_1 - f_1h_4) + \alpha_2(f_4h_2 - f_2h_4) + \alpha_3(f_4h_3 - f_3h_4)}{(f_1\alpha_1 + f_2\alpha_2 + f_3\alpha_3 + f_4\alpha_4)^2}. \quad (2.99d)$$

Por fim, deriva-se $d_{j,k}$ em relação à L_1 , L_2 , L_3 e L_4 :

$$\frac{\partial d_{j,k}}{\partial L_1} = \frac{\partial d_{j,k}}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial L_1}, \quad (2.100a)$$

$$\frac{\partial d_{j,k}}{\partial L_2} = \frac{\partial d_{j,k}}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial L_2}, \quad (2.100b)$$

$$\frac{\partial d_{j,k}}{\partial L_3} = \frac{\partial d_{j,k}}{\partial \alpha_3} \frac{\partial \alpha_3}{\partial L_3}, \quad (2.100c)$$

$$\frac{\partial d_{j,k}}{\partial L_4} = \frac{\partial d_{j,k}}{\partial \alpha_4} \frac{\partial \alpha_4}{\partial L_4}. \quad (2.100d)$$

Verifica-se através de (2.70) que:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1}[k_1, k_2, k_3, k_4] = 0, \quad (2.101a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_2}[k_1, k_2, k_3, k_4] = 0, \quad (2.101b)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_3}[k_1, k_2, k_3, k_4] = 0, \quad (2.101c)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_4}[k_1, k_2, k_3, k_4] = 0. \quad (2.101d)$$

Observando (2.91) e (2.101) mostra-se que as derivadas de (2.72d) podem ser escritas como [2]:

$$\frac{\partial d_{j,k}}{\partial L_1} = \alpha_1 \frac{\alpha_2(f_1k_2 - f_2k_1) + \alpha_3(f_1k_3 - f_3k_1) + \alpha_4(f_1k_4 - f_4k_1)}{(f_1\alpha_1 + f_2\alpha_2 + f_3\alpha_3 + f_4\alpha_4)^2}, \quad (2.102a)$$

$$\frac{\partial d_{j,k}}{\partial L_2} = \alpha_2 \frac{\alpha_1(f_2k_1 - f_1k_2) + \alpha_3(f_2k_3 - f_3k_2) + \alpha_4(f_2k_4 - f_4k_2)}{(f_1\alpha_1 + f_2\alpha_2 + f_3\alpha_3 + f_4\alpha_4)^2}, \quad (2.102b)$$

$$\frac{\partial d_{j,k}}{\partial L_3} = \alpha_3 \frac{\alpha_1(f_3k_1 - f_1k_3) + \alpha_2(f_3k_2 - f_2k_3) + \alpha_4(f_3k_4 - f_4k_3)}{(f_1\alpha_1 + f_2\alpha_2 + f_3\alpha_3 + f_4\alpha_4)^2}, \quad (2.102c)$$

$$\frac{\partial d_{j,k}}{\partial L_4} = \alpha_4 \frac{\alpha_1(f_4k_1 - f_1k_4) + \alpha_2(f_4k_2 - f_2k_4) + \alpha_3(f_4k_3 - f_3k_4)}{(f_1\alpha_1 + f_2\alpha_2 + f_3\alpha_3 + f_4\alpha_4)^2}. \quad (2.102d)$$

Assim, pode-se observar que as derivadas (2.93), (2.96), (2.99) e (2.102) são relacionadas à superfície adotada para modelar localmente o subrefletor.

Para finalizar esta seção, são apresentadas as derivadas parciais das equações (2.32), (2.37) e (2.45) em relação aos coeficientes da superfície quádrlica confocal que serão úteis nos Capítulos 3, 4 e 5 para completar o cálculo das derivadas parciais do operador $\Gamma[L]$ linearizado. Para isso as expressões de interesse serão reescritas considerando que a superfície quádrlica confocal passa por um ponto j, k da grade polar usada para discretizar a superfície sintetizada. Portanto, essas expressões ficam em função dos coeficientes $a_{j,k}$, $b_{j,k}$, $c_{j,k}$ e $d_{j,k}$.

A equação (2.32) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$e^{L(\eta)} = \frac{a_{j,k}}{(\bar{\eta} + \eta)b_{j,k} + i(\bar{\eta} - \eta)c_{j,k} + (|\eta|^2 - 1)d_{j,k} - |\eta|^2 - 1}. \quad (2.103)$$

Assim, tem-se que:

$$\frac{\partial e^L}{\partial a_{j,k}} = \frac{1}{(\bar{\eta} + \eta)b_{j,k} + i(\bar{\eta} - \eta)c_{j,k} + (|\eta|^2 - 1)d_{j,k} - |\eta|^2 - 1}, \quad (2.104a)$$

$$\frac{\partial e^L}{\partial b_{j,k}} = -\frac{(\bar{\eta} + \eta)a_{j,k}}{[(\bar{\eta} + \eta)b_{j,k} + i(\bar{\eta} - \eta)c_{j,k} + (|\eta|^2 - 1)d_{j,k} - |\eta|^2 - 1]^2}, \quad (2.104b)$$

$$\frac{\partial e^L}{\partial c_{j,k}} = -\frac{i(\bar{\eta} - \eta)a_{j,k}}{[(\bar{\eta} + \eta)b_{j,k} + i(\bar{\eta} - \eta)c_{j,k} + (|\eta|^2 - 1)d_{j,k} - |\eta|^2 - 1]^2}, \quad (2.104c)$$

$$\frac{\partial e^L}{\partial d_{j,k}} = -\frac{(|\eta|^2 - 1)a_{j,k}}{[(\bar{\eta} + \eta)b_{j,k} + i(\bar{\eta} - \eta)c_{j,k} + (|\eta|^2 - 1)d_{j,k} - |\eta|^2 - 1]^2}. \quad (2.104d)$$

A equação (2.37) pode ser reescrita como

$$L_\eta(\eta) = -\frac{(d_{j,k} - 1)\bar{\eta} + (b_{j,k} - ic_{j,k})}{(\bar{\eta} + \eta)b_{j,k} + i(\bar{\eta} - \eta)c_{j,k} + (|\eta|^2 - 1)d_{j,k} - |\eta|^2 - 1}. \quad (2.105)$$

Dessa forma, escreve-se que:

$$\frac{\partial L_\eta}{\partial a_{j,k}} = 0, \quad (2.106a)$$

$$\frac{\partial L_\eta}{\partial b_{j,k}} = \frac{\left\{ \begin{array}{l} (\bar{\eta} + \eta)[(d_{j,k} - 1)\bar{\eta} + (b_{j,k} - ic_{j,k})] \\ -[(\bar{\eta} + \eta)b_{j,k} + i(\bar{\eta} - \eta)c_{j,k} + (|\eta|^2 - 1)d_{j,k} - |\eta|^2 - 1] \end{array} \right\}}{[(\bar{\eta} + \eta)b_{j,k} + i(\bar{\eta} - \eta)c_{j,k} + (|\eta|^2 - 1)d_{j,k} - |\eta|^2 - 1]^2}, \quad (2.106b)$$

$$\frac{\partial L_\eta}{\partial c_{j,k}} = \frac{\left\{ \begin{array}{l} i(\bar{\eta} - \eta)[(d_{j,k} - 1)\bar{\eta} + (b_{j,k} - ic_{j,k})] \\ +i[(\bar{\eta} + \eta)b_{j,k} + i(\bar{\eta} - \eta)c_{j,k} + (|\eta|^2 - 1)d_{j,k} - |\eta|^2 - 1] \end{array} \right\}}{[(\bar{\eta} + \eta)b_{j,k} + i(\bar{\eta} - \eta)c_{j,k} + (|\eta|^2 - 1)d_{j,k} - |\eta|^2 - 1]^2}, \quad (2.106c)$$

$$\frac{\partial L_\eta}{\partial d_{j,k}} = \frac{\left\{ \begin{array}{l} (|\eta|^2 - 1)[(d_{j,k} - 1)\bar{\eta} + (b_{j,k} - ic_{j,k})] \\ -\bar{\eta}[(\bar{\eta} + \eta)b_{j,k} + i(\bar{\eta} - \eta)c_{j,k} + (|\eta|^2 - 1)d_{j,k} - |\eta|^2 - 1] \end{array} \right\}}{[(\bar{\eta} + \eta)b_{j,k} + i(\bar{\eta} - \eta)c_{j,k} + (|\eta|^2 - 1)d_{j,k} - |\eta|^2 - 1]^2}. \quad (2.106d)$$

A equação (2.45) pode ser reescrita como

$$L_{\eta\bar{\eta}}(\eta) = \frac{b_{j,k}^2 + c_{j,k}^2 + d_{j,k}^2 - 1}{[(\bar{\eta} + \eta)b_{j,k} + i(\bar{\eta} - \eta)c_{j,k} + (|\eta|^2 - 1)d_{j,k} - |\eta|^2 - 1]^2}. \quad (2.107)$$

Logo, as derivadas parciais são dadas por

$$\frac{\partial L_{\eta\bar{\eta}}}{\partial a_{j,k}} = 0, \quad (2.108a)$$

$$\frac{\partial L_{\eta\bar{\eta}}}{\partial b_{j,k}} = \frac{\left\{ \begin{array}{l} 2b_{j,k}[(\bar{\eta} + \eta)b_{j,k} + i(\bar{\eta} - \eta)c_{j,k} + (|\eta|^2 - 1)d_{j,k} - |\eta|^2 - 1] \\ -2(b_{j,k}^2 + c_{j,k}^2 + d_{j,k}^2 - 1)(\bar{\eta} + \eta) \end{array} \right\}}{[(\bar{\eta} + \eta)b_{j,k} + i(\bar{\eta} - \eta)c_{j,k} + (|\eta|^2 - 1)d_{j,k} - |\eta|^2 - 1]^3}, \quad (2.108b)$$

$$\frac{\partial L_{\eta\bar{\eta}}}{\partial c_{j,k}} = \frac{\left\{ \begin{array}{l} 2c_{j,k}[(\bar{\eta} + \eta)b_{j,k} + i(\bar{\eta} - \eta)c_{j,k} + (|\eta|^2 - 1)d_{j,k} - |\eta|^2 - 1] \\ -2i(b_{j,k}^2 + c_{j,k}^2 + d_{j,k}^2 - 1)(\bar{\eta} - \eta) \end{array} \right\}}{[(\bar{\eta} + \eta)b_{j,k} + i(\bar{\eta} - \eta)c_{j,k} + (|\eta|^2 - 1)d_{j,k} - |\eta|^2 - 1]^3}, \quad (2.108c)$$

$$\frac{\partial L_{\eta\bar{\eta}}}{\partial d_{j,k}} = \frac{\left\{ \begin{array}{l} 2d_{j,k}[(\bar{\eta} + \eta)b_{j,k} + i(\bar{\eta} - \eta)c_{j,k} + (|\eta|^2 - 1)d_{j,k} - |\eta|^2 - 1] \\ -2(b_{j,k}^2 + c_{j,k}^2 + d_{j,k}^2 - 1)(|\eta|^2 - 1) \end{array} \right\}}{[(\bar{\eta} + \eta)b_{j,k} + i(\bar{\eta} - \eta)c_{j,k} + (|\eta|^2 - 1)d_{j,k} - |\eta|^2 - 1]^3}. \quad (2.108d)$$

2.5 Condição de Contorno

Para a solução numérica do problema de síntese é necessário que a equação de Monge-Ampère (2.19) seja resolvida como um problema de valor de contorno. A condição de contorno é obtida impondo que os raios da borda do cone de alimentação sejam mapeados, depois de duas reflexões, no contorno da abertura. Para isso, o contorno fechado associado ao campo da abertura deve ser representado por uma função contínua e com derivadas de primeira ordem contínuas. Neste estudo são abordados três tipos de contorno da abertura: circular, elíptico e super-elíptico, onde a equação da super-elipse é suficientemente geral para representar estes três tipos de contorno (vide Figura 2.23). Da equação da super-elipse, tem-se que

$$\left| \frac{\text{Re}[\omega - \omega_c]}{ra_x} \right|^{2\sigma} + \left| \frac{\text{Im}[\omega - \omega_c]}{ra_y} \right|^{2\sigma} = 1, \quad (2.109)$$

onde ω_c é o centro da abertura sobre o eixo x , e ra_x e ra_y são os raios da super-elipse ao longo dos eixos x e y , respectivamente. É importante observar que, para $\sigma = 1$, o contorno se torna uma elipse, ou um círculo se $ra_x = ra_y$. Para $\sigma \rightarrow \infty$, o contorno se torna um retângulo de lados $2ra_x$ e $2ra_y$.

Sabendo que

$$\text{Re}[\omega - \omega_c] = \frac{\omega + \bar{\omega} - 2\omega_c}{2},$$

$$\text{Im}[\omega - \omega_c] = \frac{\omega - \bar{\omega}}{2i},$$

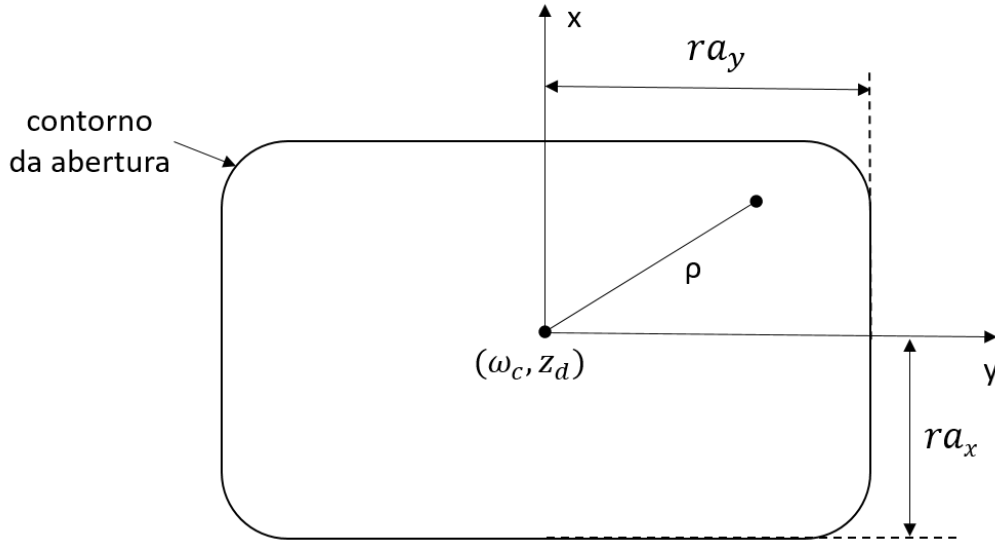


Figura 2.23: Contorno super-elíptico na abertura.

a equação (2.109) pode ser reescrita como

$$\left| \frac{\omega + \bar{\omega} - 2\omega_c}{2ra_x} \right|^{2\sigma} + \left| \frac{\omega - \bar{\omega}}{i2ra_y} \right|^{2\sigma} = 1. \quad (2.110)$$

Assim, o operador $\Gamma_{j,k}$ a ser aplicado nos pontos do contorno da grade polar para a solução numérica do problema de síntese é representado por Γ_c e é dado pela seguinte expressão:

$$\Gamma_c = \left| \frac{\omega + \bar{\omega} - 2\omega_c}{2ra_x} \right|^{2\sigma} + \left| \frac{\omega - \bar{\omega}}{i2ra_y} \right|^{2\sigma} - 1. \quad (2.111)$$

Para determinar a matriz Jacobiana deve-se obter as derivadas do operador Γ_c em relação aos parâmetros da quádrlica $a_{j,k}$, $b_{j,k}$, $c_{j,k}$ e $d_{j,k}$. Desta forma, derivando a equação (2.111) tem-se:

$$\frac{\partial \Gamma_c}{\partial a_{j,k}} = \frac{\partial \Gamma_c}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial a_{j,k}} + \frac{\partial \Gamma_c}{\partial \bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial a_{j,k}} = 2\text{Re} \left[\frac{\partial \Gamma_c}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial a_{j,k}} \right], \quad (2.112a)$$

$$\frac{\partial \Gamma_c}{\partial b_{j,k}} = \frac{\partial \Gamma_c}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial b_{j,k}} + \frac{\partial \Gamma_c}{\partial \bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial b_{j,k}} = 2\text{Re} \left[\frac{\partial \Gamma_c}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial b_{j,k}} \right], \quad (2.112b)$$

$$\frac{\partial \Gamma_c}{\partial c_{j,k}} = \frac{\partial \Gamma_c}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial c_{j,k}} + \frac{\partial \Gamma_c}{\partial \bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial c_{j,k}} = 2\text{Re} \left[\frac{\partial \Gamma_c}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial c_{j,k}} \right], \quad (2.112c)$$

$$\frac{\partial \Gamma_c}{\partial d_{j,k}} = \frac{\partial \Gamma_c}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial d_{j,k}} + \frac{\partial \Gamma_c}{\partial \bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial d_{j,k}} = 2\text{Re} \left[\frac{\partial \Gamma_c}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial d_{j,k}} \right], \quad (2.112d)$$

onde a derivada parcial de Γ_c em relação à ω é dada por

$$\frac{\partial \Gamma_c}{\partial \omega} = \frac{\sigma}{ra_x} \left\{ \frac{1}{2ra_x} (\omega + \bar{\omega} - 2\omega_c) \right\}^{2\sigma-1} - i \frac{\sigma}{ra_y} \left\{ \frac{1}{i2ra_y} (\omega - \bar{\omega}) \right\}^{2\sigma-1}, \quad (2.113)$$

e as derivadas parciais de ω em relação aos coeficientes da superfície quádrlica $a_{j,k}$, $b_{j,k}$, $c_{j,k}$ e $d_{j,k}$ serão apresentadas nos Capítulos 3 e 4 pois dependem da função fase $l(\omega)$.

2.6 Modelo para o Diagrama do Alimentador

A formulação apresentada assume que uma fonte pontual em O irradia uma frente de onda esférica TEM com centro de fase na origem do sistema de coordenadas e com intensidade de radiação $I(\eta)$. Neste estudo, o campo elétrico desta onda TEM é analiticamente representado por [1]:

$$E_p(r') = \left[\cos^e \theta' \cos \phi' \hat{\theta}' - \cos^h \theta' \sin \phi' \hat{\phi}' \right] \frac{e^{-jkr}}{r}, \quad \text{para } \theta \leq \pi/2, \quad (2.114)$$

$$E_c(r') = \sin \phi' \cos \phi' \left[\cos^e \theta' \hat{\theta}' - \cos^h \theta' \hat{\phi}' \right] \frac{e^{-jkr}}{r}, \quad \text{para } \theta \leq \pi/2, \quad (2.115)$$

onde E_p e E_c representam as polarizações principal e cruzada, segundo a terceira definição de Ludwig [51], $\cos^e \theta'$ e $\cos^h \theta'$ representam os diagramas nos planos principais de polarização e os parâmetros e e h são escolhidos para fornecer a atenuação na borda do refletor. Este tipo de modelo é válido para o semi-espço z' positivo e é largamente utilizado para caracterizar a radiação de cornetas corrugadas. A intensidade de radiação, obtida a partir da polarização principal, equação (2.114), é dada por:

$$I(\theta', \phi) = I_0 \left[\cos^{2e} \theta' \cos^2 \phi' + \cos^{2h} \theta' \sin^2 \phi' \right], \quad (2.116)$$

onde I_0 é uma constante que representa a intensidade máxima de radiação. Para o caso particular em que $n = e = h$, os campos não têm polarização cruzada e a intensidade de radiação é circularmente simétrica na forma:

$$I(\theta', \phi') = I_0 \cos^{2n} \theta'. \quad (2.117)$$

A atenuação do alimentador L_e é dada por

$$L_e = \frac{I}{I_0} = \frac{I_0 \cos^{2n} \theta'}{I_0}. \quad (2.118)$$

Assim,

$$L_e = \cos^{2n} \theta' \quad (2.119)$$

e aplicando o logaritmo em ambos os lados da equação (2.119), tem-se que

$$10 \log L_e = 10 \log_{10}(\cos^{2n} \theta'). \quad (2.120)$$

Sendo assim, tem-se que

$$L_e[dB] = 20n \log_{10}(\cos \theta'). \quad (2.121)$$

Assim, chega-se em uma expressão útil para obter o valor de n em termos do ângulo θ_c e da atenuação na borda do subrefletor L_e [dB], que é dada por

$$2n = \frac{L_e[dB]}{10 \log_{10} \cos \theta_c}. \quad (2.122)$$

A constante I_0 é determinada através da normalização da potência total irradiada. Desta forma, para o modelo descrito pode-se utilizar:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_c} I(\theta', \phi') \sin \theta' d\theta' d\phi' = P_{rad}. \quad (2.123)$$

Substituindo a equação (2.116) na equação (2.123) tem-se:

$$I_0 \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_c} [\cos^{2e} \theta' \cos^2 \phi' + \cos^{2h} \theta' \sin^2 \phi'] \sin \theta' d\theta' d\phi' = P_{rad} \quad (2.124)$$

Fazendo $P_{rad} = 4\pi$ e resolvendo a integral da equação (2.124), mostra-se que:

$$I_0 = \frac{4}{\left[\frac{1}{2e+1} (1 - \cos^{2e+1} \theta_c) + \frac{1}{2h+1} (1 - \cos^{2h+1} \theta_c) \right]}. \quad (2.125)$$

Para $n = e = h$, a expressão (2.125) é reduzida a

$$I_0 = \frac{2(2n+1)}{1 - \cos^{2n+1} \theta_c}. \quad (2.126)$$

Neste trabalho será assumido que a intensidade de radiação é circularmente simétrica, ou seja, $e = h = n$. Então, com o auxílio da equação (2.3a), a equação (2.117) é escrita em termos da coordenada complexa η' do sistema de coordenadas auxiliar:

$$I(\eta') = I_0 \left(\frac{|\eta'|^2 - 1}{|\eta'|^2 + 1} \right)^{2n}. \quad (2.127)$$

Substituindo a equação (2.52a) em (2.127) obtém-se a expressão para a intensidade de radiação em termos da coordenada complexa η :

$$I(\eta) = I_0 \left[\left(\left| \frac{\eta_0 \eta + 1}{\eta_0 - \eta} \right|^2 - 1 \right) \cdot \left(\left| \frac{\eta_0 \eta + 1}{\eta_0 - \eta} \right|^2 + 1 \right)^{-1} \right]^{2n} \quad (2.128)$$

onde I_0 é dado pela equação (2.126).

2.7 Modelo de Distribuição de Densidade de Potência na Abertura

Nesta seção é apresentado o modelo desejado para a distribuição da densidade de potência na abertura do sistema duplo-refletor sintetizado. A densidade de potência desejada $G_{ob}(\omega)$ será descrita por uma função Gaussiana cujo contorno pode ser circular, elíptico ou super-elíptico. A atenuação da função Gaussiana pode ser usada para controlar a diretividade e os níveis dos lóbulos laterais do diagrama de radiação [26]. No final da seção, será apresentada a estratégia de convergência que combina a função Gaussiana com a densidade de potência fornecida pelas quádras confocais $G_{sq}(\omega)$.

A função que descreve a distribuição Gaussiana na abertura tem a seguinte forma:

$$G_{ob}(\omega) = G_0 e^{-\psi \rho(\omega, \bar{\omega})}, \quad (2.129)$$

onde

$$\rho(\omega, \bar{\omega}) = \left| \frac{\text{Re}[\omega - \omega_c]}{ra_x} \right|^{2\sigma} + \left| \frac{\text{Im}[\omega - \omega_c]}{ra_y} \right|^{2\sigma} = \left| \frac{\omega + \bar{\omega} - 2\omega_c}{2ra_x} \right|^{2\sigma} + \left| \frac{\omega - \bar{\omega}}{i2ra_y} \right|^{2\sigma}, \quad (2.130)$$

ψ é uma constante que determina o fator de atenuação e G_0 é uma constante que representa a distribuição de potência máxima na abertura. Uma forma prática para determinar ψ é especificar a atenuação na borda do contorno L_G em relação ao ponto de máximo. Novamente, partindo do conceito de atenuação, tem-se que

$$L_G = \frac{G}{G_0} = \frac{G_0 e^{-\psi \rho(\omega, \bar{\omega})}}{G_0} \quad (2.131)$$

Sabendo que no contorno,

$$|\rho(\omega, \bar{\omega})| = 1, \quad (2.132)$$

a atenuação L_G , em valor absoluto, é dada por

$$L_G = e^{-\psi}. \quad (2.133)$$

Aplicando o logaritmo em ambos os lados da equação (2.133), tem-se que

$$L_G[dB] = -10\psi \log_{10} e \quad (2.134)$$

que pode ser reescrita como

$$\psi = -\frac{L_G[dB]}{10 \log_{10} e}. \quad (2.135)$$

Novamente, a constante G_0 é obtida a partir da normalização da potência total irradiada pela abertura. Logo,

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\rho(\omega, \bar{\omega})} G_0 e^{-\psi \rho} \rho d\rho d\phi = P_{rad}. \quad (2.136)$$

Definindo-se $P_{rad} = 4\pi$, a integral é resolvida analiticamente para os seguintes casos particulares, sendo G_0 dado por:

$$\begin{aligned} G_0 &= \frac{2\psi}{1 - e^{-\psi r_a^2}}, \quad \text{para } ra_x = ra_y = r_a, \sigma = 1 \text{ e } \psi \neq 0, \\ G_0 &= \frac{4}{r_a^2}, \quad \text{para } ra_x = ra_y = r_a, \sigma = 1 \text{ e } \psi = 0, \\ G_0 &= \frac{\pi \Gamma(1 + \frac{2}{2\sigma})}{ra_x ra_y \{\Gamma(1 + \frac{1}{2\sigma})\}^2}, \quad \text{para } ra_x \neq ra_y, \sigma \neq 1 \text{ e } \psi = 0. \end{aligned}$$

Para os demais casos, a integral (2.136) deve ser avaliada numericamente.

Para determinar a matriz Jacobiana nos Capítulos 3 e 4 será necessária a derivada de $G_{ob}(\omega)$ em relação a ω que é dada por

$$G_{\omega}^{ob}(\omega) = G_{ob}(\omega) \left[-\psi \frac{\partial \Gamma_c}{\partial \omega} \right], \quad (2.137)$$

onde a derivada parcial de Γ_c em relação a ω é dada em (2.113).

A estratégia utilizada para obter a convergência da solução numérica da equação de Monge-Ampère para os casos onde a solução inicial é muito diferente da solução final consiste em utilizar, como solução inicial, uma superfície quádrlica e, como função do campo na abertura $G(\omega)$, uma combinação linear do campo na abertura de uma superfície quádrlica $G_{sq}(\omega)$ com o campo Gaussiano desejado $G_{ob}(\omega)$. Assim, $G(\omega)$ é dado por

$$G(\omega) = (1 - \mu)G_{sq}(\omega) + \mu G_{ob}(\omega). \quad (2.138)$$

O processo de síntese tem início com $\mu = 0$, ou seja, a distribuição de campo $G(\omega)$ é dada pelo campo de abertura das quádrlicas confocais $G_{sq}(\omega)$ e, neste caso, o operador Γ é nulo. Nos estágios intermediários, μ assume valores entre zero e um e no estágio final $\mu = 1$, ou seja, a distribuição de campo $G(\omega)$ passa a ser igual à função Gaussiana desejada $G_{ob}(\omega)$. A derivada da função $G(\omega)$ em relação a ω é dada por

$$G_{\omega}(\omega) = (1 - \mu)G_{\omega}^{sq}(\omega) + \mu G_{\omega}^{ob}(\omega). \quad (2.139)$$

2.8 Algoritmo de Síntese

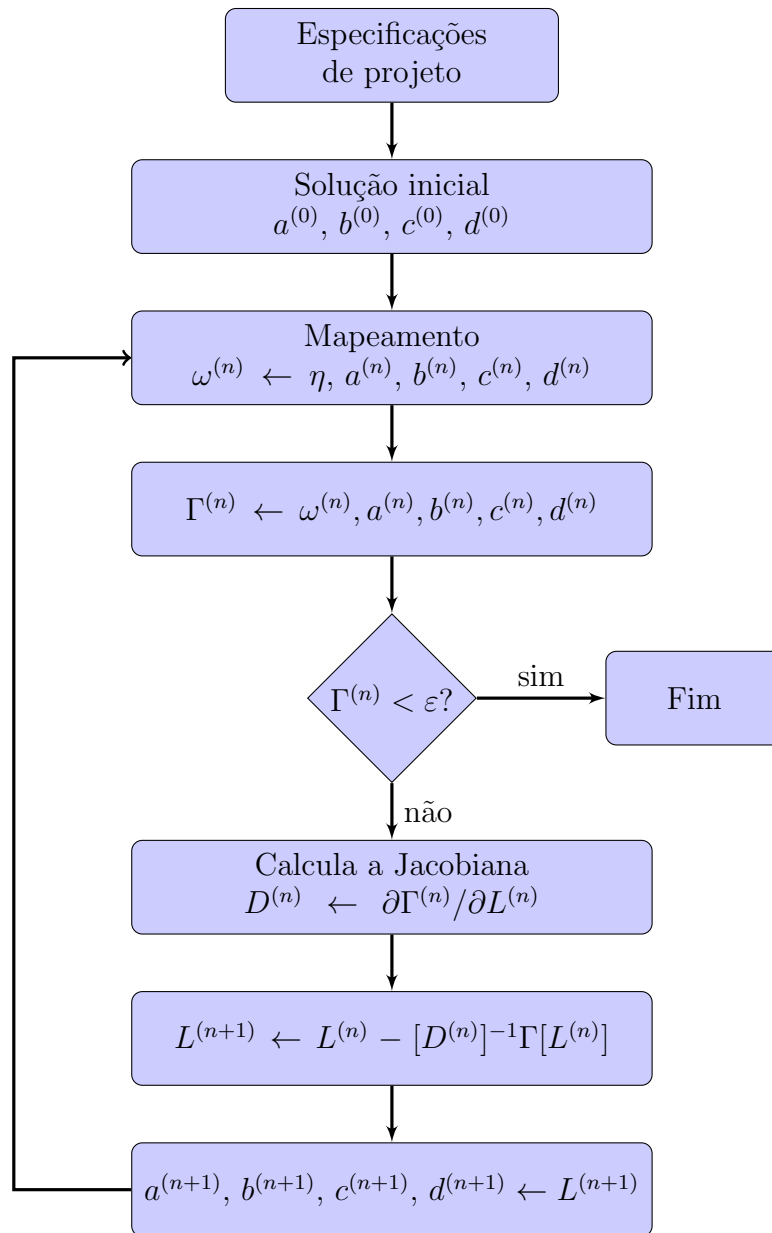


Figura 2.24: Diagrama de blocos do algoritmo de síntese.

O algoritmo da Figura 2.24 ilustra o procedimento numérico para a solução do problema de síntese de um sistema duplo-refletor *offset*. Inicialmente, as especificações de projeto devem ser definidas. Em seguida, é escolhida uma superfície para iniciar o algoritmo de síntese. Neste trabalho, a quádrlica confocal representada pelos coeficientes $a^{(0)}, b^{(0)}, c^{(0)}, d^{(0)}$ foi adotada como solução inicial e deve ser uma superfície próxima da solução a ser sintetizada para a convergência do algoritmo. A partir da solução inicial é obtida a relação de mapeamento $\eta \rightarrow \omega$ que depende da função fase $l(\omega)$. Conhecidos η , ω e os coeficientes das superfícies quádrlicas que representam a superfície do subrefletor, o operador $\Gamma[L]$ é obtido. Se este operador for menor que o critério de convergência

adotado, então, a superfície avaliada é aquela desejada, ou seja, o subrefletor sintetizado em conjunto com o refletor principal geram a densidade de potência na abertura $G(\omega)$ especificada. Caso contrário, o algoritmo calcula a matriz Jacobiana do operador $\Gamma[L]$, e uma nova superfície é obtida $L^{(n+1)}$. Esta superfície é então interpolada por um conjunto de quádras confocais com eixos deslocados e a relação de mapeamento é reavaliada, bem como o operador $\Gamma[L]$. O algoritmo continua iteragindo até que o critério de convergência seja atendido.

2.9 Considerações Finais

Neste capítulo foi apresentado o procedimento numérico alternativo, proposto em [2], para a solução da equação de Monge-Ampère (2.19). A metodologia é empregada no Capítulo 3 para o projeto de antenas duplo-refletores *offset* com fase uniforme na abertura e no Capítulo 4 para o projeto de sistemas duplo-refletores *offset* com fase arbitrária na abertura a fim de modelar o feixe do diagrama de radiação para um contorno específico. Além disso, o algoritmo será empregado para sintetizar lentes dielétricas sem simetria circular no Capítulo 5 a partir da especificação da densidade de potência na região de cobertura.

Capítulo 3

Antenas Duplo-Refletoras *Offset* com Fase Uniforme na Abertura

Neste capítulo, a formulação matemática do problema de síntese apresentado na Seção 2.2 é particularizada para o caso de fase uniforme na abertura usando a aproximação de superfícies quádricas confocais para representar localmente a superfície do subrefletor. No problema de fase uniforme, o mapeamento $\eta \rightarrow \omega$ é determinado por uma expressão analítica fechada. Para a solução numérica do problema de síntese é determinada uma solução inicial para o algoritmo, bem como as derivadas do operador não-linear quando a fase é constante. Para avaliar o algoritmo de síntese desenvolvido, são apresentados alguns estudos de casos com o objetivo de projetar sistemas duplo-refletores *offset* com densidades de potência na abertura com distribuição de amplitude Gaussiana em contornos circulares e elípticos. Para a análise dos resultados gerados pelo algoritmo de síntese, as superfícies sintetizadas são interpoladas por pseudo-*splines* quádricas [52] e analisadas via aproximações da PO mais corrente de borda [47], [48].

3.1 Geometria do Problema de Síntese

A geometria do problema de síntese de um sistema duplo-refletor com fase uniforme na abertura é ilustrada na Figura 3.1 como um problema de valor de contorno. Neste caso particular, os raios refletidos pelo refletor principal cruzam a abertura paralelos ao eixo z . Assim, a função fase $l(\omega)$ é igual a uma constante e $\zeta \rightarrow \infty$, uma vez que o plano de abertura está definido na direção do semi espaço z -positivo. Assim, a relação de mapeamento entre as direções dos raios incidentes η e as coordenadas da abertura ω representada em (2.14) será simplificada e a direção dos raios refletidos ζ se cancelam na formulação.

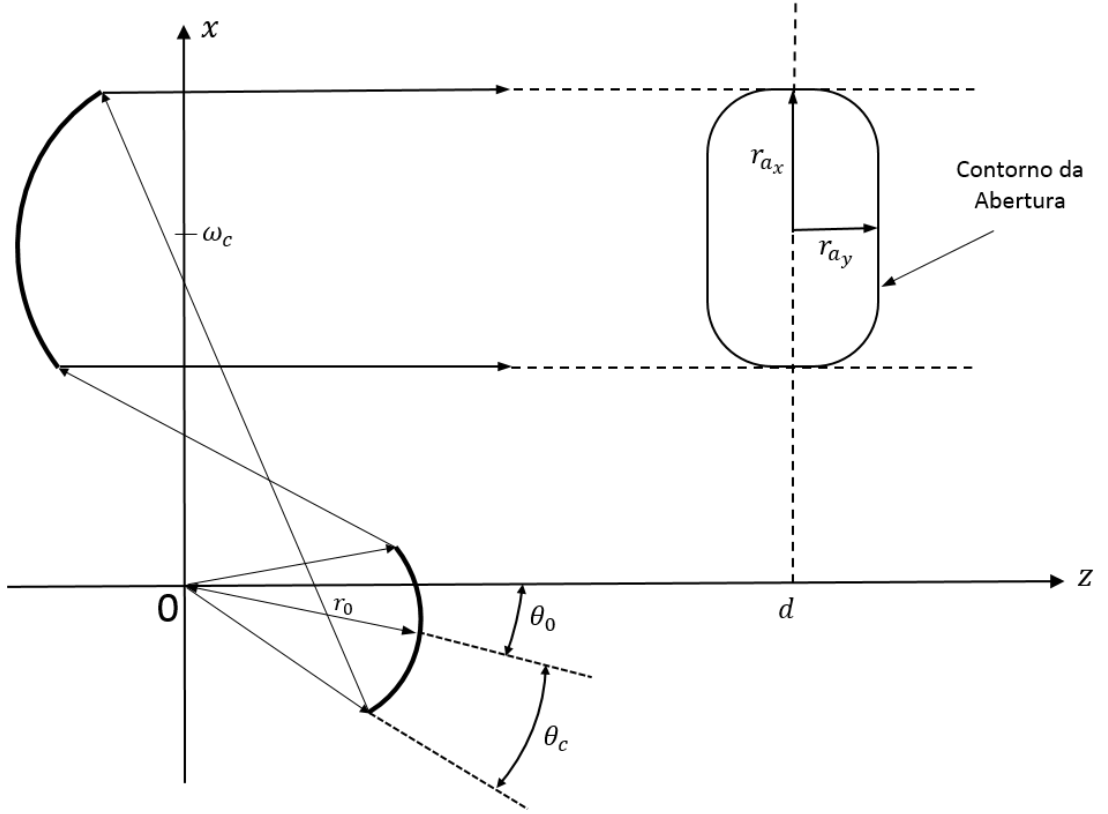


Figura 3.1: Geometria do problema de síntese de um sistema duplo-refletor com fase uniforme na abertura como um problema de valor de contorno.

3.2 Mapeamento $\eta \rightarrow \omega$

Para o caso particular $\zeta \rightarrow \infty$ (todos os raios refletidos paralelos ao eixo $+z$), a equação (2.14) torna-se:

$$L_\eta = \frac{2\tau + z_d - l}{(l - z_d)\eta - \omega}. \quad (3.1)$$

Definindo $A = l - z_d$, a equação (3.1) pode ser reescrita como

$$L_\eta = \frac{2\tau - A}{\eta A - \omega}. \quad (3.2)$$

ou, ainda, da seguinte forma [26]:

$$\omega = \eta A + \frac{A - 2e^L}{L_\eta}. \quad (3.3)$$

Assumindo aproximação por superfícies quádricas confocais, ou seja, substituindo as equações (2.37) e (2.31) em (3.3), a relação entre η e ω é escrita como [53]:

$$\omega = \frac{2a + A[(d+1) - (b+ic)\bar{\eta}]}{(d-1)\bar{\eta} + (b-ic)}. \quad (3.4)$$

3.3 Equação de Monge-Ampère

Para o caso particular de fase uniforme na abertura, ou seja, $l(\omega) = \text{constante}$, $l_\omega = 0$ e $l_{\bar{\omega}} = 0$. Interpretando a equação (3.2) como uma função $F(\omega, \eta)$, função das variáveis complexas ω e η , as derivadas parciais de F são:

$$F_\omega = \frac{2e^L - A}{(A\eta - \omega)^2}, \quad F_{\bar{\omega}} = 0, \quad (3.5)$$

e

$$F_\eta = L_\eta^2, \quad F_{\bar{\eta}} = \frac{2e^L |L_\eta|^2}{2e^L - A}. \quad (3.6)$$

Diferenciando a equação

$$L_\eta = F(\omega, \eta)$$

obtem-se

$$\begin{aligned} L_{\eta\eta} &= F_\omega \omega_\eta + F_{\bar{\omega}} \bar{\omega}_\eta + L_\eta^2 \quad \text{e} \\ L_{\eta\bar{\eta}} &= F_\omega \omega_{\bar{\eta}} + F_{\bar{\omega}} \bar{\omega}_{\bar{\eta}} + B, \end{aligned}$$

onde $B = F_{\bar{\eta}}$. Observe da equação (3.6) que B é real. Estas equações e seus complexos conjugados podem ser combinados na seguinte equação matricial

$$\begin{bmatrix} L_{\eta\eta} - L_\eta^2 & L_{\eta\bar{\eta}} - B \\ L_{\eta\bar{\eta}} - B & L_{\bar{\eta}\bar{\eta}} - L_{\bar{\eta}}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_\omega & F_{\bar{\omega}} \\ \bar{F}_\omega & \bar{F}_{\bar{\omega}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_\eta & \omega_{\bar{\eta}} \\ \bar{\omega}_\eta & \bar{\omega}_{\bar{\eta}} \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Calculando os determinantes de ambos os lados da equação, obtém-se

$$|L_{\eta\eta} - L_\eta^2|^2 - (L_{\eta\bar{\eta}} - B)^2 = (|F_\omega|^2 - |F_{\bar{\omega}}|^2)(|\omega_\eta|^2 - |\omega_{\bar{\eta}}|^2). \quad (3.8)$$

Chamando $V = (|F_\omega|^2 - |F_{\bar{\omega}}|^2)$, combinando as expressões (3.8) e (2.18) e usando as expressões (3.5), (3.6), (3.3) e (2.41) chega-se à [53]:

$$-(L_{\eta\bar{\eta}} - B)^2 = \pm V \frac{I(\eta)}{G(\omega)} \frac{4}{(1 + |\eta|^2)^2}, \quad (3.9)$$

onde

$$B = \frac{2e^L |L_\eta|^2}{2e^L - A} \quad \text{e} \quad V = \frac{|L_\eta|^4}{(2e^L - A)^2}.$$

Esta é a forma complexa da equação de Monge-Ampère para o problema de síntese de um sistema de duplo-refletor com fase uniforme na abertura usando as aproximações por superfície quádricas confocais. Em (3.9) o sinal $(-)$ denota a forma elíptica e o sinal $(+)$

a forma hiperbólica da equação de Monge-Ampère.

3.4 Coordenadas do Refletor Principal

A superfície do refletor principal S pode ser deduzida para o caso particular de fase constante na abertura substituindo as equações (2.16) e (2.17) em (2.15). Então, as coordenadas do refletor principal são dadas por [26]:

$$\vec{r} + \vec{s} = \left\{ \omega, \frac{|\omega|^2 - A^2 + 2e^L(A(1 + |\eta|^2) - \bar{\eta}\omega - \eta\bar{\omega})}{2(A - 2e^L)} \right\}. \quad (3.10)$$

3.5 Exemplo de Solução Analítica para a Síntese de Duplo-Refletores com Fase Uniforme na Abertura

Como solução inicial para o algoritmo de síntese será adotada um exemplo de solução analítica para a síntese de duplo-refletores com fase uniforme na abertura. No plano de simetria $\phi = 0$, assumindo que não há deslocamento azimutal em seu eixo de simetria $\varphi = 0$ e, conseqüentemente, $c = 0$, mostra-se facilmente que a equação (3.4) torna-se

$$\omega_r = \frac{2a + A[(d + 1) - b\bar{\eta}_r]}{(d - 1)\bar{\eta}_r + b}, \quad (3.11)$$

onde η_r e ω_r são as partes reais de η e ω , respectivamente. Da equação (2.26) é possível obter uma expressão para a em função dos termos b e d da superfície quádrlica:

$$a = r_0(b \sin \theta_0 + d \cos \theta_0 - 1). \quad (3.12)$$

Substituindo (3.12) na expressão (3.11), tem-se que

$$(2r_0 \sin \theta_0 - A\eta_r - \omega_r)b + (2r_0 \cos \theta_0 + A - \eta_r\omega_r)d = 2r_0 - A - \eta_r\omega_r. \quad (3.13)$$

Os coeficientes b e d da superfície quádrlica podem ser obtidos definindo-se um sistema linear de duas equações. Para isso, dois raios, η_{r1} e η_{r2} , são definidos no plano de simetria ($\phi = 0$), assim como ilustrado na Figura 3.2 para um sistema duplo-refletor com configuração Gregorian ou TB (topo-base) e na Figura 3.3 para a configuração Cassegrain ou TT (topo-topo) e expressos em (3.14). Na configuração Gregorian ou TB, o raio mapeado no topo (extremidade superior) do subrefletor é refletido na base (extremidade inferior) do refletor principal, enquanto que na configuração Cassegrain ou TT, o raio mapeado no

topo do subrefletor é refletido no topo do refletor principal.

$$\eta_{r1} = \cot\left(\frac{\theta_1}{2}\right), \quad (3.14a)$$

$$\eta_{r2} = \cot\left(\frac{\theta_2}{2}\right), \quad (3.14b)$$

onde $\theta_1 = \theta_0 - \theta_c$ e $\theta_2 = \theta_0 + \theta_c$ para a configuração TB (Gregorian), e $\theta_1 = \theta_0 + \theta_c$ e $\theta_2 = \theta_0 - \theta_c$ para a configuração TT (Cassegrain). Também, tem-se que

$$\omega_{r1} = \omega_c + ra_x \quad \text{e} \quad (3.15a)$$

$$\omega_{r2} = \omega_c - ra_x. \quad (3.15b)$$

Uma vez definidas as especificações do projeto, θ_0 , θ_c , r_0 , $A = l - z_d$, ω_c , ra_x , as variáveis (3.14) e (3.15) são determinadas e o sistema linear na forma matricial é então formulado:

$$\begin{bmatrix} P_1 & Q_1 \\ P_2 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

onde

$$P_1 = 2r_0 \sin \theta_0 - A\eta_{r1} - \omega_{r1},$$

$$P_2 = 2r_0 \sin \theta_0 - A\eta_{r2} - \omega_{r2},$$

$$Q_1 = 2r_0 \cos \theta_0 + A - \eta_{r1}\omega_{r1},$$

$$Q_2 = 2r_0 \cos \theta_0 + A - \eta_{r2}\omega_{r2},$$

$$R_1 = 2r_0 - A - \eta_{r1}\omega_{r1},$$

$$R_2 = 2r_0 - A - \eta_{r2}\omega_{r2}.$$

O sistema linear (3.16) pode facilmente ser resolvido usando a regra de Crammer:

$$b = \frac{R_1 Q_2 - Q_1 R_2}{P_1 Q_2 - Q_1 P_2}, \quad (3.17)$$

$$d = \frac{P_1 R_2 - R_1 P_2}{P_1 Q_2 - Q_1 P_2}, \quad (3.18)$$

e o coeficiente a é obtido pela equação (3.12).

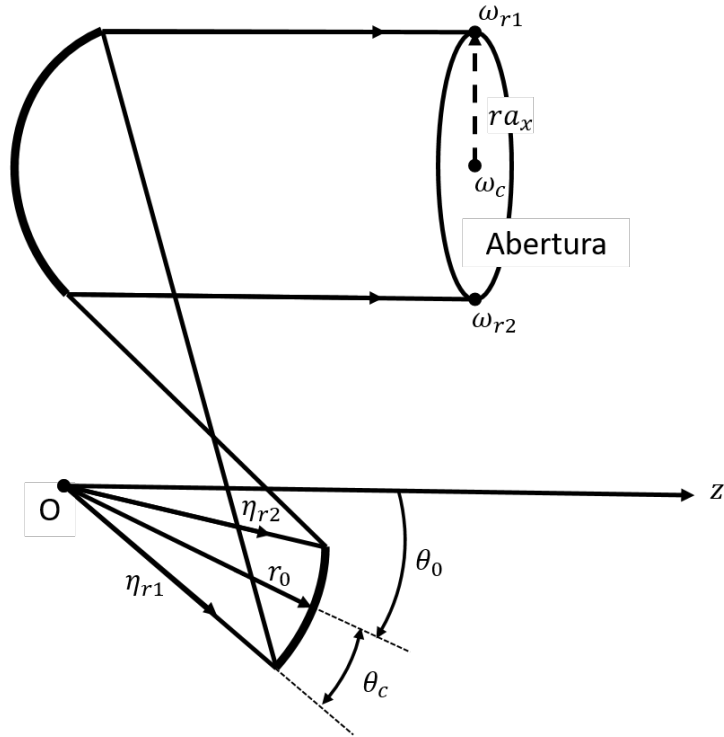


Figura 3.2: Configuração TB (Gregorian) com a abertura definida na direção do semi-espaço z -positivo.

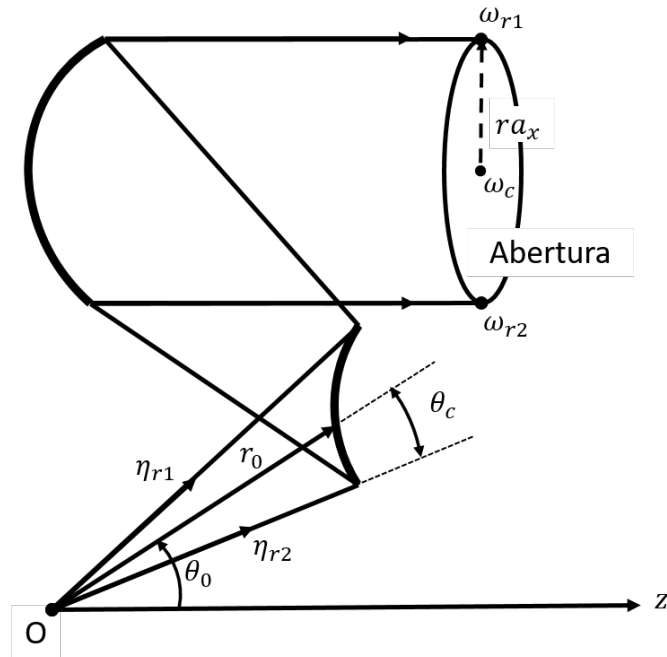


Figura 3.3: Configuração TT (Cassegrain) com a abertura definida na direção do semi-espaço z -positivo.

3.6 Densidade de Potência Refletida na Abertura

A equação (3.9) pode ser considerada de duas formas. Se a densidade de potência é especificada na abertura, então a expressão se torna uma equação diferencial de Monge-

Ampère para L . Por outro lado, se a superfície $L(\eta)$ é conhecida, então a expressão (3.9) é uma equação para densidade de potência $G(\omega)$. Nesta seção é deduzida a densidade de potência refletida na abertura por sistema duplo refletor cujo subrefletor é uma superfície quádrlica confocal determinada pelos coeficientes a , b , c e d . A relação entre η e ω da expressão (3.4) pode ser invertida e expressa da seguinte forma:

$$\bar{\eta} = \frac{2a + A(d+1) - (b-ic)\omega}{(d-1)\omega + A(b+ic)}, \quad (3.19)$$

$$\eta = \frac{2a + A(d+1) - (b+ic)\bar{\omega}}{(d-1)\bar{\omega} + A(b-ic)}. \quad (3.20)$$

Calculando as derivadas de η em relação a ω e seu complexo conjugado $\bar{\omega}$, obtém-se:

$$\eta_{\omega} = 0, \quad (3.21)$$

$$\eta_{\bar{\omega}} = -\frac{A(b^2 + c^2) + 2a(d-1) + A(d^2 - 1)}{[A(b-ic) + (d-1)\bar{\omega}]^2}. \quad (3.22)$$

A partir da equação da Conservação da Energia (2.18), obtém-se a expressão de $G_{sq}(\omega)$ [19]:

$$G_{sq}(\omega) = \frac{4I(\eta)}{(1 + |\eta|^2)^2} ||\eta_{\omega}|^2 - |\eta_{\bar{\omega}}|^2|. \quad (3.23)$$

Substituindo as equações (3.21) e (3.22) em (3.23) obtém-se uma expressão para a densidade de potência refletida na abertura por um sistema duplo-refletor quando o subrefletor é uma superfície quádrlica confocal:

$$G_{sq}(\omega) = \frac{4I(\eta)}{(1 + |\eta|^2)^2} \frac{[A(b^2 + c^2) + 2a(d-1) + A(d^2 - 1)]^2}{|A(b-ic) + (d-1)\bar{\omega}|^4}. \quad (3.24)$$

Para determinar os elementos da matriz Jacobiana deve-se obter a derivada da função $G_{sq}(\omega)$ em relação a ω :

$$\frac{\partial G_{sq}(\omega)}{\partial \omega} = 4I(\eta)\eta_{\bar{\omega}} \frac{\bar{\eta}_{\omega\omega}(1 + \eta\bar{\eta}) - 2\eta(\bar{\eta}_{\omega})^2}{(1 + \eta\bar{\eta})^3} \quad (3.25)$$

onde

$$\bar{\eta}_{\omega} = -\frac{A(b^2 + c^2) + 2a(d-1) + A(d^2 - 1)}{[A(b+ic) + (d-1)\omega]^2}, \quad (3.26)$$

$$\bar{\eta}_{\omega\omega} = \frac{2(d-1)[A(b^2 + c^2) + 2a(d-1) + A(d^2 - 1)]}{[A(b+ic) + (d-1)\omega]^3}. \quad (3.27)$$

3.7 Solução Numérica do Problema de Síntese

O problema de síntese de um sistema duplo-refletor com fase uniforme na abertura (3.9) será resolvido numericamente usando a técnica alternativa descrita na Seção 2.4. Para isso, a superfície do subrefletor é discretizada pela grade polar da Seção 2.4.1, e então é representada localmente por um conjunto de superfícies quádras confocais. A solução analítica para o problema de síntese da Seção 3.5 é usada como solução inicial. A partir da equação de Monge-Ampère para a síntese de um sistema duplo-refletor com fase uniforme na abertura (3.9), o operador não-linear $\Gamma[L]$ é escrito como [53]:

$$\Gamma[L] = (L_{\eta\bar{\eta}} - B)^2 \pm \mathcal{H}(\eta, \omega), \quad (3.28)$$

onde

$$\mathcal{H}(\eta, \omega) = V \frac{I(\eta)}{G(\omega)} \frac{4}{(1 + |\eta|^2)^2}. \quad (3.29)$$

O procedimento iterativo de Newton da Seção 2.4.4 é então empregado para reduzir os resíduos associados ao operador (3.28) nos pontos da grade a um valor menor que o critério de convergência adotado. Para isso, será necessário obter os elementos da matriz Jacobiana (2.89) descrita na seção 2.4.5 para o operador $\Gamma[L]$ linearizado. A partir daí, uma nova superfície é obtida pela equação (2.83), que será usada no processo iterativo para a convergência do algoritmo de síntese representado pelo diagrama de blocos da Figura 2.24.

Para determinar a matriz Jacobiana (2.89) do operador (3.28), as derivadas dos coeficientes da superfície quádras $a_{j,k}$, $b_{j,k}$, $c_{j,k}$ e $d_{j,k}$ em relação à L_1 , L_2 , L_3 e L_4 já foram determinadas na Seção 2.4.5 e estão expressos nas seguintes equações: (2.93), (2.96), (2.99) e (2.102), respectivamente. Para completar o cálculo da matriz Jacobiana, serão determinadas as derivadas parciais de operador $\Gamma[L]$ em relação aos coeficientes da superfície quádras $a_{j,k}$, $b_{j,k}$, $c_{j,k}$ e $d_{j,k}$ que são apresentadas em (3.30):

$$\frac{\partial \Gamma[L]}{\partial a_{j,k}} = 2(L_{\eta\bar{\eta}} - B) \left[\frac{\partial L_{\eta\bar{\eta}}}{\partial a_{j,k}} - \frac{\partial B}{\partial a_{j,k}} \right] \pm \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial a_{j,k}}, \quad (3.30a)$$

$$\frac{\partial \Gamma[L]}{\partial b_{j,k}} = 2(L_{\eta\bar{\eta}} - B) \left[\frac{\partial L_{\eta\bar{\eta}}}{\partial b_{j,k}} - \frac{\partial B}{\partial b_{j,k}} \right] \pm \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial b_{j,k}}, \quad (3.30b)$$

$$\frac{\partial \Gamma[L]}{\partial c_{j,k}} = 2(L_{\eta\bar{\eta}} - B) \left[\frac{\partial L_{\eta\bar{\eta}}}{\partial c_{j,k}} - \frac{\partial B}{\partial c_{j,k}} \right] \pm \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c_{j,k}}, \quad (3.30c)$$

$$\frac{\partial \Gamma[L]}{\partial d_{j,k}} = 2(L_{\eta\bar{\eta}} - B) \left[\frac{\partial L_{\eta\bar{\eta}}}{\partial d_{j,k}} - \frac{\partial B}{\partial d_{j,k}} \right] \pm \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial d_{j,k}}, \quad (3.30d)$$

onde

$$\frac{\partial B}{\partial a_{j,k}} = \frac{4e^L}{2e^L - A} \operatorname{Re} \left[\frac{\partial L_\eta}{\partial a_{j,k}} L_{\bar{\eta}} \right] - \frac{2A}{(2e^L - A)^2} \frac{\partial e^L}{\partial a_{j,k}} |L_\eta|^2, \quad (3.31a)$$

$$\frac{\partial B}{\partial b_{j,k}} = \frac{4e^L}{2e^L - A} \operatorname{Re} \left[\frac{\partial L_\eta}{\partial b_{j,k}} L_{\bar{\eta}} \right] - \frac{2A}{(2e^L - A)^2} \frac{\partial e^L}{\partial b_{j,k}} |L_\eta|^2, \quad (3.31b)$$

$$\frac{\partial B}{\partial c_{j,k}} = \frac{4e^L}{2e^L - A} \operatorname{Re} \left[\frac{\partial L_\eta}{\partial c_{j,k}} L_{\bar{\eta}} \right] - \frac{2A}{(2e^L - A)^2} \frac{\partial e^L}{\partial c_{j,k}} |L_\eta|^2, \quad (3.31c)$$

$$\frac{\partial B}{\partial d_{j,k}} = \frac{4e^L}{2e^L - A} \operatorname{Re} \left[\frac{\partial L_\eta}{\partial d_{j,k}} L_{\bar{\eta}} \right] - \frac{2A}{(2e^L - A)^2} \frac{\partial e^L}{\partial d_{j,k}} |L_\eta|^2. \quad (3.31d)$$

A função $\mathcal{H}(\eta, \omega)$ depende dos coeficientes $a_{j,k}$, $b_{j,k}$, $c_{j,k}$ e $d_{j,k}$ da superfície quádrlica e suas derivadas são determinadas utilizando a regra da cadeia:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial a_{j,k}} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial a_{j,k}} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial a_{j,k}} \pm \frac{I(\eta)}{G(\omega)} \frac{4}{(1 + |\eta|^2)^2} \frac{\partial V}{\partial a_{j,k}} \\ &= 2 \operatorname{Re} \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial a_{j,k}} \right] \pm \frac{I(\eta)}{G(\omega)} \frac{4}{(1 + |\eta|^2)^2} \frac{\partial V}{\partial a_{j,k}}, \end{aligned} \quad (3.32a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial b_{j,k}} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial b_{j,k}} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial b_{j,k}} \pm \frac{I(\eta)}{G(\omega)} \frac{4}{(1 + |\eta|^2)^2} \frac{\partial V}{\partial b_{j,k}} \\ &= 2 \operatorname{Re} \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial b_{j,k}} \right] \pm \frac{I(\eta)}{G(\omega)} \frac{4}{(1 + |\eta|^2)^2} \frac{\partial V}{\partial b_{j,k}}, \end{aligned} \quad (3.32b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c_{j,k}} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial c_{j,k}} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial c_{j,k}} \pm \frac{I(\eta)}{G(\omega)} \frac{4}{(1 + |\eta|^2)^2} \frac{\partial V}{\partial c_{j,k}} \\ &= 2 \operatorname{Re} \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial c_{j,k}} \right] \pm \frac{I(\eta)}{G(\omega)} \frac{4}{(1 + |\eta|^2)^2} \frac{\partial V}{\partial c_{j,k}}, \end{aligned} \quad (3.32c)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial d_{j,k}} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial d_{j,k}} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial d_{j,k}} \pm \frac{I(\eta)}{G(\omega)} \frac{4}{(1 + |\eta|^2)^2} \frac{\partial V}{\partial d_{j,k}} \\ &= 2 \operatorname{Re} \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial d_{j,k}} \right] \pm \frac{I(\eta)}{G(\omega)} \frac{4}{(1 + |\eta|^2)^2} \frac{\partial V}{\partial d_{j,k}}, \end{aligned} \quad (3.32d)$$

onde

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega} = \pm V \frac{4I(\eta)}{(1 + |\eta|^2)^2} \left\{ \frac{-G_\omega}{[G(\omega)]^2} \right\}, \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial V}{\partial a_{j,k}} = \frac{4|L_\eta|^2}{(2e^L - A)^3} \left\{ (2e^L - A) \operatorname{Re} \left[\frac{\partial L_\eta}{\partial a_{j,k}} L_{\bar{\eta}} \right] - \frac{\partial e^L}{\partial a_{j,k}} |L_\eta|^2 \right\}, \quad (3.34a)$$

$$\frac{\partial V}{\partial b_{j,k}} = \frac{4|L_\eta|^2}{(2e^L - A)^3} \left\{ (2e^L - A) \operatorname{Re} \left[\frac{\partial L_\eta}{\partial b_{j,k}} L_{\bar{\eta}} \right] - \frac{\partial e^L}{\partial b_{j,k}} |L_\eta|^2 \right\}, \quad (3.34b)$$

$$\frac{\partial V}{\partial c_{j,k}} = \frac{4|L_\eta|^2}{(2e^L - A)^3} \left\{ (2e^L - A) \operatorname{Re} \left[\frac{\partial L_\eta}{\partial c_{j,k}} L_{\bar{\eta}} \right] - \frac{\partial e^L}{\partial c_{j,k}} |L_\eta|^2 \right\}, \quad (3.34c)$$

$$\frac{\partial V}{\partial d_{j,k}} = \frac{4|L_\eta|^2}{(2e^L - A)^3} \left\{ (2e^L - A) \operatorname{Re} \left[\frac{\partial L_\eta}{\partial d_{j,k}} L_{\bar{\eta}} \right] - \frac{\partial e^L}{\partial d_{j,k}} |L_\eta|^2 \right\}. \quad (3.34d)$$

No procedimento de síntese, a densidade de potência na abertura $G(\omega)$ da expressão (3.29) é dada pela equação (2.139), onde $G_{ob}(\omega)$ é dada por (2.129) e $G_{sq}(\omega)$ pela expressão (3.24). Assim, a derivada de $G(\omega)$ em relação ω que surge na expressão (3.33) é expressa (2.139), onde $G_{\omega}^{ob}(\omega)$ foi dada em (2.137) e $G_{\omega}^{sq}(\omega)$ em (3.25).

As derivadas parciais das expressões e^L , L_{η} e $L_{\eta\bar{\eta}}$ em relação aos coeficientes da superfície quádrlica $a_{j,k}$, $b_{j,k}$, $c_{j,k}$ e $d_{j,k}$, que surgiram nas equações (3.30), (3.31) e (3.34), foram dadas em (2.104), (2.106) e (2.108), respectivamente.

Por fim, tem-se as derivadas relacionadas ao mapeamento $\eta \rightarrow \omega$:

$$\frac{\partial \omega}{\partial a_{j,k}} = \frac{2}{(d_{j,k} - 1)\bar{\eta} + (b_{j,k} - ic_{j,k})}, \quad (3.35a)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial b_{j,k}} = -\frac{\left\{ \frac{2a_{j,k}}{(d_{j,k} - 1)\bar{\eta} + (b_{j,k} - ic_{j,k})} + A \left[(\bar{\eta} + \eta) + \frac{1}{L_{\eta}} \right] \right\}}{(d_{j,k} - 1)\bar{\eta} + (b_{j,k} - ic_{j,k})}, \quad (3.35b)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial c_{j,k}} = -\frac{\left\{ \frac{-i2a_{j,k}}{(d_{j,k} - 1)\bar{\eta} + (b_{j,k} - ic_{j,k})} + A \left[i(\bar{\eta} - \eta) - \frac{i}{L_{\eta}} \right] \right\}}{(d_{j,k} - 1)\bar{\eta} + (b_{j,k} - ic_{j,k})}, \quad (3.35c)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial d_{j,k}} = -\frac{\left\{ \frac{2\bar{\eta}a_{j,k}}{(d_{j,k} - 1)\bar{\eta} + (b_{j,k} - ic_{j,k})} + A \left[(|\eta|^2 - 1) + \frac{\bar{\eta}}{L_{\eta}} \right] \right\}}{(d_{j,k} - 1)\bar{\eta} + (b_{j,k} - ic_{j,k})}. \quad (3.35d)$$

3.8 Estudos de Casos

Nesta seção são apresentados alguns estudos de casos para avaliar a formulação para síntese de antenas duplo-refletoras *offset* com fase uniforme na abertura. O objetivo é verificar se os resultados gerados pelo método numérico de solução da equação de Monge-Ampère são os esperados e validá-los através das aproximações da Óptica Física (PO) com correção das correntes de bordas [47], [48]. Nos casos estudados, as antenas duplo-refletoras *offset* foram sintetizadas para gerar, segundo os princípios da GO, densidades de potência na abertura Gaussianas em contornos circulares e elípticos. Como alimentador foi adotado o modelo cosseno elevado (2.117) com $n = 9$, o que representa uma atenuação de $L_e = -12,8843$ dB em $\theta_c = 32^\circ$ de acordo com (2.121), que corresponde ao ângulo de incidência na borda do subrefletor. O diagrama de radiação do modelo do alimentador no plano uv está ilustrado nas Figuras 3.4 e 3.5.

Para a análise do diagrama de radiação gerado pelas superfícies sintetizadas, é necessário interpolar os pontos dados pelo método de síntese óptica e obter uma superfície contínua. Para modelar uma superfície refletora definida por um conjunto de N pontos

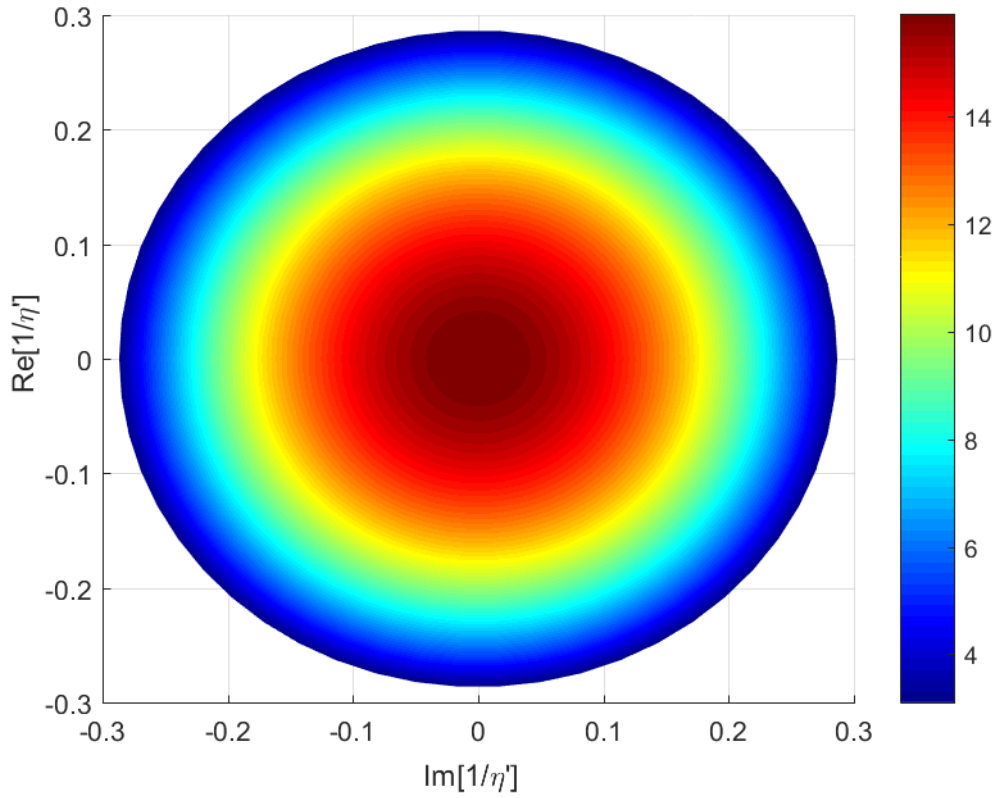


Figura 3.4: Diagrama de radiação do alimentador no plano $1/\eta'$.

(x_i, y_i, z_i) foi utilizada interpolação por pseudo-*splines* quínticas, que é escrita como [52]:

$$z(x, y) = \sum_{i=1}^N a_i [r_i(x, y)]^5 + b_1 x^2 + b_2 xy + b_3 y^2 + b_4 x + b_5 y + b_6 \quad (3.36)$$

com

$$\sum_{i=1}^N a_i P_k(x_i, y_i) = 0, \quad k = 1, \dots, 6,$$

onde

$$P_1(x, y) = x^2,$$

$$P_2(x, y) = xy,$$

$$P_3(x, y) = y^2,$$

$$P_4(x, y) = x,$$

$$P_5(x, y) = y,$$

$$P_6(x, y) = 1,$$

e $r_i(x, y) = [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2]^{1/2}$ representa a distância, no plano xy , do ponto que está sendo avaliado em (3.36) ao conjunto de dados representado nas coordenadas (x_i, y_i) .

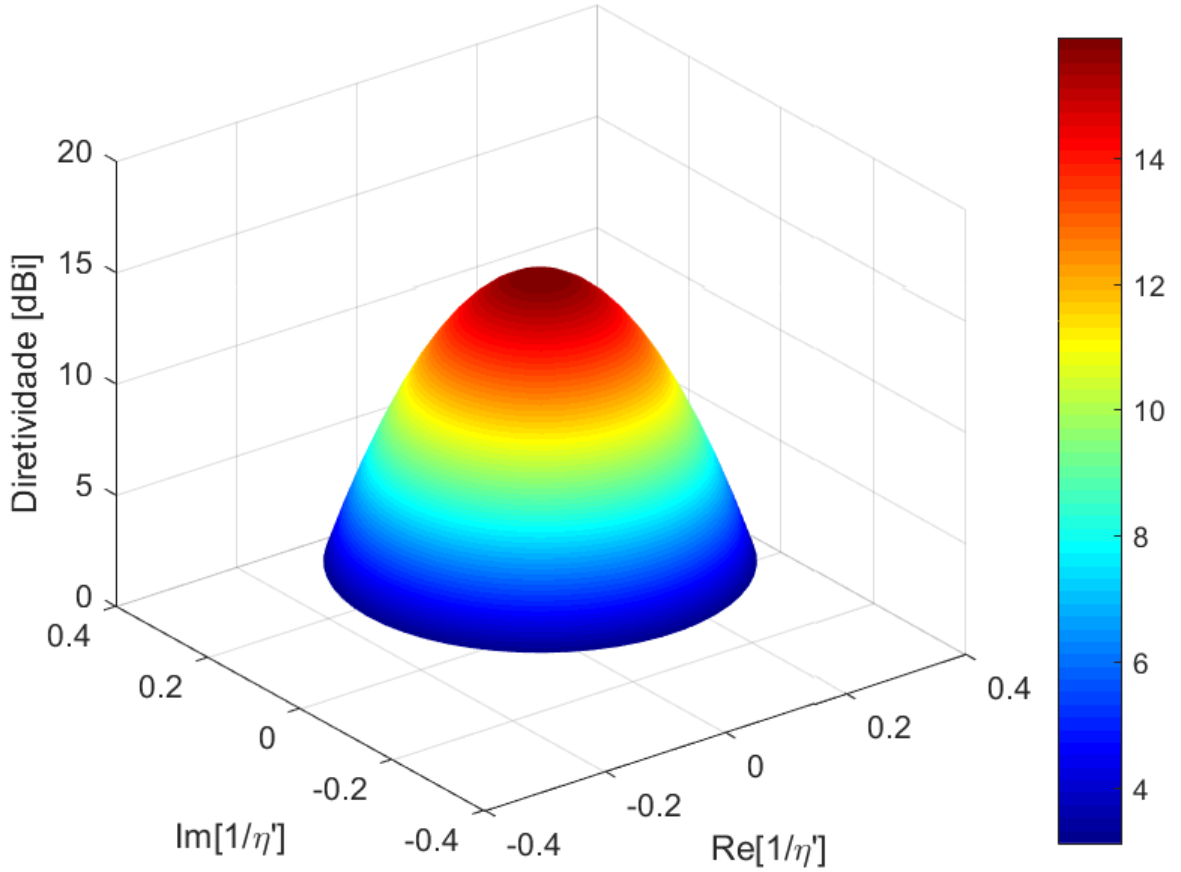


Figura 3.5: Diagrama de radiação do alimentador em 3D.

As superfícies modeladas foram então analisadas via aproximações da PO mais correntes de borda [47], [48]. O modelamento e a análise foram efetuados considerando a antena operando em 11,725 GHz. A frequência escolhida para análise dos resultados da síntese corresponde à frequência central da banda de recepção de sinais de satélite da banda Ku. Além disso, para efeitos de comparação, todos os resultados deste capítulo foram obtidos para uma abertura circular ou elíptica com área de $3.600\pi \text{ cm}^2$. Nos estudos de caso apresentados foi adotada a configuração Gregoriana (ou TB) para o sistema duplo-refletor, a solução da equação de Monge-Ampère é do tipo elíptica e o critério de convergência adotado no algoritmo de síntese é $|\Gamma|_{mean} < 1,0 \times 10^{-10}$, onde $|\Gamma|_{mean}$ representa o erro médio dos resíduos associados ao operador $\Gamma[L]$.

3.8.1 Projeto de Sistemas Duplo-Reletores com Abertura Circular

No primeiro conjunto de estudos de caso (casos A.1, A.2 e A.3), um sistema duplo-refletor *offset* foi sintetizado para gerar campos na abertura Gaussianos com contornos circulares ($\sigma = 1$) e raio igual a $r_{ax} = r_{ay} = 60\text{cm}$. O centro da abertura está fixado sobre o eixo x , à 76 cm da origem O do sistema de coordenadas. A escolha do centro da abertura é feita de modo que o subrefletor não bloqueie a abertura do refletor principal.

Para discretizar o subrefletor foi escolhida uma grade polar regular, ou seja, $\alpha = 1$ no plano complexo $1/\eta'$ definida com 12 anéis ($J = 12$) e 54 radiais ($K = 54$), onde cada ponto da grade está associado à direção de um raio proveniente do alimentador, conforme ilustrado na Figura 3.6. O ângulo de *offset* foi definido em $\theta_0 = -12^\circ$ e a distância r_0 entre a origem O do sistema de coordenadas e o centro do subrefletor é de 35 cm.

Utilizando esses parâmetros e a formulação apresentada na Seção 3.4, determinou-se a superfície quádrlica confocal adotada como solução inicial, sendo ela definida pelos seguintes parâmetros: $a^{(0)} = -0,146301$ m, $b^{(0)} = 0,222299$, $c^{(0)} = 0,0$, $d^{(0)} = 0,214909$. A análise das direções dos raios refletidos da solução inicial pode ser feita observando as direções de reflexão no plano xy ilustrado na Figura 3.7 e o traçado de raios no plano $\phi = 0^\circ$ ilustrado na Figura 3.8. Pode-se notar que a superfície inicial do subrefletor é um elipsóide de revolução, onde um dos focos está na origem do sistema de coordenadas e o outro, acima e à direita. Este último é também o foco do parabolóide que representa o refletor principal inicial. Como esperado, as superfícies quádrlicas confocais obtidas mapearam círculos concêntricos no plano $1/\eta'$ em círculos com os centros deslocados no plano xy , descrevendo um comportamento típico do mapeamento conformal [2]. Além disso, é possível verificar que, de fato, as superfícies iniciais são simétricas em relação ao plano de simetria xz .

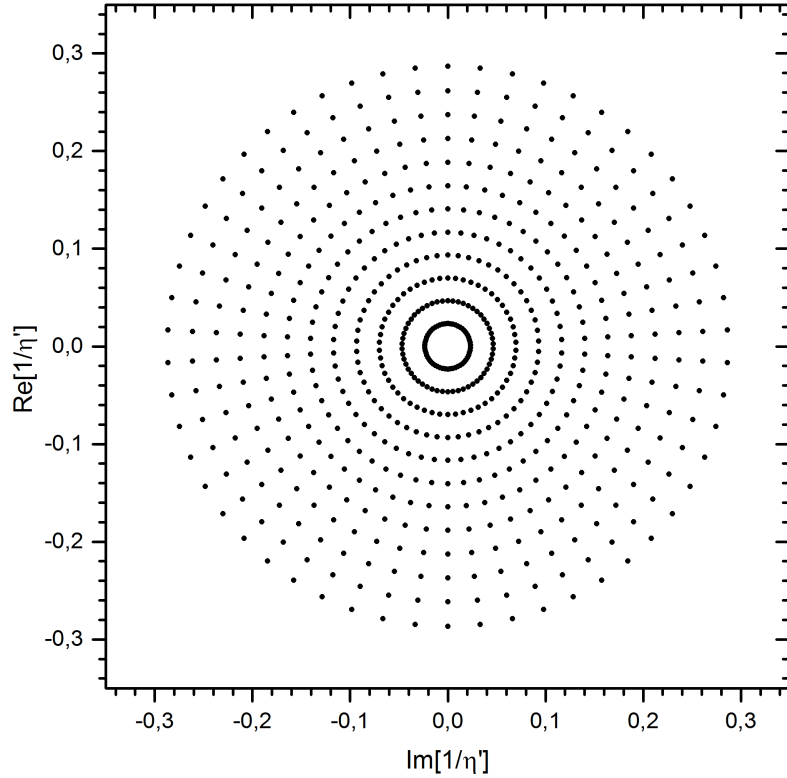


Figura 3.6: Direções de incidência da solução inicial no plano $1/\eta'$ dos casos A.1, A.2 e A.3.

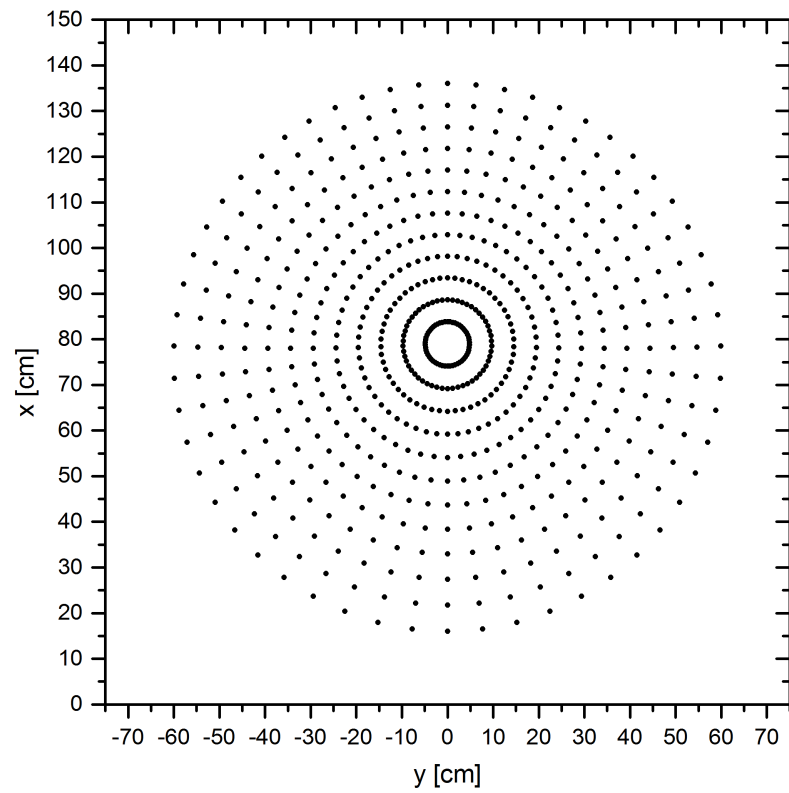


Figura 3.7: Direções de reflexão da solução inicial no plano xy dos casos A.1, A.2 e A.3.

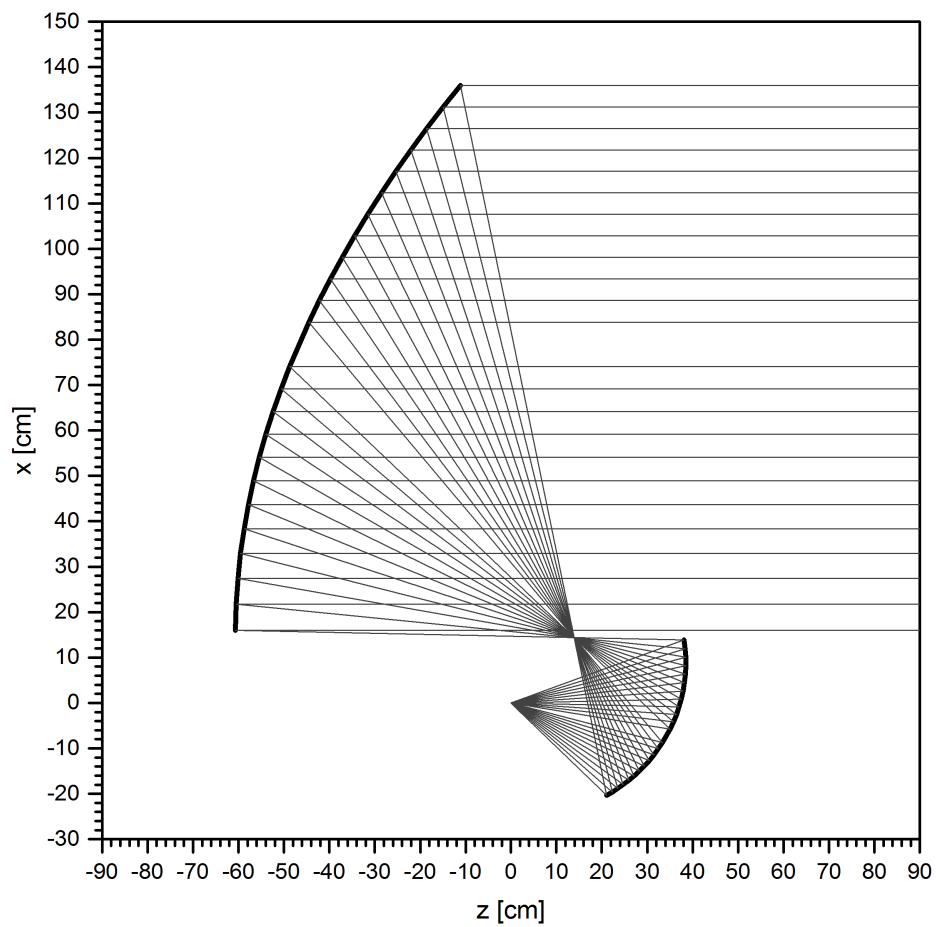


Figura 3.8: Traçado de raios da solução inicial no plano xz dos casos A.1, A.2 e A.3.

Atenuação na borda de 0 dB: Caso A.1

No primeiro estudo de caso, caso A.1, foi desejado uma densidade de potência uniforme na abertura definida pela função constante G_0 com contorno circular. Consequentemente, $L_G = 0\text{dB}$, que equivale ao expoente $\psi = 0$, de acordo com (2.135). O resultado da síntese foi obtido após 6 iterações, sendo que o erro médio dos resíduos associados ao operador $\Gamma[L]$ nos pontos da grade foi de $|\Gamma|_{mean} = 5,77 \times 10^{-14}$ nos pontos interiores ao contorno e $|\Gamma|_{mean} = 5,36 \times 10^{-10}$ nos pontos do contorno. As dimensões dos raios ao longo dos eixos x e y do subrefletor sintetizado foram de 16,8216 cm e 17,9208 cm, respectivamente. As direções dos raios refletidos pela superfície sintetizada no plano da abertura estão ilustrados na Figura 3.9 e a Figura 3.10 mostra o traçado de raios no plano de simetria.

Observando as Figuras 3.9 e 3.10 é fácil perceber que a distância entre os anéis diminui à medida em que se aproximam da borda, caracterizando o deslocamento dos raios refletidos para as bordas do contorno na abertura. Este comportamento é esperado uma vez que o princípio da Conservação da Energia está implícito na equação de Monge-Ampère, compensando a baixa iluminação do alimentador nas bordas do subrefletor ($L_e = -12,8843\text{dB}$) direcionando os raios para o contorno, já que se busca uma abertura uniforme ($L_G = 0\text{dB}$). Além disso, pode-se notar que a distância entre o antepenúltimo anel e o penúltimo é menor que entre o penúltimo e o último. Segundo [2], este comportamento não é adequado, uma vez que, para uma abertura uniforme deseja-se que na medida em que se aproxima da borda, a distância entre os anéis seja cada vez menor. Além disso, verifica-se também uma pequena distorção nas radiais em relação à direção ϕ .

Em [2], foi feita uma análise detalhada para mensurar e explicar essas características indesejadas nos resultados da síntese quando uma grade polar uniforme foi utilizada para discretizar a superfície refletora. Além das distorções relatadas, ainda pode ocorrer do primeiro anel da grade ficar deslocado em relação ao centro especificado para a abertura. Se a função desejada para distribuição de densidade de potência na abertura for simétrica, a distribuição de raios também deve preservar a relação de simetria. Em sua análise, foi identificado que a região central e a região próxima à borda foram aquelas em que o método numérico teve a maior dificuldade para representar a superfície sintetizada por quádricas confocais. Segundo [2], essas distorções surgem quando a representação local por superfícies quádricas confocais com eixos deslocados é inadequada, conduzindo a erros no procedimento de síntese. É importante observar que a utilização da função de uma quádrica confocal com eixo deslocado leva à seguinte simplificação $|L_{\eta\eta} - L_\eta^2|^2 = 0$ na equação de Monge-Ampère. Essa particularidade pode implicar em erros na síntese nos casos onde a distorção imposta pelo mapeamento $\eta \rightarrow \omega$, e, consequentemente, a equação de Monge-Ampère, tiver maior dependência deste termo.

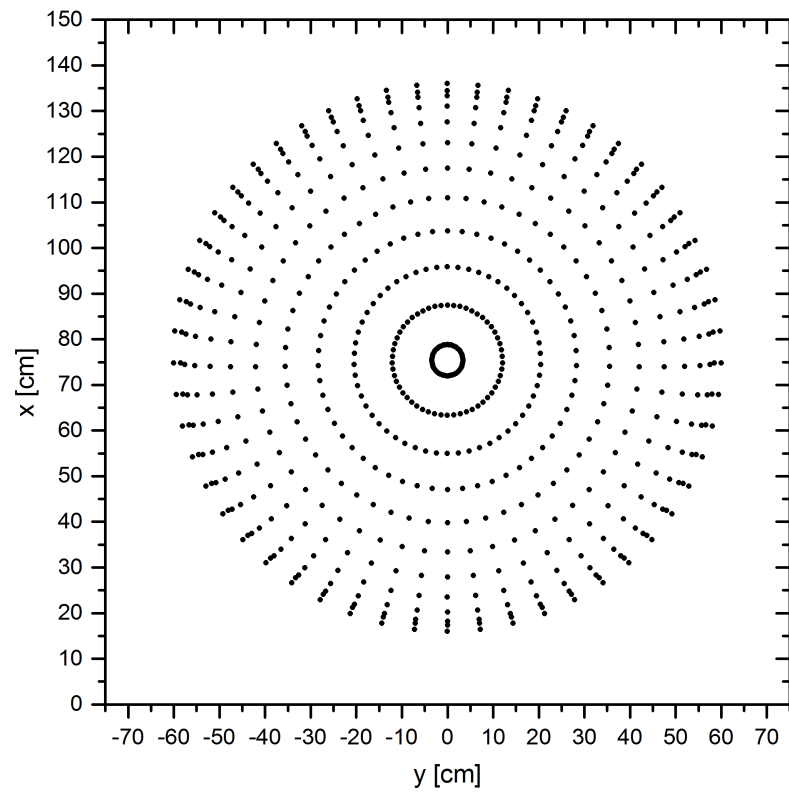


Figura 3.9: Direções de reflexão da superfície sintetizada no plano xy do caso A.1.

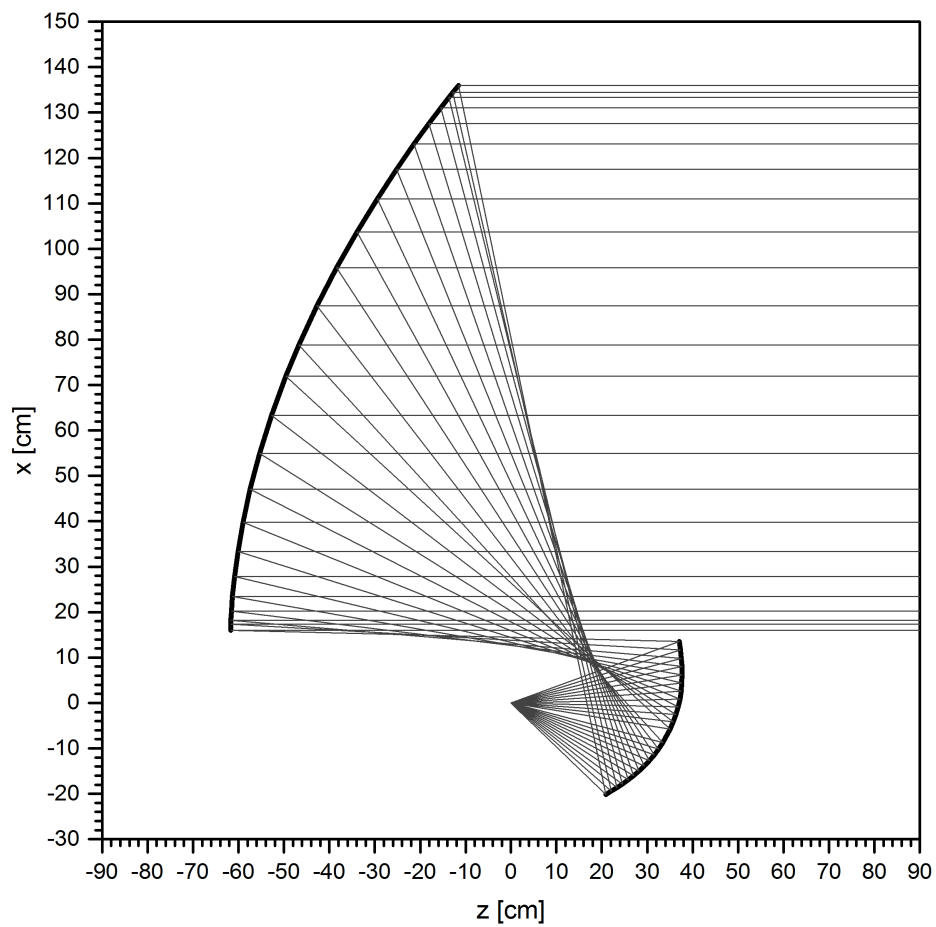


Figura 3.10: Traçado de raios da superfície sintetizada no plano xz do caso A.1.

Para a análise do diagrama de radiação gerado pelas superfícies sintetizadas, os pontos obtidos pelo método de síntese óptica foram interpolados por pseudo-*splines* quínticas [52] e a diferença (em graus) entre cada ponto fornecido pela síntese e o correspondente ponto obtido pela interpolação deve ser mínima e está ilustrado na Figura 3.11 para a superfície do refletor principal. As letras de A até T representam desvios (diferenças) de 0 a 20° , e a letra Z representa desvios superiores a 20° . Neste caso, o resultado do modelamento apresentou um desvio significativo de até $\pm 5^\circ$, indicando que a superfície contínua interpolada representa de forma satisfatória a superfície sintetizada.

A validação da síntese é feita através da análise da superfície interpolada via aproximações da PO mais correntes de borda [47], [48]. A Figura 3.12 ilustra o diagrama de radiação onde são apresentados os diagramas dos planos $\phi = 0^\circ$ e $\phi = 90^\circ$ com as respectivas polarizações principal e cruzada. O ganho máximo obtido foi de 42,5736 dBi em ambos os planos de análise, o que representa uma eficiência de iluminação¹ de 83,197%. O nível de polarização cruzada máximo obtido foi de -40,5176 dBi. A atenuação obtida para os lóbulos secundários foi de -19,793 dB e a largura de meia potência máxima foi de $1,2874^\circ$. Para uma antena ideal com abertura circular uniforme, esses valores são de -17,6 dB e $1,245^\circ$, respectivamente.

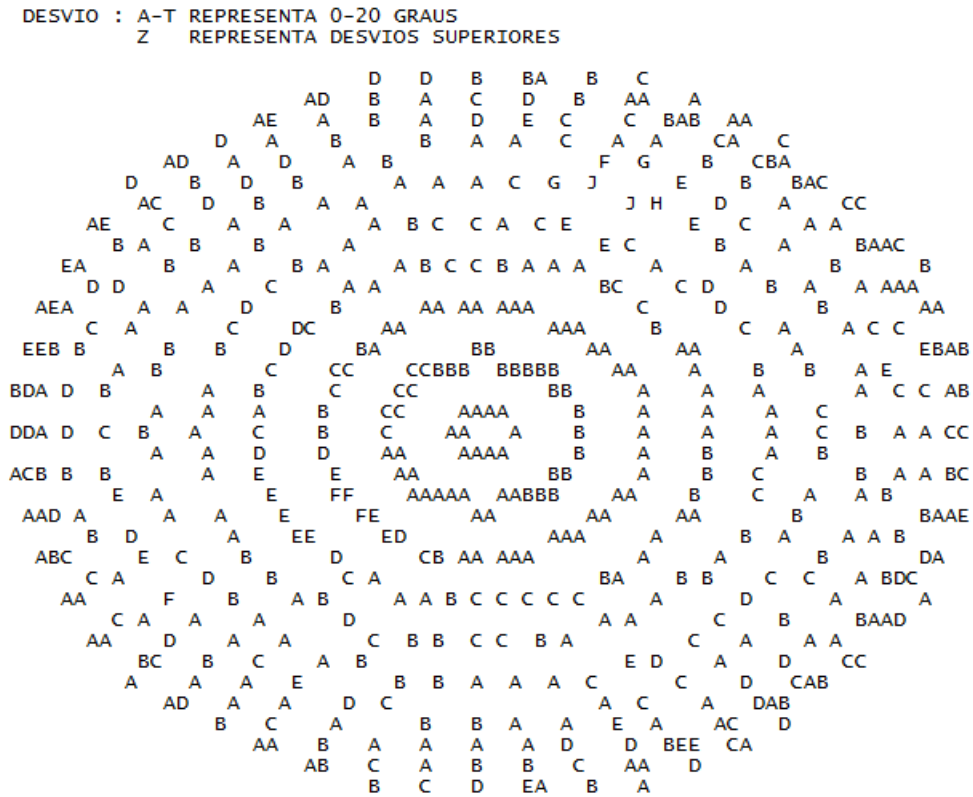


Figura 3.11: Desvio em graus da superfície modelada em relação ao resultado da síntese do caso A.1.

¹Razão entre o ganho máximo obtido pela antena modelada pelo ganho máximo de uma antena ideal com abertura circular uniformemente iluminada.

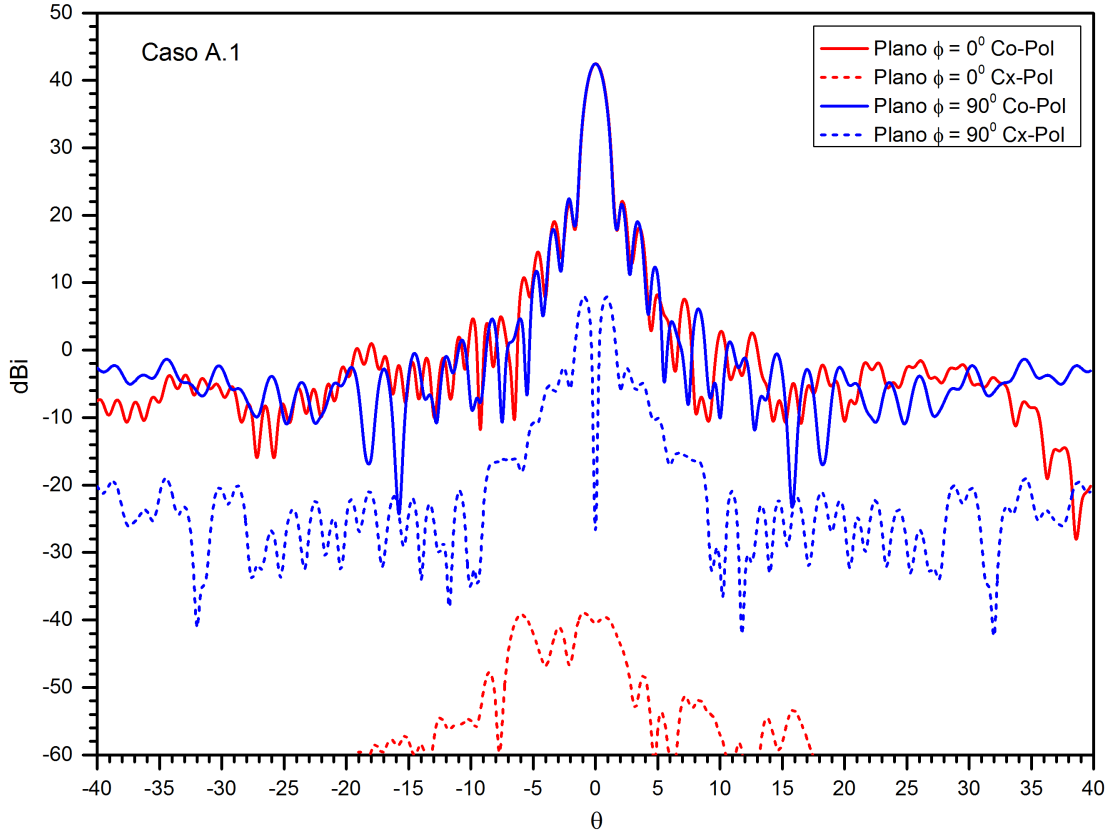


Figura 3.12: Diagrama de radiação da superfície modelada no caso A.1.

Atenuação na borda de -6 dB: Caso A.2

No estudo de caso A.2 foi desejado um campo na abertura Gaussiano com atenuação de borda de $L_G = -6$ dB, que equivale ao expoente $\psi = 1,38155$. O resultado da síntese foi obtido após 6 iterações, sendo que o erro médio dos resíduos associados ao operador $\Gamma[L]$ foi de $|\Gamma|_{mean} = 8,33 \times 10^{-18}$ nos pontos interiores ao contorno e $|\Gamma|_{mean} = 2,26 \times 10^{-13}$ nos pontos do contorno. As dimensões dos raios ao longo dos eixos x e y do subrefletor sintetizado foram de 16,9620 cm e 18,0767 cm, respectivamente. O resultado da síntese é apresentado nas Figuras 3.13 e 3.14, onde estão representadas as direções de reflexão no plano xy e o traçado de raios no plano de simetria.

Dos resultados da síntese é possível perceber que a concentração de raios próximo ao contorno é menor quando comparado ao caso A.1. Este resultado é consequência da diferença entre a iluminação nas bordas do subrefletor e do contorno que foi reduzida de $-12,8843$ dB para $-6,8843$ dB. Além disso, pode-se notar que as distorções relatadas no caso A.1 (distâncias irregulares entre os três últimos anéis e as distorções nas radiais em relação à direção ϕ) não ocorreram nestes estudo de caso, indicando que a representação do subrefletor por superfícies quádricas confocais foi adequada.

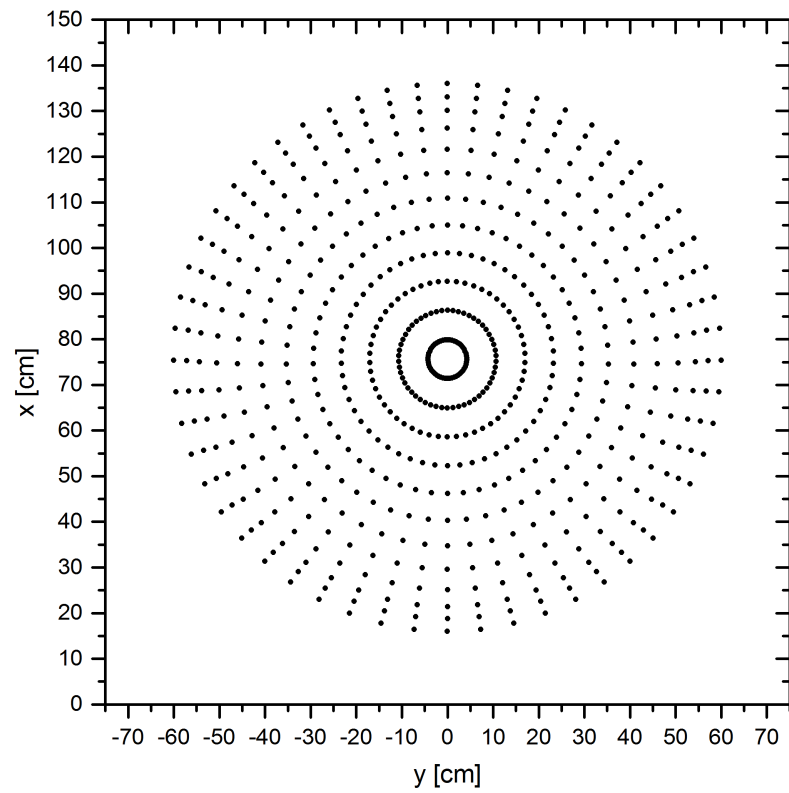


Figura 3.13: Direções de reflexão da superfície sintetizada no plano xy do caso A.2.

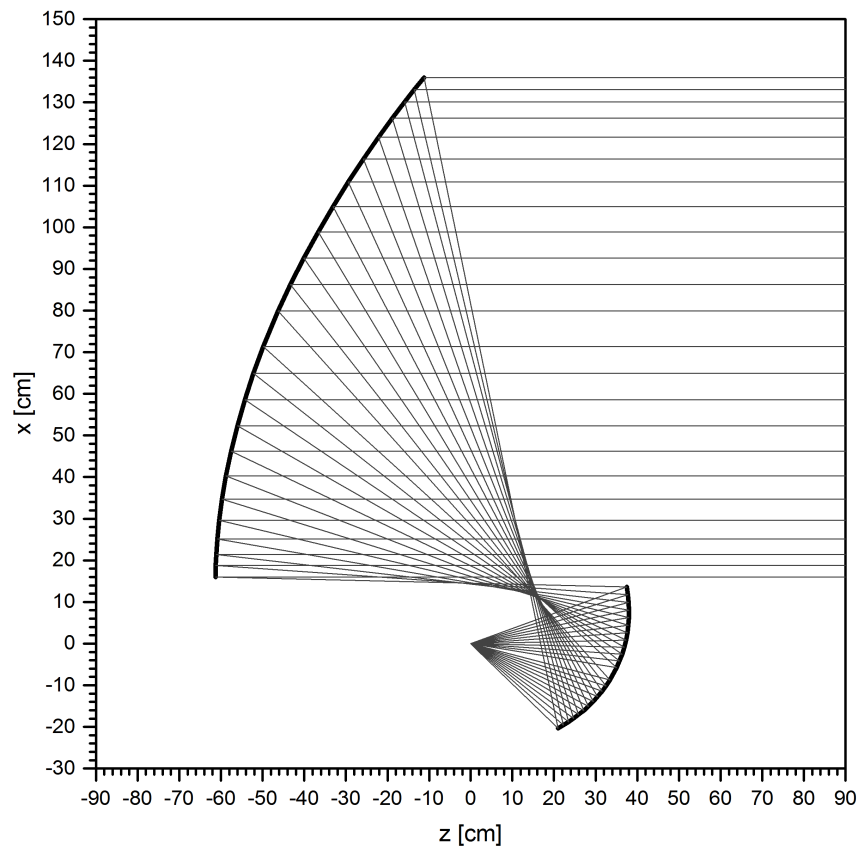


Figura 3.14: Traçado de raios da superfície sintetizada no plano xz do caso A.2.

DESvio : A-T REPRESENTA 0-20 GRAUS
Z REPRESENTA DESVIOS SUPERIORES

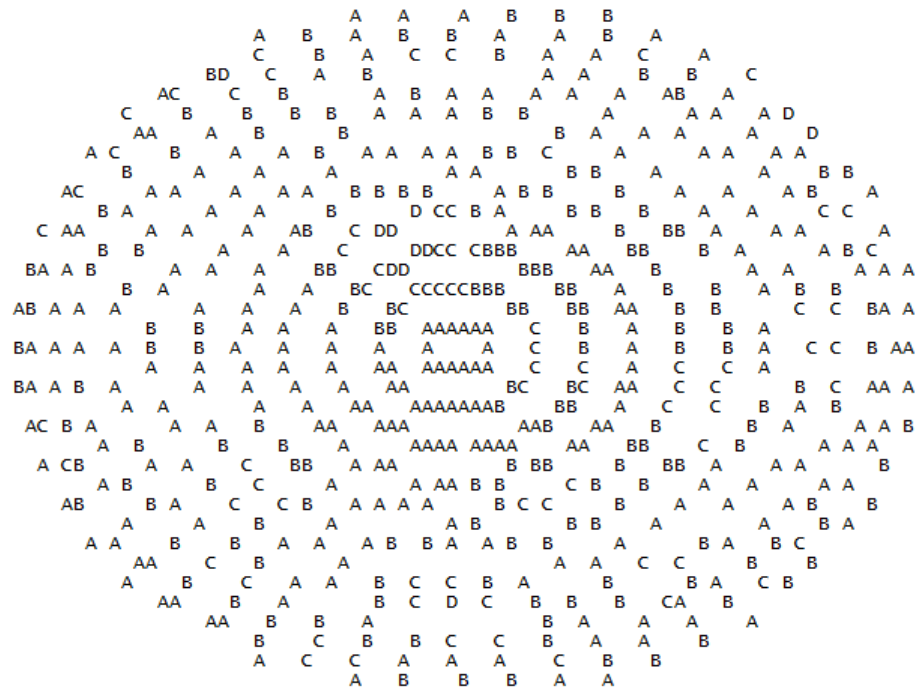


Figura 3.15: Desvio em graus da superfície modelada em relação ao resultado da síntese do caso A.2.

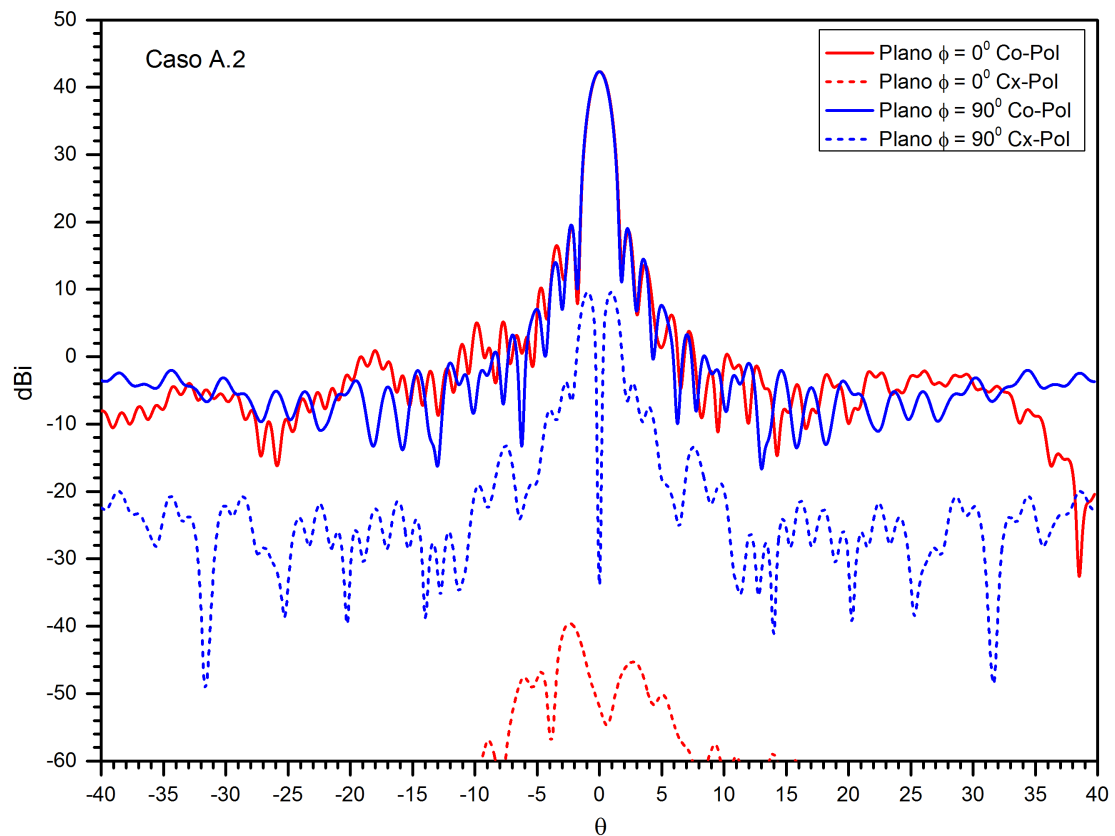


Figura 3.16: Diagrama de radiação da superfície modelada no caso A.2.

Uma vez que os resultados da síntese foram satisfatórios, foi realizado o modelamento das superfícies sintetizadas por pseudo-*splines* quínticas que desviou em até $\pm 3^\circ$ em relação aos pontos sintetizados para a superfície do refletor principal. Este resultado está ilustrado na Figura 3.15. O diagrama de radiação dado pela Óptica Física do sistema duplo-refletor modelado está ilustrado na Figura 3.16. O ganho máximo obtido foi de 42,415 dBi e a atenuação dos lóbulos secundários foi de $-22,1798$ dB. O nível de polarização cruzada em $\theta = 0^\circ$ foi de $-51,8285$ dBi e a largura de meia potência foi de $1,3606^\circ$ no plano $\phi = 0^\circ$ e de $1,3542^\circ$ no plano $\phi = 90^\circ$. Conforme pode ser observado, os resultados do análise da PO foram os esperados, visto que à medida que o expoente ψ da distribuição Gaussiana da densidade de potência na abertura aumenta, deve ser observado uma diminuição no valor de pico do lóbulo principal, o aumento dos níveis dos lóbulos laterais e um valor maior para a largura de meia potência.

Atenuação na borda de -12 dB: Caso A.3

No estudo de caso A.3 foi solicitado um campo na abertura Gaussiano com atenuação de borda de $L_G = -12$ dB, que equivale ao expoente $\psi = 2,7631$. O resultado da síntese foi obtido após 5 iterações, sendo que o erro médio dos resíduos associados ao operador $\Gamma[L]$ foi de $|\Gamma|_{mean} = 3,54 \times 10^{-16}$ nos pontos interiores ao contorno e $|\Gamma|_{mean} = 1,22 \times 10^{-11}$ nos pontos do contorno. As dimensões dos raios ao longo dos eixos x e y do subrefletor sintetizado foram de 17,0756 cm e 18,2024 cm, respectivamente. O resultado da síntese é apresentado na Figura 3.17 com as direções dos raios refletidos no plano da abertura e, também, na Figura 3.18 com o traçado de raios no plano de simetria.

Dos resultados da síntese, pode ser observado que não houve deslocamento dos raios para a borda do contorno especificado. Diferentemente dos casos A.1 e A.2, a distância entre os anéis na Figura 3.17 é aproximadamente constante, assim como no traçado de raios das direções de incidência e reflexão na Figura 3.18. Obviamente, este comportamento está diretamente associado à diferença entre a iluminação nas bordas do subrefletor e do contorno da abertura especificada, que no presente caso é de apenas 0,8843 dB.

Uma vez que os resultados da síntese foram satisfatórios, devido à ausência de distorções, os mesmos foram interpolados por pseudo-*splines* quínticas. A diferença entre a superfície interpolada e aquela sintetizada para o refletor principal foi de até $\pm 3^\circ$ conforme pode ser visto na Figura 3.19. Em seguida, foi obtido o diagrama de radiação dado pela PO para o sistema duplo-refletor modelado e está ilustrado na Figura 3.20. O ganho máximo obtido foi de 42,0738 dBi e a atenuação dos lóbulos secundários foi de $-24,9214$ dB. O nível de polarização cruzada em $\theta = 0^\circ$ foi de $-34,0150$ dBi e a largura de meia potência máxima foi de $1,4378^\circ$ no plano $\phi = 0^\circ$ e de $1,4545^\circ$ no plano $\phi = 90^\circ$.

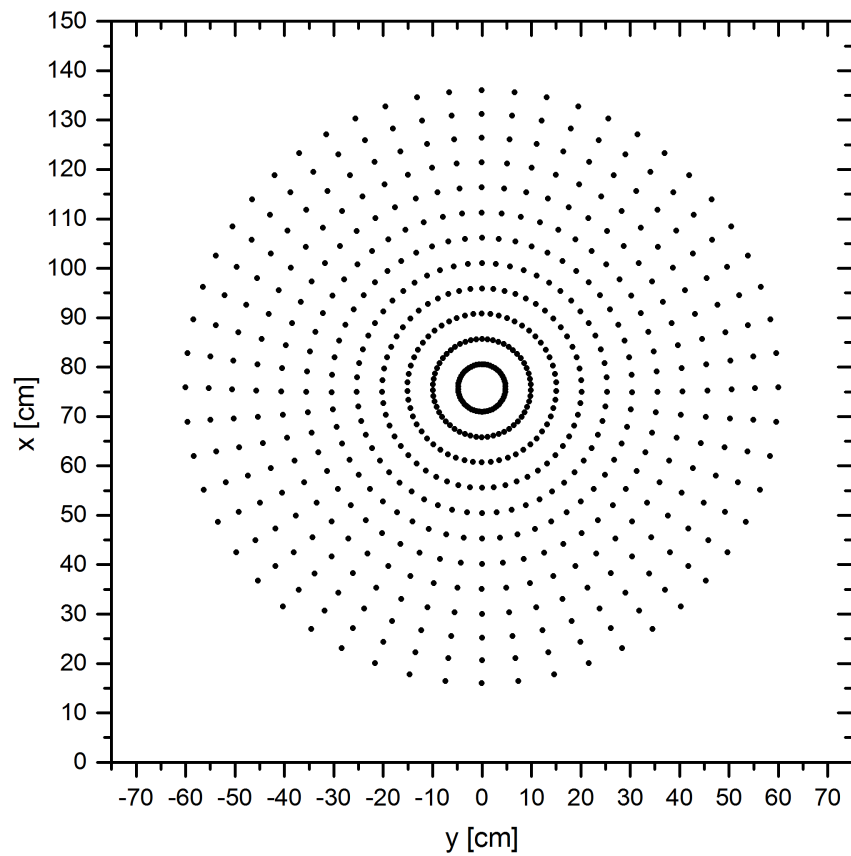


Figura 3.17: Direções de reflexão da superfície sintetizada no plano xy do caso A.3.

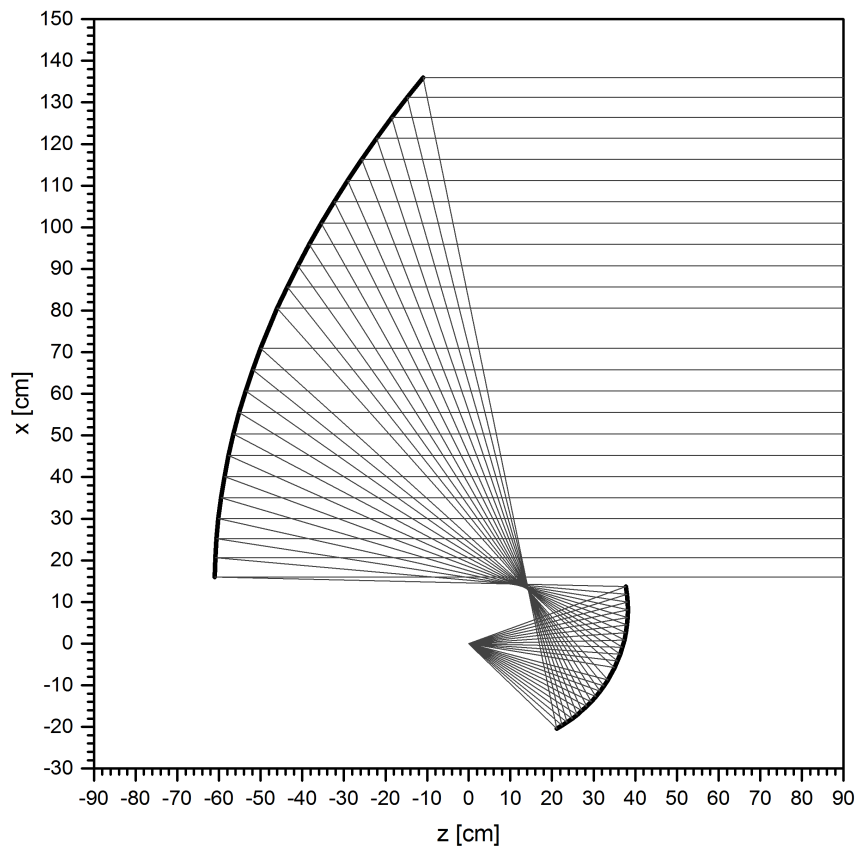


Figura 3.18: Traçado de raios da superfície sintetizada no plano xz do caso A.3.

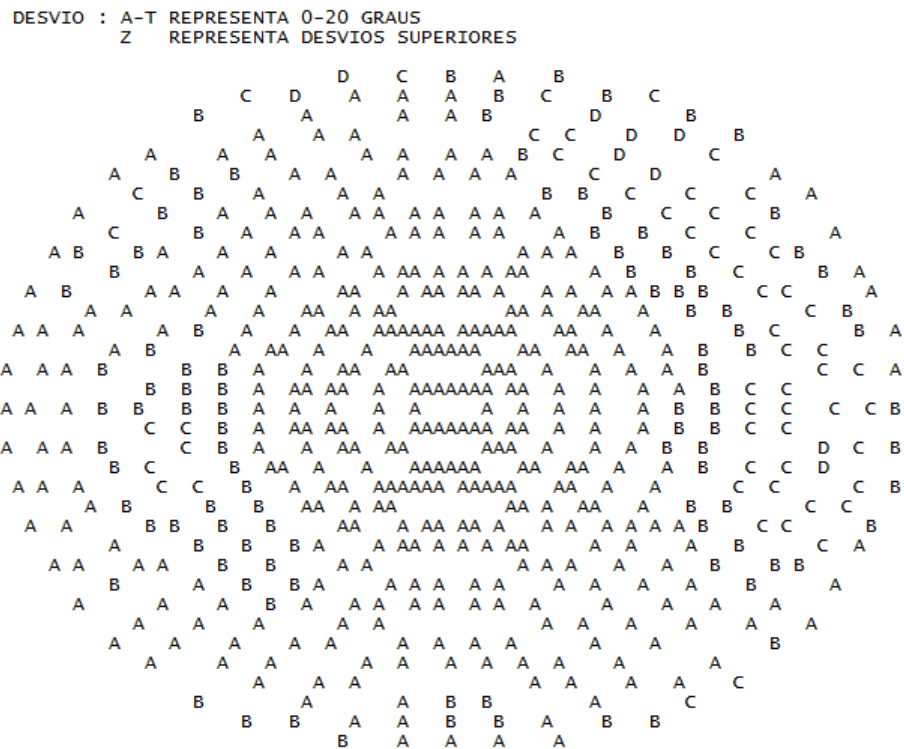


Figura 3.19: Desvio em graus da superfície modelada em relação ao resultado da síntese do caso A.3.

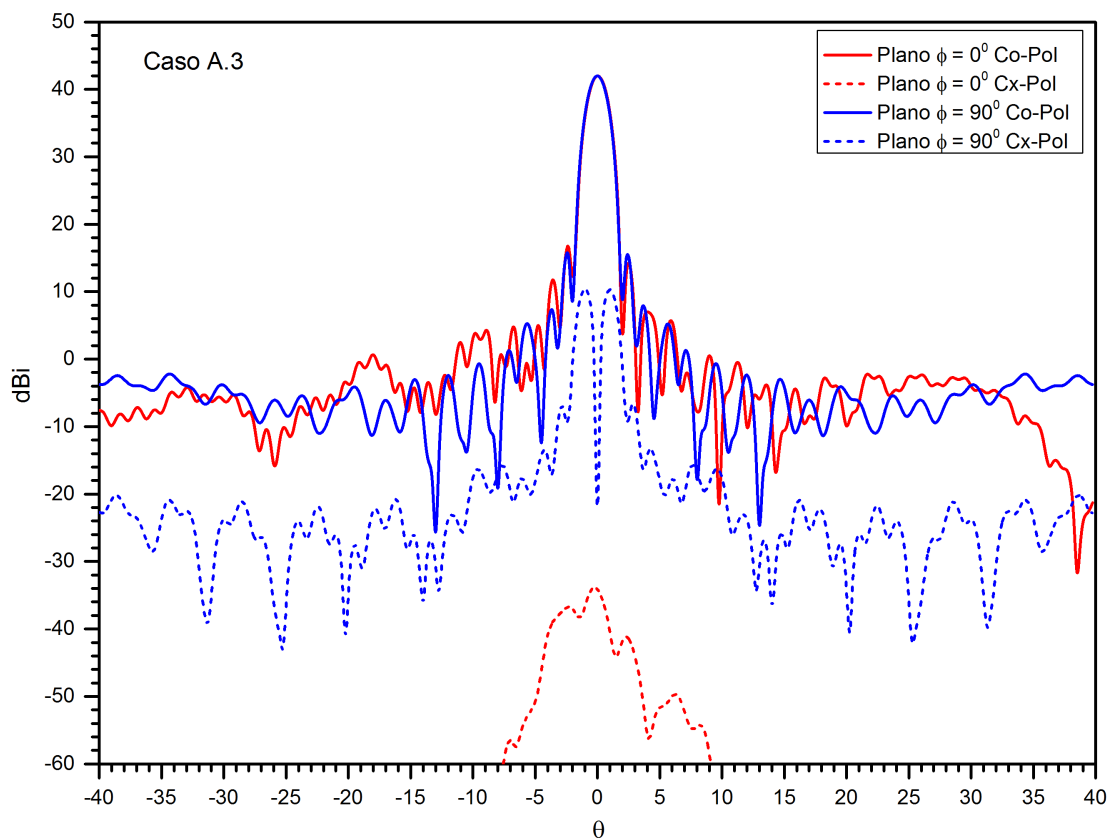


Figura 3.20: Diagrama de radiação da superfície modelada no caso A.3.

Atenuação na borda de 0 dB: Caso A.4

Analisando em conjunto os estudos de caso A.1, A.2 e A.3, pode-se observar que o caso A.1 apresentou a maior diretividade na direção $\theta = 0^\circ$, visto que a síntese impôs abertura uniforme em amplitude e fase. À medida que a distribuição de densidade de potência na abertura deixa de ter amplitude uniforme e passa a ter uma distribuição Gaussiana com atenuação de borda no contorno da abertura, a máxima diretividade diminuiu, a atenuação dos lóbulos laterais aumentou, bem como o nível de polarização cruzada e a largura de meia potência. Portanto, os resultados da análise PO validaram os resultados esperados da síntese da GO para o sistema duplo-refletor.

Para avaliar melhor o algoritmo de síntese, o estudo de caso A.1 é reformulado no estudo de caso A.4 com o objetivo de se obter uma eficiência de iluminação maior na abertura. Para isso, o ângulo de *offset* foi definido de acordo com a condição de Mizugutch [26] resultando em $\theta_0 = -21^\circ$. Além disso, a distância r_0 entre a origem O do sistema de coordenadas e o centro do subrefletor foi dobrada para 70 cm. A superfície quádrlica confocal adotada como solução inicial neste caso é definida pelos seguintes parâmetros: $a^{(0)} = -0,266003$ m, $b^{(0)} = 0,129063$, $c^{(0)} = 0,0$, $d^{(0)} = 0,306607$.

O resultado da síntese foi obtido após 6 iterações, sendo que o erro médio dos resíduos associados ao operador $\Gamma[L]$ foi de $|\Gamma|_{mean} = 6,38 \times 10^{-13}$ nos pontos interiores ao contorno e $|\Gamma|_{mean} = 2,79 \times 10^{-11}$ nos pontos do contorno. A dimensão do raio do subrefletor sintetizado foi de 30,2069 cm ao longo do eixo x enquanto que a dimensão do raio ao longo do eixo y foi de 35,2436 cm. Na Figura 3.21 estão ilustradas as direções dos raios refletidos pela superfície sintetizada no plano da abertura e a Figura 3.22 mostra o traçado de raios no plano de simetria. O desvio do resultado da interpolação por pseudo-splines quínticas está ilustrado na Figura 3.23 para o refletor principal e o diagrama de radiação da PO pode ser observado na Figura 3.24.

Comparando os resultados da síntese dos casos A.1 e A.4 observa-se que eles apresentam um comportamento bastante semelhante em relação à concentração dos raios refletidos próximos a borda do contorno, visto que este comportamento é consequência do princípio da Conservação da Energia implícito na equação de Monge-Ampère para compensar a baixa iluminação do alimentador nas bordas do subrefletor. Além disso, pode-se notar que a distorção devido a distância entre o antepenúltimo anel e o penúltimo ser menor que aquela entre o penúltimo e o último persiste, no entanto, a distorção que ocorreu nas radiais em relação à direção ϕ no caso A.1 foi corrigida. Esta última observação sugere que no caso A.4, a superfície do subrefletor foi melhor representada pelas quádrlicas focais do que no caso A.1.

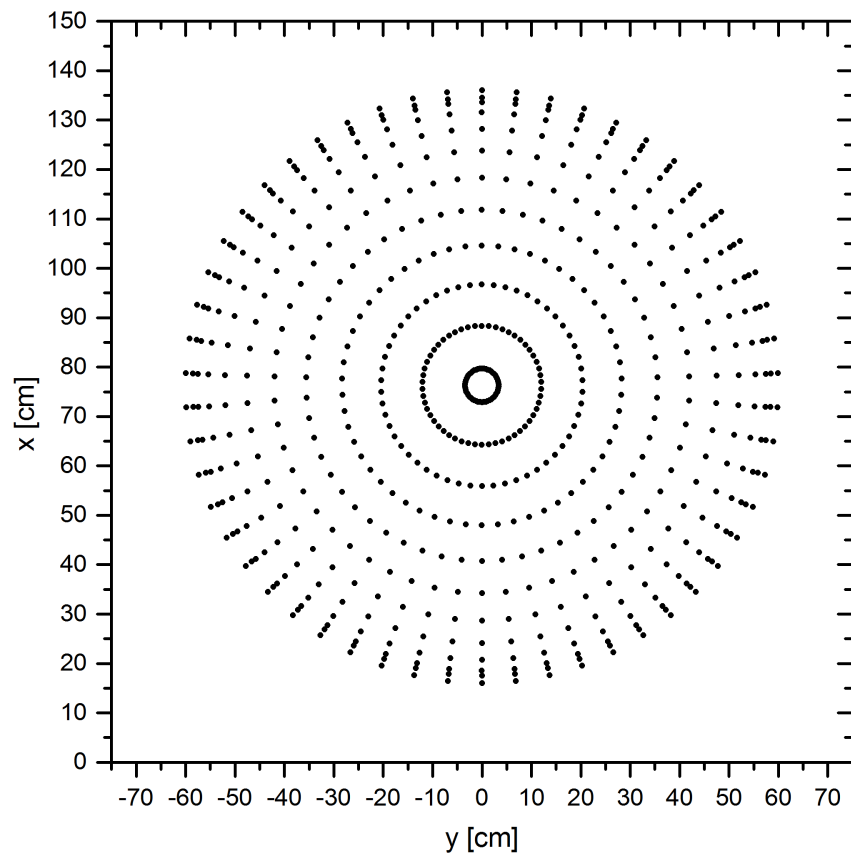


Figura 3.21: Direções de reflexão da superfície sintetizada no plano xy do caso A.4.

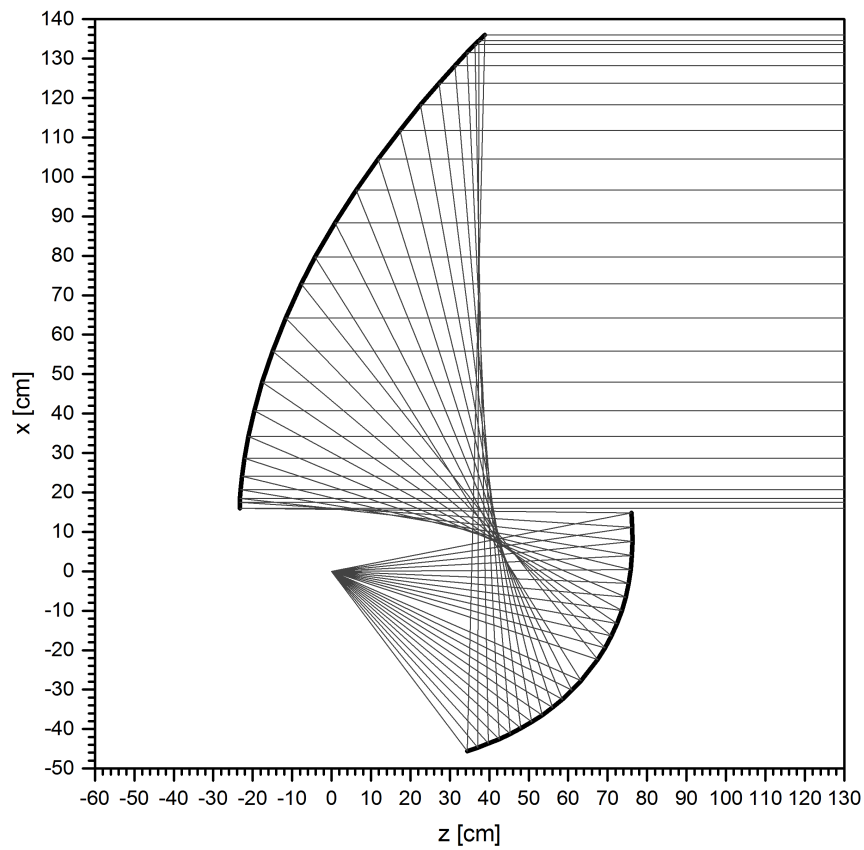


Figura 3.22: Traçado de raios da superfície sintetizada no plano xz do caso A.4.

DESVIO : A-T REPRESENTA 0-20 GRAUS
Z REPRESENTA DESVIOS SUPERIORES

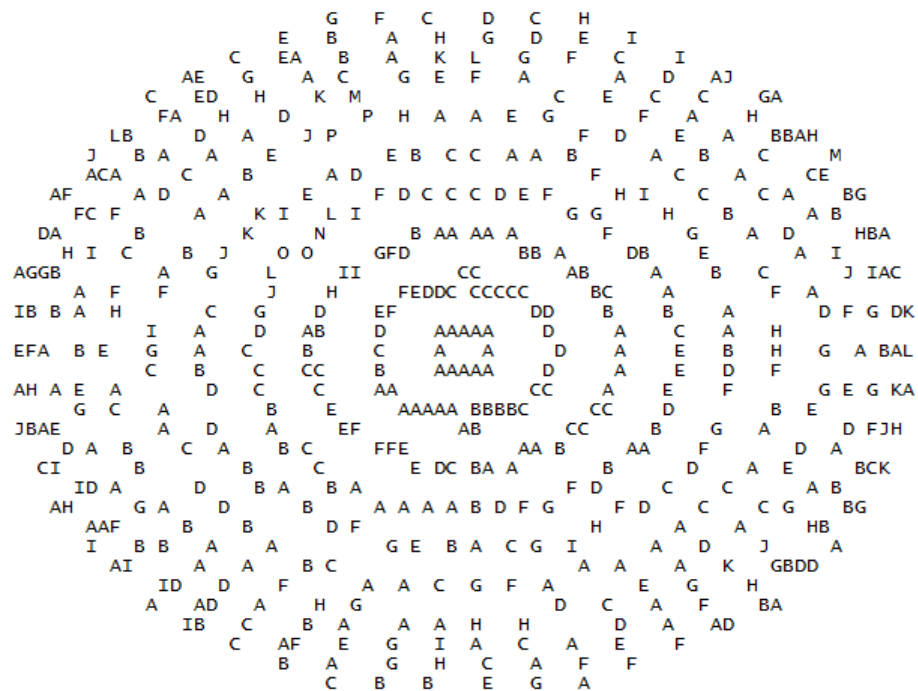


Figura 3.23: Desvio em graus da superfície modelada em relação ao resultado da síntese do caso A.4.

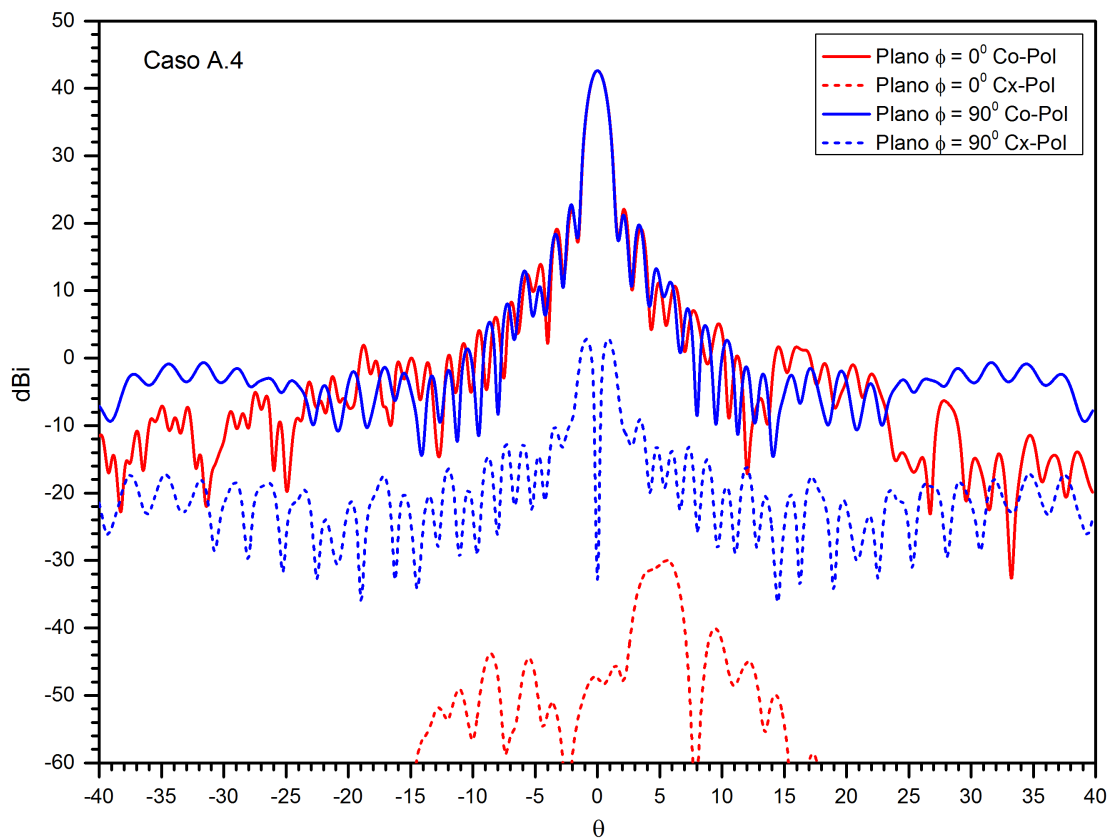


Figura 3.24: Diagrama de radiação da superfície modelada no caso A.4.

Como consequência do aumento das dimensões do subrefletor em relação ao estudo de caso A.1, o ganho máximo aumentou para 42,7406 dBi, o que representa uma eficiência de iluminação de 86,459%. Observe que houve um aumento de 3,262% de eficiência em relação ao estudo de caso A.1. Além disso, a atenuação dos lóbulos secundários apresentou uma pequena diminuição em relação ao caso A.1 e foi de $-19,5215$ dB. Já o nível de polarização cruzada em $\theta = 0^\circ$ foi de $-47,3354$ dBi o que representa uma redução 6,8178 dB em relação ao caso A.1. A partir dos resultados apresentados, pode ser visto que o aumento das dimensões do subrefletor reduz as perdas por transbordamento, permitindo que a iluminação do refletor principal seja mais eficiente e consequentemente, a abertura seja mais bem iluminada.

3.8.2 Projeto de Sistemas Duplo-Refletores com Abertura Elíptico

Para avaliar o algoritmo de síntese em casos onde a convergência é mais difícil, é inserido um novo grau de dificuldade modificando-se o contorno da abertura. Nesta seção uma antena duplo refletora é sintetizada para gerar um campo na abertura Gaussiano com contorno elíptico ($\sigma = 1$). Foi adotada uma abertura com o raio menor ao longo do eixo x igual a $r_{ax} = 50\text{cm}$ e o raio maior, na direção do eixo y , igual a $r_{ay} = 72\text{cm}$. O centro da abertura é igual a $\omega_c = 70\text{cm}$ e está fixado sobre o eixo x . Para discretizar o subrefletor foi escolhida uma grade polar não-uniforme no plano complexo $1/\eta'$, com $\alpha = 0,7$ para o caso B.1 e $\alpha = 0,65$ nos casos B.2 e B.3, definida com 10 anéis ($J = 10$) e 64 radiais ($K = 64$), onde cada ponto da grade está associado à direção de um raio proveniente do alimentador, conforme ilustrado na Figura 3.25. O ângulo de *offset* foi definido em $\theta_0 = -12^\circ$ e a distância r_0 entre a origem O do sistema de coordenadas e o centro do subrefletor é de 35 cm.

Utilizando os parâmetros apresentados e a formulação da Seção 3.4, determinou-se a superfície quádrlica adotada como solução inicial para os casos onde é exigida uma abertura com contorno elíptico, sendo ela definida pelos seguintes parâmetros: $a^{(0)} = -0,157641$ m, $b^{(0)} = 0,228153$, $c^{(0)} = 0,0$, $d^{(0)} = 0,149907$. A análise das direções dos raios refletidos pela solução inicial pode ser feita observando as direções de reflexão no plano xy da Figura 3.26 e o traçado de raios no plano $\phi = 0^\circ$ na Figura 3.27. É importante observar que nos estudos de casos desta subseção o algoritmo iterativo de síntese parte de uma solução inicial em um contorno circular para uma solução final com contorno elíptico. Para isso, a convergência do procedimento numérico somente foi obtida quando foi adotada uma grade polar não-unifome em θ , o que revela uma dificuldade de aproximar a superfície sintetizada por quádrlicas confocais com eixos deslocados.

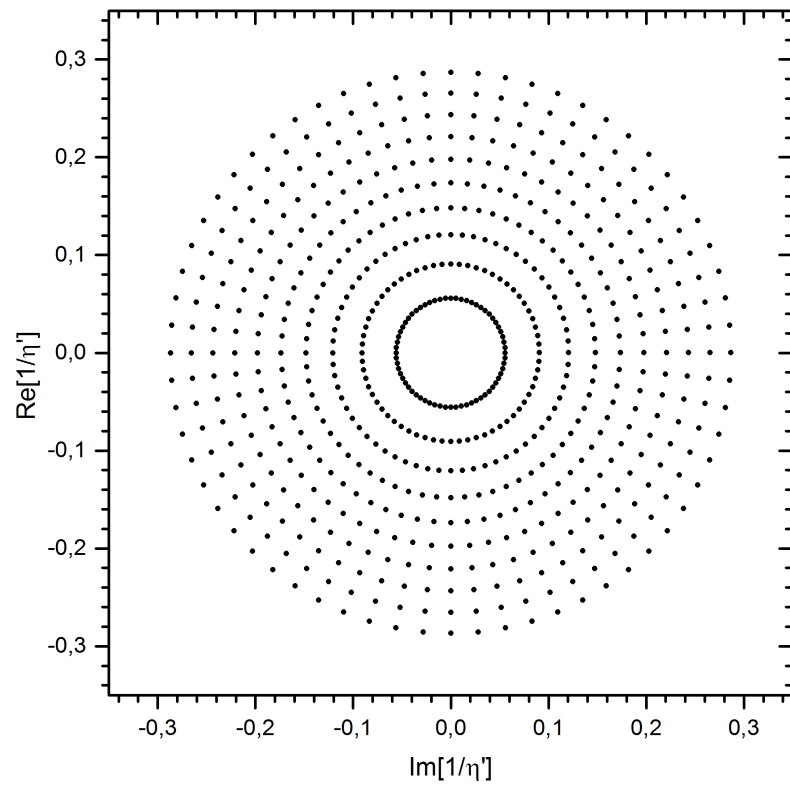


Figura 3.25: Direções de incidência da solução inicial no plano $1/\eta'$ dos casos B.1.

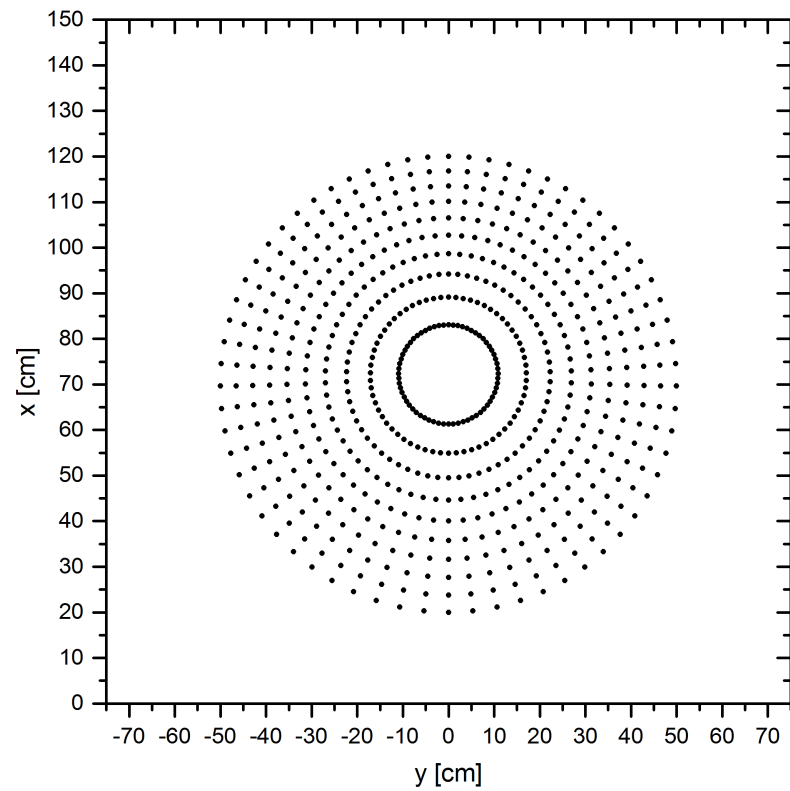


Figura 3.26: Direções de reflexão da solução inicial no plano xy dos casos B.1.

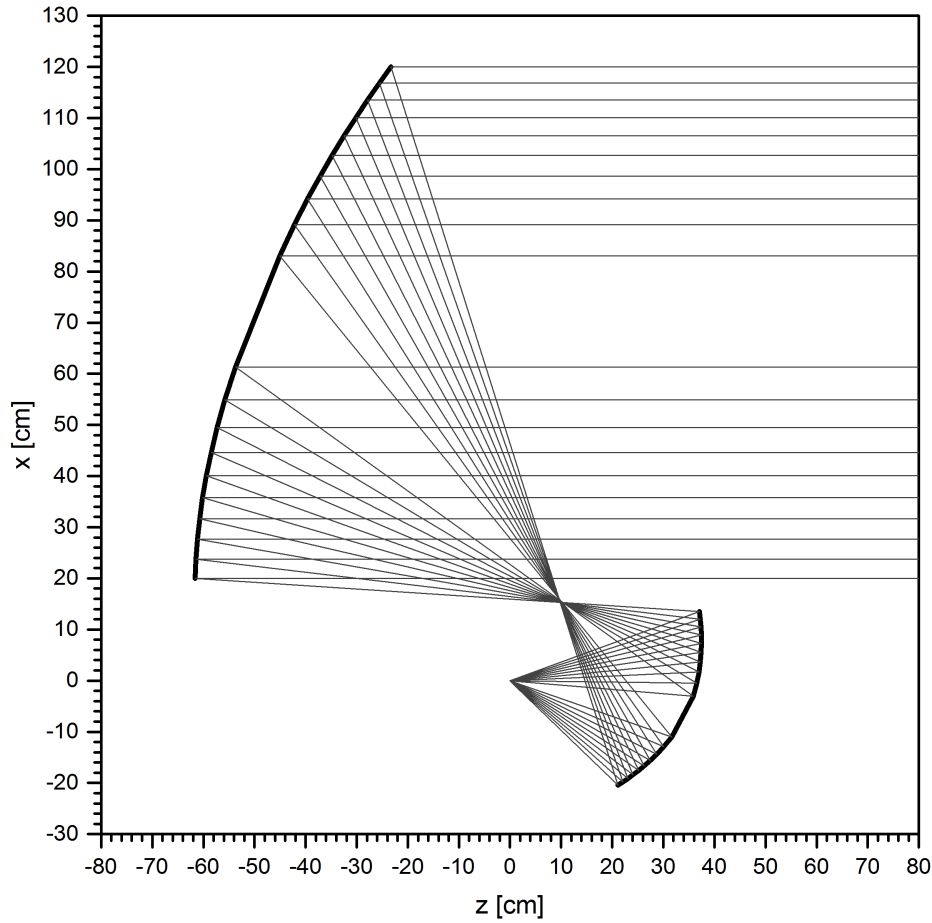


Figura 3.27: Traçado de raios da solução inicial no plano xz dos casos B.1.

Atenuação na borda de 0 dB: Caso B.1

No estudo de caso B.1 foi adotada como função desejada a constante G_0 correspondendo a uma abertura elíptica uniforme. Assim, $L_G = 0$ dB e $\psi = 0$. O algoritmo de síntese atendeu ao critério de convergência após 10 iterações, sendo que o erro médio dos resíduos associados ao operador $\Gamma[L]$ foi de $|\Gamma|_{mean} = 3,88 \times 10^{-14}$ nos pontos interiores ao contorno e $|\Gamma|_{mean} = 5,23 \times 10^{-11}$ nos pontos do contorno. As dimensões dos raios ao longo dos eixos x e y do subrefletor sintetizado foram de 17,0842 cm e 17,5233 cm, respectivamente. O resultado da síntese é apresentado nas Figuras 3.28 e 3.29 e ilustram as direções dos raios refletidos pelas superfícies sintetizadas no plano de abertura xy e o traçado de raios no plano de simetria, respectivamente.

Semelhante ao estudo de caso A.1, há uma maior concentração de raios refletidos nas bordas do contorno da abertura resultado do princípio da Conservação da Energia implícito na equação de Monge-Ampère que está compensando a baixa iluminação do alimentador nas bordas do subrefletor, já que se busca uma abertura uniforme ($L_G = 0$ dB). Também pode-se notar que a distância entre os três últimos anéis não preserva a distância esperada entre eles, em particular ao longo do eixo menor da elipse. Além disso, há fortes

distorções nas radiais em relação à direção ϕ . Estas distorções são resultado da dificuldade imposta nesta síntese, visto que deseja-se mapear um conjunto de círculos no plano $1/\eta'$ em um conjunto de elipses com centros deslocados no plano xy . Embora o resultado da síntese tenha apresentado fortes distorções, os pontos das superfícies sintetizadas são modelados por pseudo-splines quínticas e então analisados pela PO mais correntes de borda.

Conforme ilustrado na Figura 3.30, o modelamento por pseudo-*splines* quínticas desviou em até $\pm 13^\circ$ em relação aos pontos gerados pela síntese, indicando que a superfície contínua interpolada não representa de forma satisfatória a superfície sintetizada. A Figura 3.31 apresenta o diagrama de radiação dado pela PO a partir das superfícies modeladas. O ganho máximo obtido foi de 42,3708 dBi em $\theta = 0,25^\circ$ no plano $\phi = 0$, e 42,2458 dBi em $\theta = 0^\circ$ no plano $\phi = 90^\circ$, o que representa um fenômeno denominado *beam squint*, ou seja, o desvio do lóbulo principal em relação à direção $\theta = 0^\circ$. Este resultado está associado à variação de fase na abertura e não valida o resultado da síntese, visto que foi especificado fase uniforme na abertura. Este estudo de caso ilustra um exemplo em que o resultado da síntese não é satisfatório e, conseqüentemente, não é validado pela aproximação da PO.

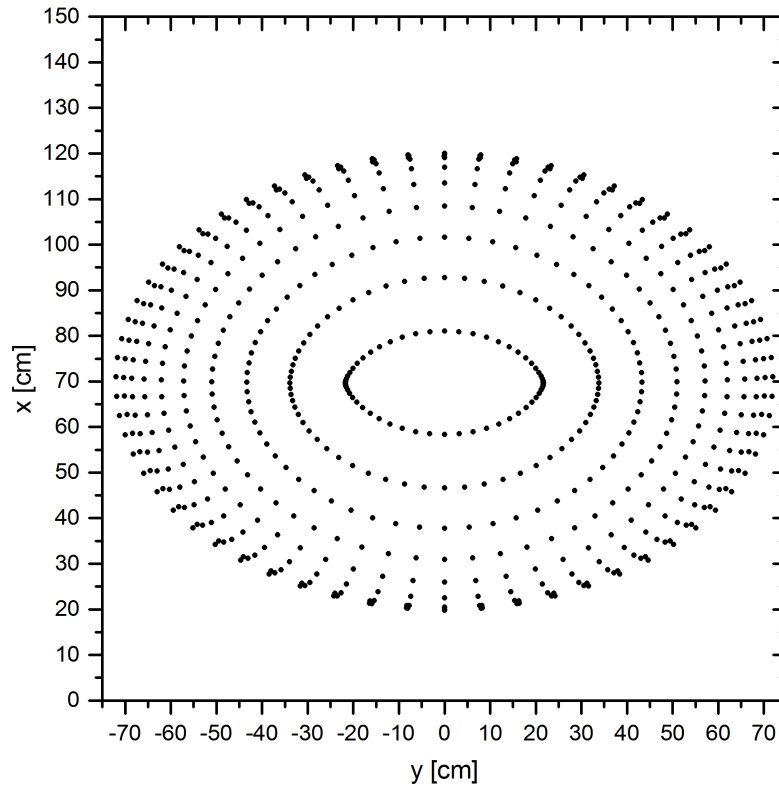


Figura 3.28: Direções de reflexão da superfície sintetizada no plano xy do caso B.1.

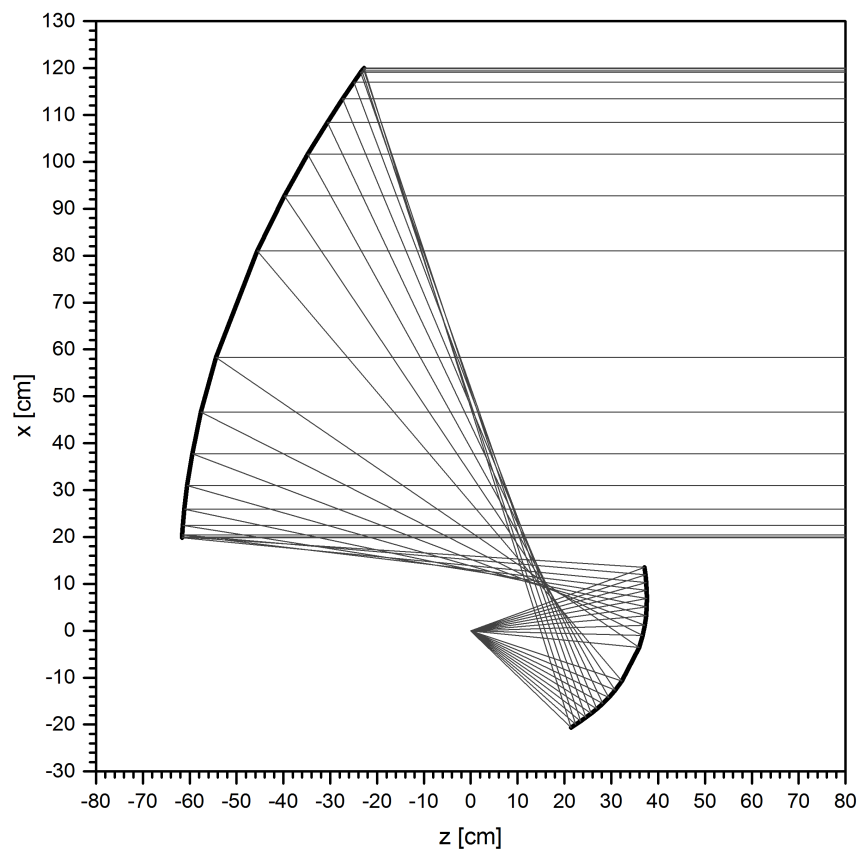


Figura 3.29: Traçado de raios da superfície sintetizada no plano xz do caso B.1.

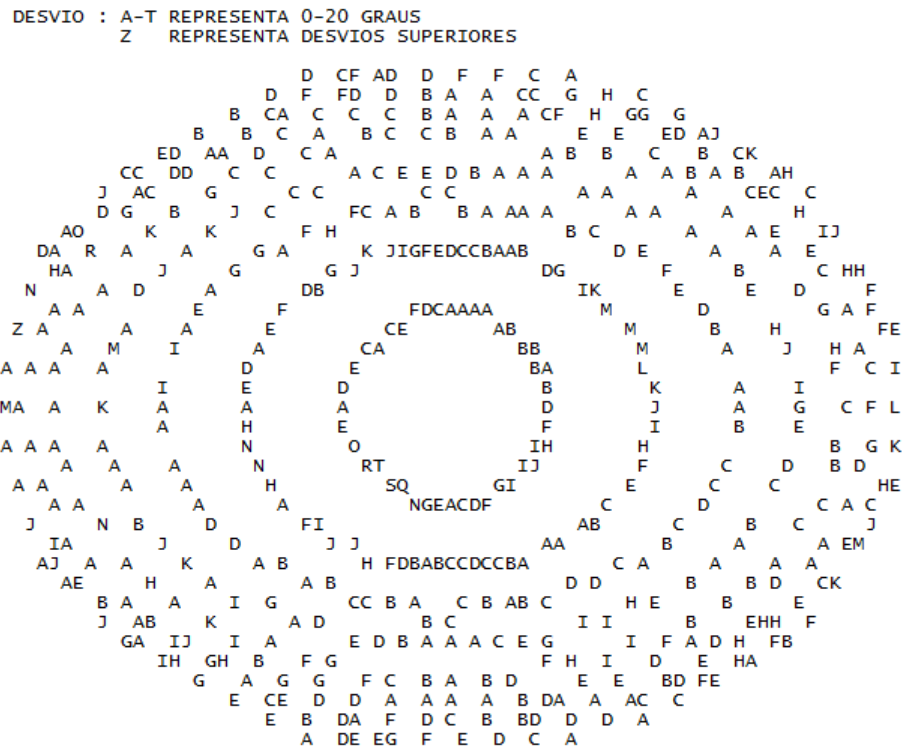


Figura 3.30: Desvio em graus da superfície modelada em relação ao resultado da síntese do caso B.1.

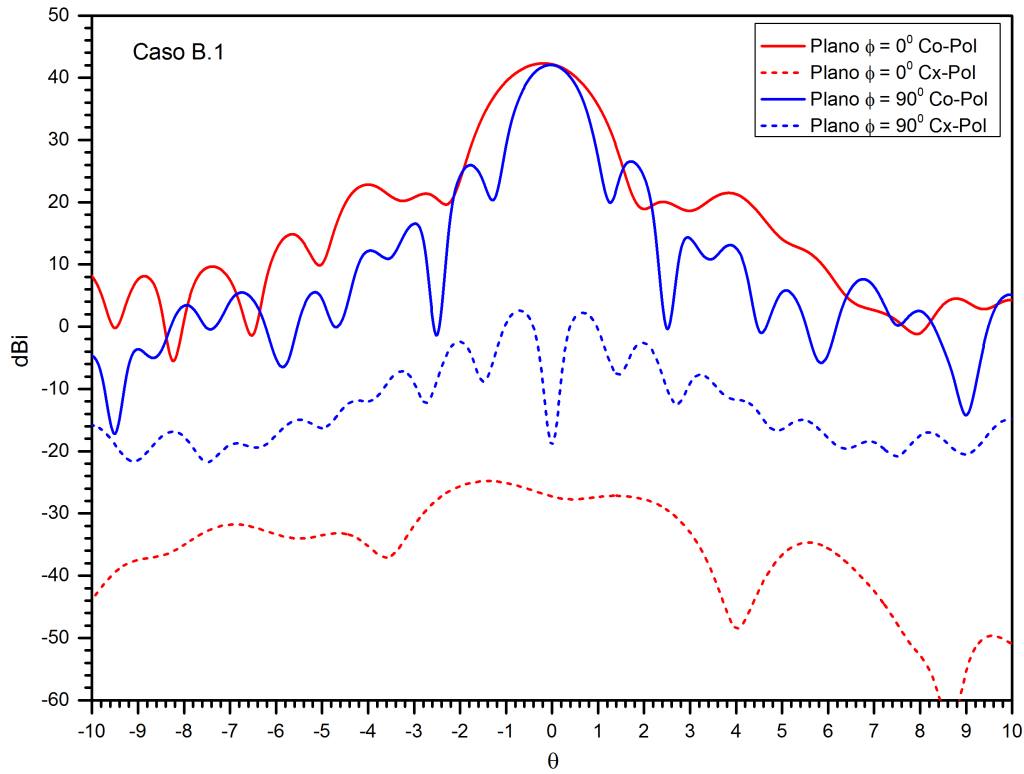


Figura 3.31: Diagrama de radiação da superfície modelada no caso B.1.

Atenuação na borda de -6 dB: Caso B.2

No estudo de caso B.2, foi adotado como objetivo um campo Gaussiano na abertura com atenuação de borda de $L_G = -6$ dB, que equivale ao expoente $\psi = 1,38155$. O resultado da síntese foi obtido após 10 iterações, sendo que o erro médio dos resíduos associados ao operador $\Gamma[L]$ foi de $|\Gamma|_{mean} = 1,17 \times 10^{-17}$ nos pontos interiores ao contorno e $|\Gamma|_{mean} = 2,61 \times 10^{-13}$ nos pontos do contorno. As dimensões dos raios ao longo dos eixos x e y do subrefletor sintetizado foram de 17,2127 cm e 17,6555 cm, respectivamente. A Figura 3.32 ilustra as direções dos raios refletidos pelas superfícies sintetizadas no plano da abertura e a Figura 3.33 mostra o traçado de raios no plano de simetria.

Como a iluminação na borda do subrefletor e do contorno desejado foi reduzida de $-12,8843$ dB para $-6,8843$ dB, a concentração de raios no contorno é menor quando comparada ao caso B.1. Consequentemente, as distorções relatadas anteriormente ficam menos evidentes, indicando que as quádricas confocais com eixos deslocados representam mais adequadamente o subrefletor. A interpolação por pseudo-*splines* quínticas desviou em até $\pm 2^\circ$ em relação aos pontos gerados pela síntese, indicando que a superfície contínua interpolada representa de forma satisfatória a superfície sintetizada do refletor principal, conforme pode ser observado na Figura 3.34. A Figura 3.35 mostra o diagrama de radiação da PO, onde o ganho máximo obtido foi de $42,3573$ dBi. A atenuação dos lóbulos secundários foi de $-16,8544$ dB e o nível de polarização cruzada em $\theta = 0^\circ$ foi de $-52,8057$ dBi.

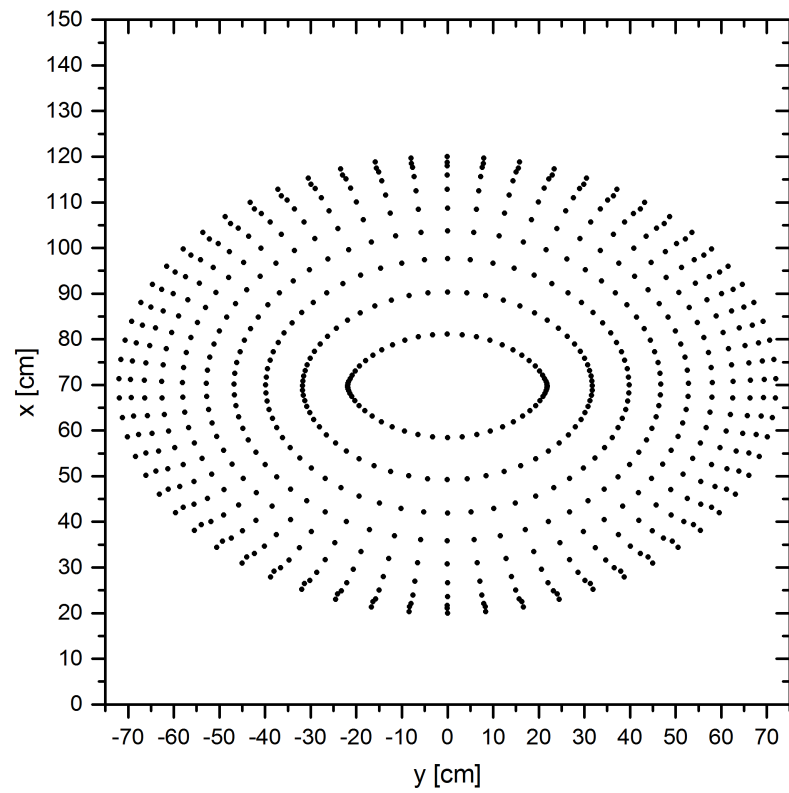


Figura 3.32: Direções de reflexão da superfície sintetizada no plano xy do caso B.2.

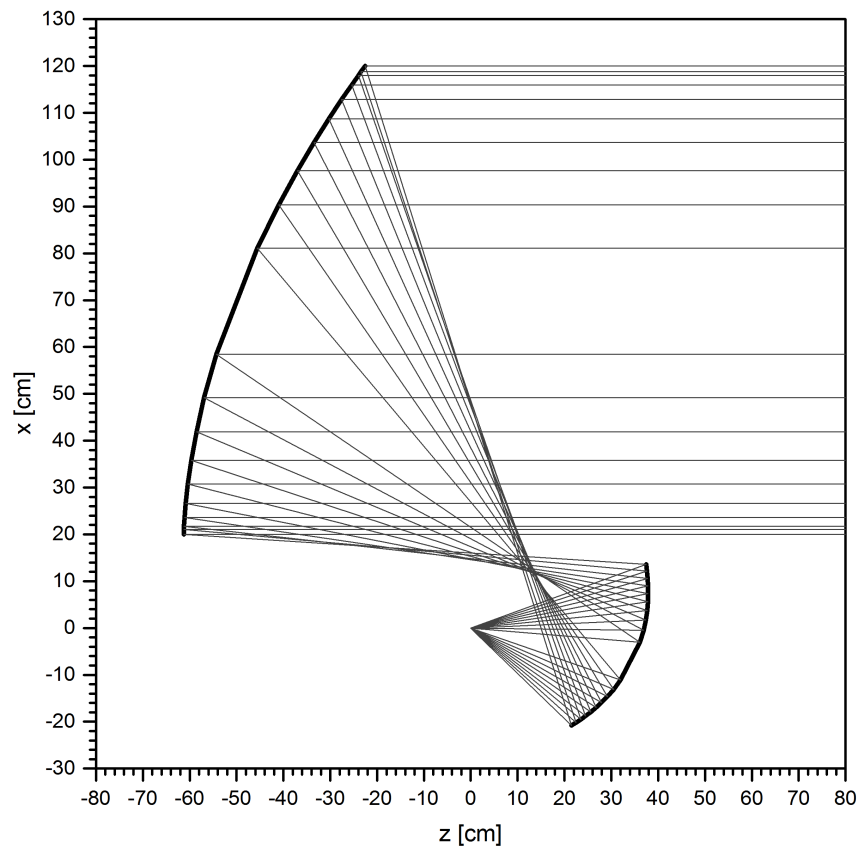


Figura 3.33: Traçado de raios da superfície sintetizada no plano xz do caso B.2.

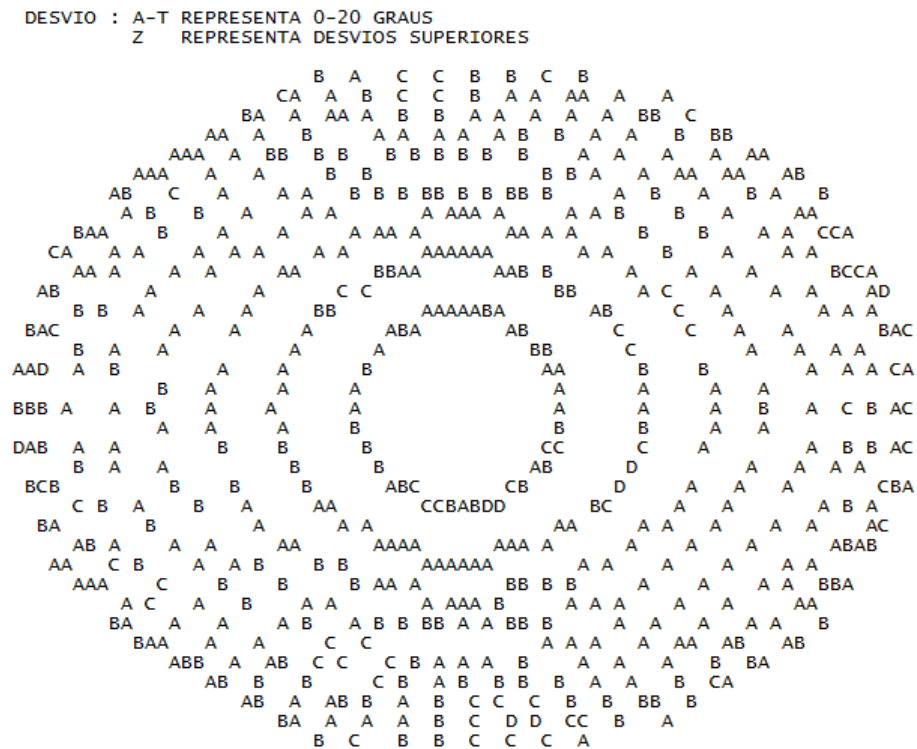


Figura 3.34: Desvio em graus da superfície modelada em relação ao resultado da síntese do caso B.2.

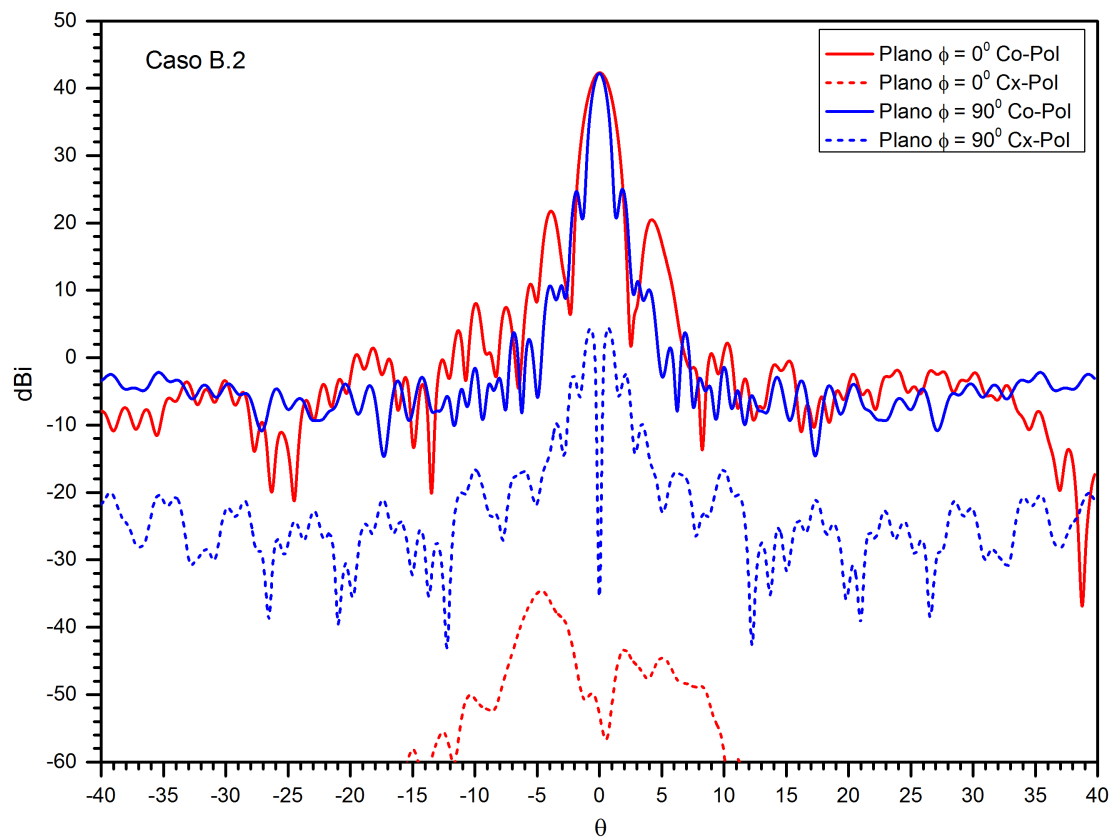


Figura 3.35: Diagrama de radiação da superfície modelada no caso B.2.

Conforme esperado, a largura de meia potência é maior no plano $\phi = 0^\circ$, que corresponde à irradiação proveniente do plano que contém o raio menor da abertura elíptica, sendo de $1,6886^\circ$. Já no plano $\phi = 90^\circ$, o ângulo de meia potência foi menor e igual a $1,0700^\circ$, que correspondente à irradiação do plano que contém o raio maior da abertura elíptica.

Atenuação na borda de -12 dB: Caso B.3

No estudo de caso B.3, foi desejado uma densidade de potência Gaussiana na abertura com atenuação de borda de $L_G = -12$ dB, que equivale ao expoente $\psi = 2,7631$. O resultado da síntese foi obtido após 10 iterações, sendo que o erro médio dos resíduos associados ao operador $\Gamma[L]$ foi de $|\Gamma|_{mean} = 2,19 \times 10^{-16}$ nos pontos interiores ao contorno e $|\Gamma|_{mean} = 4,25 \times 10^{-13}$ nos pontos do contorno. As dimensões dos raios ao longo dos eixos x e y do subrefletor sintetizado foram de $17,3418$ cm e $17,8007$ cm, respectivamente. As direções dos raios refletidos pelas superfícies sintetizadas no plano da abertura e o traçado de raios no plano de simetria estão ilustrados nas Figuras 3.36 e 3.37.

Semelhante ao estudo de caso A.3, a distância entre os anéis na Figura 3.36 é aproximadamente constante e a distribuição dos raios refletidos para a abertura não é concentrada próximo ao contorno, resultado da diferença entre a iluminação especificada nas bordas do subrefletor e no contorno da abertura que é de apenas $0,8843$ dB. Além disso, pode ser verificado que as distorções observadas anteriormente não surgiram neste caso, indicando que as superfícies quádricas confocais representaram de forma adequada a superfície do subrefletor. Dos estudos de casos apresentados, pode-se concluir que, assim com observado em [2], as imprecisões decorrentes da representação local da superfície sintetizada pelas quádricas confocais são mais evidentes nas regiões próximo à borda quando deseja-se uma distribuição de potência uniforme na abertura.

Assim como no estudo de caso B.2, a interpolação por pseudo-*splines* quínticas desviou em até $\pm 2^\circ$ em relação aos pontos gerados pela síntese, conforme ilustrado na Figura 3.38. O diagrama de radiação dado pela PO está representado na Figura 3.39. O ganho máximo obtido foi de $42,0130$ dBi. A atenuação dos lóbulos secundários foi de $-18,5589$ dB e o nível de polarização cruzada em $\theta = 0^\circ$ foi de $-52,6197$ dBi. A largura de meia potência foi de $1,8056^\circ$ no plano $\phi = 0^\circ$ e de $1,1202^\circ$ no plano $\phi = 90^\circ$. Comparando os estudos de casos B.2 e B.3, pode-se observar que, com o aumento do fator de atenuação da distribuição Gaussiana de $\psi = 1,38155$ para $\psi = 2,7631$, para uma abertura elíptica com fase uniforme, a diretividade máxima diminuiu, o atenuação dos lóbulos laterais aumentou, assim como os níveis de polarização cruzada e a largura de meia potência, validando os resultados obtidos na síntese.

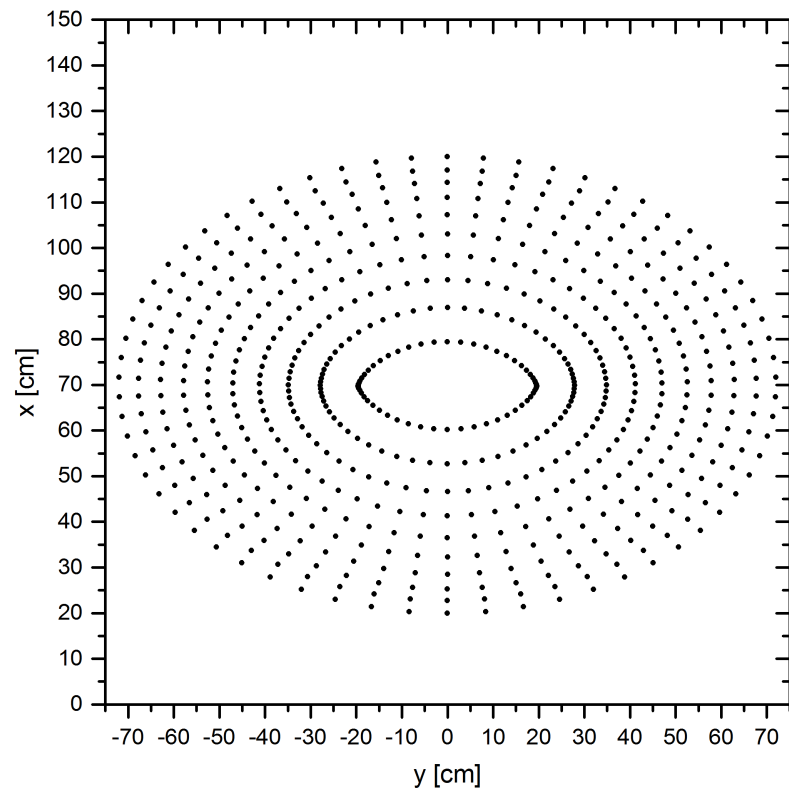


Figura 3.36: Direções de reflexão da superfície sintetizada no plano xy do caso B.3.

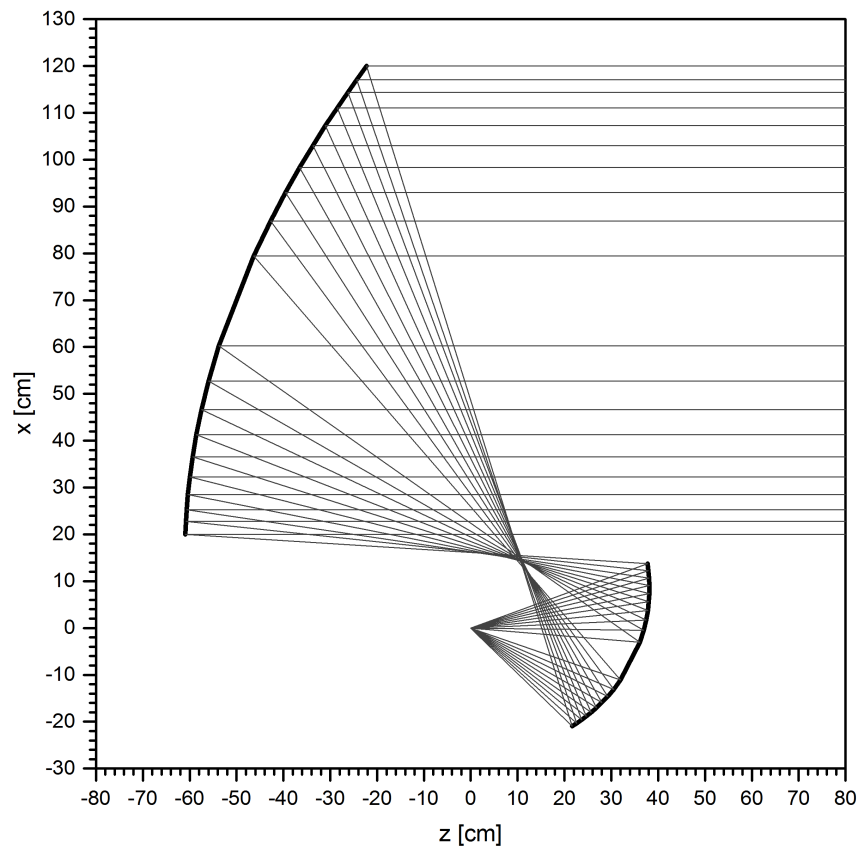


Figura 3.37: Traçado de raios da superfície sintetizada no plano xz do caso B.3.

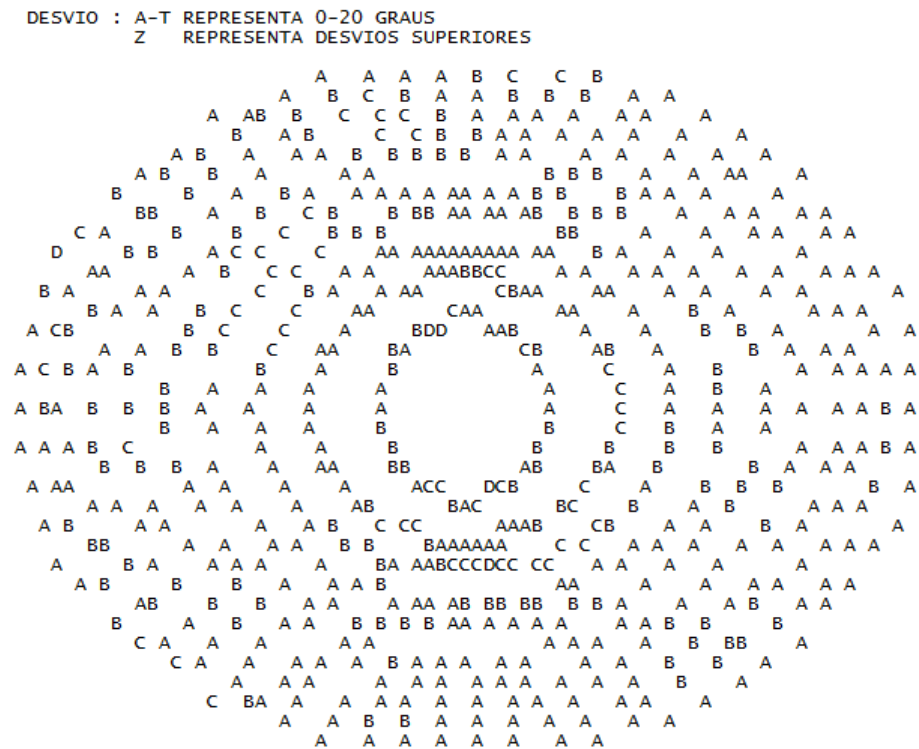


Figura 3.38: Desvio em graus da superfície modelada em relação ao resultado da síntese do caso B.3.

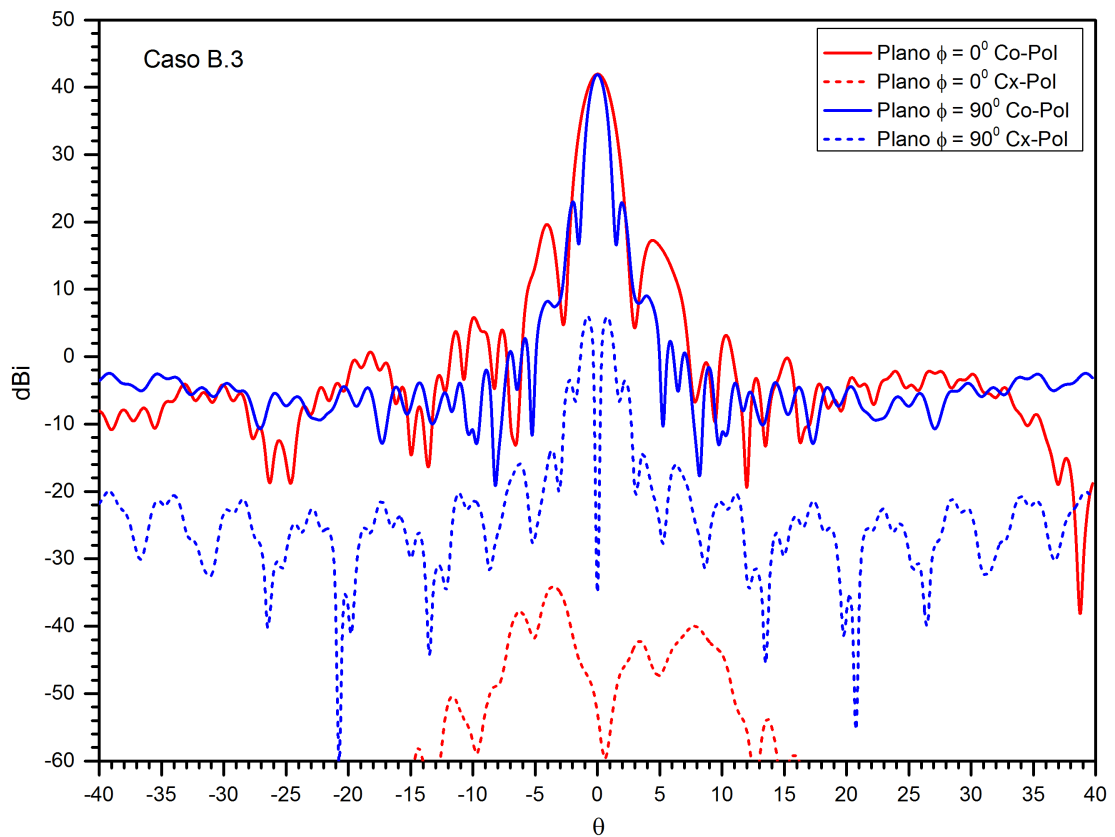


Figura 3.39: Diagrama de radiação da superfície modelada no caso B.3.

Atenuação na borda de 0 dB: Caso B.4

Vista a dificuldade de sintetizar uma sistema duplo-refletor *offset* com abertura elíptica uniforme em amplitude e fase, o estudo de caso B.1 foi reformulado no estudo de caso B.4. Para discretizar o subrefletor foi escolhida uma grade polar não-uniforme no plano complexo $1/\eta'$ com $\alpha = 0,7$ com 8 anéis ($J = 8$) e 64 radiais ($K = 64$). O ângulo de *offset* foi definido em $\theta_0 = -17,65^\circ$ de acordo com a condição de Mizugutch, para o raio maior do contorno elíptico. A distância r_0 foi mantida em 35 cm. Utilizando estes parâmetros a superfície quádrlica adotada como solução inicial para o subrefletor foi definida pelos seguintes parâmetros: $a^{(0)} = -0,161111$ m, $b^{(0)} = 0,186666$, $c^{(0)} = 0,0$, $d^{(0)} = 0,142677$.

O resultado da síntese foi obtido após 11 iterações, sendo que o erro médio dos resíduos associados ao operador $\Gamma[L]$ foi de $|\Gamma|_{mean} = 1,33 \times 10^{-13}$ nos pontos interiores ao contorno e $|\Gamma|_{mean} = 4,66 \times 10^{-11}$ nos pontos do contorno. As dimensões dos raios ao longo dos eixos x e y do subrefletor sintetizado foram de 16,4866 cm e 17,6178 cm, respectivamente. As direções dos raios refletidos pela superfície sintetizada no plano da abertura estão ilustrados na Figura 3.40 e a Figura 3.41 mostra o traçado de raios no plano de simetria. Comparando os resultados obtidos com aqueles do caso B.1 observa-se que as distorções ainda estão presentes, porém, menos acentuadas. Este resultado foi obtido ajustando a quantidade de anéis da grade e o ângulo de *offset* do alimentador.

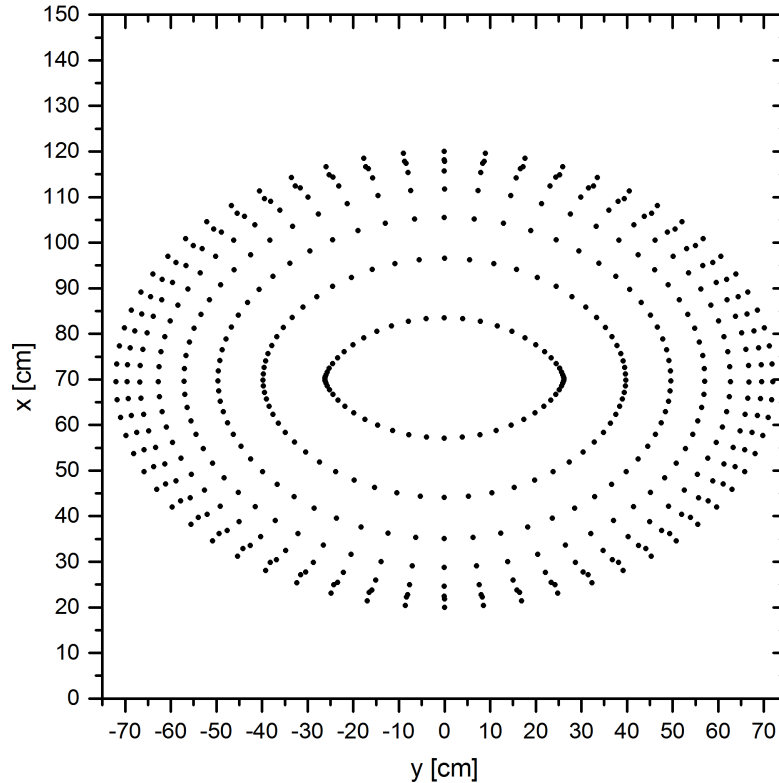


Figura 3.40: Direções de reflexão da superfície sintetizada no plano xy do caso B.4.

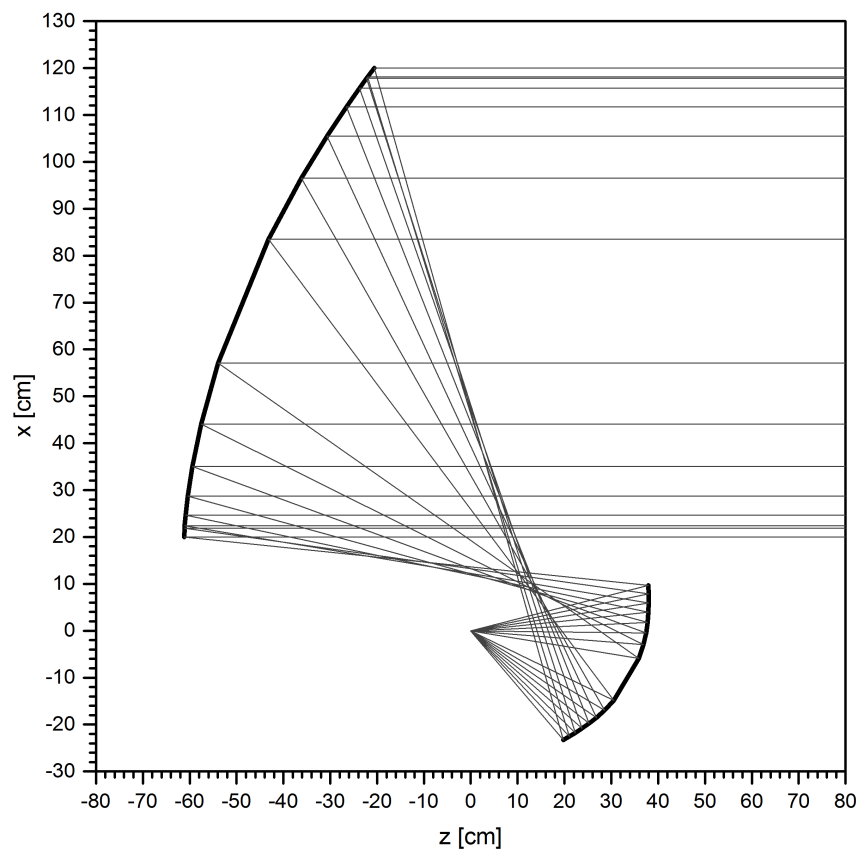


Figura 3.41: Traçado de raios da superfície sintetizada no plano xz do caso B.4.

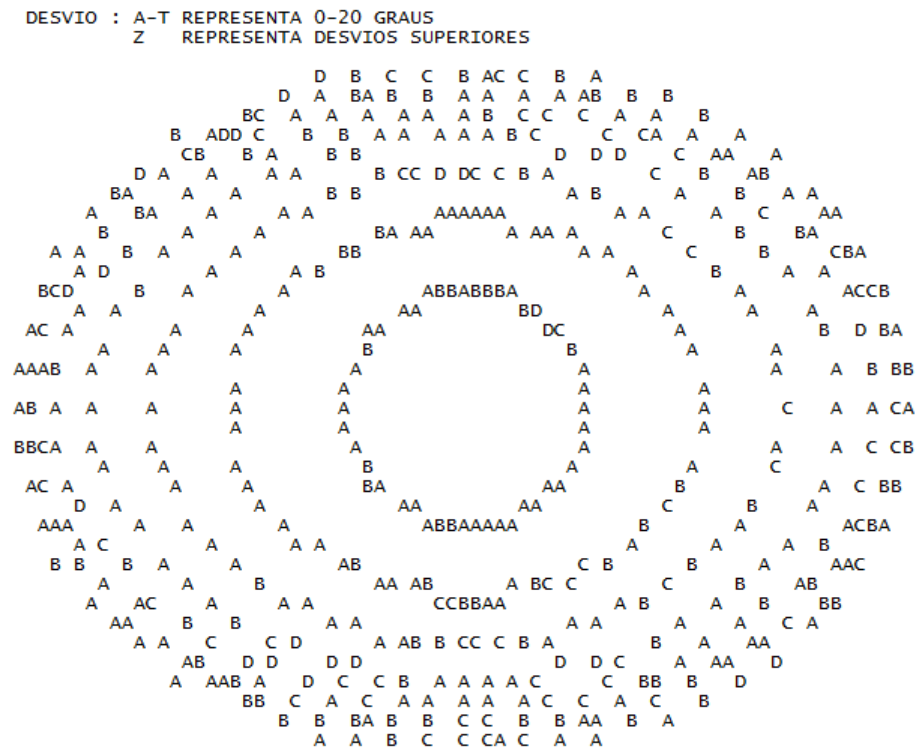


Figura 3.42: Desvio em graus da superfície modelada em relação ao resultado da síntese do caso B.4.

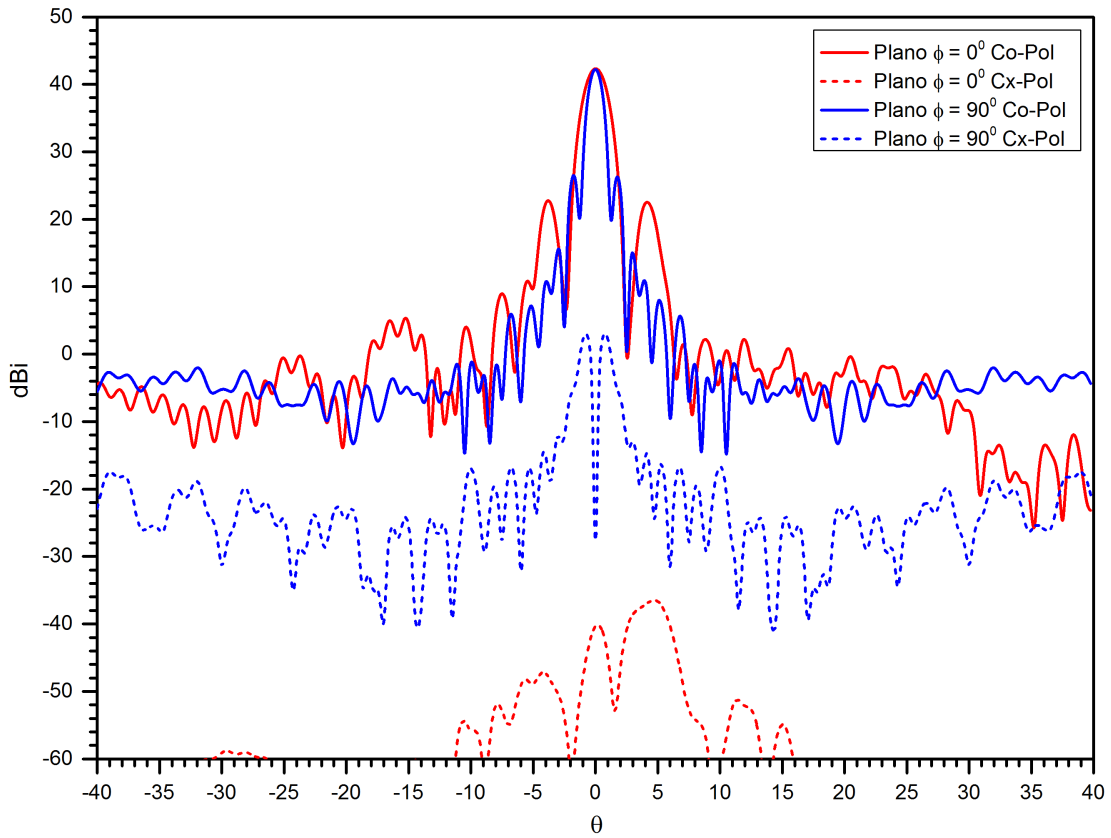


Figura 3.43: Diagrama de radiação da superfície modelada no caso B.4.

A interpolação por pseudo-*splines* quínticas apresentou um desvio significativo de $\pm 3^\circ$ da superfície modelada para a superfície sintetizada para o refletor principal, indicando que as superfícies contínuas interpoladas representam de forma satisfatória o sistema duplo-refletor sintetizado. Este resultado está ilustrado na Figura 3.42. A Figura 3.43 mostra o diagrama de radiação dado pela PO e o ganho máximo obtido foi de 42,3900dBi. A atenuação dos lóbulos secundários foi de -19,4613 dB no plano $\phi = 0^\circ$ e de -15,2745 dB no plano $\phi = 90^\circ$. Já o nível de polarização cruzada máxima foi de -40,2103dBi. Com estes resultados o algoritmo de síntese é validado, com destaque para os casos em que a grade polar deve ser ajustada para a obtenção de superfícies adequadas pelo procedimento de síntese.

3.9 Considerações Finais

Neste capítulo foi estudado o problema de síntese numérica de um sistema duplo refletor com fase uniforme na abertura em que a superfície do subrefletor é aproximada localmente por superfícies quádricas confocais com eixos deslocados. Os estudos de casos apresentados mostram que o algoritmo é eficiente e consegue projetar sistemas duplo-refletores conforme as especificações dadas, em contornos de abertura circular e elíptico.

Capítulo 4

Antenas Duplo-Reflatorias *Offset* com Fase Não-Uniforme na Abertura

Neste capítulo é apresentada a solução numérica do problema de síntese apresentado em (2.19) para o caso de um sistema duplo-refletor *offset* com fase não-uniforme na abertura usando a aproximação de superfícies quádricas confocais para representar localmente a superfície do subrefletor sintetizado. A estratégia recursiva de mapeamento $\eta \rightarrow \omega$ na abertura é apresentada, bem como, um exemplo de solução inicial com fase uniforme na abertura para o algoritmo de síntese. Além disso, as expressões das derivadas do operador não-linear são obtidas analiticamente, determinando a matriz Jacobiana para o caso de fase não-uniforme na abertura. Na sequência, são apresentados estudos de casos para avaliar o algoritmo de síntese desenvolvido com o intuito de projetar sistemas duplo-refletores *offset* que gerem diagramas de radiação com feixes modelados. Assim como no Capítulo 3, as superfícies sintetizadas são interpoladas por pseudo-*splines* quínticas [52] e analisadas via aproximações da PO mais corrente de borda [47], [48].

4.1 Geometria do Problema de Síntese

A equação de Monge-Ampère para o problema de síntese de um sistema duplo-refletor *offset* com fase arbitrária na abertura foi formulada na Seção 2.2 e expressa em (2.19). Para o problema de fase não-uniforme na abertura, os raios refletidos pelo refletor principal cruzam a abertura com uma direção arbitrária em relação ao eixo z (vide Figura 2.2), desde que a condição de não haver cáusticas sobre a abertura seja atendida. Assim, a função fase $l(\omega)$ não é uma função constante, bem como as derivadas da fase não são nulas. Portanto, as simplificações adotadas no Capítulo 3 não podem ser assumidas.

Da geometria do problema de síntese da Figura 2.2 pode ser observado que o plano de abertura está na direção do semi espaço z -positivo, e quando um raio cruzar a abertura

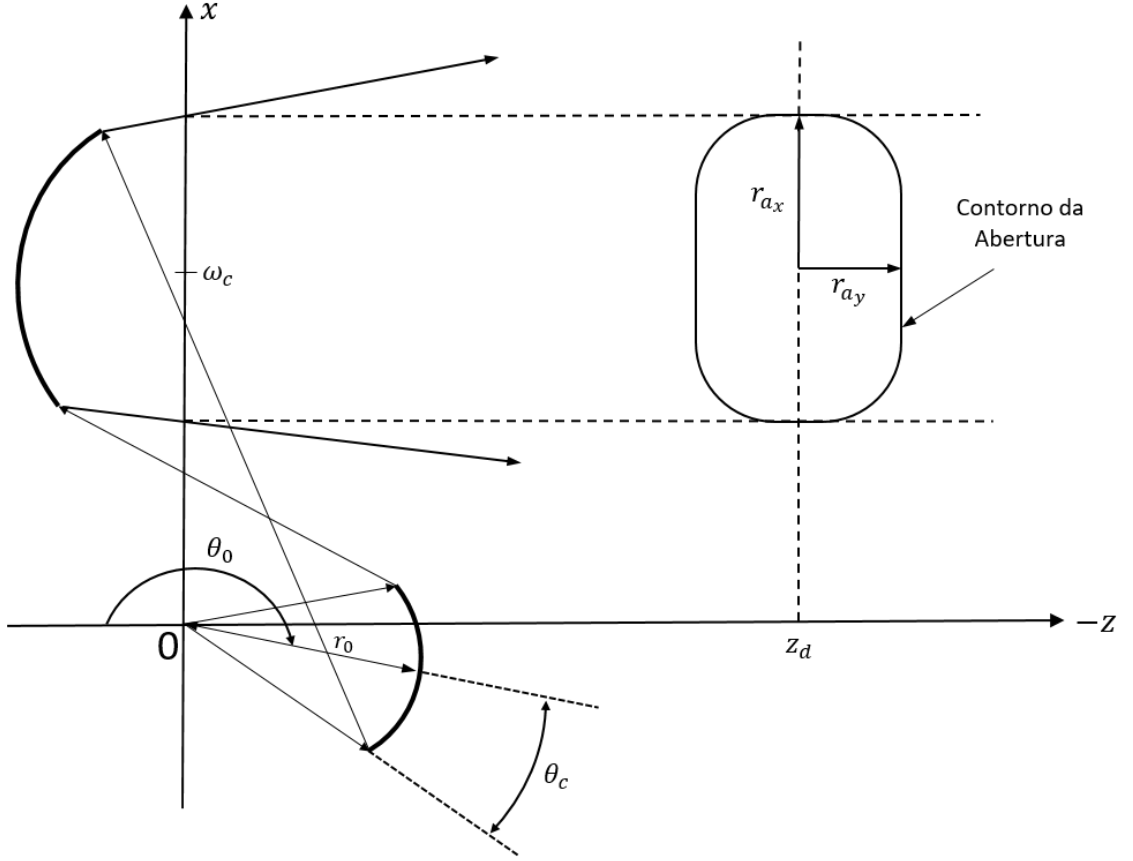


Figura 4.1: Geometria do problema de síntese de um sistema duplo-refletor *offset* com fase não-uniforme na abertura como um problema de valor de contorno.

paralelo ao eixo z ou, com uma pequena inclinação em relação ao eixo z , o valor de ζ tende a infinito instabilizando o processo iterativo da síntese, visto que o valor de ζ está implícito na formulação. Logo, para a estabilidade do esquema numérico para a solução da equação de Monge-Ampère (2.19), a geometria vai ser rotacionada, colocando a abertura do lado negativo do eixo z , conforme está ilustrado na Figura 4.1. Desta forma, os raios cruzam a abertura na direção do semi espaço z -negativo e, conseqüentemente, ζ será nulo quando o raio cruzar a abertura paralelo ao eixo z .

4.2 Mapeamento $\eta \rightarrow \omega$

Para o problema de fase não-uniforme na abertura, o mapeamento de $\eta \rightarrow \omega$ não conduz a uma expressão analítica fechada. O mapeamento é representado pela equação implícita (4.1) e pode ser resolvida numericamente, mas é necessário conhecer $L(\eta)$, ou seja, o subrefletor precisa ser conhecido.

Seja a expressão de L_η em (2.14) reescrita da seguinte forma:

$$F(\omega) = F_1(\omega)L_\eta - F_2(\omega)e^L - F_3(\omega) = 0, \quad (4.1)$$

onde

$$F_1(\omega) = l + z_d - \omega\bar{\zeta} - \bar{\omega}\eta + (l - z_d)\bar{\zeta}\eta, \quad (4.2a)$$

$$F_2(\omega) = 2(\bar{\zeta} - \bar{\eta}), \quad (4.2b)$$

$$F_3(\omega) = \bar{\omega} + (z_d - l)\bar{\zeta}. \quad (4.2c)$$

Derivando (4.2) em relação à ω , obtém-se

$$F_\omega^{(1)} = l_\omega(1 + \bar{\zeta}\eta) + \bar{\zeta}_\omega[(l - z_d)\eta - \omega] - \bar{\zeta}, \quad (4.3a)$$

$$F_\omega^{(2)} = 2\bar{\zeta}_\omega, \quad (4.3b)$$

$$F_\omega^{(3)} = -l_\omega\bar{\zeta} + (z_d - l)\bar{\zeta}_\omega, \quad (4.3c)$$

enquanto que as derivadas (4.2) em relação à $\bar{\omega}$ são dadas por:

$$F_{\bar{\omega}}^{(1)} = l_{\bar{\omega}}(1 + \bar{\zeta}\eta) + \bar{\zeta}_{\bar{\omega}}[(l - z_d)\eta - \omega] - \eta, \quad (4.4a)$$

$$F_{\bar{\omega}}^{(2)} = 2\bar{\zeta}_{\bar{\omega}}, \quad (4.4b)$$

$$F_{\bar{\omega}}^{(3)} = 1 - l_{\bar{\omega}}\bar{\zeta} + (z_d - l)\bar{\zeta}_{\bar{\omega}}. \quad (4.4c)$$

Logo, as derivadas de (4.1) são expressas da seguinte forma:

$$F_\omega = F_\omega^{(1)}L_\eta - F_\omega^{(2)}e^L - F_\omega^{(3)}, \quad (4.5a)$$

$$F_{\bar{\omega}} = F_{\bar{\omega}}^{(1)}L_\eta - F_{\bar{\omega}}^{(2)}e^L - F_{\bar{\omega}}^{(3)}. \quad (4.5b)$$

Para aplicar o método de Newton-Raphson, é feita a expansão em série de Taylor do operador F considerando ω^m na vizinhança de ω :

$$F = F^m + F_\omega^m \Delta\omega^m + F_{\bar{\omega}}^m \Delta\bar{\omega}^m + \dots = 0. \quad (4.6)$$

Uma expressão análoga é obtida para o complexo conjugado de $F(\omega)$:

$$\bar{F} = \bar{F}^m + \bar{F}_\omega^m \Delta\omega^m + \bar{F}_{\bar{\omega}}^m \Delta\bar{\omega}^m + \dots = 0. \quad (4.7)$$

Negligenciando os termos não lineares em relação $\Delta\omega$ e $\Delta\bar{\omega}$ nas equações (4.6) e (4.7), duas equações lineares complexas são obtidas:

$$F_\omega^m \Delta\omega^m + F_{\bar{\omega}}^m \Delta\bar{\omega}^m = -F^m, \quad (4.8a)$$

$$\bar{F}_\omega^m \Delta\omega^m + \bar{F}_{\bar{\omega}}^m \Delta\bar{\omega}^m = -\bar{F}^m, \quad (4.8b)$$

onde $\Delta\omega = \omega^{m+1} - \omega^m$. O sistema (4.8) é resolvido em termos de $\Delta\omega^m$ e uma fórmula de

recorrência é escrita como:

$$\Delta\omega = \frac{F_{\bar{\omega}}\bar{F} - \bar{F}_{\bar{\omega}}F}{|F_{\omega}|^2 - |F_{\bar{\omega}}|^2}. \quad (4.9)$$

Logo,

$$\omega^{m+1} = \omega^m + \frac{F_{\bar{\omega}}\bar{F} - \bar{F}_{\bar{\omega}}F}{|F_{\omega}|^2 - |F_{\bar{\omega}}|^2} \quad (4.10)$$

é a relação de mapeamento $\eta \rightarrow \omega$ recursiva para um sistema duplo-refletor *offset* com fase não-uniforme na abertura.

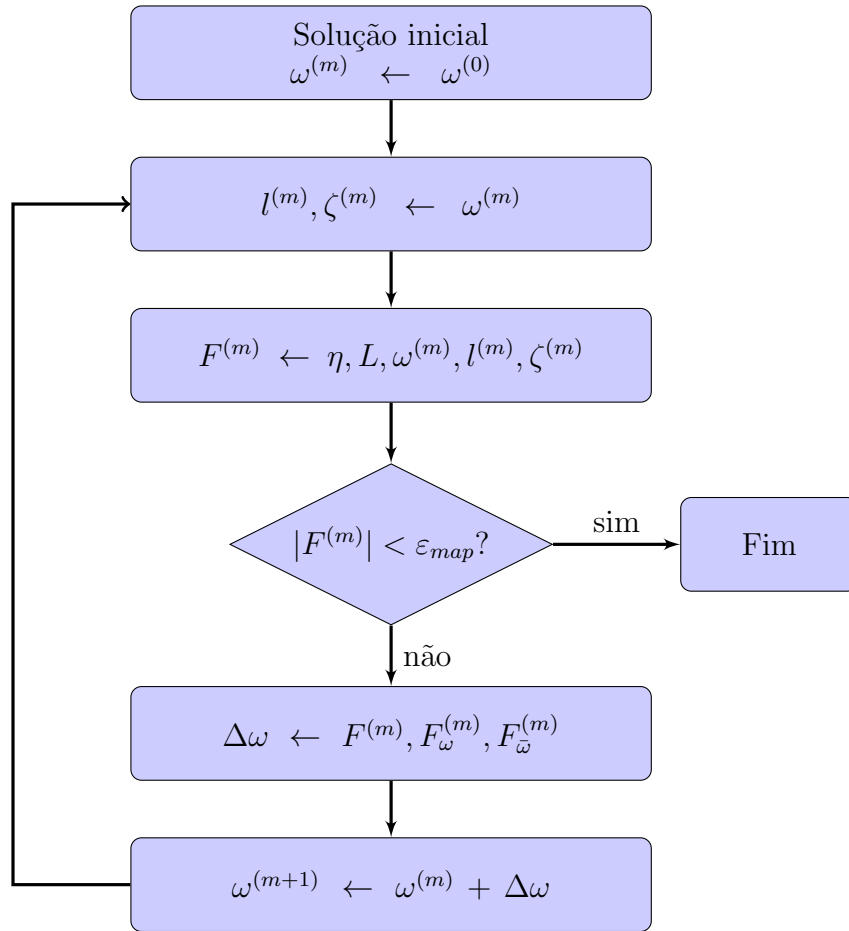


Figura 4.2: Diagrama de blocos do algoritmo de mapeamento para a fase não-uniforme.

O algoritmo para a equação recursiva (4.10) está representado em diagrama de blocos na Figura 4.2. Na primeira iteração do algoritmo de síntese, é adotada uma relação de mapeamento com fase uniforme na abertura (descrita na Seção 4.4) para iniciar o algoritmo de mapeamento. Nas demais iterações da síntese, a solução final do algoritmo de mapeamento é estabelecida como solução inicial na iteração seguinte. O algoritmo converge quando $|F(\omega^{(m)})|$ é menor que um critério de convergência adotado.

4.3 Coordenadas do Refletor Principal

A expressão vetorial da equação (2.15) que define o refletor principal S pode ser reescrita usando a notação (α, a_3) de suas componentes Cartesianas quando a fase $l(\omega)$ é uma função arbitrária. A expressão em coordenadas complexas para o vetor unitário $\hat{q}$ pode ser escrita em função das coordenadas complexas ζ e seu complexo conjugado $\bar{\zeta}$ como:

$$\hat{q} = \left(\frac{2\zeta}{|\zeta|^2 + 1}, \frac{|\zeta|^2 - 1}{|\zeta|^2 + 1} \right). \quad (4.11)$$

Das definições apresentadas em (2.7), o vetor unitário $\hat{q}$ em (4.11) pode ser reescrito como:

$$\hat{q} = (2l_{\bar{\omega}}, \delta - 1). \quad (4.12)$$

Substituindo (4.12) em (2.15) e sabendo que $\vec{v} = (\omega, z_d)$ e $h = H/K$, as coordenadas do refletor principal são expressas da seguinte forma:

$$\vec{r} + \vec{s} = \left(\omega - hl_{\bar{\omega}}, \frac{1}{2}h - \frac{1}{2}h\delta + z_d \right). \quad (4.13)$$

4.4 Exemplo de Solução Analítica para a Síntese de Duplo-Refletores com Fase Uniforme na Abertura

Como solução inicial para o algoritmo de síntese de fase não-uniforme na abertura será adotada um exemplo de solução analítica para o problema de síntese com fase uniforme na abertura. Porém, esta solução será obtida a partir da geometria apresentada na Figura 4.1, ou seja, com todos os raios refletidos pelo refletor principal cruzando a abertura na direção do semi espaço z -negativo, e conseqüentemente, $\zeta = 0$. Dessa forma, a expressão (2.14) para L_η se torna [31]:

$$L_\eta = \frac{\bar{\omega} - 2\bar{\eta}e^L}{l + z_d - \bar{\omega}\eta}. \quad (4.14)$$

Fazendo $A = l + z_d$, tem-se que:

$$L_\eta = \frac{\bar{\omega} - 2\bar{\eta}e^L}{A - \bar{\omega}\eta}. \quad (4.15)$$

Considerando fase uniforme na abertura, da equação (4.15) obtém-se uma expressão analítica para ω [31]:

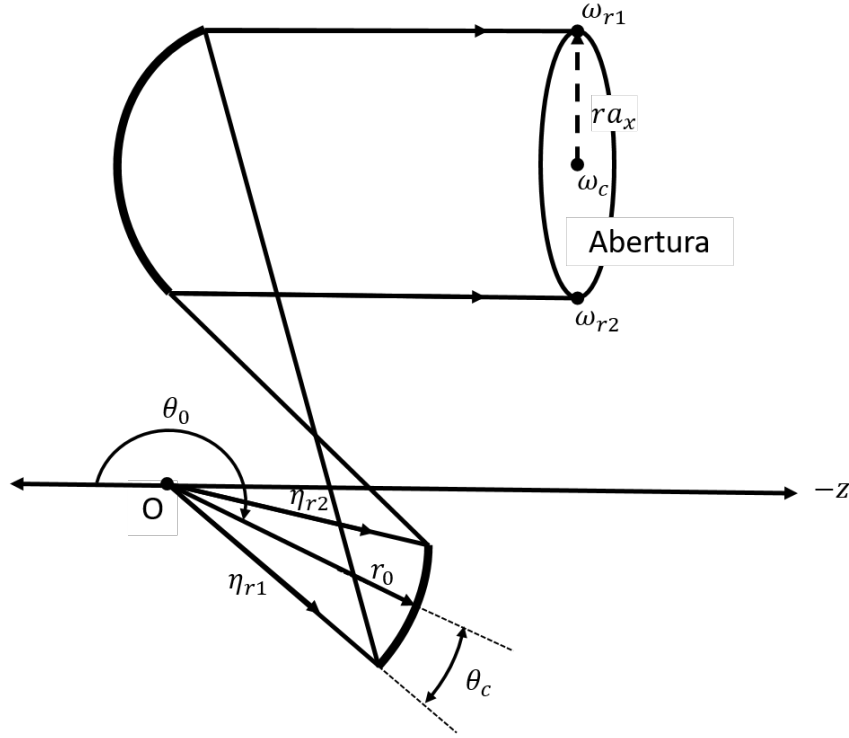


Figura 4.3: Configuração TB (Gregorian) com a abertura definida na direção do semi-espaço z -negativo.

$$\omega = \frac{2\eta e^L + AL_{\bar{\eta}}}{1 + \bar{\eta}L_{\bar{\eta}}}. \quad (4.16)$$

Assumindo a aproximação por superfícies quádricas confocais, ou seja, substituindo as expressões (2.31) e (2.38) na expressão (4.16), chega-se a:

$$\omega = \frac{2a\eta - A[(d-1)\eta + (b+ic)]}{(b-ic)\eta - d - 1}. \quad (4.17)$$

No plano de simetria $\phi = 0$, assumindo que não há deslocamento azimutal em seu eixo de simetria $\varphi = 0$ e, conseqüentemente, $c = 0$, mostra-se facilmente que (4.17) torna-se:

$$\omega_r = \frac{2a\eta_r - A[(d-1)\eta_r + b]}{b\eta_r - d - 1}. \quad (4.18)$$

Substituindo a expressão de (3.12) na expressão de (4.18), tem-se que:

$$[\eta_r(\omega_r - 2r_0 \sin \theta_0) + A]b + [\eta_r(A - 2r_0 \cos \theta_0) - \omega_r]d = \eta_r(A - 2r_0) + \omega_r. \quad (4.19)$$

Novamente, definindo dois raios no plano de simetria ($\phi = 0$), obtém-se um sistema linear de duas equações, o que permite determinar os coeficientes b e d . Seja o sistema linear na forma matricial:

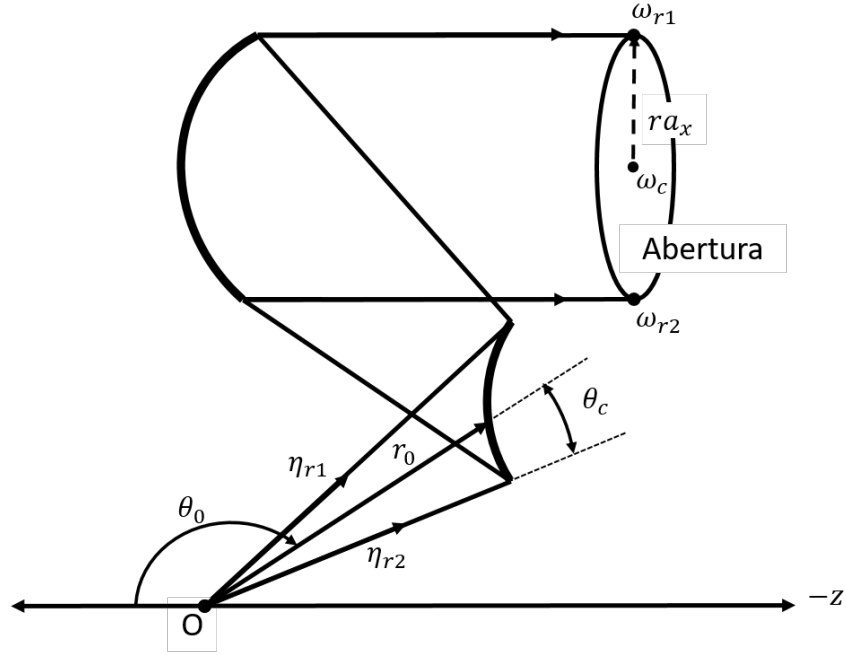


Figura 4.4: Configuração TT (Cassegrain) com a abertura definida na direção do semi-espaço z -negativo.

$$\begin{bmatrix} P_1 & Q_1 \\ P_2 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix}, \quad (4.20)$$

onde

$$\begin{aligned} P_1 &= \eta_{r1}(\omega_{r1} - 2r_0 \sin \theta_0) + A, \\ P_2 &= \eta_{r2}(\omega_{r2} - 2r_0 \sin \theta_0) + A, \\ Q_1 &= \eta_{r1}(A - 2r_0 \cos \theta_0) - \omega_{r1}, \\ Q_2 &= \eta_{r2}(A - 2r_0 \cos \theta_0) - \omega_{r2}, \\ R_1 &= \eta_{r1}(A - 2r_0) + \omega_{r1}, \\ R_2 &= \eta_{r2}(A - 2r_0) + \omega_{r2}. \end{aligned}$$

O sistema linear (4.20) pode facilmente ser resolvido pela regra de Crammer:

$$b = \frac{R_1 Q_2 - Q_1 R_2}{P_1 Q_2 - Q_1 P_2}, \quad (4.21)$$

$$d = \frac{P_1 R_2 - R_1 P_2}{P_1 Q_2 - Q_1 P_2}, \quad (4.22)$$

e o coeficiente a é obtido pela equação (3.12).

Para especificar o sistema linear (4.20), as variáveis η_{r1} , η_{r2} , ω_{r1} e ω_{r2} são definidas

como em (3.14) e (3.15), respectivamente. Já para a geometria do problema de síntese com a abertura definida na direção do semi espaço z -negativo, $\theta_1 = \theta_0 + \theta_c$ e $\theta_2 = \theta_0 - \theta_c$ para a configuração TB, enquanto que para a configuração TT, $\theta_1 = \theta_0 - \theta_c$ e $\theta_2 = \theta_0 + \theta_c$, conforme ilustrado nas Figuras 4.3 e 4.4.

4.5 Densidade de Potência Refletida na Abertura

A equação de Monge-Ampère (2.19) pode ser considerada de duas formas. Se a densidade de potência é especificada na abertura, então a expressão se torna uma equação diferencial de Monge-Ampère para L . Por outro lado, se a superfície $L(\eta)$ é conhecida e a fase na abertura é especificada, então a expressão (2.19) é uma equação para densidade de potência $G(\omega)$. Nesta seção é deduzida a densidade de potência refletida na abertura por um sistema duplo refletor com fase uniforme na abertura cujo subrefletor é uma superfície quádrlica confocal determinada pelos coeficientes a , b , c e d , e a abertura está posicionada na direção do semi-espaço z -negativo.

Da equação (4.17) é possível escrever uma expressão para η :

$$\eta = \frac{(d+1)\omega - A(b+ic)}{-2a + A(d-1) + (b-ic)\omega}. \quad (4.23)$$

Determinando as derivadas de (4.23) em relação a ω e seu conjugado complexo $\bar{\omega}$, obtém-se:

$$\eta_{\bar{\omega}} = 0. \quad (4.24)$$

$$\eta_{\omega} = \frac{A(b^2 + c^2) - 2a(d+1) + A(d^2 - 1)}{[-2a + A(d-1) + (b-ic)\omega]^2}, \quad (4.25)$$

Substituindo (4.24) e (4.25) em (3.23), tem-se que:

$$G_{sq}(\omega) = \frac{4I(\eta)}{(1 + |\eta|^2)^2} \frac{[A(b^2 + c^2) - 2a(d+1) + A(d^2 - 1)]^2}{|-2a + A(d-1) + (b-ic)\omega|^4}, \quad (4.26)$$

que é usada em conjunto com o campo desejado na abertura $G_{ob}(\omega)$ na estratégia de convergência do algoritmo de síntese definida em (2.138). Para determinar a matriz Jacobiana deve-se obter a derivada da função $G_{sq}(\omega)$ em relação a ω :

$$G_{\omega}^{sq}(\omega) = \frac{4I(\eta)}{(1 + |\eta|^2)^2} \left[\frac{-2|\eta_{\omega}|^2(b-ic)}{A(d-1) + (b-ic)\omega - 2a} \right]. \quad (4.27)$$

4.6 Solução Numérica do Problema de Síntese

O problema de síntese de um sistema duplo-refletor com fase não-uniforme na abertura (2.19) será resolvido numericamente usando a técnica alternativa descrita na Seção 2.4. Para isso, a superfície do subrefletor é discretizada pela grade polar da Seção 2.4.1, e então é representada localmente por um conjunto de superfícies quádricas confocais. A solução analítica para o problema de síntese da Seção 4.4 é usada como solução inicial para o processo iterativo. Em seguida a fórmula recursiva (4.10) é usada para fazer o mapeamento de $\eta \rightarrow \zeta$. O operador não-linear $\Gamma[L]$ para o problema de fase não-uniforme usando a aproximação da superfície L por quádricas confocais foi apresentado em (2.74) e é reescrito como:

$$\Gamma[L] = \pm \mathcal{H}(\eta, \omega) - (L_{\eta\bar{\eta}} - B)^2, \quad (4.28)$$

onde

$$\mathcal{H}(\eta, \omega) = VT \frac{I(\eta)}{G(\omega)} \frac{4}{(1 + |\eta|^2)^2}, \quad (4.29a)$$

$$B = -\frac{2e^L \gamma}{\beta - \frac{1}{2}h\delta}, \quad (4.29b)$$

$$V = \frac{\gamma^2}{(1 - \delta)(\beta - \frac{1}{2}h\delta)^2}, \quad (4.29c)$$

$$T = hl_{\omega\bar{\omega}} - (1 - 2|l_\omega|^2)^2 - |hl_{\omega\omega} + 2l_\omega^2|^2, \quad (4.29d)$$

$$\beta = l + z_d - 2e^L |\eta|^2, \quad (4.29e)$$

$$\gamma = |1 + \eta L_\eta|^2, \quad (4.29f)$$

$$\delta = 1 - (1 - 4|l_\omega|^2)^{1/2}, \quad (4.29g)$$

$$h = H/K. \quad (4.29h)$$

O procedimento iterativo de Newton da Seção 2.4.4 é então empregado para reduzir os resíduos associados ao operador (4.28) nos pontos da grade a um valor menor que o critério de convergência adotado. Para isso, será necessário obter os elementos da matriz Jacobiana (2.89) descrita na seção 2.4.5 para o operador (4.28) linearizado. A partir daí, uma nova superfície é obtida pela equação (2.83), que será usada no processo iterativo para a convergência do algoritmo de síntese representado pelo diagrama de blocos da Figura 2.24.

Para determinar a matriz Jacobiana (2.89) do operador (4.28), as derivadas dos coeficientes da superfície quádrica $a_{j,k}$, $b_{j,k}$, $c_{j,k}$ e $d_{j,k}$ em relação à L_1 , L_2 , L_3 e L_4 já foram determinadas na Seção 2.4.5 e estão expressos nas seguintes equações: (2.93), (2.96), (2.99) e (2.102), respectivamente. Para completar o cálculo da matriz Jacobiana,

serão determinadas as derivadas parciais de operador (4.28) em relação aos coeficientes da superfície quádrlica $a_{j,k}$, $b_{j,k}$, $c_{j,k}$ e $d_{j,k}$ que são apresentadas posteriormente em (4.43).

Na sequência são obtidas as derivadas das expressões auxiliares (4.29e), (4.29f), (4.29g), (4.29h) e (4.29d) em relação aos coeficientes da superfície quádrlica $a_{j,k}$, $b_{j,k}$, $c_{j,k}$ e $d_{j,k}$, e são apresentadas em (4.30), (4.31), (4.32), (4.34) e (4.40), respectivamente.

As derivadas de β (4.29e) em relação aos coeficientes da superfície quádrlica são:

$$\frac{\partial \beta}{\partial a_{j,k}} = \frac{\partial l}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial a_{j,k}} + \frac{\partial l}{\partial \bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial a_{j,k}} - 2|\eta|^2 \frac{\partial e^L}{\partial a_{j,k}} = 2\text{Re} \left[\frac{\partial l}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial a_{j,k}} \right] - 2|\eta|^2 \frac{\partial e^L}{\partial a_{j,k}}, \quad (4.30a)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial b_{j,k}} = \frac{\partial l}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial b_{j,k}} + \frac{\partial l}{\partial \bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial b_{j,k}} - 2|\eta|^2 \frac{\partial e^L}{\partial b_{j,k}} = 2\text{Re} \left[\frac{\partial l}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial b_{j,k}} \right] - 2|\eta|^2 \frac{\partial e^L}{\partial b_{j,k}}, \quad (4.30b)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial c_{j,k}} = \frac{\partial l}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial c_{j,k}} + \frac{\partial l}{\partial \bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial c_{j,k}} - 2|\eta|^2 \frac{\partial e^L}{\partial c_{j,k}} = 2\text{Re} \left[\frac{\partial l}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial c_{j,k}} \right] - 2|\eta|^2 \frac{\partial e^L}{\partial c_{j,k}}, \quad (4.30c)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial d_{j,k}} = \frac{\partial l}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial d_{j,k}} + \frac{\partial l}{\partial \bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial d_{j,k}} - 2|\eta|^2 \frac{\partial e^L}{\partial d_{j,k}} = 2\text{Re} \left[\frac{\partial l}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial d_{j,k}} \right] - 2|\eta|^2 \frac{\partial e^L}{\partial d_{j,k}}. \quad (4.30d)$$

As derivadas de γ (4.29f) em relação aos coeficientes $a_{j,k}$, $b_{j,k}$, $c_{j,k}$ e $d_{j,k}$ são apresentadas abaixo:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial a_{j,k}} = 2\text{Re} \left[\left(\eta \frac{\partial L_\eta}{\partial a_{j,k}} \right) (1 + \bar{\eta} L_{\bar{\eta}}) \right], \quad (4.31a)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial b_{j,k}} = 2\text{Re} \left[\left(\eta \frac{\partial L_\eta}{\partial b_{j,k}} \right) (1 + \bar{\eta} L_{\bar{\eta}}) \right], \quad (4.31b)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial c_{j,k}} = 2\text{Re} \left[\left(\eta \frac{\partial L_\eta}{\partial c_{j,k}} \right) (1 + \bar{\eta} L_{\bar{\eta}}) \right], \quad (4.31c)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial d_{j,k}} = 2\text{Re} \left[\left(\eta \frac{\partial L_\eta}{\partial d_{j,k}} \right) (1 + \bar{\eta} L_{\bar{\eta}}) \right]. \quad (4.31d)$$

Enquanto que as derivadas de δ (4.29g) são:

$$\frac{\partial \delta}{\partial a_{j,k}} = \frac{\partial \delta}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial a_{j,k}} + \frac{\partial \delta}{\partial \bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial a_{j,k}} = 2\text{Re} \left[\frac{\partial \delta}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial a_{j,k}} \right], \quad (4.32a)$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial b_{j,k}} = \frac{\partial \delta}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial b_{j,k}} + \frac{\partial \delta}{\partial \bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial b_{j,k}} = 2\text{Re} \left[\frac{\partial \delta}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial b_{j,k}} \right], \quad (4.32b)$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial c_{j,k}} = \frac{\partial \delta}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial c_{j,k}} + \frac{\partial \delta}{\partial \bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial c_{j,k}} = 2\text{Re} \left[\frac{\partial \delta}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial c_{j,k}} \right], \quad (4.32c)$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial d_{j,k}} = \frac{\partial \delta}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial d_{j,k}} + \frac{\partial \delta}{\partial \bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial d_{j,k}} = 2\text{Re} \left[\frac{\partial \delta}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial d_{j,k}} \right], \quad (4.32d)$$

onde

$$\frac{\partial \delta}{\partial \omega} = 2(1 - 4|l_\omega|^2)^{-1/2} (l_{\omega\omega} l_{\bar{\omega}} + l_{\bar{\omega}\omega} l_\omega). \quad (4.33)$$

Já as derivadas de h (4.29h) são expressas como:

$$\frac{\partial h}{\partial a_{j,k}} = \frac{\partial h}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial a_{j,k}} + \frac{\partial h}{\partial \bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial a_{j,k}} + \frac{\partial h}{\partial e^L} \frac{\partial e^L}{\partial a_{j,k}} = 2\text{Re} \left[\frac{\partial h}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial a_{j,k}} \right] + \frac{\partial h}{\partial e^L} \frac{\partial e^L}{\partial a_{j,k}}, \quad (4.34a)$$

$$\frac{\partial h}{\partial b_{j,k}} = \frac{\partial h}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial b_{j,k}} + \frac{\partial h}{\partial \bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial b_{j,k}} + \frac{\partial h}{\partial e^L} \frac{\partial e^L}{\partial b_{j,k}} = 2\text{Re} \left[\frac{\partial h}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial b_{j,k}} \right] + \frac{\partial h}{\partial e^L} \frac{\partial e^L}{\partial b_{j,k}}, \quad (4.34b)$$

$$\frac{\partial h}{\partial c_{j,k}} = \frac{\partial h}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial c_{j,k}} + \frac{\partial h}{\partial \bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial c_{j,k}} + \frac{\partial h}{\partial e^L} \frac{\partial e^L}{\partial c_{j,k}} = 2\text{Re} \left[\frac{\partial h}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial c_{j,k}} \right] + \frac{\partial h}{\partial e^L} \frac{\partial e^L}{\partial c_{j,k}}, \quad (4.34c)$$

$$\frac{\partial h}{\partial d_{j,k}} = \frac{\partial h}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial d_{j,k}} + \frac{\partial h}{\partial \bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial d_{j,k}} + \frac{\partial h}{\partial e^L} \frac{\partial e^L}{\partial d_{j,k}} = 2\text{Re} \left[\frac{\partial h}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial d_{j,k}} \right] + \frac{\partial h}{\partial e^L} \frac{\partial e^L}{\partial d_{j,k}}, \quad (4.34d)$$

onde

$$\frac{\partial h}{\partial \omega} = \frac{1}{K} \left(\frac{\partial H}{\partial \omega} - h \frac{\partial K}{\partial \omega} \right), \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial e^L} = \frac{-1}{K} \Big\{ & 2[l(1 + |\eta|^2) + z_d(1 - |\eta|^2) - \bar{\eta}\omega - \eta\bar{\omega}] + \\ & h [|\eta|^2(\delta - 2) - \delta + 4\text{Re}(\eta l_\omega)] \Big\}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Em (4.35), H e K são expressas como em (2.16) e (2.17), e K pode ser reescrita como:

$$K = l - e^L(|\eta|^2 + 1) - l_{\bar{\omega}}(\bar{\omega} - 2\bar{\eta}e^L) - l_{\omega}(\omega - 2\eta e^L) + (1 - \delta)[z_d - e^L(|\eta|^2 - 1)], \quad (4.37)$$

cujas derivadas em relação a ω são dadas por:

$$\frac{\partial H}{\partial \omega} = 2l_{\omega}l - \bar{\omega} - 2e^L[(1 + |\eta|^2)l_{\omega} - \bar{\eta}], \quad (4.38)$$

$$\frac{\partial K}{\partial \omega} = -(\bar{\omega} - 2\bar{\eta}e^L)l_{\bar{\omega}\omega} - (\omega - 2\eta e^L)l_{\omega\omega} - [z_d - e^L(|\eta|^2 - 1)]\frac{\partial \delta}{\partial \omega}. \quad (4.39)$$

As derivadas de (4.41) são:

$$\frac{\partial T}{\partial a_{j,k}} = \frac{\partial T}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial a_{j,k}} + \frac{\partial T}{\partial \bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial a_{j,k}} + \frac{\partial T}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial e^L} \frac{\partial e^L}{\partial a_{j,k}} = 2\text{Re} \left[\frac{\partial T}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial a_{j,k}} \right] + \frac{\partial T}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial e^L} \frac{\partial e^L}{\partial a_{j,k}}, \quad (4.40a)$$

$$\frac{\partial T}{\partial b_{j,k}} = \frac{\partial T}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial b_{j,k}} + \frac{\partial T}{\partial \bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial b_{j,k}} + \frac{\partial T}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial e^L} \frac{\partial e^L}{\partial b_{j,k}} = 2\text{Re} \left[\frac{\partial T}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial b_{j,k}} \right] + \frac{\partial T}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial e^L} \frac{\partial e^L}{\partial b_{j,k}}, \quad (4.40b)$$

$$\frac{\partial T}{\partial c_{j,k}} = \frac{\partial T}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial c_{j,k}} + \frac{\partial T}{\partial \bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial c_{j,k}} + \frac{\partial T}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial e^L} \frac{\partial e^L}{\partial c_{j,k}} = 2\text{Re} \left[\frac{\partial T}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial c_{j,k}} \right] + \frac{\partial T}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial e^L} \frac{\partial e^L}{\partial c_{j,k}}, \quad (4.40c)$$

$$\frac{\partial T}{\partial d_{j,k}} = \frac{\partial T}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial d_{j,k}} + \frac{\partial T}{\partial \bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial d_{j,k}} + \frac{\partial T}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial e^L} \frac{\partial e^L}{\partial d_{j,k}} = 2\text{Re} \left[\frac{\partial T}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial d_{j,k}} \right] + \frac{\partial T}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial e^L} \frac{\partial e^L}{\partial d_{j,k}}, \quad (4.40d)$$

onde

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \omega} = 2 [hl_{\omega\bar{\omega}} - (1 - 2|l_{\omega}|^2)] & \left(\frac{\partial h}{\partial \omega} l_{\omega\bar{\omega}} + h \frac{\partial l_{\omega\bar{\omega}}}{\partial \omega} + 2 \frac{\partial l_{\omega}}{\partial \omega} l_{\bar{\omega}} + 2 l_{\omega} \frac{\partial l_{\bar{\omega}}}{\partial \omega} \right) - \\ & \left\{ (hl_{\bar{\omega}\bar{\omega}} + 2l_{\bar{\omega}}^2) \left[\frac{\partial h}{\partial \omega} l_{\omega\omega} + \frac{\partial l_{\omega\omega}}{\partial \omega} h + 4l_{\omega} \frac{\partial l_{\bar{\omega}}}{\partial \omega} \right] + \right. \\ & \left. (hl_{\omega\omega} + 2l_{\omega}^2) \left[\frac{\partial h}{\partial \omega} l_{\bar{\omega}\bar{\omega}} + \frac{\partial l_{\bar{\omega}\bar{\omega}}}{\partial \omega} h + 4l_{\bar{\omega}} \frac{\partial l_{\omega}}{\partial \omega} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$\frac{\partial T}{\partial h} = 2 \{ [hl_{\omega\bar{\omega}} - (1 - 2|l_{\omega}|^2)] l_{\omega\bar{\omega}} - \text{Re} [l_{\omega\omega} (hl_{\bar{\omega}\bar{\omega}} + 2l_{\bar{\omega}}^2)] \}. \quad (4.42)$$

É importante observar que a expressão em (4.41) depende das derivadas de terceira ordem de $l_{\omega\omega}$, $l_{\bar{\omega}\bar{\omega}}$ e $l_{\omega\bar{\omega}}$ em relação a ω . Assim conclui-se que para a formulação geral, a função fase deverá ter derivadas contínuas de primeira, segunda e terceira ordem. Essas derivadas serão apresentadas nos estudos de casos da Seção 4.7.

Para a formulação matemática exata da matriz Jacobiana deve-se determinar as derivadas parciais do operador $\Gamma[L]$ (4.28) em relação aos coeficientes $a_{j,k}$, $b_{j,k}$, $c_{j,k}$ e $d_{j,k}$ da superfície quádrlica confocal com eixos deslocados:

$$\frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial a_{j,k}} = -2(L_{\eta\bar{\eta}} - B) \left(\frac{\partial L_{\eta\bar{\eta}}}{\partial a_{j,k}} - \frac{\partial B}{\partial a_{j,k}} \right) \pm \frac{\partial \mathcal{H}(\eta, \omega)}{\partial a_{j,k}}, \quad (4.43a)$$

$$\frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial b_{j,k}} = -2(L_{\eta\bar{\eta}} - B) \left(\frac{\partial L_{\eta\bar{\eta}}}{\partial b_{j,k}} - \frac{\partial B}{\partial b_{j,k}} \right) \pm \frac{\partial \mathcal{H}(\eta, \omega)}{\partial b_{j,k}}, \quad (4.43b)$$

$$\frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial c_{j,k}} = -2(L_{\eta\bar{\eta}} - B) \left(\frac{\partial L_{\eta\bar{\eta}}}{\partial c_{j,k}} - \frac{\partial B}{\partial c_{j,k}} \right) \pm \frac{\partial \mathcal{H}(\eta, \omega)}{\partial c_{j,k}}, \quad (4.43c)$$

$$\frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial d_{j,k}} = -2(L_{\eta\bar{\eta}} - B) \left(\frac{\partial L_{\eta\bar{\eta}}}{\partial d_{j,k}} - \frac{\partial B}{\partial d_{j,k}} \right) \pm \frac{\partial \mathcal{H}(\eta, \omega)}{\partial d_{j,k}}. \quad (4.43d)$$

Em(4.43), as derivadas da expressão (4.29b) em relação aos coeficientes da superfície quádrlica são:

$$\frac{\partial B}{\partial a_{j,k}} = \frac{-1}{\beta - \frac{1}{2}h\delta} \left\{ 2 \left(\frac{\partial e^L}{\partial a_{j,k}} \gamma + \frac{\partial \gamma}{\partial a_{j,k}} e^L \right) + B \left[\frac{\partial \beta}{\partial a_{j,k}} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h}{\partial a_{j,k}} \delta + \frac{\partial \delta}{\partial a_{j,k}} h \right) \right] \right\}, \quad (4.44a)$$

$$\frac{\partial B}{\partial b_{j,k}} = \frac{-1}{\beta - \frac{1}{2}h\delta} \left\{ 2 \left(\frac{\partial e^L}{\partial b_{j,k}} \gamma + \frac{\partial \gamma}{\partial b_{j,k}} e^L \right) + B \left[\frac{\partial \beta}{\partial b_{j,k}} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h}{\partial b_{j,k}} \delta + \frac{\partial \delta}{\partial b_{j,k}} h \right) \right] \right\}, \quad (4.44b)$$

$$\frac{\partial B}{\partial c_{j,k}} = \frac{-1}{\beta - \frac{1}{2}h\delta} \left\{ 2 \left(\frac{\partial e^L}{\partial c_{j,k}} \gamma + \frac{\partial \gamma}{\partial c_{j,k}} e^L \right) + B \left[\frac{\partial \beta}{\partial c_{j,k}} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h}{\partial c_{j,k}} \delta + \frac{\partial \delta}{\partial c_{j,k}} h \right) \right] \right\}, \quad (4.44c)$$

$$\frac{\partial B}{\partial d_{j,k}} = \frac{-1}{\beta - \frac{1}{2}h\delta} \left\{ 2 \left(\frac{\partial e^L}{\partial d_{j,k}} \gamma + \frac{\partial \gamma}{\partial d_{j,k}} e^L \right) + B \left[\frac{\partial \beta}{\partial d_{j,k}} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h}{\partial d_{j,k}} \delta + \frac{\partial \delta}{\partial d_{j,k}} h \right) \right] \right\}. \quad (4.44d)$$

Enquanto isso, as derivadas de (4.29a) em relação aos coeficientes da superfície quádrlica são:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial a_{j,k}} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial a_{j,k}} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial a_{j,k}} + \frac{4}{(1+|\eta|^2)^2} \frac{I(\eta)}{G(\omega)} \left[T \frac{\partial V}{\partial a_{j,k}} + V \frac{\partial T}{\partial a_{j,k}} \right] \\ &= 2\text{Re} \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial a_{j,k}} \right] + \frac{4}{(1+|\eta|^2)^2} \frac{I(\eta)}{G(\omega)} \left[T \frac{\partial V}{\partial a_{j,k}} + V \frac{\partial T}{\partial a_{j,k}} \right],\end{aligned}\quad (4.45a)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial b_{j,k}} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial b_{j,k}} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial b_{j,k}} + \frac{4}{(1+|\eta|^2)^2} \frac{I(\eta)}{G(\omega)} \left[T \frac{\partial V}{\partial b_{j,k}} + V \frac{\partial T}{\partial b_{j,k}} \right] \\ &= 2\text{Re} \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial b_{j,k}} \right] + \frac{4}{(1+|\eta|^2)^2} \frac{I(\eta)}{G(\omega)} \left[T \frac{\partial V}{\partial b_{j,k}} + V \frac{\partial T}{\partial b_{j,k}} \right],\end{aligned}\quad (4.45b)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c_{j,k}} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial c_{j,k}} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial c_{j,k}} + \frac{4}{(1+|\eta|^2)^2} \frac{I(\eta)}{G(\omega)} \left[T \frac{\partial V}{\partial c_{j,k}} + V \frac{\partial T}{\partial c_{j,k}} \right] \\ &= 2\text{Re} \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial c_{j,k}} \right] + \frac{4}{(1+|\eta|^2)^2} \frac{I(\eta)}{G(\omega)} \left[T \frac{\partial V}{\partial c_{j,k}} + V \frac{\partial T}{\partial c_{j,k}} \right],\end{aligned}\quad (4.45c)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial d_{j,k}} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial d_{j,k}} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial d_{j,k}} + \frac{4}{(1+|\eta|^2)^2} \frac{I(\eta)}{G(\omega)} \left[T \frac{\partial V}{\partial d_{j,k}} + V \frac{\partial T}{\partial d_{j,k}} \right] \\ &= 2\text{Re} \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial d_{j,k}} \right] + \frac{4}{(1+|\eta|^2)^2} \frac{I(\eta)}{G(\omega)} \left[T \frac{\partial V}{\partial d_{j,k}} + V \frac{\partial T}{\partial d_{j,k}} \right],\end{aligned}\quad (4.45d)$$

onde

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega} = \pm VT \frac{4I(\eta)}{(1+|\eta|^2)^2} \left\{ \frac{-G_\omega}{[G(\omega)]^2} \right\}. \quad (4.46)$$

As derivadas de V em relação a $a_{j,k}$, $b_{j,k}$, $c_{j,k}$ e $d_{j,k}$ são

$$\frac{\partial V}{\partial a_{j,k}} = \frac{1}{Q} \left(2\gamma \frac{\partial \gamma}{\partial a_{j,k}} - V \frac{\partial Q}{\partial a_{j,k}} \right), \quad (4.47a)$$

$$\frac{\partial V}{\partial b_{j,k}} = \frac{1}{Q} \left(2\gamma \frac{\partial \gamma}{\partial b_{j,k}} - V \frac{\partial Q}{\partial b_{j,k}} \right), \quad (4.47b)$$

$$\frac{\partial V}{\partial c_{j,k}} = \frac{1}{Q} \left(2\gamma \frac{\partial \gamma}{\partial c_{j,k}} - V \frac{\partial Q}{\partial c_{j,k}} \right), \quad (4.47c)$$

$$\frac{\partial V}{\partial d_{j,k}} = \frac{1}{Q} \left(2\gamma \frac{\partial \gamma}{\partial d_{j,k}} - V \frac{\partial Q}{\partial d_{j,k}} \right), \quad (4.47d)$$

onde

$$Q = (1 - \delta) \left(\beta - \frac{1}{2} h \delta \right)^2, \quad (4.48)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial a_{j,k}} = 2(1 - \delta) \left(\beta - \frac{1}{2} h \delta \right) \left[\frac{\partial \beta}{\partial a_{j,k}} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h}{\partial a_{j,k}} \delta + \frac{\partial \delta}{\partial a_{j,k}} h \right) \right] - \frac{\partial \delta}{\partial a_{j,k}} \left(\beta - \frac{1}{2} h \delta \right)^2, \quad (4.49a)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial b_{j,k}} = 2(1 - \delta) \left(\beta - \frac{1}{2} h \delta \right) \left[\frac{\partial \beta}{\partial b_{j,k}} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h}{\partial b_{j,k}} \delta + \frac{\partial \delta}{\partial b_{j,k}} h \right) \right] - \frac{\partial \delta}{\partial b_{j,k}} \left(\beta - \frac{1}{2} h \delta \right)^2, \quad (4.49b)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial c_{j,k}} = 2(1 - \delta) \left(\beta - \frac{1}{2} h \delta \right) \left[\frac{\partial \beta}{\partial c_{j,k}} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h}{\partial c_{j,k}} \delta + \frac{\partial \delta}{\partial c_{j,k}} h \right) \right] - \frac{\partial \delta}{\partial c_{j,k}} \left(\beta - \frac{1}{2} h \delta \right)^2, \quad (4.49c)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial d_{j,k}} = 2(1 - \delta) \left(\beta - \frac{1}{2} h \delta \right) \left[\frac{\partial \beta}{\partial d_{j,k}} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h}{\partial d_{j,k}} \delta + \frac{\partial \delta}{\partial d_{j,k}} h \right) \right] - \frac{\partial \delta}{\partial d_{j,k}} \left(\beta - \frac{1}{2} h \delta \right)^2. \quad (4.49d)$$

Por fim, é necessário determinar as derivadas de ω em relação aos coeficientes da superfície quádrlica que surgem em (4.30), (4.32), (4.34), (4.40) e (4.45). Para isso, o operador F expresso em (4.1) e seu complexo conjugado são diferenciados em relação aos coeficientes da superfície quádrlica, produzindo o seguinte sistema de equações:

$$\frac{\partial F}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial a_{j,k}} + \frac{\partial F}{\partial \bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial a_{j,k}} + F_1 \frac{\partial L_\eta}{\partial a_{j,k}} - F_2 \frac{\partial e^L}{\partial a_{j,k}} = 0, \quad (4.50a)$$

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial a_{j,k}} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial a_{j,k}} + \bar{F}_1 \frac{\partial L_{\bar{\eta}}}{\partial a_{j,k}} - \bar{F}_2 \frac{\partial e^L}{\partial a_{j,k}} = 0. \quad (4.50b)$$

A partir das equações (4.50) forma-se um sistema linear que permite obter a derivada de ω em relação ao coeficiente da superfície quádrlica $a_{j,k}$. O mesmo pode ser feito para os demais coeficientes da superfície quádrlica $b_{j,k}$, $c_{j,k}$ e $d_{j,k}$. Assim, chega-se nas seguintes relações:

$$\frac{\partial \omega}{\partial a_{j,k}} = \frac{1}{|F_\omega|^2 - |F_{\bar{\omega}}|^2} \left[(\bar{F}_\omega F_2 - F_{\bar{\omega}} \bar{F}_2) \frac{\partial e^L}{\partial a_{j,k}} + F_{\bar{\omega}} \bar{F}_1 \frac{\partial L_{\bar{\eta}}}{\partial a_{j,k}} - \bar{F}_\omega F_1 \frac{\partial L_\eta}{\partial a_{j,k}} \right], \quad (4.51a)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial b_{j,k}} = \frac{1}{|F_\omega|^2 - |F_{\bar{\omega}}|^2} \left[(\bar{F}_\omega F_2 - F_{\bar{\omega}} \bar{F}_2) \frac{\partial e^L}{\partial b_{j,k}} + F_{\bar{\omega}} \bar{F}_1 \frac{\partial L_{\bar{\eta}}}{\partial b_{j,k}} - \bar{F}_\omega F_1 \frac{\partial L_\eta}{\partial b_{j,k}} \right], \quad (4.51b)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial c_{j,k}} = \frac{1}{|F_\omega|^2 - |F_{\bar{\omega}}|^2} \left[(\bar{F}_\omega F_2 - F_{\bar{\omega}} \bar{F}_2) \frac{\partial e^L}{\partial c_{j,k}} + F_{\bar{\omega}} \bar{F}_1 \frac{\partial L_{\bar{\eta}}}{\partial c_{j,k}} - \bar{F}_\omega F_1 \frac{\partial L_\eta}{\partial c_{j,k}} \right], \quad (4.51c)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial d_{j,k}} = \frac{1}{|F_\omega|^2 - |F_{\bar{\omega}}|^2} \left[(\bar{F}_\omega F_2 - F_{\bar{\omega}} \bar{F}_2) \frac{\partial e^L}{\partial d_{j,k}} + F_{\bar{\omega}} \bar{F}_1 \frac{\partial L_{\bar{\eta}}}{\partial d_{j,k}} - \bar{F}_\omega F_1 \frac{\partial L_\eta}{\partial d_{j,k}} \right], \quad (4.51d)$$

As derivadas parciais das expressões e^L , L_η e $L_{\eta\bar{\eta}}$ em relação aos coeficientes da superfície quádrlica $a_{j,k}$, $b_{j,k}$, $c_{j,k}$ e $d_{j,k}$, que surgiram nas equações (4.30), (4.31), (4.34), (4.40), (4.43) e (4.44), foram dadas em (3.30), (3.31) e (3.34) respectivamente. A derivada parcial de $G(\omega)$ em relação a ω , ou seja, G_ω na expressão (4.46), bem como a função fase $l(\omega)$ e suas derivadas parciais de primeira, segunda e terceira ordem que surgem em (4.29d), (4.29e), (4.29g), (4.30), (4.33), (4.36), (4.38), (4.39), (4.41) e (4.41) serão particularizadas nos estudos de casos apresentados na Seção 4.7.

4.7 Estudos de Casos

Nesta seção são apresentados alguns estudos de casos para avaliar o algoritmo de síntese de antenas duplo-refletores *offset* com fase não-uniforme na abertura. O objetivo é verificar se os resultados gerados pelo método numérico de solução da equação de Monge-Ampère são os esperados e validá-los através das aproximações da Óptica Física (PO) com correção das correntes de bordas [47], [48]. Além disso, os resultados obtidos são comparados com aqueles de [31], cujo algoritmo usa diferenças finitas para aproximar as derivadas parciais da matriz Jacobiana, ao invés de derivadas analíticas, como na metodologia proposta. Na síntese, a solução da equação de Monge-Ampère é do tipo elíptica, o critério de convergência adotado no algoritmo de mapeamento $\eta \rightarrow \omega$ é $|F|_{mean} < 1,0 \times 10^{-15}$, enquanto que o critério de convergência do algoritmo de síntese é $|\Gamma|_{mean} < 1,0 \times 10^{-10}$. Para a análise do diagrama de radiação gerado pelas superfícies sintetizadas, os pontos dados pelo método de síntese óptica foram interpolados por pseudo-*splines* quínticas (3.36) para obter superfícies contínuas que são então analisadas via aproximações da PO. O modelamento e a análise foram efetuados considerando a antena operando em 30 GHz, frequência da banda Ka para comunicação via satélite.

4.7.1 Controle do Diagrama de Radiação em Cobertura Circular

Neste estudo de caso, deseja-se sintetizar um sistema duplo-refletor *offset* para controlar o diagrama de radiação em uma cobertura circular. A geometria para a especificação da fase $l(\omega)$ e da densidade de potência na abertura $G(\omega)$ foi apresentada em [31] e está ilustrada na Figura 4.5.

a) Modelo para a Fase na Abertura

A frente de onda do campo espalhado pelo refletor principal é esférica com centro de fase no ponto focal $P_0(x_0, y_0, z_0)$. A especificação da função fase $l(\omega)$ consiste no tamanho do percurso total da frente de onda através do sistema duplo-refletor. Neste caso, $l(\omega)$ difere de uma constante l_0 da distância do ponto ω sobre a abertura ao foco virtual P_0 .

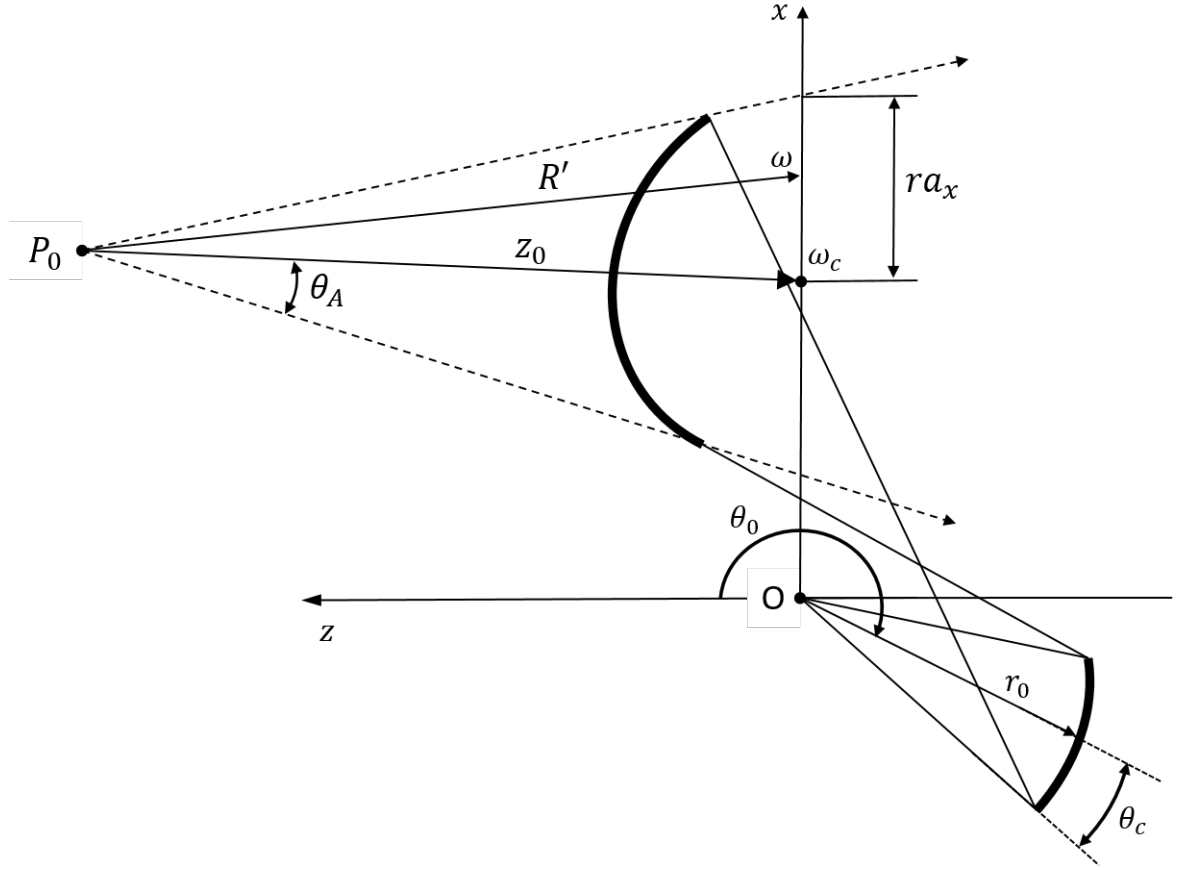


Figura 4.5: Configuração do duplo-refletor com fase linear na abertura.

Assim, a função fase $l(\omega)$ é escrita como [31]:

$$l(\omega) = [|\omega - \omega_c|^2 + z_0^2]^{1/2} + [l_0 - z_0]. \quad (4.52)$$

Para determinar os elementos da matriz Jacobiana, é necessário determinar as derivadas de até terceira ordem da função $l(\omega)$. Assim, as derivadas analíticas de primeira ordem em relação a ω e seu complexo conjugado $\bar{\omega}$ da função $l(\omega)$ são:

$$l_\omega = \frac{1}{2} [|\omega - \omega_c|^2 + z_0^2]^{-1/2} (\bar{\omega} - \omega_c), \quad (4.53a)$$

$$l_{\bar{\omega}} = \frac{1}{2} [|\omega - \omega_c|^2 + z_0^2]^{-1/2} (\omega - \omega_c). \quad (4.53b)$$

As derivadas de segunda ordem são dadas por:

$$l_{\omega\omega} = -\frac{1}{4} [|\omega - \omega_c|^2 + z_0^2]^{-3/2} (\bar{\omega} - \omega_c)^2, \quad (4.54a)$$

$$l_{\bar{\omega}\bar{\omega}} = -\frac{1}{4} [|\omega - \omega_c|^2 + z_0^2]^{-3/2} (\omega - \omega_c)^2, \quad (4.54b)$$

$$l_{\omega\bar{\omega}} = -\frac{1}{4} [|\omega - \omega_c|^2 + z_0^2]^{-3/2} |\omega - \omega_c|^2 + \frac{1}{2} [|\omega - \omega_c|^2 + z_0^2]^{-1/2}. \quad (4.54c)$$

Por fim, as derivadas de terceira ordem em relação a ω são expressas como:

$$l_{\omega\omega\omega} = \frac{3}{8} [|\omega - \omega_c|^2 + z_0^2]^{-5/2} (\bar{\omega} - \omega_c)^3, \quad (4.55a)$$

$$l_{\bar{\omega}\omega\omega} = \frac{3}{8} [|\omega - \omega_c|^2 + z_0^2]^{-5/2} |\omega - \omega_c|^2 (\omega - \omega_c) - \frac{1}{2} [|\omega - \omega_c|^2 + z_0^2]^{-3/2} (\omega - \omega_c), \quad (4.55b)$$

$$l_{\omega\bar{\omega}\omega} = \frac{3}{8} [|\omega - \omega_c|^2 + z_0^2]^{-5/2} |\bar{\omega} - \omega_c|^2 (\bar{\omega} - \omega_c) - \frac{1}{2} [|\omega - \omega_c|^2 + z_0^2]^{-3/2} (\bar{\omega} - \omega_c). \quad (4.55c)$$

A direção complexa ζ dos raios atravessando a abertura é dada aplicando l_ω na equação (2.8). A máxima inclinação dos raios é $\theta_A = 12^\circ$ em relação ao eixo $-z$ e é encontrada no contorno da abertura.

b) Modelo para a Distribuição de Densidade de Potência na Abertura

O diagrama de radiação da GO é representado por $I_A(\zeta)$, que corresponde à densidade de potência atravessando uma esfera unitária na direção $\zeta(\theta, \phi)$. O princípio da Conservação da Energia requer que a potência emitida pelo alimentador em O dentro do cone θ_c seja igual à potência radiada a partir do ponto P_0 dentro do cone θ_A .

Para a síntese, a potência especificada é imposta pelo fluxo de potência normal à abertura $G(\omega)$. Sua relação com $I_A(\zeta)$ em um ponto ω sobre a abertura é dada por:

$$G(\omega) = \frac{I_A(\zeta)}{[R'(\omega)]^2} \cos \theta, \quad (4.56)$$

onde θ é o ângulo da direção do raio em relação ao eixo $-z$ e $R'(\omega)$ está indicado na Figura 4.5. Em termos de ω , a expressão (4.56) se torna:

$$G(\omega) = I_A(\zeta) \frac{z_0}{(|\omega - \omega_c|^2 + z_0^2)^{3/2}}. \quad (4.57)$$

Para convergência do algoritmo numérico, $I_A(\zeta)$ é expressa analiticamente em termos de ω pela seguinte distribuição normalizada:

$$I_A(\omega) = I_{AO} \cos^\nu \theta(\omega) = \left[\frac{z_0}{(|\omega - \omega_c|^2 + z_0^2)^{1/2}} \right]^\nu. \quad (4.58)$$

Assim, a expressão de $G(\omega)$ em (4.57) é reescrita como [31]:

$$G_{ob}(\omega) = I_{AO} \frac{z_0^{\nu+1}}{(|\omega - \omega_c|^2 + z_0^2)^{(\nu+3)/2}}, \quad (4.59)$$

onde a constante I_{AO} é obtida a partir da normalização da potência total irradiada a partir do foco virtual P_0 :

$$I_{AO} \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_A} \cos^\nu \theta(\omega) \sin \theta d\theta d\phi = P_{rad} \quad (4.60)$$

Fazendo $P_{rad} = 4\pi$ e resolvendo a integral em (4.60), tem-se que:

$$I_{AO} = \frac{2(\nu + 1)}{1 - \cos^{\nu+1} \theta_A}.$$

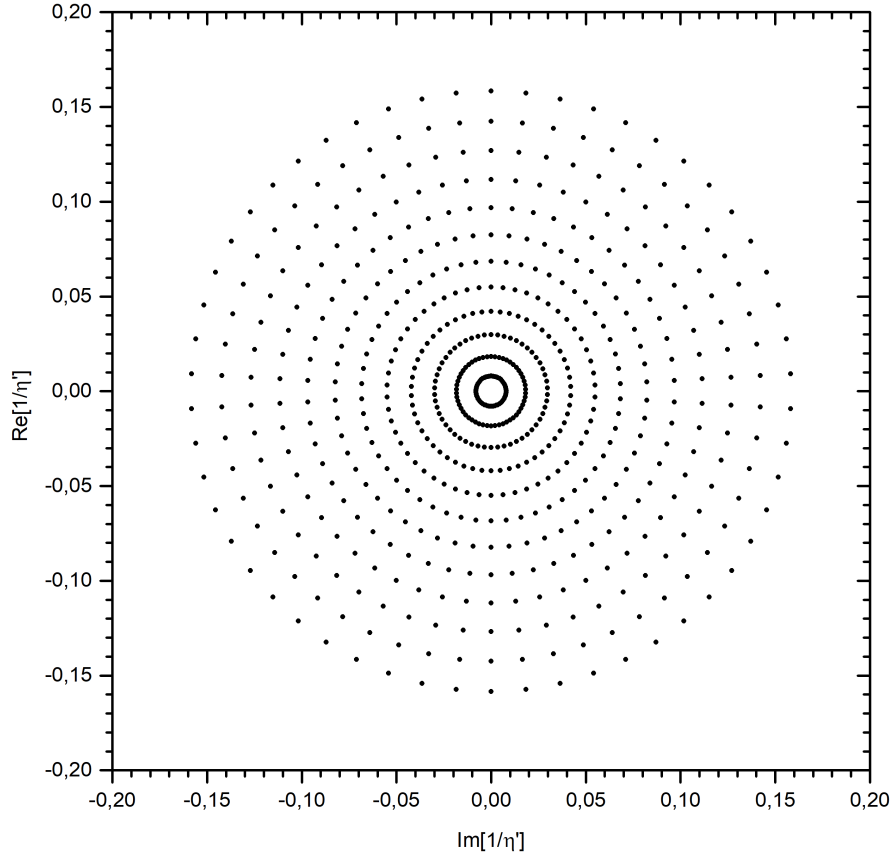
Para determinar os elementos da matriz Jacobiana, a derivada de (4.59) em relação a ω é requerida e é dada por

$$G_\omega^{\text{ob}}(\omega) = G_{\text{ob}}(\omega) \left[\frac{-(\nu + 3)(\bar{\omega} - \omega_c)}{2(|\omega - \omega_c|^2 + z_0^2)} \right]. \quad (4.61)$$

c) Análise das Superfícies Refletoras

Neste estudo de caso, um sistema duplo-refletor foi sintetizado para gerar uma densidade de potência na abertura em contorno circular ($\sigma = 1$) e raio igual a $r_{ax} = r_{ay} = 30$ cm com distribuição de amplitude de $G(\omega)$ definida na equação (4.59) e a fase na abertura $l(\omega)$ definida na equação (4.52). A densidade de potência na abertura foi escolhida de tal modo a gerar um diagrama de radiação em feixe circular com distribuição de potência uniforme na região de campo distante. O centro da abertura foi fixado sobre o eixo x a 45 cm da origem O do sistema de coordenadas. O subrefletor foi discretizado usando uma grade polar não-uniforme com $\alpha = 1,2$ definida com 12 anéis ($J = 12$) e 54 radiais ($K = 54$). O ângulo de *offset* foi definido em $\theta_0 = -17,68^\circ$ de acordo com a condição de Mizuguchi para polarização cruzada nula, e a distância r_0 entre a origem O do sistema de coordenadas e o centro de subrefletor é de 40 cm. Como alimentador foi adotado o modelo cosseno elevado da equação (2.117) com $n = 34,4137$, o que representa uma atenuação de $L_e = -15$ dB em $\theta_c = 18^\circ$, que corresponde ao ângulo de incidência na borda do subrefletor. A direção dos raios provenientes do alimentador pode ser observada na Figura 4.6.

Utilizando os parâmetros descritos acima e a formulação apresentada na Seção 4.4 para a configuração TB, determinou-se a superfície quádrlica confocal adotada como solução inicial, sendo ela definida pelos seguintes parâmetros: $a^{(0)} = -0,22741$ m, $b^{(0)} = 0,0810217$, $c^{(0)} = 0,0$ e $d^{(0)} = -0,47869$. A análise das direções dos raios refletidos da solução inicial e o traçado de raios no plano $\phi = 0$ podem ser observados nas Figuras 4.7 e 4.8, respectivamente. Além do mapeamento conformal e da simetria no plano xz que já são esperados, é importante observar que o subrefletor não bloqueia os raios refletidos do


 Figura 4.6: Direções de incidência da solução inicial no plano $1/\eta'$.

refletor principal e que a solução inicial possui fase uniforme na abertura.

O resultado da síntese foi obtido após 10 iterações, sendo que o erro médio dos resíduos associados aos operador $\Gamma[L]$ foi de $|\Gamma|_{mean} = 2,20171 \times 10^{-12}$ nos pontos interiores ao contorno e $|\Gamma|_{mean} = 3,60244 \times 10^{-13}$ nos pontos do contorno. As dimensões dos raios ao longo dos eixos x e y do subrefletor sintetizado foram de 10,0660 cm e 11,8286 cm, respectivamente. As direções dos raios refletidos pela superfície sintetizada no plano de abertura são ilustrados na Figuras 4.9 e a Figura 4.10 mostra o traçado de raios no plano de simetria.

Observando os resultados deste problema de síntese percebem-se distorções semelhantes àqueles que surgiram na síntese de duplo-refletores *offset* com fase uniforme na abertura, sendo elas, a distância entre o antepenúltimo anel e o penúltimo é menor que aquela entre o penúltimo e o último anel, e as distorções nas direções radiais próximas à borda. Além disso, é fácil perceber que o princípio da Conservação da Energia implícito na equação de Monge-Ampère está compensando a baixa iluminação do alimentador nas bordas do subrefletor ($L_e = -15\text{dB}$) direcionando os raios para o contorno, já que se busca uma distribuição de amplitude uniforme na região de campo distante.

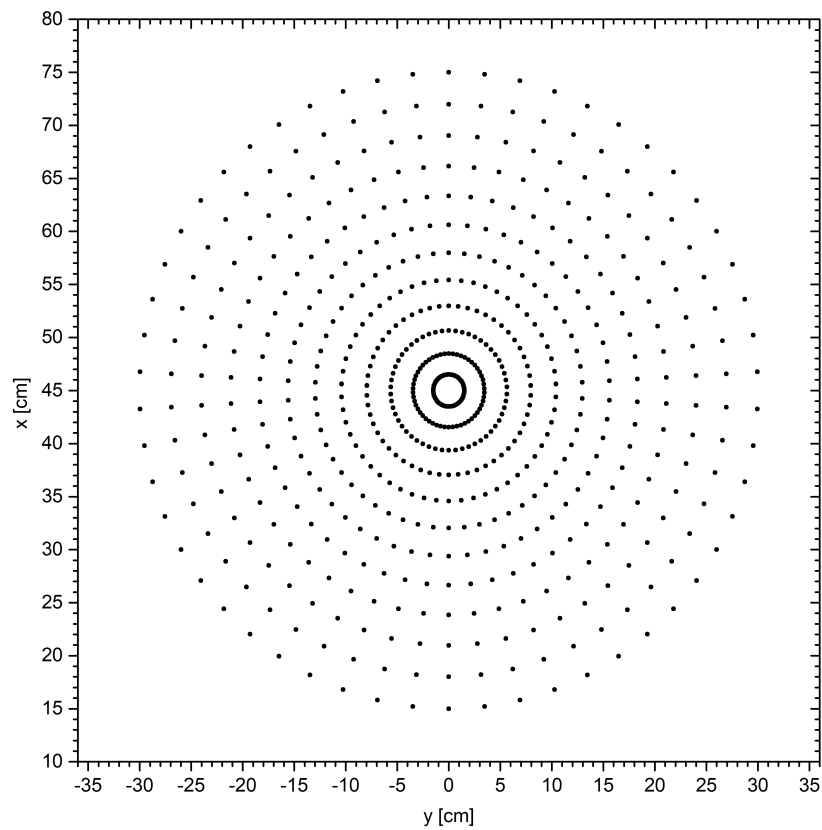


Figura 4.7: Direções de reflexão da solução inicial no plano xy .

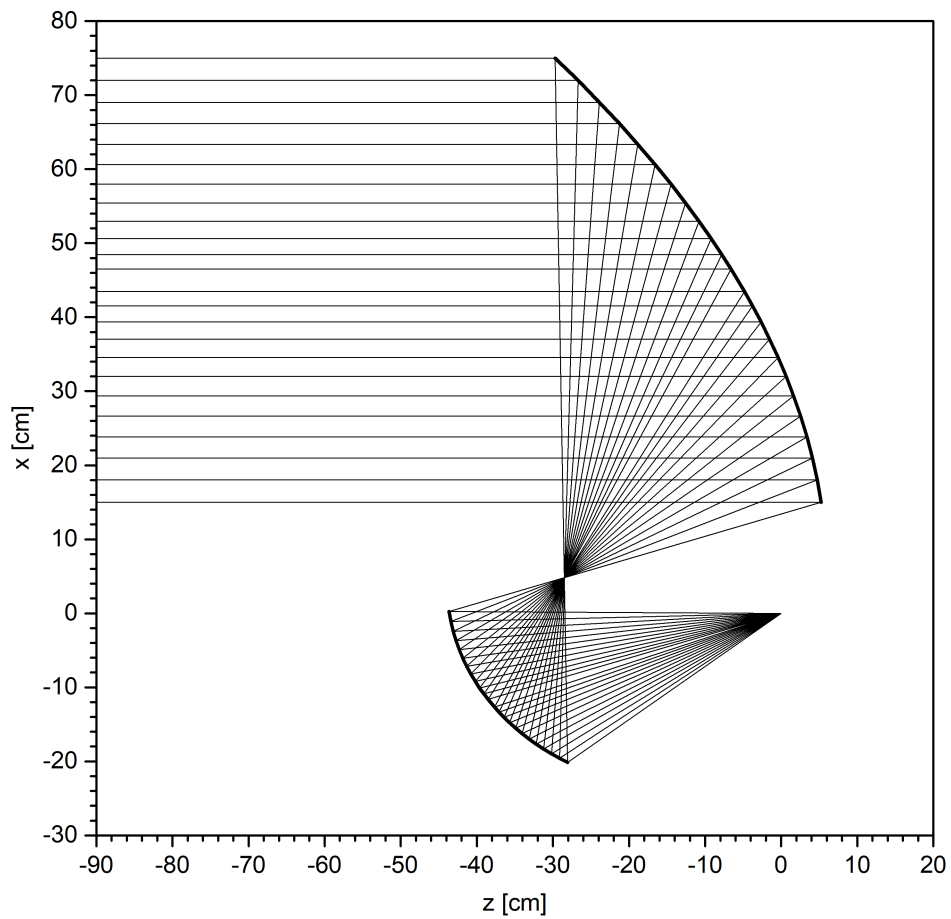


Figura 4.8: Traçado de raios da solução inicial no plano xz .

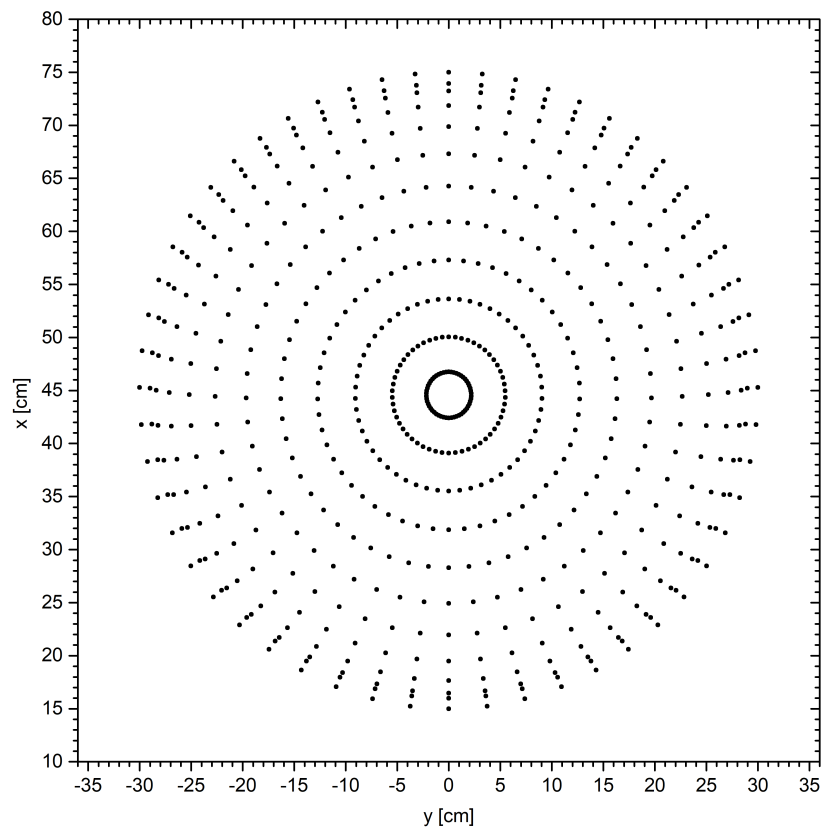


Figura 4.9: Direções de reflexão da superfície sintetizada no plano xy .

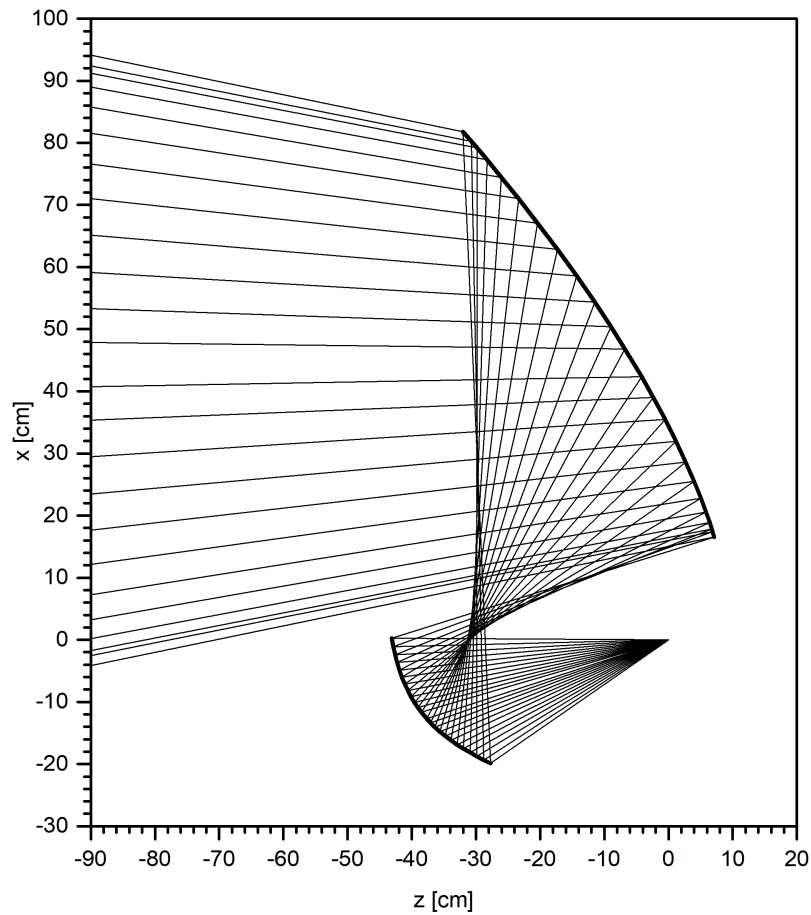


Figura 4.10: Traçado de raios da superfície sintetizada no plano xz .

Uma vez obtidas as superfícies da síntese, as mesmas foram interpoladas por pseudo-*splines* quínticas (3.36) e, então, analisadas via aproximações da PO mais correntes de borda [47], [48]. Conforme pode ser observado na Figura 4.11, o resultado da interpolação apresentou um desvio significativo de até $\pm 3^\circ$ para a superfície do refletor principal, indicando que a superfície contínua interpolada representa de forma satisfatória a superfície sintetizada.

A análise das superfícies refletoras é apresentada na Figura 4.12, que ilustra o diagrama de radiação nos planos $\phi = 0^\circ$ e $\phi = 90^\circ$ com as respectivas polarizações principal e cruzada. O traçado pontilhado na cor preta representa o diagrama da GO esperado na região de campo distante. Pode-se observar que o diagrama da PO aproxima-se das especificações desejadas e corroboram os resultados apresentados em [31]. As diferenças observadas podem ser atribuídas a erros de discretização, interpolação e aos efeitos difrativos não contabilizados na síntese. A polarização cruzada no plano $\phi = 0^\circ$ ficou abaixo de -10 dB e a baixa polarização cruzada em ambos os planos de simetria são também resultantes da escolha do ângulo de *offset*, que foi feito de acordo com a condição de Mizugutch.

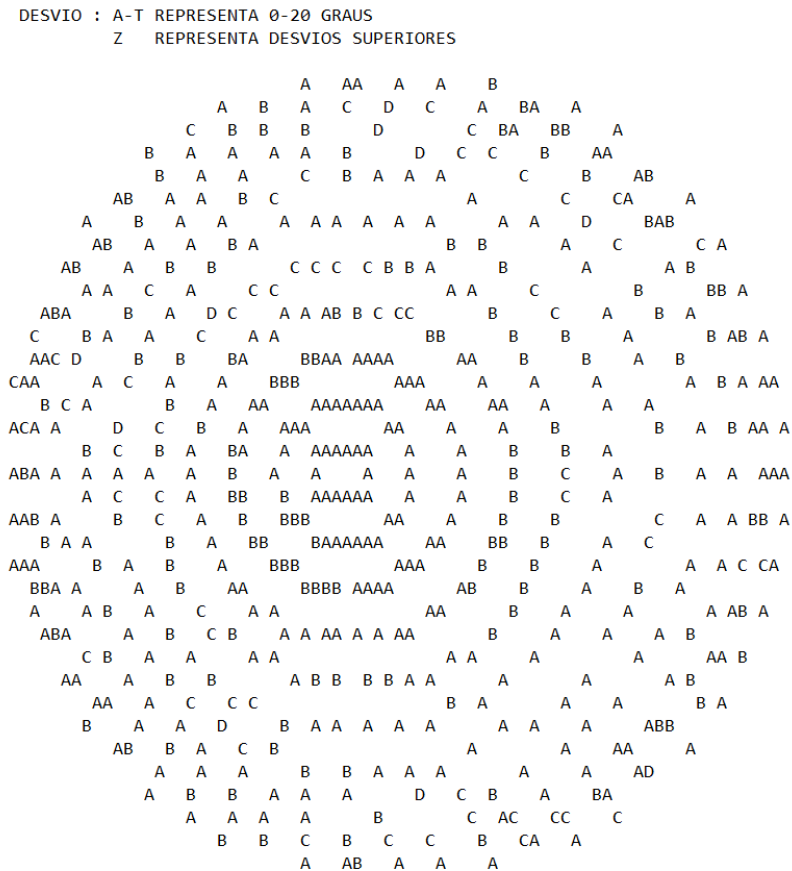


Figura 4.11: Desvio em graus da superfície modelada em relação ao resultado da síntese.

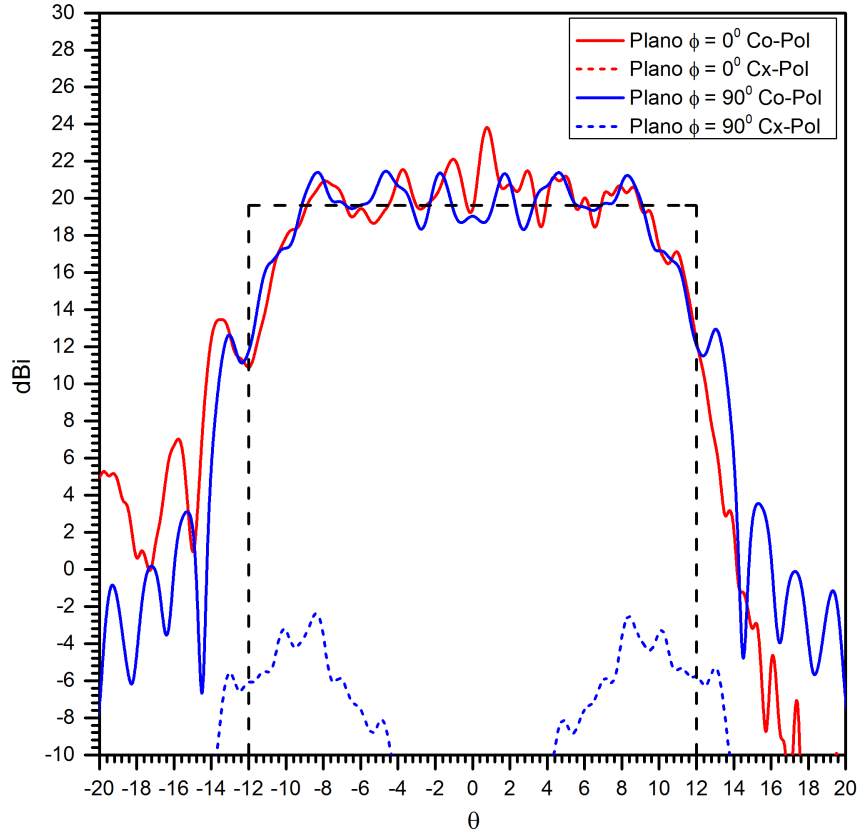


Figura 4.12: Diagrama de radiação da superfície modelada.

4.7.2 Controle do Diagrama de Radiação em Cobertura com Formato de Bumerangue

Neste segundo estudo de caso, o algoritmo de síntese é avaliado para sintetizar um campo na abertura que não apresenta simetria circular. Este exemplo foi apresentado [31] e consiste em um estudo de caso clássico da década de 1980.

a) Modelo para a Fase na Abertura

A função fase na abertura $l(\omega)$ é definida como [31]:

$$l(\omega) = A_1(x - x_0)^2 + A_2y^2 + A_3(x - x_0)y^2 + l_0, \quad (4.62)$$

onde $x_0 = \omega_0$, x é a parte real de ω e y é a parte imaginária de ω . As derivadas analíticas requeridas para determinar a matriz Jacobiana são apresentadas abaixo. As derivadas de primeira ordem da função fase são:

$$l_\omega = A_1(x - x_0) + 0,5A_3y^2 - i[A_2y + A_3(x - x_0)y], \quad (4.63a)$$

$$l_{\bar{\omega}} = A_1(x - x_0) + 0,5A_3y^2 + i[A_2y + A_3(x - x_0)y]. \quad (4.63b)$$

As derivadas de segunda ordem são dadas por:

$$l_{\omega\omega} = 0,5 [A_1 - A_2 - A_3(x - x_0) - i2A_3y], \quad (4.64a)$$

$$l_{\omega\bar{\omega}} = 0,5 [A_1 + A_2 + A_3(x - x_0)], \quad (4.64b)$$

$$l_{\bar{\omega}\bar{\omega}} = 0,5 [A_1 - A_2 - A_3(x - x_0) + i2A_3y]. \quad (4.64c)$$

E as derivadas de terceira ordem são:

$$l_{\omega\omega\omega} = -0,75A_3, \quad (4.65a)$$

$$l_{\omega\bar{\omega}\omega} = 0,25A_3, \quad (4.65b)$$

$$l_{\bar{\omega}\bar{\omega}\omega} = 0,25A_3. \quad (4.65c)$$

b) Modelo para a Distribuição de Densidade de Potência na Abertura

O modelo para a densidade de potência na abertura é dado por [31]:

$$G(\omega) = G_0 \exp [-B_x(x - x_0)^2 - B_y y^2]. \quad (4.66)$$

E a derivada de $G_{ob}(\omega)$ em relação a ω é expressa como:

$$G_{\omega}^{ob}(\omega) = G_{ob}(\omega) \{-[B_x(x - x_0) - iB_y y]\}. \quad (4.67)$$

c) Análise das Superfícies Refletoras

Neste exemplo, um sistema duplo-refletor foi sintetizado para gerar um campo na abertura em contorno circular ($\sigma = 1$) e raio igual a $r_{ax} = r_{ay} = 20$ cm com distribuição de amplitude $G(\omega)$ definida na equação (4.66) e fase $l(\omega)$ definida na equação (4.62). B_x foi obtido para uma atenuação de -13 dB na borda da abertura e $B_y = 0$. A densidade de potência na abertura foi escolhida de tal modo a gerar um feixe com formato de *boomerang* na região de campo distante [31]. O centro da abertura foi fixado sobre o eixo x a 28 cm da origem O do sistema de coordenadas. Como alimentador foi adotado o modelo cosseno elevado (2.117) com $n = 27,5$, o que representa uma atenuação de $L_e = -14.8578$ dB em $\theta_c = 20^\circ$, que corresponde ao ângulo de incidência na borda do subrefletor. O ângulo de *offset* é $\theta_0 = -14,95^\circ$ e a distância r_0 entre a origem O do sistema de coordenadas e o centro de subrefletor é de 40 cm. O subrefletor foi discretizado com uma grade polar não-uniforme ($\alpha = 0,7$) definida com 9 anéis ($J = 9$) e 54 radiais ($K = 54$).

Utilizando os parâmetros descritos acima e a formulação apresentada na Seção 4.4 para a configuração TB determinou-se a superfície quádrlica confocal adotada como solução inicial, sendo ela definida pelos seguintes parâmetros: $a^{(0)} = -0,279163$ m, $b^{(0)} = 0,087109$, $c^{(0)} = 0,0$ e $d^{(0)} = -0.335934$. As direções de incidência da solução inicial estão

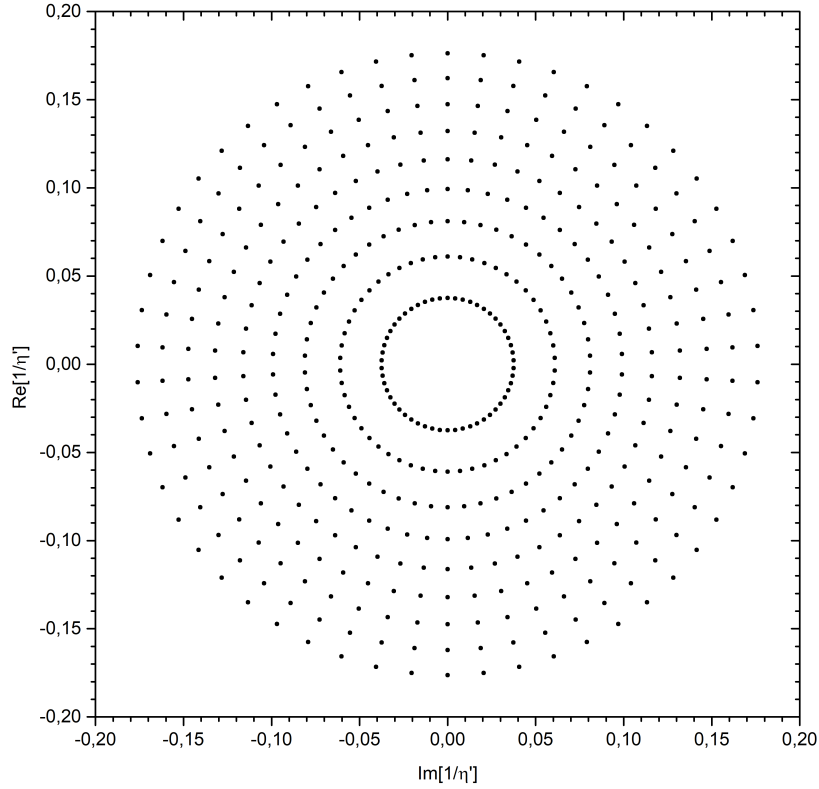


Figura 4.13: Direções de incidência da solução inicial no plano $1/\eta'$.

ilustrados na Figura 4.13, enquanto que a análise das direções dos raios refletidos pela solução inicial e o traçado de raios no plano $\phi = 0$ podem ser observadas nas Figuras 4.14 e 4.15, respectivamente. Além do mapeamento conformal e da simetria no plano xz que já são esperados, é importante observar que o subrefletor não bloqueia os raios refletidos do refletor principal e que a solução inicial possui fase uniforme.

O resultado da síntese foi obtido após 22 iterações, sendo que o erro médio dos resíduos associados aos operador $\Gamma[L]$ foi de $|\Gamma|_{mean} = 5.83967 \times 10^{-13}$ nos pontos interiores ao contorno e $|\Gamma|_{mean} = 4.46286 \times 10^{-13}$ nos pontos do contorno. As dimensões dos raios ao longo dos eixos x e y do subrefletor sintetizado foram de 12,2171 cm e 13,2233 cm respectivamente. As direções dos raios refletidos pela superfície sintetizada no plano de abertura e o traçado de raios no plano de simetria estão ilustrados nas Figuras 4.16 e 4.17, respectivamente. Observando a Figura 4.16 pode-se observar um deslocamento dos raios refletidos em direção à borda da abertura ao longo da direção y para compensar a baixa iluminação na borda do subrefletor ($L_e = -14,8578$ dB), visto que a função $G(\omega)$ especifica uma distribuição de amplitude uniforme nesta direção. Além disso, as distorções descritas anteriormente aparecerem neste estudo de caso próximas à borda, também na direção do eixo y . Pode-se notar que os pontos dos três últimos anéis quase se sobrepõem e as distorções nas radiais também são verificadas. Já na borda na direção do eixo x , estas distorções não estão presentes visto que a diferença entre a iluminação nas bordas do subrefletor e do contorno da abertura nesta direção é de apenas 1,8578 dB.

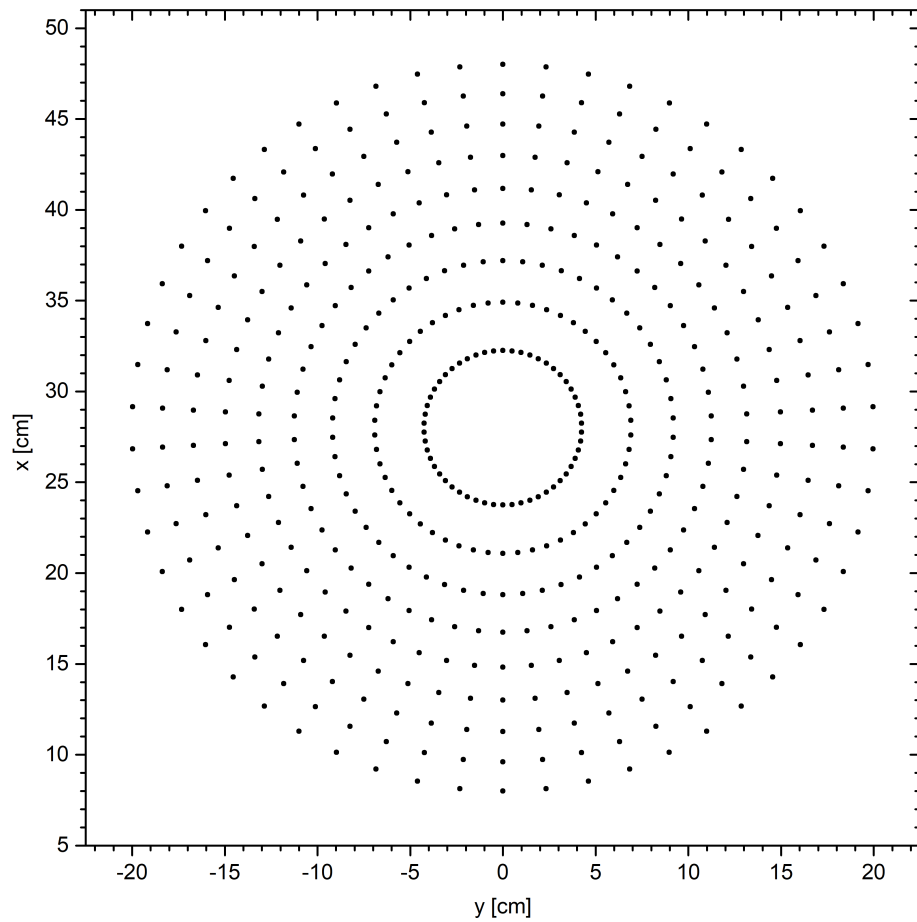


Figura 4.14: Direções de reflexão da solução inicial no plano xy .

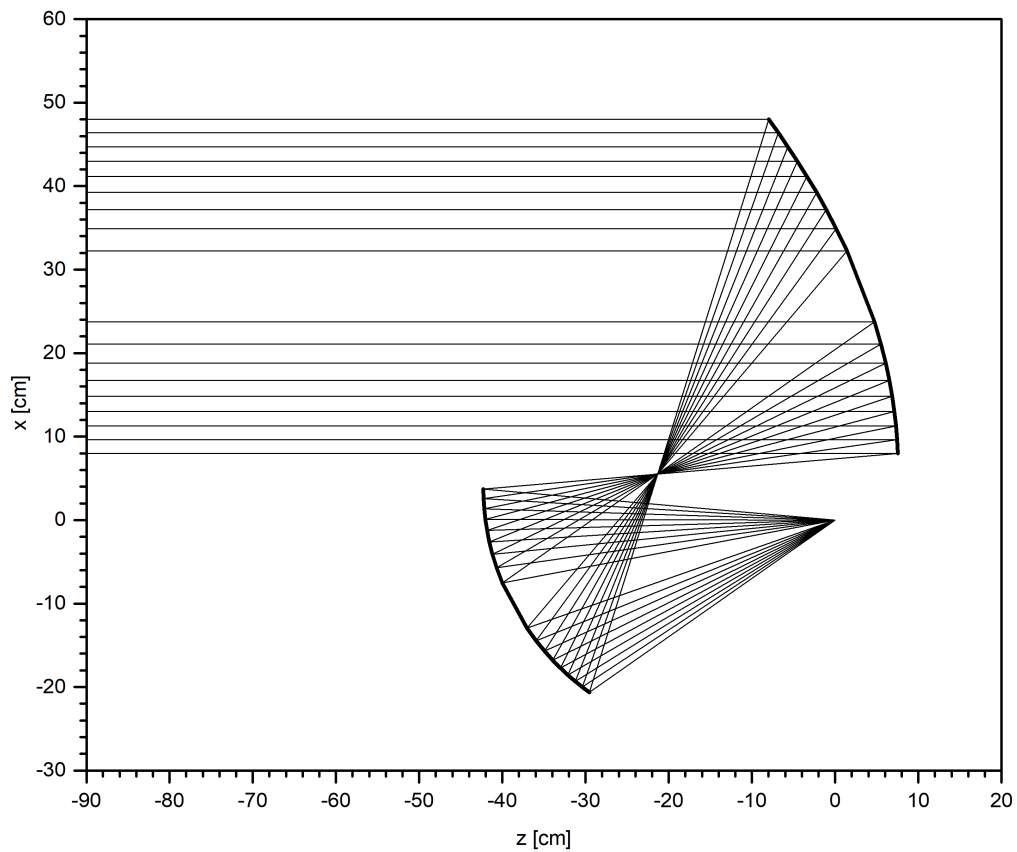


Figura 4.15: Traçado de raios da solução inicial no plano xz .

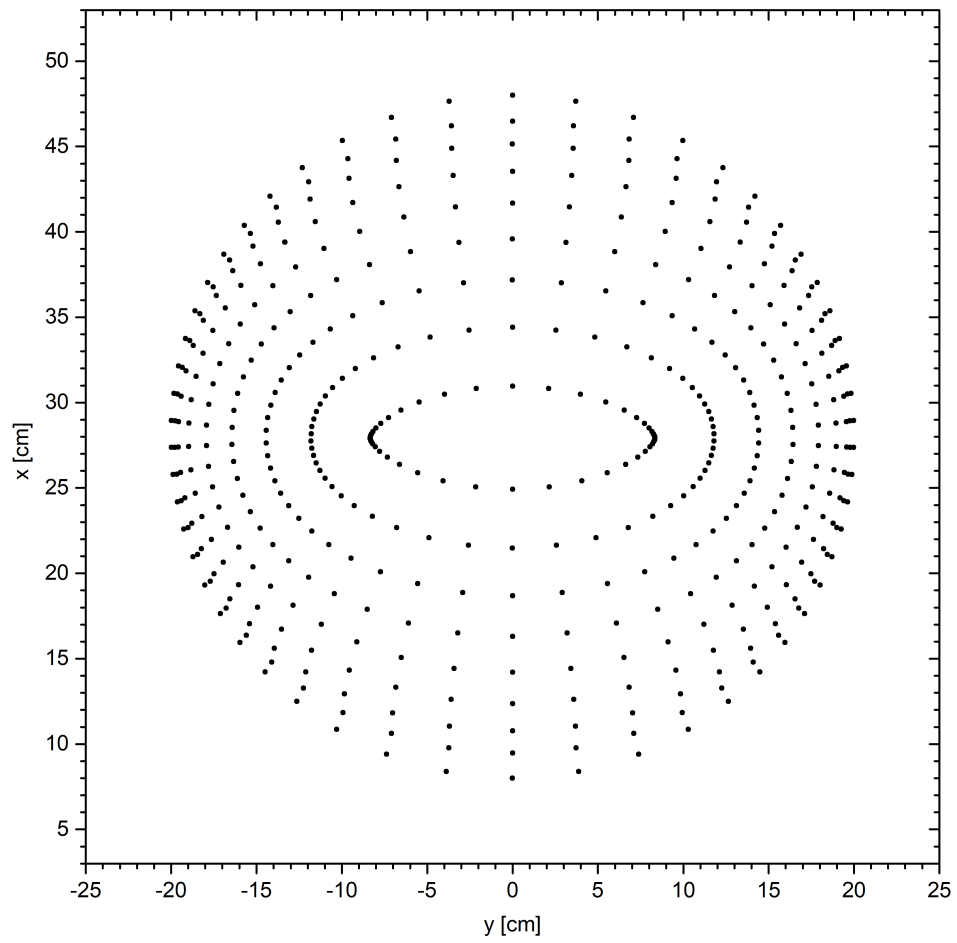


Figura 4.16: Direções de reflexão da superfície sintetizada no plano xy .

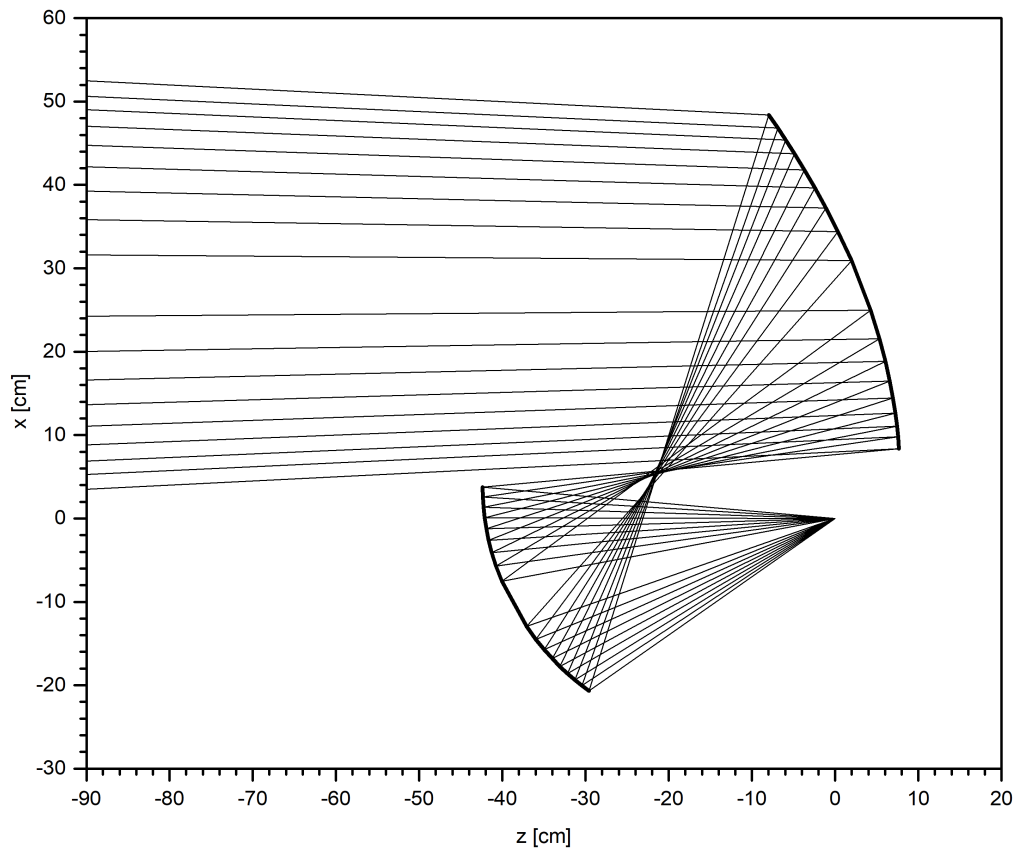


Figura 4.17: Traçado de raios da superfície sintetizada no plano xz .

A Figura 4.18 ilustra o resultado da interpolação da superfície modelada por pseudo-*splines* quínticas (3.36) para o refletor principal. A diferença entre os pontos sintetizados e os respectivos pontos interpolados é dada em graus. Conforme pode ser observado, o resultado da interpolação apresentou um desvio significativo de até $\pm 3^\circ$, indicando que a superfície contínua interpolada representa de forma satisfatória a superfície sintetizada.

Em seguida, a análise das superfícies refletoras via aproximações da PO mais correntes de borda [47], [48] é apresentada nas Figuras 4.19 e 4.20, que ilustram o diagrama de radiação no plano uv com as respectivas polarizações principal e cruzada. Dos resultados apresentados, é possível observar que o sistema duplo-refletor gerou um diagrama de radiação com formato de boomerang, conforme esperado, com diretividade de 28,60 dBi no feixe principal. Além disso, o sistema modelado apresentou baixa polarização cruzada ficando abaixo de $-7,014$ dB. Com estes resultados, pode-se concluir que o algoritmo de síntese consegue projetar um sistema duplo-refletor que gera um feixe modelado na região de campo distante, bastando para isso especificar adequadamente a fase $l(\omega)$ e a densidade de potência normal à abertura $G(\omega)$.

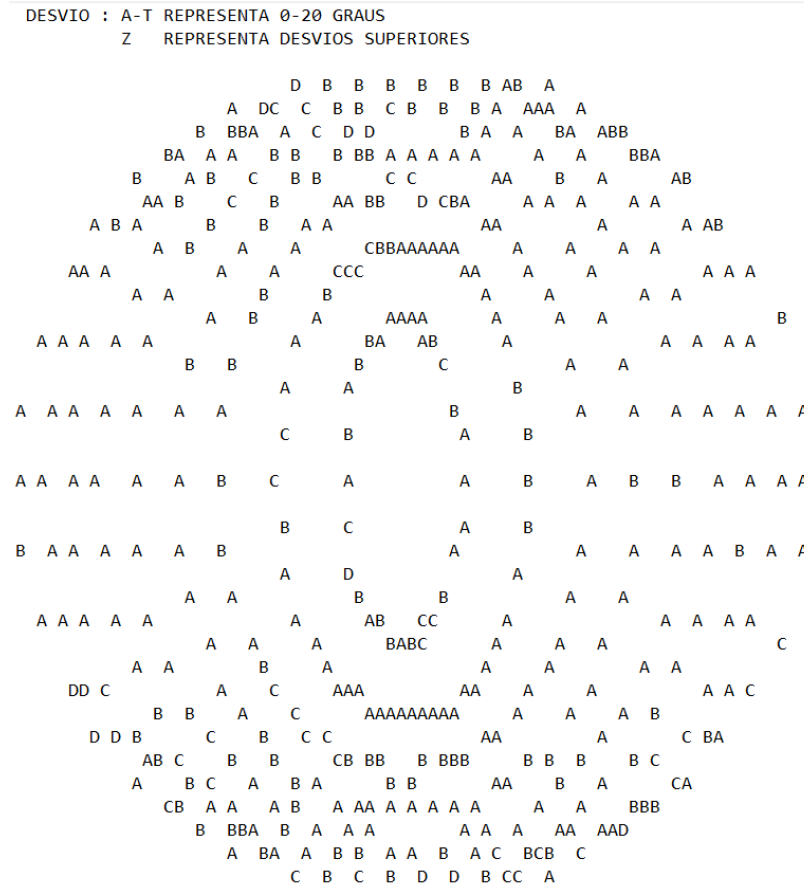


Figura 4.18: Desvio em graus da superfície modelada em relação ao resultado da síntese.

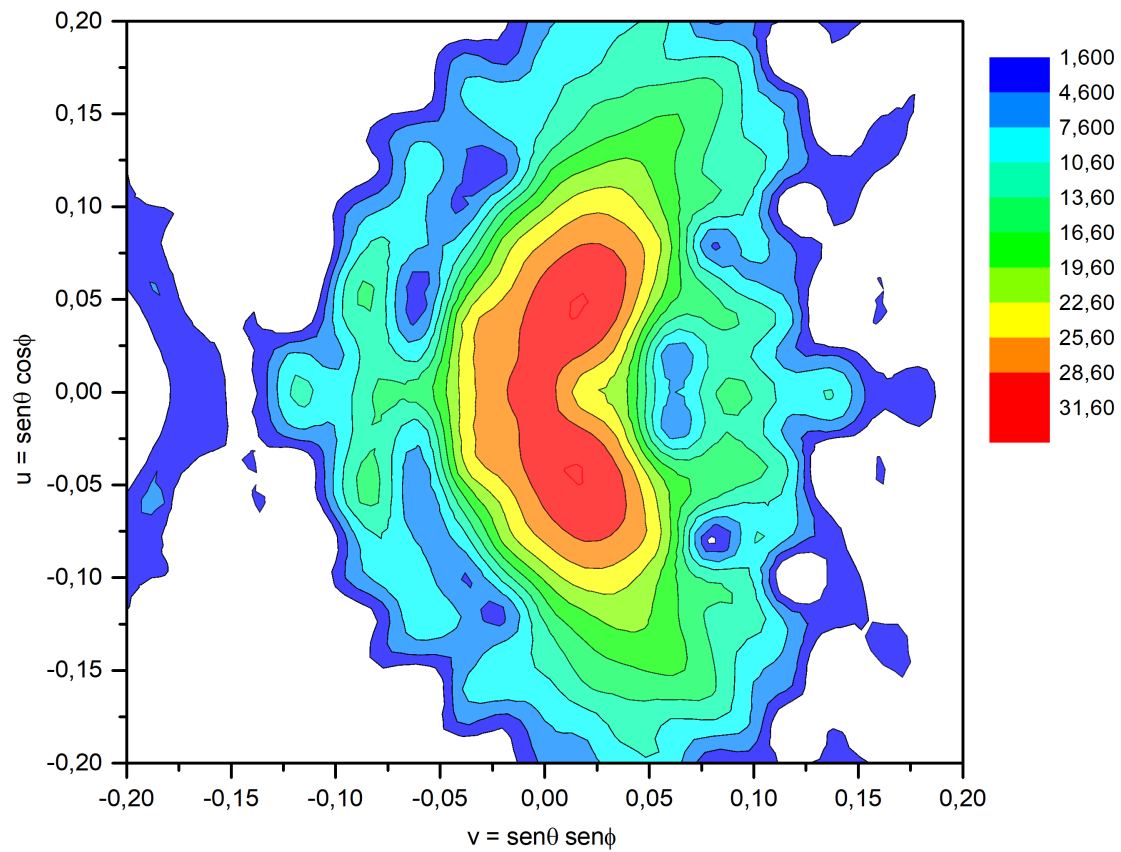


Figura 4.19: Diagrama de radiação no plano uv - polarização principal.

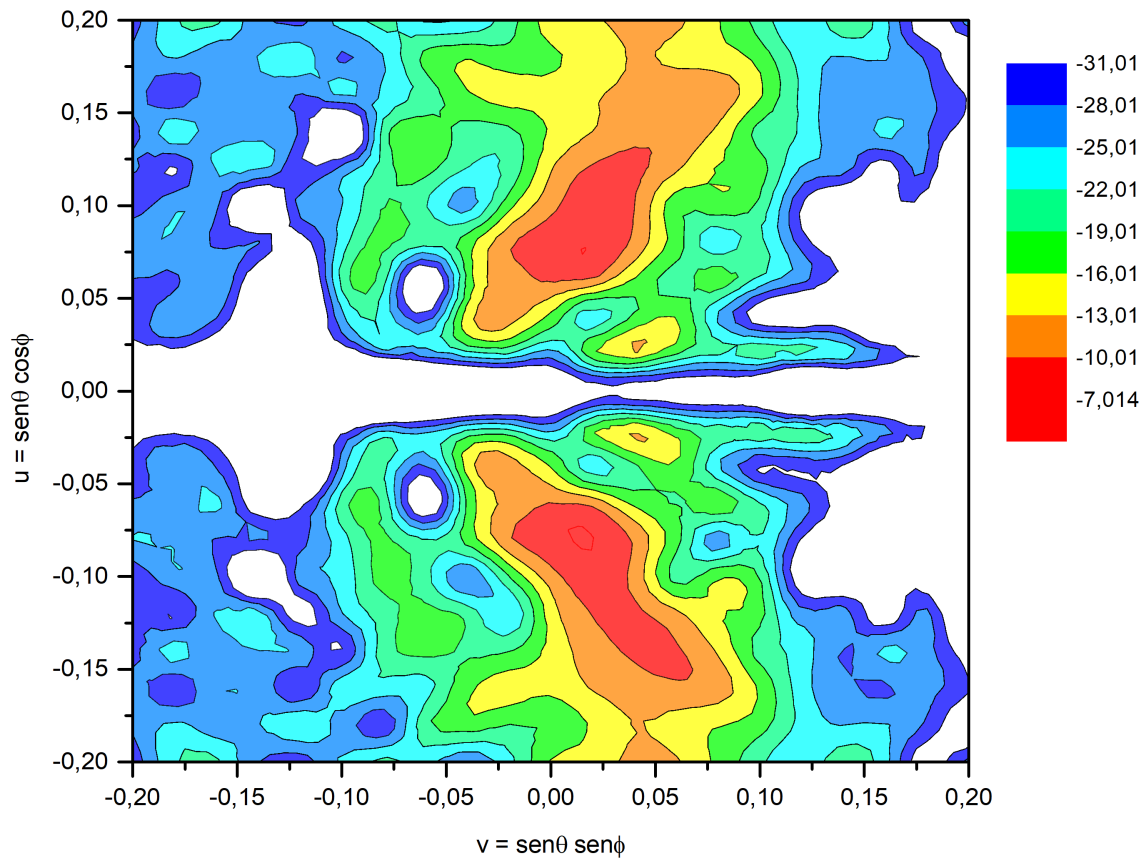


Figura 4.20: Diagrama de radiação no plano uv - polarização cruzada.

4.7.3 Projeto de um Sistema Duplo-Refletor com Abertura Super-Elíptica

Neste estudo de caso, um sistema duplo-refletor foi sintetizado para gerar um campo na abertura em contorno super-elíptico ($\sigma = 2,5$) e raio igual a $r_{ax} = r_{ay} = 30$ cm com distribuição de amplitude $G(\omega)$ definida na equação (2.129) para uma atenuação de -10 dB na borda da abertura (ou seja, $\psi = 2,30259$) e fase uniforme. O centro da abertura foi fixado sobre o eixo x a 50 cm da origem O do sistema de coordenadas. Como alimentador foi adotado o modelo cosseno elevado da equação (2.117) com $n = 78$ o que representa uma atenuação de $L_e = -15$ dB em $\theta_c = 12^\circ$, que corresponde ao ângulo de incidência na borda do subrefletor. O subrefletor foi discretizado usando uma grade polar não-uniforme com $\alpha = 0,85$ definida com 12 anéis ($J = 12$) e 54 radiais ($K = 54$). O ângulo de *offset* é $\theta_0 = 30,2^\circ$ e a distância r_0 entre a origem O do sistema de coordenadas e o centro de subrefletor é de 22,5 cm.

Utilizando os parâmetros descritos acima e a formulação apresentada na Seção 4.4 para a configuração TT determinou-se a superfície quádrlica confocal adotada como solução inicial, sendo ela definida pelos seguintes parâmetros: $a^{(0)} = 0,252873$ m, $b^{(0)} = 0,340299$, $c^{(0)} = 0,0$ e $d^{(0)} = -2,25936$. A direção dos raios incidentes está ilustrado na Figura 4.21 e a análise das direções dos raios refletidos da solução inicial e o traçado de raios no plano $\phi = 0$ podem ser observadas nas Figuras 4.22 e 4.23, respectivamente.

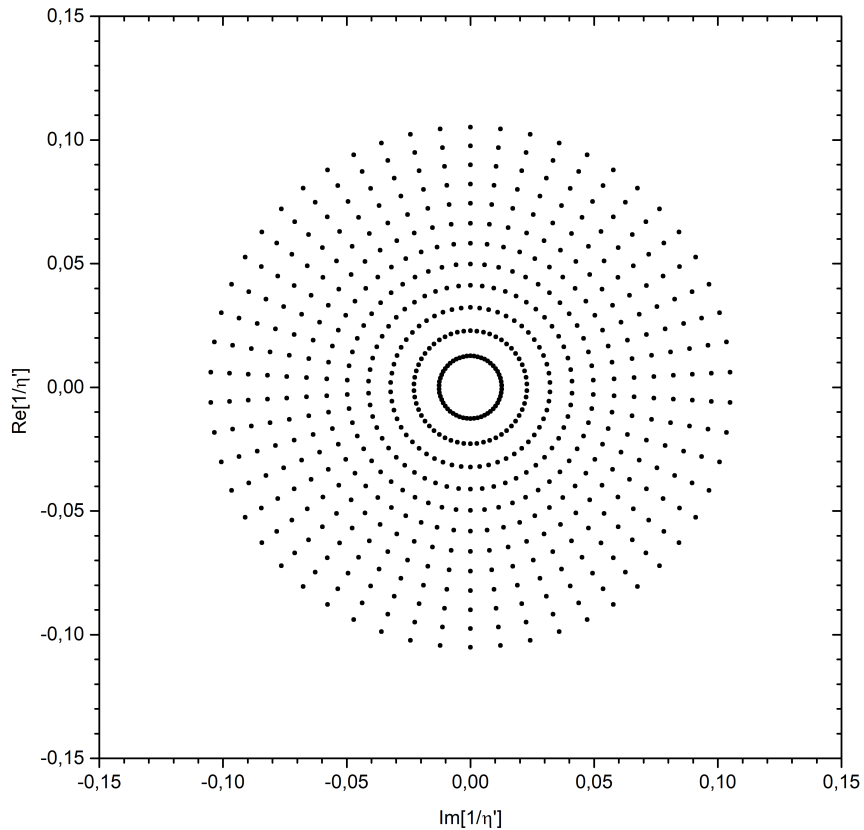


Figura 4.21: Direções de incidência da solução inicial no plano $1/\eta'$.

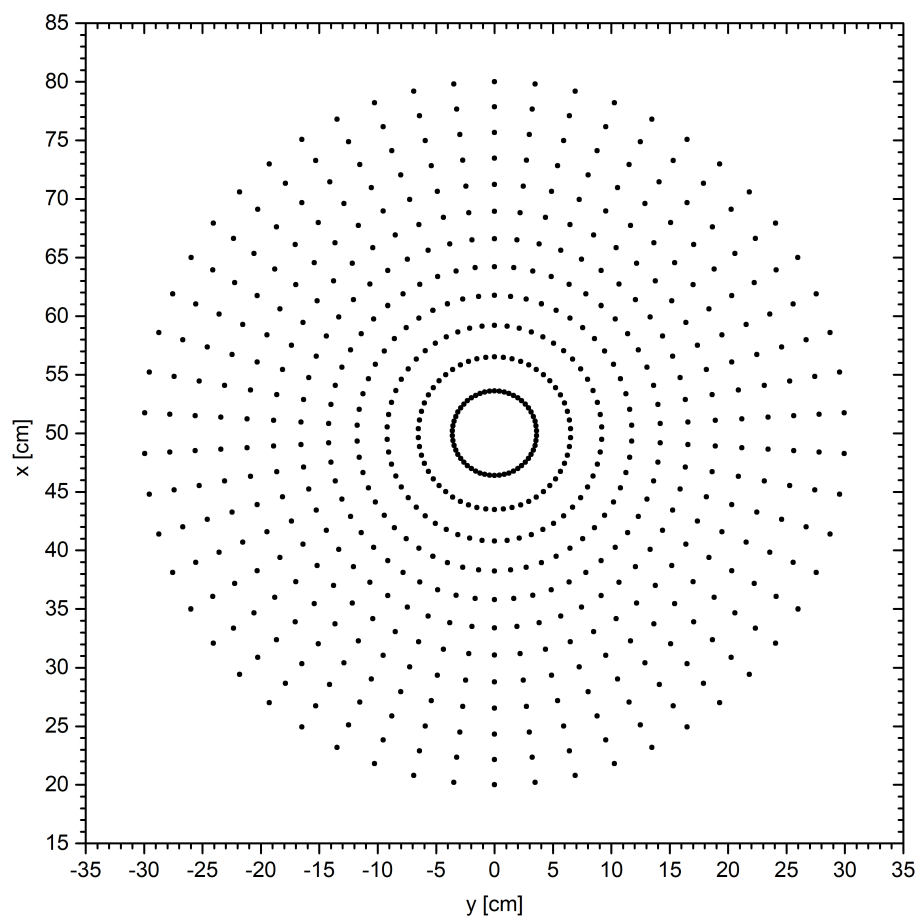


Figura 4.22: Direções de reflexão da solução inicial no plano xy .

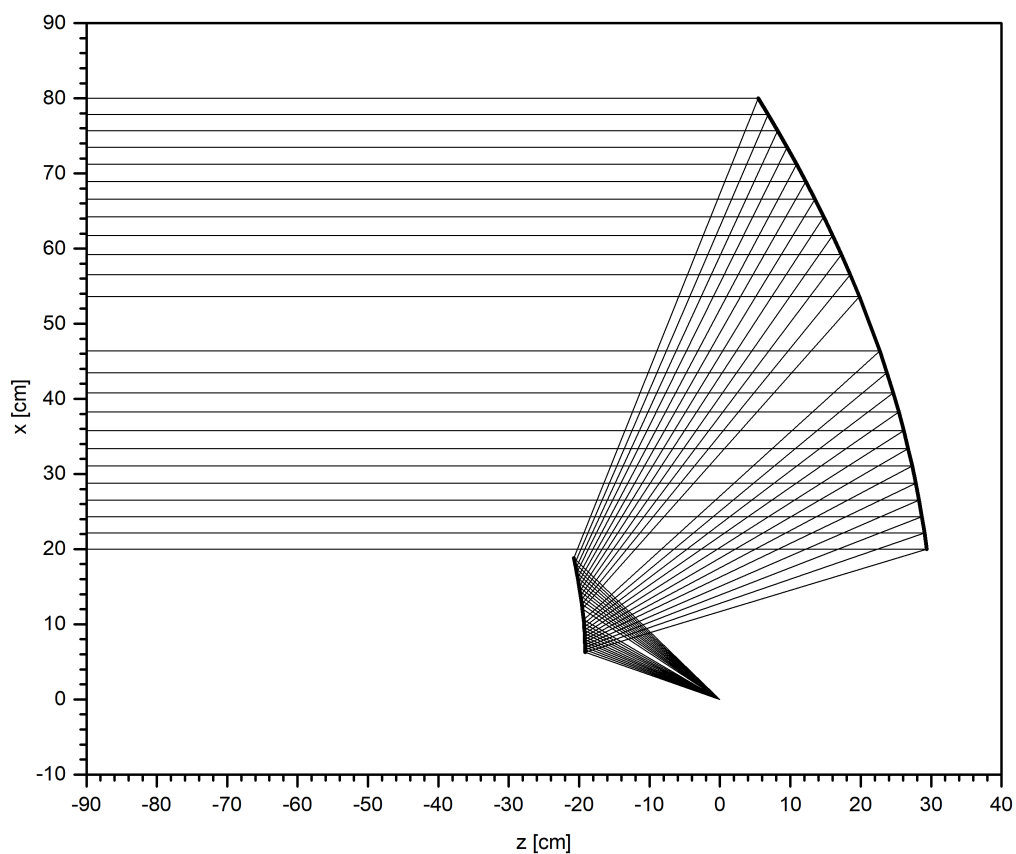


Figura 4.23: Traçado de raios da solução inicial no plano xz .

O resultado da síntese foi obtido após 16 iterações, sendo que o erro médio dos resíduos associados aos operador $\Gamma[L]$ foi de $|\Gamma|_{mean} = 3.03444 \times 10^{-11}$ nos pontos interiores ao contorno e $|\Gamma|_{mean} = 2.61483 \times 10^{-12}$ nos pontos do contorno. As dimensões dos raios ao longo dos eixos x e y do subrefletor sintetizado foram de 6,3228 cm e 4,9938 cm, respectivamente. As direções dos raios refletidos pela superfície sintetizada no plano de abertura são ilustrados na Figura 4.24 e a Figura 4.25 mostra o traçado de raios no plano de simetria. Pode ser observado que ao impor uma modificação no formato do contorno da abertura, parte considerável da energia foi deslocada para as regiões $\phi = \pm 45^\circ$ e $\phi = \pm 135^\circ$ para definir as bordas super-elípticas. Além disso, surgiram distorções ao longo das radiais, em particular naquelas próximas às direções horizontal e vertical da abertura.

A Figura 4.26 ilustra o resultado da interpolação por pseudo-*splines* quínticas (3.36) para o refletor principal. Conforme pode ser observado, o resultado da interpolação apresentou um desvio significativo de até $\pm 2^\circ$, indicando que a superfície contínua interpolada representa de forma satisfatória a superfície sintetizada. A análise das superfícies refletoras via aproximações da PO mais correntes de borda [47], [48] é apresentada nas Figuras 4.27 e 4.28, que ilustram o diagrama de radiação no plano uv com as respectivas polarizações principal e cruzada.

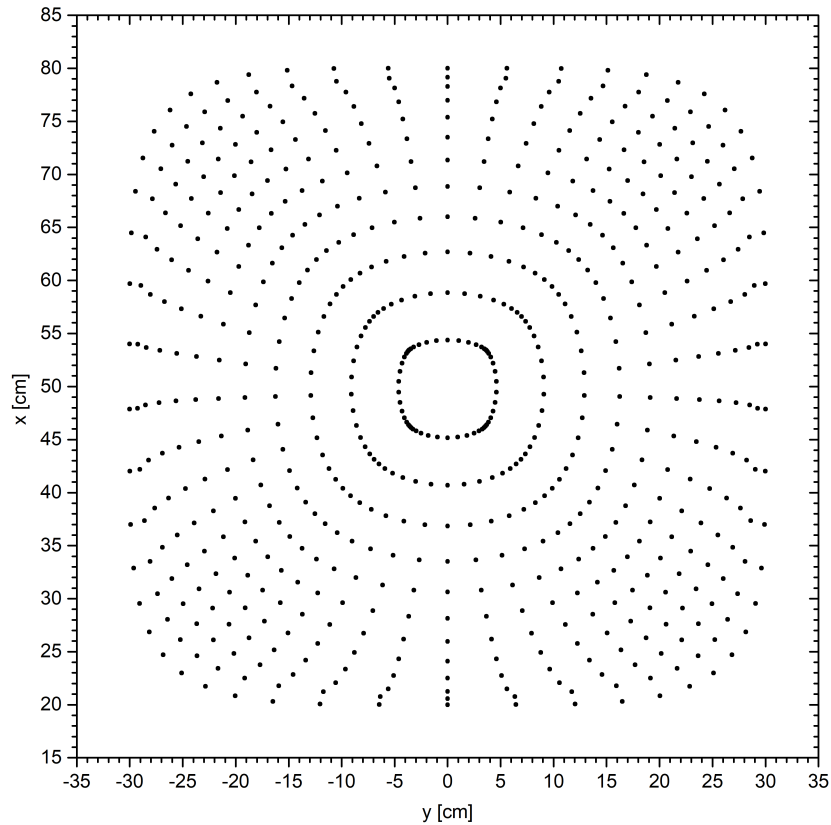


Figura 4.24: Direções de reflexão da superfície sintetizada no plano xy .

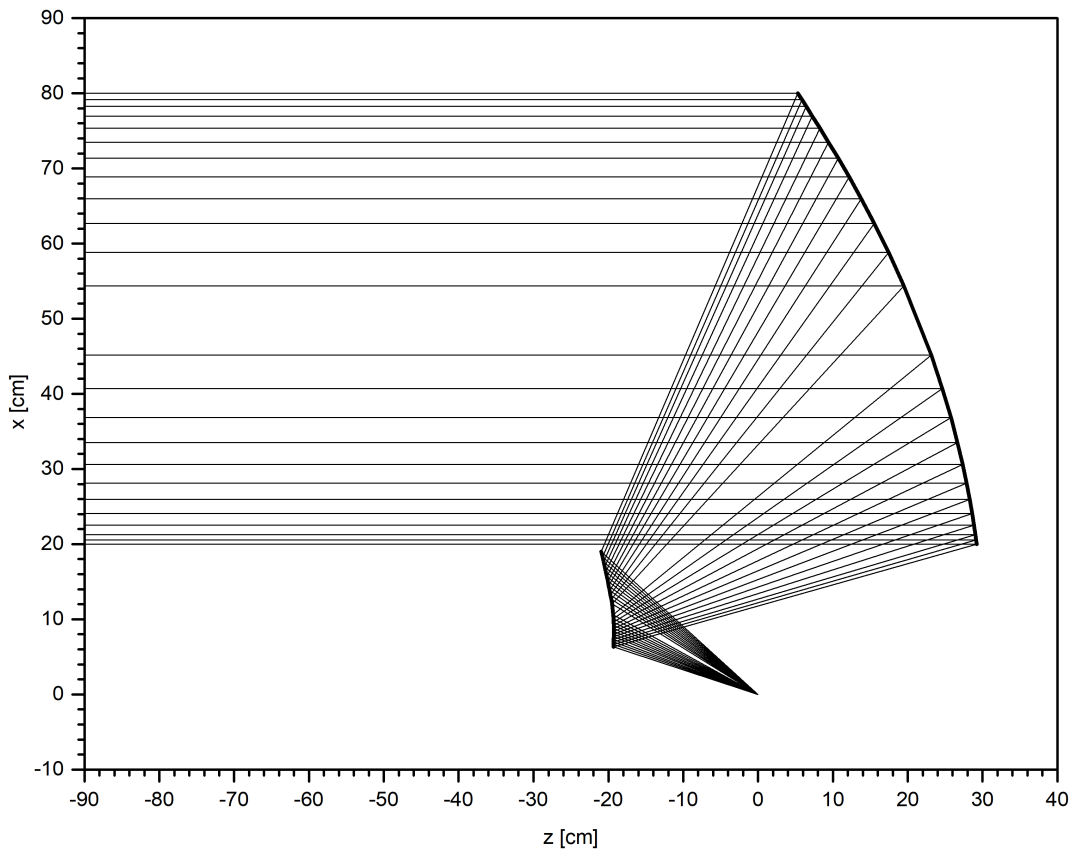


Figura 4.25: Traçado de raios da superfície sintetizada no plano xz .

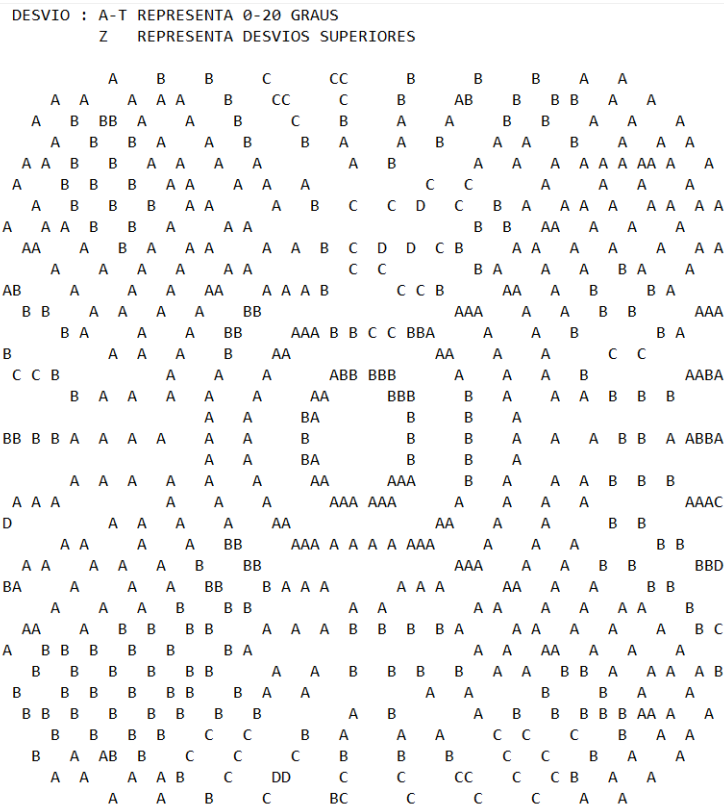


Figura 4.26: Desvio em graus da superfície modelada em relação ao resultado da síntese.

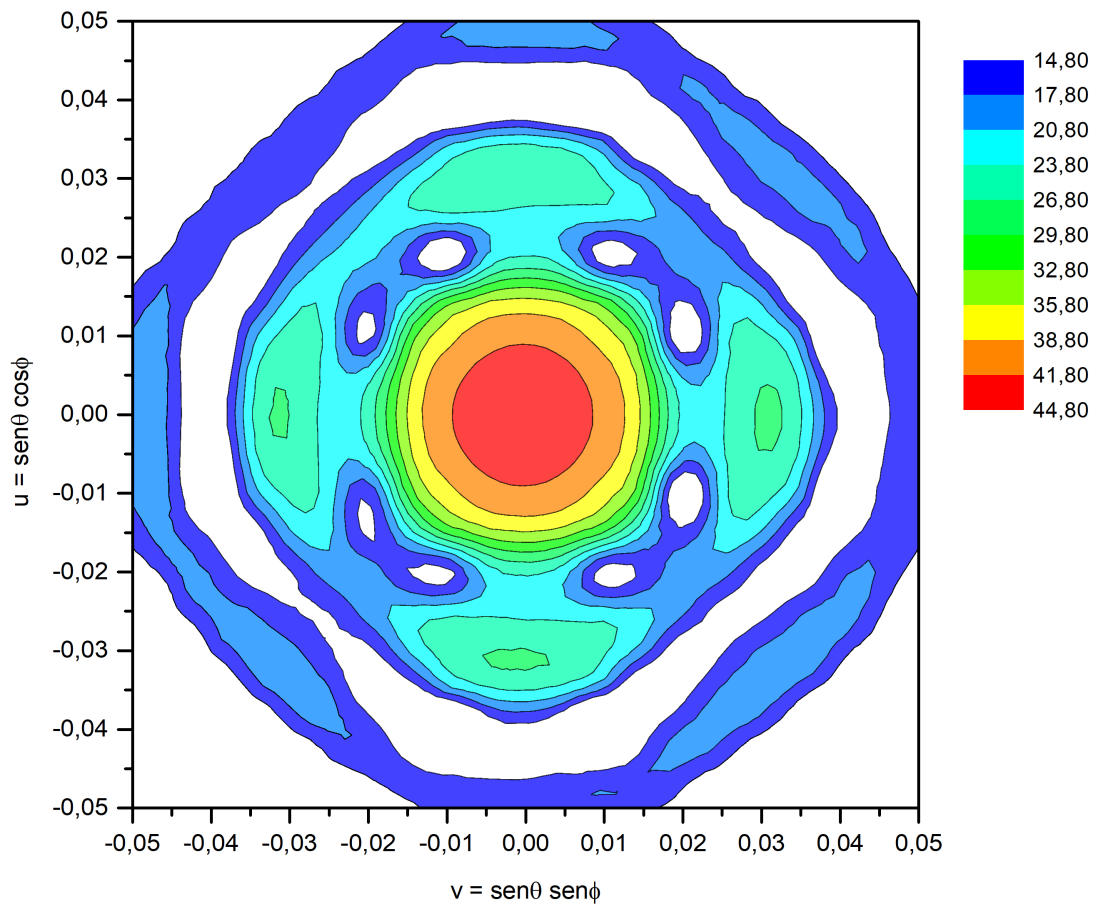


Figura 4.27: Diagrama de radiação no plano uv - polarização principal.

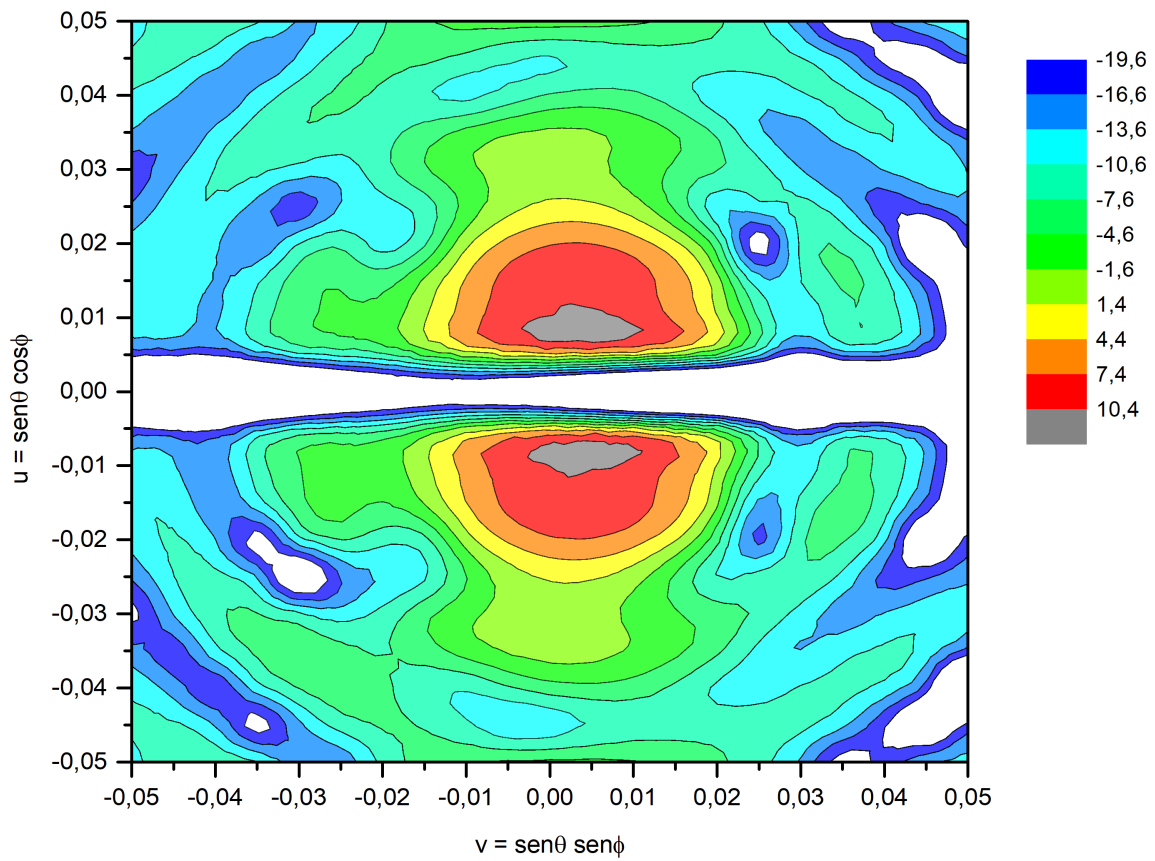


Figura 4.28: Diagrama de radiação no plano uv - polarização cruzada.

4.8 Considerações Finais

Neste capítulo o problema da síntese de um sistema duplo-refletor com fase não-uniforme formulado em [19] foi resolvido numericamente usando superfícies quádricas confocais com eixos deslocados para representar a superfície do subrefletor sintetizado. Para validar o algoritmo foram apresentados três estudos de casos clássicos e o algoritmo foi validado visto que as especificações iniciais foram alcançadas. Além disso, os estudos de casos apresentados neste capítulo apresentaram resultados similares àqueles obtidos em [31], que usou diferenças finitas para aproximar as derivadas parciais relacionadas a superfície L para determinar a matriz Jacobiana. Por fim, o algoritmo é genérico e sintetiza sistemas duplo-refletores para fase uniforme e não-uniforme na abertura, sendo, portanto, o caso geral para o problema descrito no Capítulo 3.

Capítulo 5

Síntese Óptica de Lentes Dielétricas sem Simetria Circular

Neste capítulo é desenvolvida uma formulação matemática inédita para o problema de síntese de uma lente dielétrica sem simetria circular em coordenadas complexas. A formulação exata baseada nos princípios da GO conduz a uma equação diferencial parcial não-linear de segunda ordem do tipo Monge-Ampère. O procedimento numérico abordado no Capítulo 2 para solução da equação de Monge-Ampère é empregado para sintetizar lentes dielétricas visando controlar a largura do feixe transmitido e a densidade de potência na região de cobertura da lente. A estratégia de mapeamento $\eta \rightarrow \zeta$ é descrita bem como o operador não-linear para o procedimento de solução numérica do problema de síntese. Em seguida, as derivadas analíticas do operador linearizado são apresentadas. Além disso, as condições de contorno são abordadas, visto que o problema de síntese deve ser avaliado como um problema de valor de contorno. Também são apresentados o modelo desejado para a densidade de potência na região de cobertura da lente e um estudo sobre as perdas por reflexão na interface dielétrica. Para avaliar o algoritmo de síntese, são apresentados alguns estudos de casos, onde as superfícies sintetizadas são interpoladas por *splines* cúbicas [54] e, então, analisadas por um método híbrido baseado na GO-PO [43].

5.1 Formulação e Geometria do Problema de Síntese

A Figura 5.1 ilustra um raio incidente que emana de uma fonte pontual O (origem do sistema de coordenadas) cuja direção é dada pela coordenada complexa η e refratado no ponto R sobre uma interface dielétrica cuja direção de propagação é dada pela coordenada complexa ζ . Os vetores unitários nas direções dos raios incidentes e refratados são $\hat{p}(\eta)$ e $\hat{t}(\zeta)$ e os meios dielétricos são homogêneos e têm índice de refração real N (meio 1) e 1

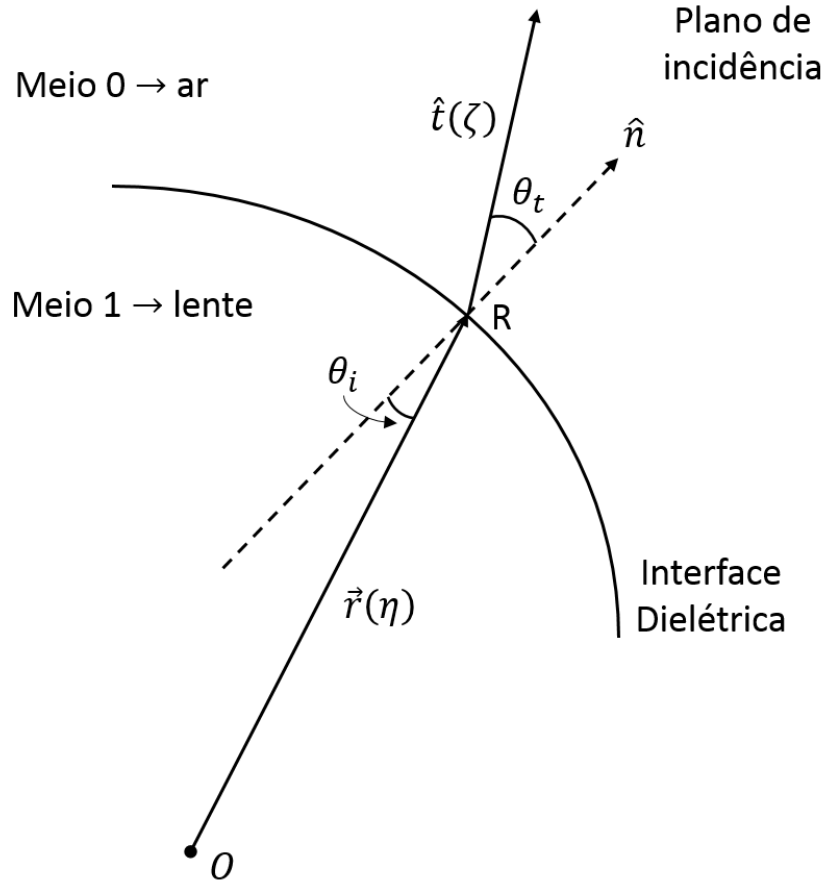


Figura 5.1: Geometria do problema de síntese da lente.

(meio 0) respectivamente. Sob os princípios da Ótica Geométrica, a refração é governada pela lei de Snell e pode ser escrita como [44]:

$$\hat{n} \times (\hat{t} - N\hat{p}) = 0, \quad (5.1)$$

onde $\hat{n}$ é um vetor unitário à interface no ponto R. Seja o segmento $\overline{OR}$ representado por $\vec{r}(\eta)$. Então $\vec{r}_\eta (= [\partial \vec{r} / \partial \eta])$ é um vetor tangencial a R e a equação (5.1) é reescrita como em [44]:

$$\vec{r}_\eta \cdot (\hat{t} - N\hat{p}) = 0. \quad (5.2)$$

Fazendo $\vec{r} = r\hat{p}$, a equação (5.2) pode ser desenvolvida como

$$(r\hat{p}_\eta + r_\eta\hat{p}) \cdot (\hat{t} - N\hat{p}) = 0, \quad (5.3)$$

e então

$$r\hat{p}_\eta \cdot \hat{t} + r_\eta\hat{p} \cdot \hat{t} - Nr_\eta = 0, \quad (5.4)$$

ou, ainda,

$$\rho_\eta = \frac{-\hat{p}_\eta \cdot \hat{t}}{\hat{p} \cdot \hat{t} - N}, \quad (5.5)$$

onde $\rho = \ln(r)$. Introduzindo a notação $\Lambda = \hat{p} \cdot \hat{t} - N$, a equação (5.5) torna-se:

$$\rho_\eta = \frac{-\Lambda_\eta}{\Lambda}, \quad (5.6)$$

pois $\Lambda = \cos(\theta_t - \theta_i) - N < 0$. Após algumas manipulações matemáticas tem-se que

$$\Lambda = \frac{-2|\zeta - \eta|^2}{(1 + |\eta|^2)(1 + |\zeta|^2)} + 1 - N. \quad (5.7)$$

Seja a função real $L(\eta) = \ln(r/(1 + |\eta|^2))$ definida para superfície dielétrica $r(\eta)$. A derivada de $L(\eta)$ em relação à coordenada complexa η é escrita como:

$$L_\eta = \rho_\eta - \frac{\bar{\eta}}{1 + |\eta|^2}. \quad (5.8)$$

Substituindo as equações (5.6) e (5.7) em (5.8), chega-se na expressão [44]:

$$L_\eta = \frac{2(\bar{\zeta} - \bar{\eta}) + \bar{\eta}(1 - N)(1 + |\zeta|^2)}{2|\zeta - \eta|^2 + (N + 1)(1 + |\eta|^2)(1 + |\zeta|^2)}, \quad (5.9)$$

que representa a lei de Snell da refração em coordenadas complexas. Portanto, a equação (5.9) relaciona a direção dos raio incidente e transmitido através das derivadas parciais da superfície $L(\eta)$.

5.2 Mapeamento $\eta \rightarrow \zeta$

Para estabelecer uma relação $\zeta(\eta)$ geral, a equação (5.9) é escrita da seguinte forma

$$\zeta = \frac{X + Y\bar{\zeta}}{Z + W\bar{\zeta}}, \quad (5.10)$$

onde

$$X = (1 - N)L_\eta - (1 + N)\bar{\eta}(1 + \eta L_\eta),$$

$$Y = 2(1 + \eta L_\eta),$$

$$Z = -2\bar{\eta}L_\eta,$$

$$W = (1 + N)L_\eta - (1 - N)\bar{\eta}(1 + \eta L_\eta).$$

Calculando o complexo conjugado da equação (5.10) e substituindo-o em $\bar{\zeta}$ no lado direito da equação (5.10) obtém-se uma expressão quadrática para ζ :

$$a_1\zeta^2 + 2a_2\zeta + a_3 = 0, \quad (5.11)$$

onde

$$\begin{aligned} a_1 &= (1 + N)L_\eta - (1 - N)\bar{\eta}(1 + \bar{\eta}L_{\bar{\eta}}), \\ a_2 &= -(1 + N)\eta L_\eta - (1 - N)\bar{\eta}L_{\bar{\eta}} - 1, \\ a_3 &= (1 + N)\eta(1 + \eta L_\eta) - (1 - N)L_{\bar{\eta}}. \end{aligned}$$

A análise apresentada não se aplica imediatamente para o caso especial em que $N = 1$ (quando os raios não se desviam ao atravessar a interface). No entanto, a expressão final para ζ deve tornar-se $\zeta = \eta$ quando $N \rightarrow 1$. Esta condição implica que a escolha correta da solução da equação (5.11) é [44]:

$$\zeta = \frac{(1 + N)\eta L_\eta + (1 - N)\bar{\eta}L_{\bar{\eta}} + 1 - \sqrt{(1 + (1 - N^2)|\bar{\eta} + (1 + |\eta|^2)L_\eta|^2)}}{(1 + N)L_\eta - (1 - N)\bar{\eta}(1 + \bar{\eta}L_{\bar{\eta}})}. \quad (5.12)$$

Claramente, a relação $\zeta(\eta)$ é muito mais complicada do que aquela para a reflexão expressa em (2.12).

Deve ser observado que o mapeamento $\eta \rightarrow \zeta$ não é arbitrário e deve satisfazer uma condição de integrabilidade. Esta condição exige que $L_{\eta\bar{\eta}}$ seja real e será derivada explicitamente. A equação (5.9) permite escrever

$$L_\eta = S_\eta(\zeta, \eta), \quad (5.13)$$

onde

$$S = -\ln E(\zeta, \eta) \quad (5.14)$$

é uma função real com

$$E = (N - 1)(1 + |\eta|^2)(1 + |\zeta|^2) + 2|\zeta - \eta|^2, \quad (5.15)$$

sendo $E > 0$, pois $N > 1$. As derivadas de segunda ordem da equação (5.14) são apresentadas abaixo:

$$S_{\eta\zeta} = -2(1 + N)(\bar{\zeta} - \bar{\eta})^2/E^2, \quad (5.16a)$$

$$S_{\eta\bar{\zeta}} = -2(1 - N)(1 + \zeta\bar{\eta})^2/E^2, \quad (5.16b)$$

$$S_{\eta\eta} = S_\eta^2, \quad (5.16c)$$

$$S_{\eta\bar{\eta}} = (1 - N^2)(1 + |\zeta|^2)^2/E^2. \quad (5.16d)$$

Assim, usando a regra da cadeia na equação (5.13), obtém-se a expressão

$$L_{\eta\bar{\eta}} - S_{\eta\bar{\eta}} = S_{\eta\zeta}\zeta_{\bar{\eta}} + S_{\eta\bar{\zeta}}\bar{\zeta}_{\bar{\eta}}, \quad (5.17)$$

e a condição de integrabilidade é dada por

$$S_{\eta\zeta}\zeta_{\bar{\eta}} + S_{\eta\bar{\zeta}}\bar{\zeta}_{\bar{\eta}} = \text{real}, \quad (5.18)$$

ou

$$(1 + N)(\bar{\zeta} - \bar{\eta})^2\zeta_{\bar{\eta}} + (1 - N)(1 + \zeta\bar{\eta})^2\bar{\zeta}_{\bar{\eta}} = \text{real}, \quad (5.19)$$

visto que o lado esquerdo da equação (5.17) é real por definição.

5.3 Equação de Monge-Ampère

A síntese de uma lente dielétrica para produzir uma densidade de potência especificada na região de campo distante é formulada usando a notação em coordenadas complexas e, como no caso do projeto de duplo-refletores, é mostrado que conduz a equações diferenciais parciais não-lineares do tipo Monge-Ampère. Seja $I(\eta)$ e $G(\zeta)$ as densidades por ângulo sólido da fonte e na região de campo distante, respectivamente. Então, comparando as áreas elementares subentendidas por cones de raios sobre uma esfera de raio unitário e centro O, e assumindo que toda a densidade de potência incidente é transmitida através da interface dielétrica, pode ser mostrado que [17]:

$$\frac{I(\eta)}{G(\zeta)} = \left(\frac{|\eta|^2 + 1}{|\zeta|^2 + 1} \right)^2 ||\zeta_{\eta}|^2 - |\zeta_{\bar{\eta}}|^2|, \quad (5.20)$$

onde o termo entre os sinais de módulo no lado direito da expressão acima é o Jacobiano do mapeamento $\eta \rightarrow \zeta$. Portanto, é necessário calcular as derivadas parciais ζ_{η} e $\zeta_{\bar{\eta}}$. Isto é realizado pela seguinte análise. Fazendo $p = S_{\eta\zeta}$ e $q = S_{\eta\bar{\zeta}}$, as equações (5.13) - (5.17) são reescritas como:

$$L_{\eta\eta} - S_{\eta\eta} = p\zeta_{\eta} + q\bar{\zeta}_{\eta}, \quad (5.21a)$$

$$L_{\bar{\eta}\bar{\eta}} - S_{\bar{\eta}\bar{\eta}} = \bar{p}\bar{\zeta}_{\bar{\eta}} + \bar{q}\zeta_{\bar{\eta}}, \quad (5.21b)$$

$$L_{\eta\bar{\eta}} - S_{\eta\bar{\eta}} = p\zeta_{\bar{\eta}} + q\bar{\zeta}_{\bar{\eta}} = \bar{p}\zeta_{\eta} + \bar{q}\bar{\zeta}_{\eta} \quad (\text{real}). \quad (5.21c)$$

Usando a notação matricial, as equações (5.21) acima são expressas da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} L_{\eta\eta} - S_{\eta\eta} & L_{\eta\bar{\eta}} - S_{\eta\bar{\eta}} \\ L_{\bar{\eta}\bar{\eta}} - S_{\bar{\eta}\bar{\eta}} & L_{\bar{\eta}\eta} - S_{\bar{\eta}\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q \\ \bar{q} & \bar{p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_{\eta} & \zeta_{\bar{\eta}} \\ \bar{\zeta}_{\eta} & \bar{\zeta}_{\bar{\eta}} \end{bmatrix}. \quad (5.22)$$

Aplicando o determinante em ambos os lados da expressão em (5.22), tem-se que:

$$|L_{\eta\eta} - S_{\eta\eta}|^2 - (L_{\eta\bar{\eta}} - S_{\eta\bar{\eta}})^2 = (|p|^2 - |q|^2)(|\zeta_\eta|^2 - |\zeta_{\bar{\eta}}|^2), \quad (5.23)$$

e substituindo a expressão da Conservação da Energia (5.20) na expressão (5.23), tem-se que:

$$|L_{\eta\eta} - S_{\eta\eta}|^2 - (L_{\eta\bar{\eta}} - S_{\eta\bar{\eta}})^2 = \pm(|p|^2 - |q|^2) \frac{I(\eta)}{G(\zeta)} \left(\frac{|\zeta|^2 + 1}{|\eta|^2 + 1} \right)^2. \quad (5.24)$$

Sabendo que $S_{\eta\eta} = L_\eta^2$ e definindo de $B = S_{\eta\bar{\eta}}$ e $V = (|p|^2 - |q|^2)$, chega-se na equação de Monge-Ampère desejada:

$$|L_{\eta\eta} - L_\eta^2|^2 - (L_{\eta\bar{\eta}} - B)^2 = \pm V \frac{I(\eta)}{G(\zeta)} \left(\frac{|\zeta|^2 + 1}{|\eta|^2 + 1} \right)^2 \quad (5.25)$$

onde

$$B = \frac{(1 - N^2)(1 + |\zeta|^2)^2}{[(N - 1)(1 + |\eta|^2)(1 + |\zeta|^2) + 2|\zeta - \eta|^2]^2} \quad (5.26)$$

e

$$V = \frac{4[(1 + N)^2|\bar{\zeta} - \bar{\eta}|^4 - (1 - N)^2|1 + \bar{\zeta}\eta|^4]}{[(N - 1)(1 + |\eta|^2)(1 + |\zeta|^2) + 2|\zeta - \eta|^2]^4}. \quad (5.27)$$

Como $V < 0$, a equação de Monge Ampère é elíptica para a escolha do sinal (+) na equação (5.25) e hiperbólica para a escolha do sinal (-). É importante destacar que superfície L na equação de Monge-Ampère (5.25) representa uma lente dielétrica de formato arbitrário, sem simetria circular. Além disso, a equação (5.25) não leva em conta as perdas por reflexão na interface dielétrica.

5.4 Densidade de Potência na Região de Cobertura

A equação de Monge-Ampère em (5.25) pode ser considerada de duas formas. Se a densidade de potência é especificada na região de campo distante, então a expressão se torna uma equação diferencial de Monge-Ampère para L . Por outro lado, se a superfície $L(\eta)$ é especificada, então a equação (5.25) é uma equação para a densidade de potência $G(\zeta)$.

Aproximando a superfície da lente por uma superfície quádrlica confocal com eixo deslocado (2.33), o termo $|L_{\eta\eta} - L_\eta^2|^2 = 0$ e a equação de Monge-Ampère (5.25) é simpli-

ficada:

$$-(L_{\eta\bar{\eta}} - B)^2 = \pm V \frac{I(\eta)}{G(\zeta)} \left(\frac{|\zeta|^2 + 1}{|\eta|^2 + 1} \right)^2. \quad (5.28)$$

Assim, para uma superfície quádrlica confocal especificada pelos coeficientes a , b , c e d , e assumindo a forma elíptica da equação de Monge-Ampère, a densidade de potência na região de cobertura é dada por

$$G_{sq}(\zeta) = -I(\eta) \left(\frac{|\zeta|^2 + 1}{|\eta|^2 + 1} \right)^2 \frac{V}{(L_{\eta\bar{\eta}} - B)^2}, \quad (5.29)$$

e sua derivada em relação à ζ é

$$G_{\zeta}^{sq}(\zeta) = G_{sq}(\zeta) \left(\frac{V_{\zeta}}{V} + \frac{2\bar{\zeta}}{|\zeta|^2 + 1} + \frac{2B_{\zeta}}{L_{\eta\bar{\eta}} - B} \right), \quad (5.30)$$

onde $V_{\zeta} = \partial V / \partial \zeta$ e $B_{\zeta} = \partial B / \partial \zeta$ são dadas em (5.35) e (5.38), respectivamente.

5.5 Solução Numérica do Problema de Síntese

O problema de síntese de uma lente dielétrica sem simetria circular (5.28) será resolvido numericamente usando a técnica alternativa descrita na Seção 2.4. Para isso, a superfície da lente é discretizada pela grade polar da Seção 2.4.1, e então é interpolada localmente por um conjunto de superfícies quádrlicas confocais (vide Seção 2.4.2). A solução analítica de uma lente circularmente simétrica apresentada no Apêndice A será usada como solução inicial para o procedimento numérico. A partir da equação de Monge-Ampère para a síntese de uma lente dielétrica representada localmente por superfícies quádrlicas confocais com eixo deslocado (5.28), o operador não-linear $\Gamma[L]$ é escrito como

$$\Gamma[L] = (L_{\eta\bar{\eta}} - B)^2 \pm \mathcal{H}(\zeta, \eta), \quad (5.31)$$

onde

$$\mathcal{H}(\zeta, \eta) = V \frac{I(\eta)}{G(\zeta)} \left(\frac{|\zeta|^2 + 1}{|\eta|^2 + 1} \right)^2. \quad (5.32)$$

O procedimento iterativo de Newton da Seção 2.4.4 é então empregado para reduzir os resíduos associados ao operador (5.31) nos pontos da grade a um valor menor que o critério de convergência adotado. Para isso, será necessário obter os elementos da matriz Jacobiana (2.89) descrita na seção 2.4.5 para o operador (5.31) linearizado. A partir daí, uma nova superfície $[L]^{(n+1)}$ é obtida pela equação (2.83), que será usada no processo iterativo para a convergência do algoritmo de síntese representado pelo diagrama de blocos da Figura 5.4.

Para determinar a matriz Jacobiana (2.89) do operador (5.31), as derivadas dos coeficientes da superfície quádrlica $a_{j,k}$, $b_{j,k}$, $c_{j,k}$ e $d_{j,k}$ em relação à L_1 , L_2 , L_3 e L_4 já foram determinadas na Seção 2.4.5 e estão expressos nas seguintes equações: (2.93), (2.96), (2.99) e (2.102), respectivamente. Para completar o cálculo da matriz Jacobiana, serão determinadas as derivadas parciais de operador (5.31) em relação aos coeficientes da superfície quádrlica $a_{j,k}$, $b_{j,k}$, $c_{j,k}$ e $d_{j,k}$ que são apresentadas em (5.33) abaixo:

$$\frac{\partial \Gamma[L]}{\partial a_{j,k}} = 2(L_{\eta\bar{\eta}} - B) \left(\frac{\partial L_{\eta\bar{\eta}}}{\partial a_{j,k}} - \frac{\partial B}{\partial a_{j,k}} \right) \pm \frac{\partial \mathcal{H}(\zeta, \eta)}{\partial a_{j,k}}, \quad (5.33a)$$

$$\frac{\partial \Gamma[L]}{\partial b_{j,k}} = 2(L_{\eta\bar{\eta}} - B) \left(\frac{\partial L_{\eta\bar{\eta}}}{\partial b_{j,k}} - \frac{\partial B}{\partial b_{j,k}} \right) \pm \frac{\partial \mathcal{H}(\zeta, \eta)}{\partial b_{j,k}}, \quad (5.33b)$$

$$\frac{\partial \Gamma[L]}{\partial c_{j,k}} = 2(L_{\eta\bar{\eta}} - B) \left(\frac{\partial L_{\eta\bar{\eta}}}{\partial c_{j,k}} - \frac{\partial B}{\partial c_{j,k}} \right) \pm \frac{\partial \mathcal{H}(\zeta, \eta)}{\partial c_{j,k}}, \quad (5.33c)$$

$$\frac{\partial \Gamma[L]}{\partial d_{j,k}} = 2(L_{\eta\bar{\eta}} - B) \left(\frac{\partial L_{\eta\bar{\eta}}}{\partial d_{j,k}} - \frac{\partial B}{\partial d_{j,k}} \right) \pm \frac{\partial \mathcal{H}(\zeta, \eta)}{\partial d_{j,k}}. \quad (5.33d)$$

As derivadas de B em relação aos coeficientes da superfície quádrlica são:

$$\frac{\partial B}{\partial a_{j,k}} = \frac{\partial B}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial a_{j,k}} + \frac{\partial B}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial a_{j,k}} = 2\text{Re} \left[\frac{\partial B}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial a_{j,k}} \right], \quad (5.34a)$$

$$\frac{\partial B}{\partial b_{j,k}} = \frac{\partial B}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial b_{j,k}} + \frac{\partial B}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial b_{j,k}} = 2\text{Re} \left[\frac{\partial B}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial b_{j,k}} \right], \quad (5.34b)$$

$$\frac{\partial B}{\partial c_{j,k}} = \frac{\partial B}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial c_{j,k}} + \frac{\partial B}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial c_{j,k}} = 2\text{Re} \left[\frac{\partial B}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial c_{j,k}} \right], \quad (5.34c)$$

$$\frac{\partial B}{\partial d_{j,k}} = \frac{\partial B}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial d_{j,k}} + \frac{\partial B}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial d_{j,k}} = 2\text{Re} \left[\frac{\partial B}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial d_{j,k}} \right], \quad (5.34d)$$

onde

$$\frac{\partial B}{\partial \zeta} = \frac{1}{E^2} \left[2\bar{\zeta}(1 - N^2)(1 + |\zeta|^2) - (1 - N^2)(1 + |\zeta|^2)^2 \frac{2}{E} \frac{\partial E}{\partial \zeta} \right]. \quad (5.35)$$

A função $\mathcal{H}(\eta, \omega)$ depende dos coeficientes da superfície quádrlica e suas derivadas são obtidas aplicando a regra da cadeia:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial a_{j,k}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial a_{j,k}} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial a_{j,k}} = 2\text{Re} \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial a_{j,k}} \right], \quad (5.36a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial b_{j,k}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial b_{j,k}} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial b_{j,k}} = 2\text{Re} \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial b_{j,k}} \right], \quad (5.36b)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c_{j,k}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial c_{j,k}} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial c_{j,k}} = 2\text{Re} \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial c_{j,k}} \right], \quad (5.36c)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial d_{j,k}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial d_{j,k}} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial d_{j,k}} = 2\text{Re} \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial d_{j,k}} \right], \quad (5.36d)$$

onde

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \zeta} = \mathcal{H}(\zeta, V, G) \left[\frac{V_\zeta}{V} + \frac{2\bar{\zeta}}{|\zeta|^2 + 1} - \frac{G_\zeta}{G} \right], \quad (5.37)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \zeta} = \frac{1}{E^4} \Bigg\{ & 4 \left[2(1+N)^2(\bar{\zeta} - \bar{\eta})^2(\zeta - \eta) - 2(1-N)^2(1 + \bar{\zeta}\eta)^2(1 + \zeta\bar{\eta})\bar{\eta} \right] \\ & - 4 \left[(1+N)^2(\bar{\zeta} - \bar{\eta})^2(\zeta - \eta)^2 - (1-N)^2(1 + \bar{\zeta}\eta)^2(1 + \zeta\bar{\eta})^2 \right] \frac{4}{E} \frac{\partial E}{\partial \zeta} \Bigg\}, \quad (5.38) \end{aligned}$$

e

$$\frac{\partial E}{\partial \zeta} = [(N-1)(1 + |\eta|^2) + 2]\bar{\zeta} - \bar{\eta}.$$

Em (5.37), a derivada $G_\zeta(\zeta)$ é dada em (5.56) e em (5.38), o termo E foi definido em (5.15). As derivadas de ζ em relação aos coeficientes da superfície quádrlica em (5.36) são:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial a_{j,k}} = \frac{\partial \zeta}{\partial L_\eta} \frac{\partial L_\eta}{\partial a_{j,k}} + \frac{\partial \zeta}{\partial L_{\bar{\eta}}} \frac{\partial L_{\bar{\eta}}}{\partial a_{j,k}}, \quad (5.39a)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial b_{j,k}} = \frac{\partial \zeta}{\partial L_\eta} \frac{\partial L_\eta}{\partial b_{j,k}} + \frac{\partial \zeta}{\partial L_{\bar{\eta}}} \frac{\partial L_{\bar{\eta}}}{\partial b_{j,k}}, \quad (5.39b)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial c_{j,k}} = \frac{\partial \zeta}{\partial L_\eta} \frac{\partial L_\eta}{\partial c_{j,k}} + \frac{\partial \zeta}{\partial L_{\bar{\eta}}} \frac{\partial L_{\bar{\eta}}}{\partial c_{j,k}}, \quad (5.39c)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial d_{j,k}} = \frac{\partial \zeta}{\partial L_\eta} \frac{\partial L_\eta}{\partial d_{j,k}} + \frac{\partial \zeta}{\partial L_{\bar{\eta}}} \frac{\partial L_{\bar{\eta}}}{\partial d_{j,k}}, \quad (5.39d)$$

onde

$$\frac{\partial \zeta}{\partial L_\eta} = \frac{1}{w} \left[(1+N)\eta - \frac{(1-N^2)[\eta + (1+|\eta|^2)L_{\bar{\eta}}](1+|\eta|^2)}{2\sqrt{1+(1-N^2)|\bar{\eta} + (1+|\eta|^2)L_\eta|^2}} - (1+N)\zeta \right], \quad (5.40a)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial L_{\bar{\eta}}} = \frac{1}{w} \left[(1-N)\bar{\eta} - \frac{(1-N^2)[\bar{\eta} + (1+|\eta|^2)L_\eta](1+|\eta|^2)}{2\sqrt{1+(1-N^2)|\bar{\eta} + (1+|\eta|^2)L_\eta|^2}} - (N-1)\bar{\eta}^2\zeta \right], \quad (5.40b)$$

e

$$w = (1+N)L_\eta - (1-N)\bar{\eta}(1 + \bar{\eta}L_{\bar{\eta}}).$$

As derivadas de L_η em relação aos coeficientes da superfície quádrlica presentes em (5.39) foram apresentadas em (2.106), e as derivadas de $L_{\bar{\eta}}$ em relação aos coeficientes $a_{j,k}$, $b_{j,k}$, $c_{j,k}$ e $d_{j,k}$ são iguais ao complexo conjugado das derivadas em (2.106).

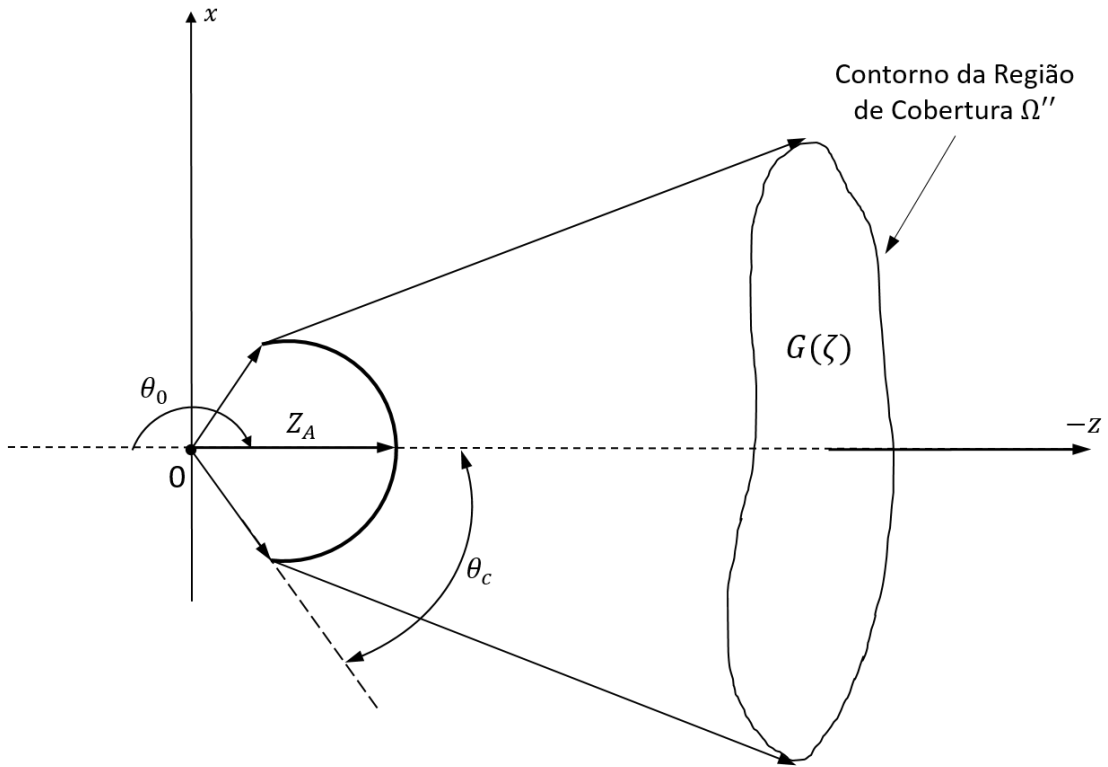


Figura 5.2: Geometria de uma lente dielétrica como um problema de valor de contorno.

5.6 Condição de Contorno

No problema de síntese da lente dielétrica ilustrado na Figura 5.1, os raios transmitidos pela lente têm uma direção arbitrária em relação a um eixo de referência. Se a região de cobertura da lente for determinada na direção do semi espaço z -positivo, quando um raio transmitido pela lente for paralelo ao eixo z ou, com uma pequena inclinação em relação ao eixo z , o valor de ζ tende a infinito instabilizando o processo iterativo da síntese. Logo, para a estabilidade do esquema numérico para a solução da equação de Monge-Ampère (5.25), o contorno da região de cobertura Ω'' será determinado do lado negativo do eixo z , conforme está ilustrado na Figura 5.2. Desta forma, os raios transmitidos pela lente cruzam o contorno Ω'' na direção do semi espaço z -negativo e, consequentemente, ζ será nulo quando o raio for transmitido paralelo ao eixo z .

Para a solução numérica do problema de síntese é necessário que a equação de Monge-Ampère (5.25) seja resolvida como um problema de valor de contorno. A condição de contorno é obtida impondo que os raios da borda do cone de alimentação sejam mapeados, depois da refração na interface dielétrica, no contorno da região de cobertura da lente conforme pode ser observado na Figura 5.2. Para estabilidade do esquema numérico, o contorno fechado Ω'' associado ao campo distante deve ser representado por uma função contínua e com derivadas de primeira e segunda ordem contínuas. Assim com na síntese dos sistemas duplo-refletores, nos exemplos a serem mostrados neste trabalho, a

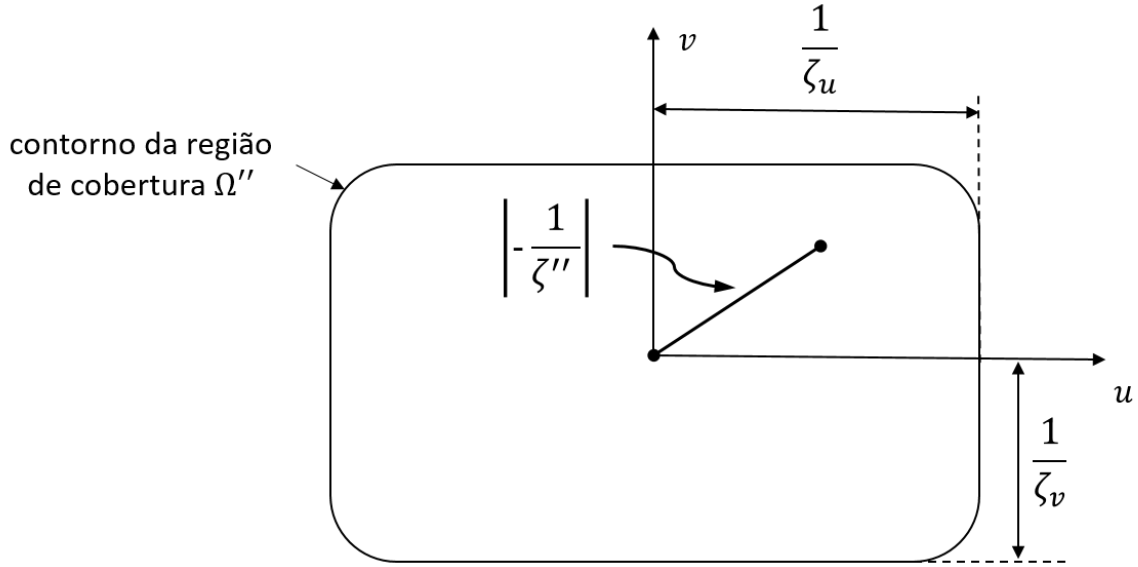


Figura 5.3: Contorno super-elíptico na região de cobertura.

equação da super-elipse será usada para descrever a região de contorno, porém na região de cobertura da lente em campo distante e está ilustrado na Figura 5.3. A expressão da super-elipse é escrita no plano complexo inverso como:

$$\left| \frac{\operatorname{Re} \left[-\frac{1}{\zeta''} \right]}{-\frac{1}{\zeta_u}} \right|^{2\sigma} + \left| \frac{\operatorname{Imag} \left[-\frac{1}{\zeta''} \right]}{-\frac{1}{\zeta_v}} \right|^{2\sigma} = 1, \quad (5.41)$$

$$\left| -\zeta_u \operatorname{Re} \left(-\frac{1}{\zeta''} \right) \right|^{2\sigma} + \left| -\zeta_v \operatorname{Imag} \left(-\frac{1}{\zeta''} \right) \right|^{2\sigma} = 1, \quad (5.42)$$

onde

$$\zeta_u = \cot \left(\frac{\alpha_u}{2} \right), \quad (5.43a)$$

$$\zeta_v = \cot \left(\frac{\alpha_v}{2} \right), \quad (5.43b)$$

e α_u é a abertura angular do feixe radiado ao longo do eixo u e α_v é a largura do feixe radiado ao longo do eixo v . A variável complexa ζ'' está relacionada com a variável ζ pela relação

$$\zeta'' = \frac{\zeta_0 \zeta + 1}{\zeta_0 - \zeta}, \quad (5.44)$$

onde $\zeta_0 = \cot(\alpha_0/2)$ e α_0 é o ângulo de *offset* do contorno Ω'' . Substituindo (5.44) em

(5.42), o operador Γ_c no contorno é escrito como:

$$\Gamma_c = \left| -\frac{\zeta_u}{2} \left(\frac{\zeta - \zeta_0}{1 + \zeta_0 \zeta} + \frac{\bar{\zeta} - \zeta_0}{1 + \zeta_0 \bar{\zeta}} \right) \right|^{2\sigma} + \left| -\frac{\zeta_v}{2i} \left(\frac{\zeta - \zeta_0}{1 + \zeta_0 \zeta} - \frac{\bar{\zeta} - \zeta_0}{1 + \zeta_0 \bar{\zeta}} \right) \right|^{2\sigma} - 1. \quad (5.45)$$

De forma similar à Seção 2.5, são apresentadas as derivadas do operador Γ_c sobre o contorno em relação aos parâmetros da quádrlica $a_{j,k}$, $b_{j,k}$, $c_{j,k}$ e $d_{j,k}$ são obtidas:

$$\frac{\partial \Gamma_c}{\partial a_{j,k}} = \frac{\partial \Gamma_c}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial a_{j,k}} + \frac{\partial \Gamma_c}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial a_{j,k}} = 2\text{Re} \left[\frac{\partial \Gamma_c}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial a_{j,k}} \right], \quad (5.46a)$$

$$\frac{\partial \Gamma_c}{\partial b_{j,k}} = \frac{\partial \Gamma_c}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial b_{j,k}} + \frac{\partial \Gamma_c}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial b_{j,k}} = 2\text{Re} \left[\frac{\partial \Gamma_c}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial b_{j,k}} \right], \quad (5.46b)$$

$$\frac{\partial \Gamma_c}{\partial c_{j,k}} = \frac{\partial \Gamma_c}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial c_{j,k}} + \frac{\partial \Gamma_c}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial c_{j,k}} = 2\text{Re} \left[\frac{\partial \Gamma_c}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial c_{j,k}} \right], \quad (5.46c)$$

$$\frac{\partial \Gamma_c}{\partial d_{j,k}} = \frac{\partial \Gamma_c}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial d_{j,k}} + \frac{\partial \Gamma_c}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial d_{j,k}} = 2\text{Re} \left[\frac{\partial \Gamma_c}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial d_{j,k}} \right], \quad (5.46d)$$

onde a derivada parcial de Γ_c em relação à ζ é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_c}{\partial \zeta} = & -\sigma \zeta_u \left[-\frac{\zeta_u}{2} \left(\frac{\zeta - \zeta_0}{1 + \zeta_0 \zeta} + \frac{\bar{\zeta} - \zeta_0}{1 + \zeta_0 \bar{\zeta}} \right) \right]^{2\sigma-1} \left[\frac{1 + \zeta_0^2}{(1 + \zeta_0 \zeta)^2} \right] + \\ & i\sigma \zeta_v \left[-\frac{\zeta_v}{2i} \left(\frac{\zeta - \zeta_0}{1 + \zeta_0 \zeta} - \frac{\bar{\zeta} - \zeta_0}{1 + \zeta_0 \bar{\zeta}} \right) \right]^{2\sigma-1} \left[\frac{1 + \zeta_0^2}{(1 + \zeta_0 \zeta)^2} \right]. \end{aligned} \quad (5.47)$$

5.7 Modelo de Distribuição de Densidade de Potência na Região de Cobertura

Nesta seção é descrito o modelo desejado para a densidade de potência por ângulo sólido na região de campo distante para a lente sintetizada. A função Gaussiana cujo contorno pode ser circular, elíptico ou super-elíptico será usada para representar $G_{ob}(\zeta)$. A expressão que descreve a densidade de potência com distribuição Gaussiana na região de cobertura da lente tem a seguinte forma:

$$G_{ob}(\zeta) = G_0 e^{-\psi \rho(\zeta, \bar{\zeta})}, \quad (5.48)$$

onde ψ é definida assim como em (2.135), sendo uma constante que determina o fator de atenuação, G_0 é uma constante que representa a densidade de potência máxima na região de campo distante e $\rho(\zeta, \bar{\zeta})$ representa o contorno da função Gaussiana. A expressão

(5.48) é escrita em coordenadas complexas inversas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 G_{ob}(\zeta) &= G_0 \exp \left\{ -\psi \left[\left| \frac{\operatorname{Re} \left[-\frac{1}{\zeta''} \right]}{-\frac{1}{\zeta_u}} \right|^{2\sigma} + \left| \frac{\operatorname{Imag} \left[-\frac{1}{\zeta''} \right]}{-\frac{1}{\zeta_v}} \right|^{2\sigma} \right] \right\}, \\
 &= G_0 \exp \left\{ -\psi \left[\left| -\frac{\zeta_u}{2} \left(\frac{\zeta - \zeta_0}{1 + \zeta_0 \zeta} + \frac{\bar{\zeta} - \zeta_0}{1 + \zeta_0 \bar{\zeta}} \right) \right|^{2\sigma} + \left| -\frac{\zeta_v}{2i} \left(\frac{\zeta - \zeta_0}{1 + \zeta_0 \zeta} - \frac{\bar{\zeta} - \zeta_0}{1 + \zeta_0 \bar{\zeta}} \right) \right|^{2\sigma} \right] \right\}.
 \end{aligned} \tag{5.49}$$

A constante G_0 é obtida a partir da normalização da potência total irradiada:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\alpha''(\beta'')} G(\alpha'', \beta'') \sin \alpha'' d\alpha'' d\beta'' = P_{rad}, \tag{5.50}$$

onde $\alpha''(\beta'')$ é uma função que descreve o contorno em coordenadas esféricas. No caso particular onde é desejado uma lente com densidade de potência constante em um contorno circular na região de cobertura, a integral tem solução analítica. Logo, assumindo que a densidade de potência seja

$$G(\zeta) = G_0, \tag{5.51}$$

e que o contorno circular é definido por $\alpha''(\beta'') = \alpha_c$ e, conseqüentemente, $\zeta_u = \zeta_v = \zeta_c$, a potência total é dada por

$$G_0 \int_0^{2\pi} \int_0^{\alpha_c} G(\alpha'') \sin \alpha'' d\alpha'' d\beta'' = P_{rad}. \tag{5.52}$$

Definindo-se $P_{rad} = 4\pi$, obtém-se:

$$G_0 = \frac{2}{1 - \cos \alpha_c}. \tag{5.53}$$

Para os demais casos, a integral em (5.50) deve ser avaliada numericamente em coordenadas esféricas ou no plano complexo inverso $-1/\zeta''$ fazendo as mudanças de variáveis necessárias.

Para determinar a matriz Jacobiana para a síntese da lente dielétrica é necessária a derivada de $G_{ob}(\zeta)$ em relação à ζ :

$$\frac{\partial G_{ob}(\zeta)}{\partial \zeta} = G_{ob}(\zeta) \left[-\psi \frac{\partial \Gamma_c}{\partial \zeta} \right], \tag{5.54}$$

onde a derivada de Γ_c em relação a ζ foi dada em (5.47).

A estratégia descrita em (2.138) para obter convergência da solução numérica da

equação de Monge-Ampère na síntese dos sistemas duplo-refletores é, agora, estendida para a convergência do algoritmo de síntese de uma lente dielétrica. Assim, $G(\zeta)$ é dado por:

$$G(\zeta) = (1 - \mu)G_{sq}(\zeta) + \mu G_{ob}(\zeta), \quad (5.55)$$

e a derivada de $G(\zeta)$ em relação a ζ torna-se:

$$G_{\zeta}(\zeta) = (1 - \mu)G_{\zeta}^{sq}(\zeta) + \mu G_{\zeta}^{ob}(\zeta). \quad (5.56)$$

5.8 Perdas por Reflexão

O balanço de energia descrito na expressão (5.25) despreza as perdas por reflexão na interface dielétrico/ar, que não são uniformes sobre a superfície pois dependem do ângulo de incidência do raio com a interface. Quando as perdas são consideradas na análise, esta não uniformidade altera a forma da densidade de potência na região de cobertura. Para compensar esta deformação, será utilizada na síntese uma função $G'(\zeta)$ definida como:

$$G'(\zeta) = \frac{G(\zeta)}{t_{12}(\theta, \phi)} \quad (5.57)$$

onde $t_{12}(\theta, \phi)$ é determinado a partir dos coeficiente de transmissão de Fresnel obtidos da incidência de uma onda plana sobre a interface plana entre dois meios. O termo $t_{12}(\theta, \phi)$ foi denominado de transmitância da superfície em [55] e pode ser obtido como descrito a seguir.

Segundo os princípios da GO, o produto escalar entre os vetores unitários nas direções dos raios incidentes $\hat{p}(\eta)$ e refratados $\hat{t}(\zeta)$ da Figura 5.1 é dado por [45]:

$$\hat{p} \cdot \hat{t} = \frac{2(\eta\bar{\zeta} + \bar{\eta}\zeta) + (|\eta|^2 - 1)(|\zeta|^2 - 1)}{(|\eta|^2 + 1)(|\zeta|^2 + 1)}. \quad (5.58)$$

Será definido $\Phi = \theta_t - \theta_i$, tal que $\hat{p} \cdot \hat{t} = \cos \Phi$. A continuidade das componentes tangenciais dos campos elétrico e magnético na interface dielétrica conduz aos coeficientes de transmissão de Fresnel para os campos com polarização perpendicular ($T_{\perp}$) e paralela ($T_{\parallel}$) no ponto de refração R [45]:

$$T_{\perp} = \frac{2N(N - \cos \Phi)}{N^2 - 1}, \quad (5.59a)$$

$$T_{\parallel} = T_{\perp} \sec \Phi. \quad (5.59b)$$

A partir da equação (5.58) para $\cos \Phi$, observa-se que ambos os coeficientes de transmissão de Fresnel são expressos em termos das variáveis complexas η e ζ .

Agora considere um tubo elementar de raios incidentes sobre a superfície $r(\eta)$ em R . Segundo Westcott [45] se a área interceptada por esse tubo sobre a superfície é dA , então $dA \cos \theta_i$ e $dA \cos \theta_t$ são as áreas das seções transversais dos tubos de raios incidentes e transmitidos, respectivamente. A razão

$$t_{12} = \frac{I_2 dA \cos \theta_t}{I_1 dA \cos \theta_i} \quad (5.60)$$

representa a fração da potência transmitida através da superfície em R , onde I_1 e I_2 são as magnitudes dos vetores de Poynting dos campos incidente e transmitido, respectivamente. Além disso, [45] demonstrou que

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{1}{N} (\mathcal{A}^2 T_{\perp}^2 + \mathcal{B}^2 T_{\parallel}^2). \quad (5.61)$$

Combinando as equações (5.60) e (5.61), chega-se na seguinte expressão:

$$t_{12} = \frac{1}{N} (\mathcal{A}^2 T_{\perp}^2 + \mathcal{B}^2 T_{\parallel}^2) \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i}, \quad (5.62)$$

onde

$$\frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} = \frac{N \cos \Phi - 1}{N - \cos \Phi}, \quad (5.63)$$

$$\mathcal{A} = \frac{i\bar{\epsilon}(\bar{\zeta} - \bar{\eta})(1 + \zeta\bar{\eta}) - i\epsilon(\zeta - \eta)(1 + \bar{\zeta}\eta)}{2|\zeta - \eta||1 + \bar{\zeta}\eta|}, \quad (5.64)$$

$$\mathcal{B} = \frac{\epsilon(\zeta - \eta)(1 + \bar{\zeta}\eta) + \bar{\epsilon}(\bar{\zeta} - \bar{\eta})(1 + \zeta\eta)}{2|\zeta - \eta||1 + \bar{\zeta}\eta|}, \quad (5.65)$$

e $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são reais tais que $\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2 = 1$. Neste trabalho, a polarização principal adotada para o campo incidente da fonte de irradiação (fazendo $e = h = n$ em (2.114)) é $\hat{e}_1 = \cos \phi \hat{\theta} - \sin \phi \hat{\phi}$. Segundo [23], para esta polarização de campo incidente e observando que a superfície dielétrica será discretizada no plano $-1/\eta'$ conforme discutido na Seção 2.4.1 e o ângulo de *offset* será fixado em $\theta_0 = 180^\circ$ (vide Figura 5.2), o termo ϵ das equações (5.64) e (5.65) torna-se $\epsilon = -1$.

Para que $G'(\zeta)$ seja utilizado na solução da equação de Monge-Ampère (5.25), a densidade de potência na região de cobertura deve ser normalizada e a constante de normalização K é obtida da seguinte identidade para a conservação de energia

$$K t_{12} I(\theta', \phi') \sin \theta' d\theta' d\phi' = G(\alpha'', \beta'') \sin \alpha'' d\alpha'' d\beta'', \quad (5.66)$$

onde K é dada por

$$K = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{\alpha''(\beta'')} G(\alpha'', \beta'') \sin \alpha'' d\alpha'' d\beta''}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_c} t_{12} I(\theta', \phi') \sin \theta' d\theta' d\phi'}. \quad (5.67)$$

5.9 Algoritmo de Síntese para a Lente Dielétrica

O algoritmo da Figura 5.4 ilustra o procedimento numérico para a síntese de uma lente dielétrica sem simetria circular. Inicialmente, as especificações de projeto são definidas, e então uma solução inicial é determinada (A.1). Esta solução inicial é representada por $J \times K$ superfícies quádricas confocais com eixos deslocados. Em seguida, as direções dos raios refratados são obtidos pela relação de mapeamento $\eta \rightarrow \zeta$. Como os raios incidentes atravessam de um meio com índice de refração maior (lente dielétrica) para um meio com índice de refração menor (ar), podem ocorrer ângulos críticos, ou seja, reflexão total na interface dielétrica. Caso ocorra um único ângulo crítico entre os pontos da grade, o algoritmo diverge. A ocorrência do ângulo crítico é verificada quando o ângulo de incidência (θ_i) é maior do que o ângulo crítico ($\theta_i \geq \theta_{crit}$), onde $\theta_{crit} = \sin^{-1}(1/N)$. Em coordenadas complexas, o ângulo crítico é verificado quando a expressão dentro da raiz quadrada da relação de mapeamento (5.12) é negativa.

Uma vez conhecidos η e ζ , as perdas por reflexão (5.62) são calculadas na interface dielétrica. As perdas por reflexão poderiam ter sido incorporadas na equação de Monge-Ampère, no entanto, isto poderia consistir em mais um fator de instabilidade numérica para o algoritmo. Por isso, neste trabalho optou-se por considerá-las constantes ao longo do processo iterativo, não entrando no cálculo do matriz Jacobiana. Além disso, para uma análise comparativa, as lentes também foram sintetizadas desprezando-se as perdas por reflexão na interface dielétrica. Caso as perdas por reflexão não sejam desprezadas, é feita a correção na densidade de potência em campo distante $G(\zeta)$ expressa em (5.57) para ajustar o balanço de energia com a densidade de potência incidente $I(\eta)$.

Na sequência, o operador $\Gamma[L]$ em (5.31) é calculado e verificado se atende ao critério de convergência. Em caso afirmativo, a superfície analisada é a superfície desejada. Caso contrário, o algoritmo calcula a matriz Jacobiana do operador (5.31), e uma nova superfície dielétrica $L^{(n+1)}$ é obtida. Esta superfície é, então, aproximada por um novo conjunto de superfícies quádricas confocais representadas pelos coeficientes $a^{(n+1)}$, $b^{(n+1)}$, $c^{(n+1)}$ e $d^{(n+1)}$. A relação de mapeamento é reavaliada, assim como o operador $\Gamma[L]$. O algoritmo continua iterando até que o critério de convergência seja atingido.

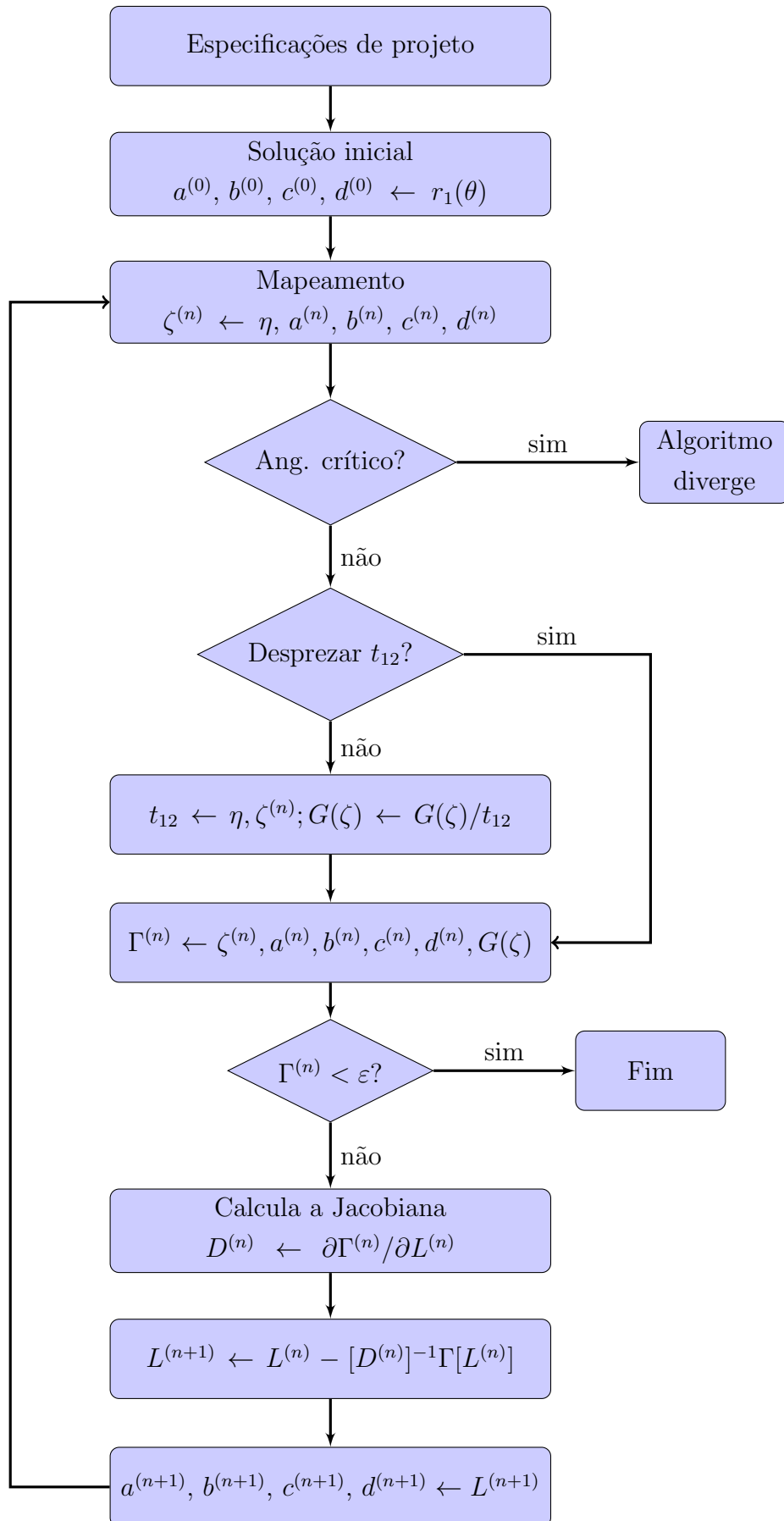


Figura 5.4: Diagrama de blocos do algoritmo de síntese da lente.

5.10 Método de Análise de uma Lente Dielétrica

Um método híbrido clássico de análise, que combina os princípios da GO e da PO, é implementado para calcular o diagrama de radiação de uma lente dielétrica tridimensional sem simetria circular [43]. O método é baseado na integração das correntes equivalentes elétrica $\vec{J}_s$ e magnética $\vec{M}_s$ definidas em cada ponto $P(r, \theta, \phi)$ sobre a superfície externa da lente. As correntes $\vec{J}_s$ e $\vec{M}_s$, por sua vez, são determinadas a partir dos campos transmitidos elétrico ($\vec{E}_t$) e magnético ($\vec{H}_t$) pela lente, obtidos a partir da multiplicação das componentes paralela e perpendicular dos campos incidentes pelos coeficientes de transmissão de Fresnel através da interface dielétrica. O passo a passo para a implementação deste método é descrito a seguir.

O campo elétrico incidente (2.114) pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\vec{E}_i(\theta, \phi) = \vec{E}_f \frac{e^{-jk_d r^k(\theta, \phi)}}{r^k(\theta, \phi)} \quad (5.68)$$

onde

$$\vec{E}_f(\theta, \phi) = \cos^n \theta [\cos \phi \hat{\theta} - \sin \phi \hat{\phi}], \quad \theta \leq \pi/2,$$

$$k_d = \frac{2\pi n_1}{\lambda_0} \left(1 - j \frac{\delta_d}{2} \right),$$

n_1 é o índice de refração da lente e δ_d é a tangente de perdas do material dielétrico. Seja $\vec{k}_i$ e $\vec{k}_t$ os vetores nas direções dos raios incidente e transmitido, respectivamente. A componente perpendicular do campo elétrico incidente ($\vec{E}_{i\perp}$) na interface dielétrico/ar é dada por

$$E_{i\perp} = \vec{E}_i(\theta, \phi) \cdot \frac{\hat{n} \times \vec{k}_i}{\|\hat{n} \times \vec{k}_i\|} \quad (5.69)$$

e a componente paralela ($\vec{E}_{i\parallel}$) é expressa por

$$\vec{E}_{i\parallel} = \vec{E}_i(\theta, \phi) - E_{i\perp} \frac{\hat{n} \times \vec{k}_i}{\|\hat{n} \times \vec{k}_i\|}. \quad (5.70)$$

Assumindo campo TEM, a componente paralela do campo magnético incidente ($\vec{H}_{i\parallel}$) na interface dielétrica é dada pela relação

$$\vec{H}_{i\parallel} = \frac{\vec{k}_i \times \vec{E}_{i\parallel}}{Z_1} \quad (5.71)$$

onde Z_1 é a impedância da onda no material dielétrico. Os coeficientes de transmissão de

Fresnel para as polarizações perpendicular ($t_{\perp}$) e paralela ($t_{\parallel}$) são:

$$t_{\perp} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_0 \cos \theta_t}, \quad (5.72a)$$

$$t_{\parallel} = \frac{2n_0 \cos \theta_i}{n_0 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t}, \quad (5.72b)$$

onde n_0 é o índice de refração do espaço-livre (ou do ar), $\cos \theta_i = \hat{n} \cdot \vec{k}_i$ e $\cos \theta_t = \hat{n} \cdot \vec{k}_t$. O vetor $\vec{k}_t$ é obtido da Lei de Snell vetorial:

$$\hat{k}_t = \frac{n_1}{n_0} \hat{k}_i + \hat{n} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_0} \right)^2 [1 - (\hat{n} \cdot \hat{k}_i)^2]} - \frac{n_1}{n_0} (\hat{n} \cdot \hat{k}_i) \right]. \quad (5.73)$$

A componente perpendicular do campo elétrico ($\vec{E}_{t\perp}$) e a componente paralela do campo magnético ($\vec{H}_{t\parallel}$) transmitidas pela lente são dadas por:

$$\vec{E}_{t\perp} = t_{\perp} \vec{E}_{i\perp}, \quad (5.74a)$$

$$\vec{H}_{t\parallel} = t_{\parallel} \vec{H}_{i\parallel}. \quad (5.74b)$$

Assim, a componente paralela do campo elétrico transmitido ($\vec{E}_{t\parallel}$) pela lente é

$$\vec{E}_{t\parallel} = -Z_0 (\vec{k}_t \times \vec{H}_{t\parallel}) \quad (5.75)$$

onde Z_0 é a impedância de onda do espaço-livre (ou do ar). Logo, $\vec{E}_t$ e $\vec{H}_t$ são dados por

$$\vec{E}_t = \vec{E}_{t\parallel} + \vec{E}_{t\perp} \quad (5.76a)$$

$$\vec{H}_t = \frac{\vec{k}_t \times \vec{E}_t}{Z_0}. \quad (5.76b)$$

Finalmente, $\vec{J}_s$ e $\vec{M}_s$ podem ser determinadas pela aproximação da PO:

$$\vec{J}_s(P) = \hat{n} \times \vec{H}_t(P), \quad (5.77a)$$

$$\vec{M}_s(P) = -\hat{n} \times \vec{E}_t(P). \quad (5.77b)$$

Sendo $\vec{u}_0$ o vetor posição na região de cobertura

$$\vec{u}_0 = \sin \theta' \cos \phi' \hat{x} + \sin \theta' \sin \phi' \hat{y} + \cos \theta' \hat{z} \quad (5.78)$$

e $\vec{r}$ o vetor posição na superfície da lente

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \quad (5.79)$$

o vetor campo elétrico na região de campo distante no ponto de observação P' é dado por

$$\vec{E}(P') = \frac{je^{-jk_0r'}}{2\lambda_0r'} \int_S \left[Z_0 \vec{J}_s(P) \times \vec{u}_0 - \vec{M}_s(P) \right] \times \vec{u}_0 e^{jk_0\vec{r} \cdot \vec{u}_0} dS \quad (5.80)$$

onde

$$\vec{r} \cdot \vec{u}_0 = x \sin \theta' \cos \phi' + y \sin \theta' \sin \phi' + z \cos \theta',$$

$$dS = \frac{r^2 \sin \theta d\theta d\phi}{|\hat{n} \cdot \vec{k}_i|},$$

$k_0 = (2\pi)/\lambda_0$ e λ_0 é o comprimento de onda no espaço-livre.

Este formalismo despreza os efeitos de múltiplas reflexões dentro da lente, que são responsáveis pela presença de *ripples* no diagrama de radiação e também aumenta os níveis dos lóbulos laterais e da polarização cruzada. As múltiplas reflexões também dependem do material da lente, do formato e do tamanho, bem como da existência e da posição de cáusticas, da polarização do campo incidente e da presença de um refletor metálico na base da lente. No entanto, a referência [43] mostra uma comparação entre os resultados obtidos para GO-PO e aqueles obtidos empregando o método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo (FDTD) indicando que, para lentes construídas com materiais com constante dielétrica relativa pequena ($\varepsilon_r < 4$), as diferenças se tornam mais notáveis para os lóbulos laterais e mostram boa concordância para o lóbulo principal.

5.11 Estudos de Casos

Nesta seção são apresentados diversos estudos de caso para avaliar o algoritmo de síntese apresentado. O objetivo é verificar se os resultados gerados pelo método numérico de solução da equação de Monge-Ampère (5.25) são os esperados e validá-los através do método híbrido clássico baseado na GO-PO. Para a convergência da síntese, a solução da equação de Monge-Ampère é do tipo elíptica e $|\Gamma|_{mean} < 1,0 \times 10^{-10}$. Para avaliar o desempenho do algoritmo de síntese, as dimensões do contorno da região de cobertura e a função Gaussiana que descreve o diagrama de radiação serão controladas.

Para a síntese, as características do alimentador serão mantidas, bem como a espessura da lente e o material dielétrico do qual a lente é constituída. Como alimentador foi adotado o modelo cosseno elevado expresso na equação (2.117) com $n = 2$ e o ângulo de *offset* foi definido em $\theta_0 = 180^\circ$ (vide Figura 5.2). A espessura da lente é fixada em $Z_A = 4$ cm e o índice de refração adotado para a lente é de $N = 1,6$. Os resultados da síntese são, em seguida, interpolados por splines cúbicas em uma nova grade polar uniforme de 51 anéis e 200 radiais, e então, analisados nas frequências de 30 GHz, 60 GHz e 120 GHz. Assim, as dimensões elétricas da lente são $6,4\lambda_1$, $12,8\lambda_1$ e $25,6\lambda_1$, respectivamente, onde λ_1 é o comprimento de onda no material dielétrico.

5.11.1 Projeto de Lentes Dielétricas com Cobertura Circular ($0 \leq \theta \leq 90^\circ$)

Atenuação na borda de -40 dB: Caso I-a

O primeiro estudo de caso (Caso I-a) consiste na síntese de uma lente dielétrica cuja área superficial varia com $0 \leq \theta \leq 90^\circ$ ($\theta_c = 90^\circ$). A lente será projetada a fim de obter uma densidade de potência radiada com distribuição Gaussiana e atenuação na borda de $L_G = -40$ dB, o que equivale ao expoente $\psi = 9,21034$ em um contorno circular ($\sigma = 1$). Para discretizar a lente dielétrica foi escolhida uma grade polar não-uniforme no plano complexo $1/\eta'$, com $\alpha = 1,2$, definida com 21 anéis ($J = 21$) e 54 radiais ($K = 54$). A solução inicial para o algoritmo de síntese consiste em uma lente circularmente simétrica dada pela expressão (A.1) com foco virtual em $Z_0 = -1,5$ cm e $\rho_0 = 0$ cm. A largura do feixe da solução inicial é $\alpha_c = 57,37^\circ$, que será mantida na solução final. Portanto, apenas a distribuição de amplitude do diagrama de radiação será controlada, e terá amplitude máxima desejada de $G_0 = 15,3176$ dB.

Para este primeiro estudo de caso, as direções dos raios refratados pela superfície sintetizada estão ilustrados na Figura 5.5 e a Figura 5.6 mostra o traçado de raios no plano de simetria.

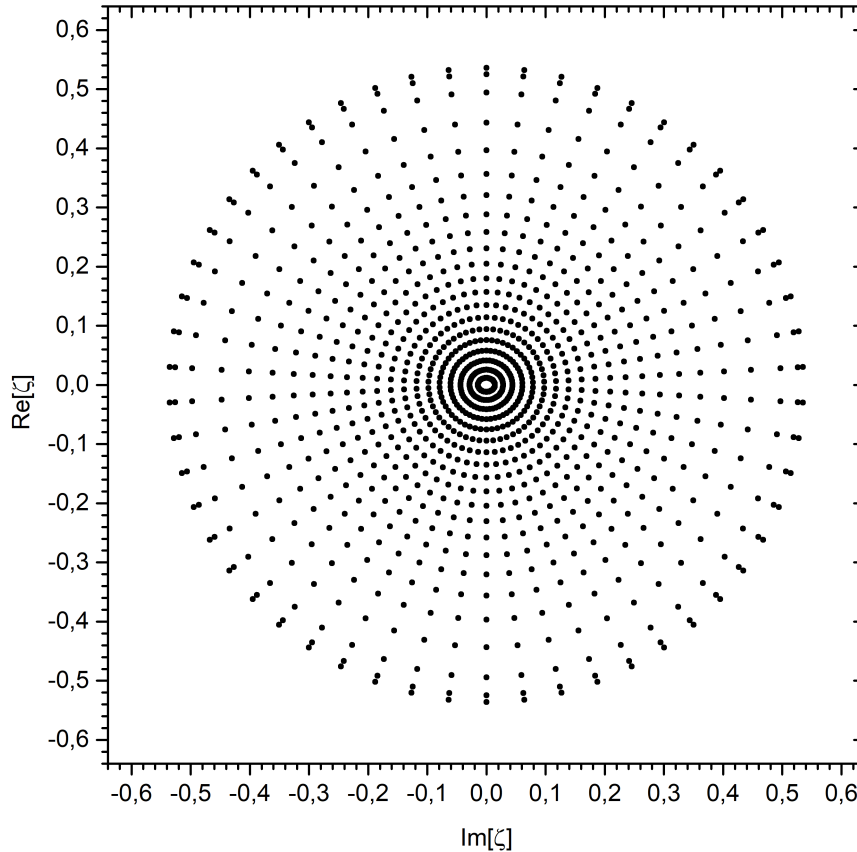


Figura 5.5: Direção dos raios refratados no plano complexo ζ para o caso I-a.

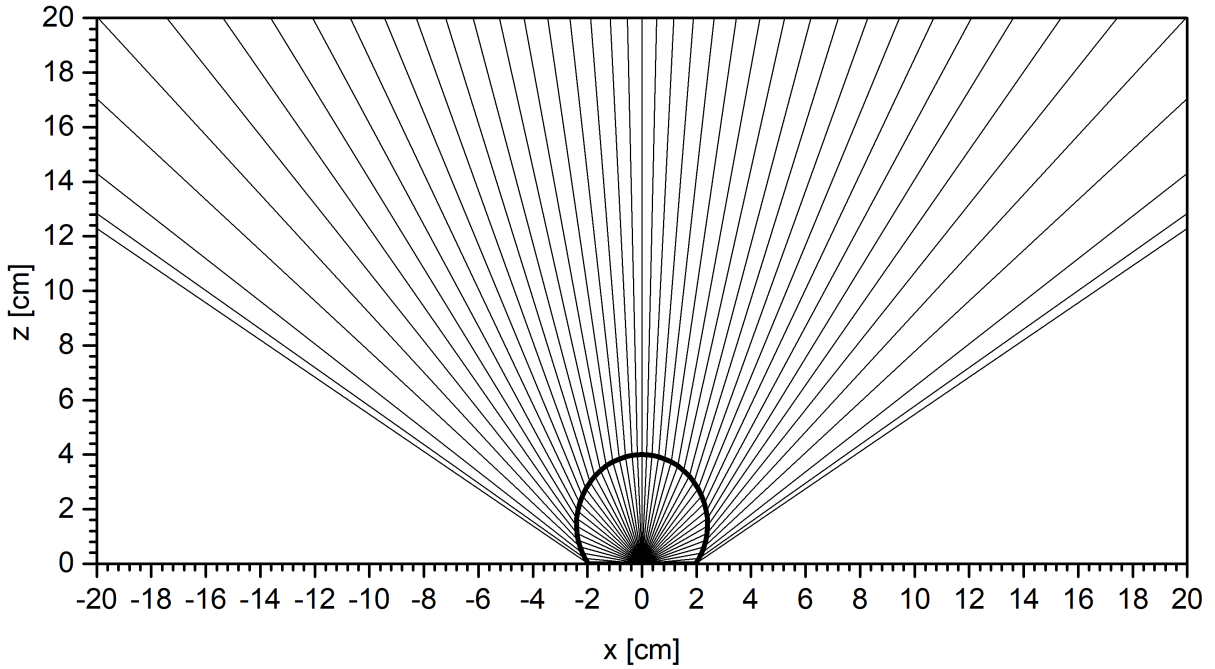


Figura 5.6: Traçado de raios da lente sintetizada para para o caso I-a.

Desprezando as perdas por reflexão, os resultados da síntese foram obtidos após 37 iterações, sendo que o erro médio dos resíduos associados ao operador $\Gamma[L]$ foi de $|\Gamma|_{mean} = 2,54161^{-13}$ nos pontos interiores ao contorno e $|\Gamma|_{mean} = 2,37492^{-14}$ nos pontos do contorno. Uma vez que as perdas por reflexão foram consideradas, o algoritmo de síntese convergiu após 40 iterações com $|\Gamma|_{mean} = 2,7872^{-13}$ nos pontos interiores ao contorno e $|\Gamma|_{mean} = 3,14184^{-14}$ nos pontos da borda. Dos resultados apresentados, é possível avaliar que a condição de contorno foi atendida uma vez que os raios mapeados na borda da lente são refratados na borda do contorno desejado, enquanto que os raios mapeados no interior do contorno foram mapeados no interior do contorno desejado. Como esperado, as superfícies quádricas confocais mapearam círculos concêntricos no plano $1/\eta'$ em círculos concêntricos no plano ζ , comportamento típico do mapeamento conformal. Além disso, é possível observar da Figura 5.5 que as direções dos raios refratados estão mais concentradas na região central da grade. Este comportamento é determinado pela Conservação da Energia implícita na equação de Monge-Ampère, direcionando a iluminação do alimentador a fim de obter a distribuição de potência especificada. No traçado de raios é possível verificar que não há ocorrência de raios refratados interceptando a superfície a lente, o que caracterizaria um resultado indesejado. Além disso, deve-se destacar a instabilidade provocada no algoritmo quando as perdas por reflexão são consideradas, fazendo o algoritmo realizar um número maior de iterações para convergir.

Para obter o diagrama de radiação gerado pela superfície sintetizada, os pontos dados pelo método de síntese foram interpolados por splines cúbicas e então analisados pelo método híbrido GO-PO. Os diagramas para a polarização principal no plano $\phi = 0^\circ$

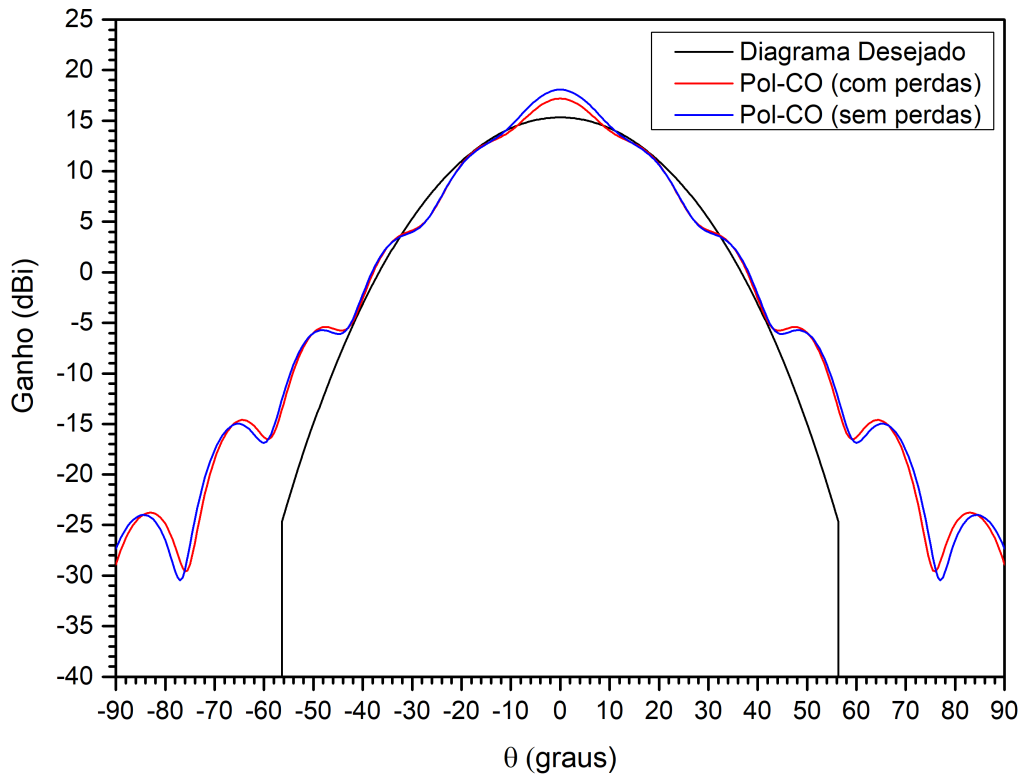


Figura 5.7: Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^\circ$ com a lente operando na frequência de 30 GHz para o caso I-a.

estão ilustrados nas Figuras 5.7, 5.8 e 5.9 para as frequências de 30 GHz, 60 GHz e 90 GHz, respectivamente. É importante observar que estes gráficos apresentam uma comparação entre o diagrama desejado da GO e os diagramas obtidos após a síntese da superfície dielétrica. Também é possível verificar a diferença entre o diagrama obtido da síntese quando as perdas por reflexão foram desprezadas, e por aquele onde as perdas por reflexão foram consideradas.

Assim como no procedimento de síntese, o algoritmo de análise também verifica a ocorrência de ângulos críticos, uma vez que a superfície sintetizada é interpolada por splines cúbicas em uma nova grade polar. Uma vez obtida a convergência deste algoritmo, é possível verificar que os diagramas de radiação obtidos concordam satisfatoriamente com o diagrama desejado da GO. As diferenças observadas podem ser atribuídas a uma série de fatores, entre eles: erros numéricos da síntese uma vez que a superfície é representada por um conjunto finito de pontos; erros de interpolação; e efeitos difrativos não levados em conta pelo método de síntese. Para a frequência de 120 GHz essas diferenças ficam menos evidentes, visto que as dimensões elétricas da lente são maiores e, conseqüentemente, os efeitos difrativos são menos relevantes. Também é importante destacar que, neste exemplo, o nível de exigência no controle da distribuição de amplitude da densidade de potência radiada da lente é baixo (atenuação de borda de -40 dB), embora toda a superfície da lente tenha sido modelada. Também é possível verificar que as perdas por reflexão são

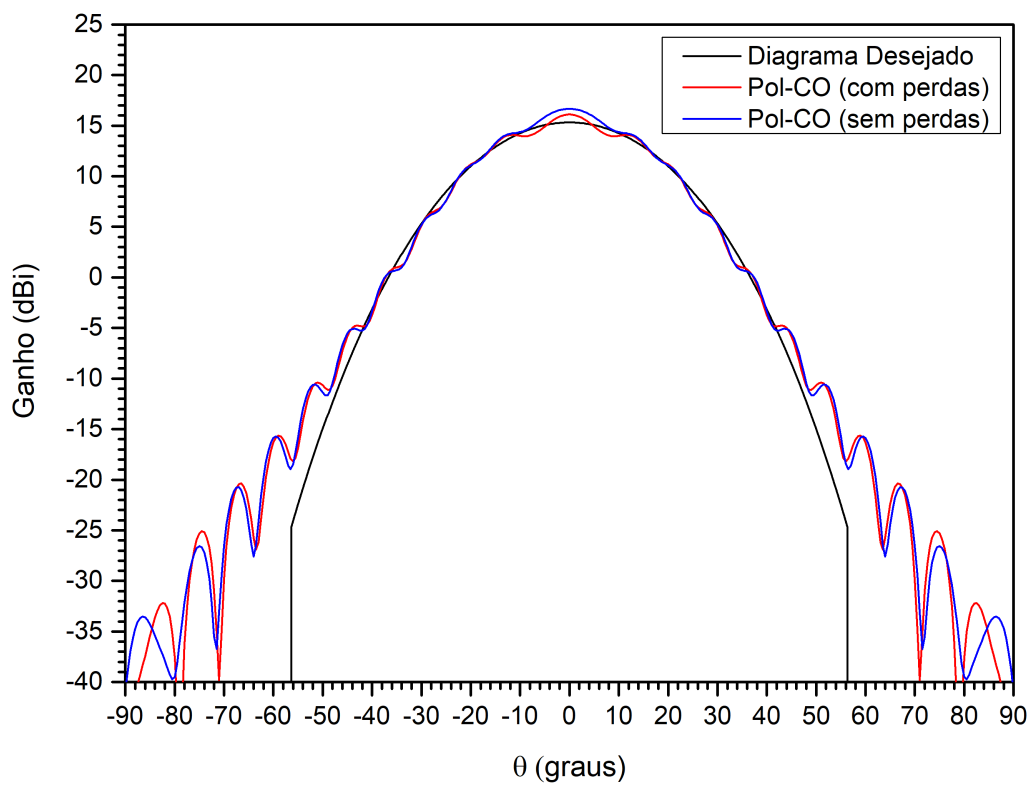


Figura 5.8: Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^\circ$ com a lente operando na frequência de 60 GHz para o caso I-a.

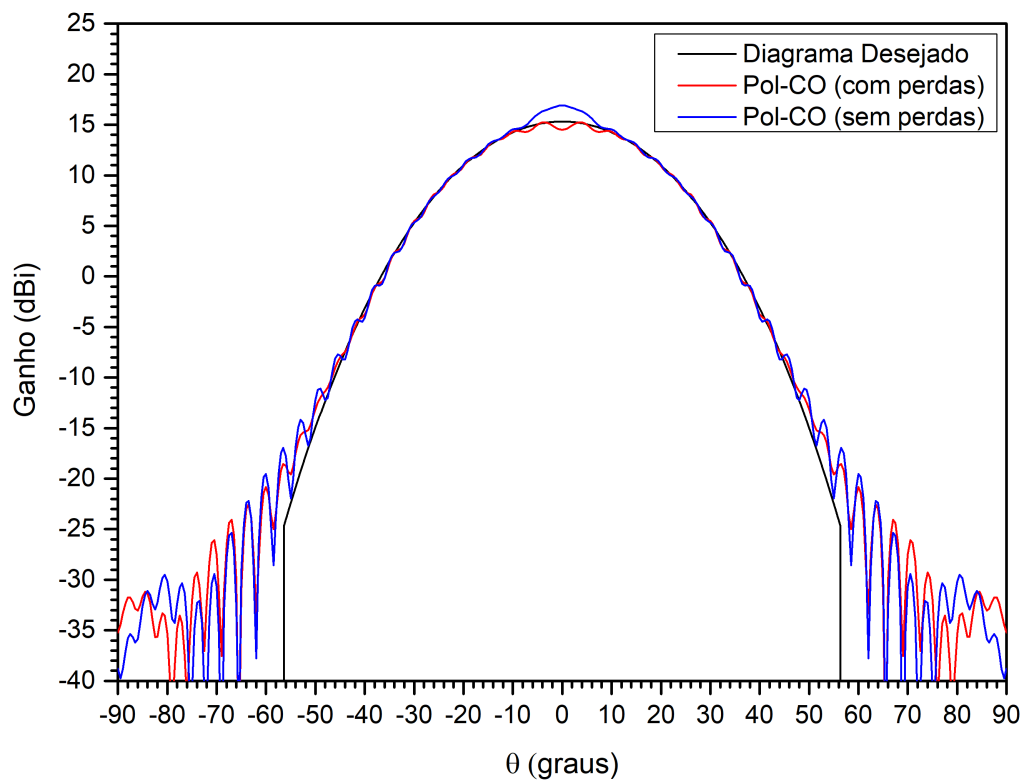


Figura 5.9: Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^\circ$ com a lente operando na frequência de 120 GHz para o caso I-a.

pequenas e mais significativas próximas à região central do diagrama de radiação. Neste estudo de caso, na direção $\theta = 0^\circ$, as perdas foram inferiores a 1 dB nas frequências de 30 GHz e 60 GHz, e de 2,40 dB na frequência de 120 GHz.

Atenuação na borda de -30 dB: Caso I-b

Para aumentar o grau de dificuldade da síntese, será especificado um diagrama de radiação na região de campo distante com distribuição de amplitude Gaussiana com atenuação na borda de -30 dB, ou seja, $\psi = 6,90776$, em um contorno circular ($\sigma = 1$). A largura de feixe será mantida em $\alpha_c = 57,37^\circ$, bem como a solução inicial utilizada no estudo de caso I-a. Portanto, neste estudo de caso, $G_0 = 14,1499$ dB.

Desprezando as perdas por reflexão, os resultados da síntese foram obtidos após 40 iterações com $|\Gamma|_{mean} = 2,579024^{-13}$ nos pontos interiores ao contorno e $|\Gamma|_{mean} = 2,63983^{-14}$ nos pontos da borda. Dos resultados da síntese fica evidente que o algoritmo falha em atender as condições de contorno, ou seja, raios internos são mapeados na parte externa do contorno desejado. Estes resultados estão exibidos nas Figuras 5.10 e 5.11 para a direção dos raios refratados no plano complexo ζ e no traçado de raios, respectivamente.

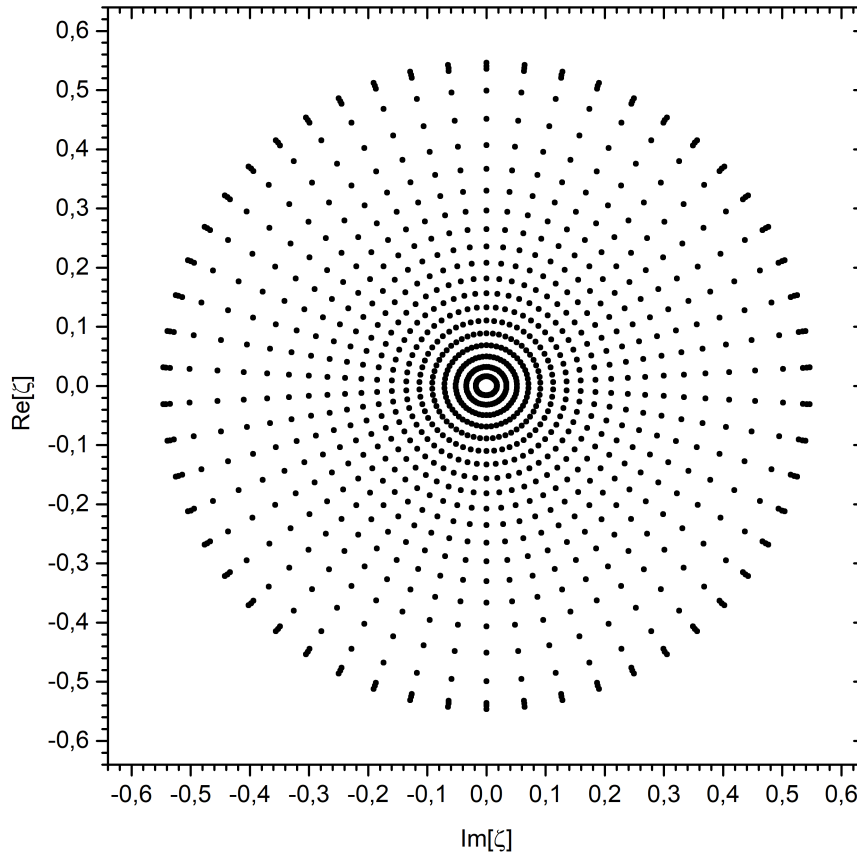


Figura 5.10: Direção dos raios refratados no plano complexo ζ para o caso I-b.

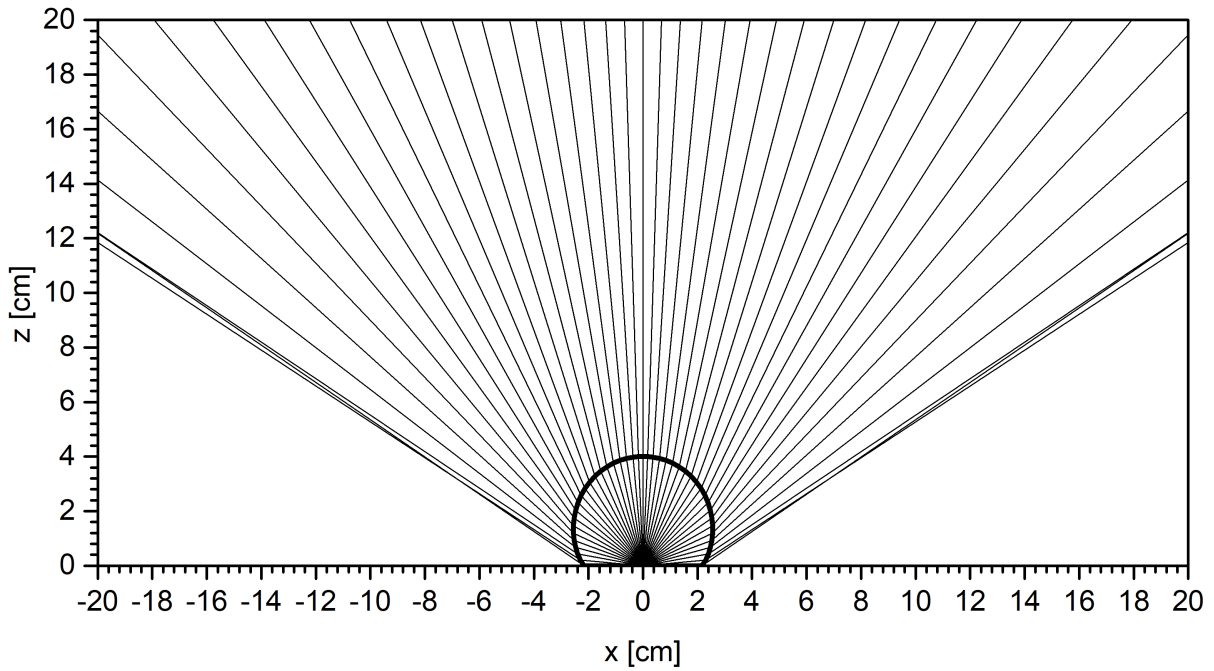


Figura 5.11: Traçado de raios da lente sintetizada para o caso I-b.

Este é um resultado interessante pois o algoritmo de síntese não diverge, ou seja, não há ocorrência de ângulos críticos e o algoritmo consegue encontrar uma solução matemática que atenda ao critério de convergência. No entanto, fica evidente a dificuldade do algoritmo em encontrar uma solução que atenda à condição de contorno para uma atenuação na borda menor em módulo. Esta dificuldade se dá porque toda a área da lente compreendida no intervalo $0 \leq \theta \leq 90^\circ$ é sintetizada.

5.11.2 Projeto de Lentes Dielétricas com Cobertura Circular ($0 \leq \theta \leq 60^\circ$)

Com o objetivo de obter um diagrama de radiação com topo plano na região de cobertura, e em virtude da dificuldade encontrada no estudo de caso I-b, optou-se por modelar apenas uma seção da lente, aquela compreendida no intervalo $0 \leq \theta \leq 60^\circ$, ou seja, $\theta_c = 60^\circ$, flexibilizando o algoritmo de síntese.

Atenuação na borda de -30 dB: Caso II-a

Inicialmente, será projetada uma lente dielétrica para obter uma densidade de potência $G(\zeta)$ com distribuição de amplitude Gaussiana com atenuação na borda de $L_G = -30$ dB em um contorno circular ($\sigma = 1$) com $\alpha_c = 57,37^\circ$, o que torna $G_0 = 14,1499$ dB. A solução inicial adotada consiste naquela usada no estudo de caso I-a. Para discretizar a lente dielétrica foi escolhida uma grade polar regular ($\alpha = 1,0$) no plano complexo $1/\eta'$, definida com 12 anéis ($J = 12$) e 54 radiais ($K = 54$).

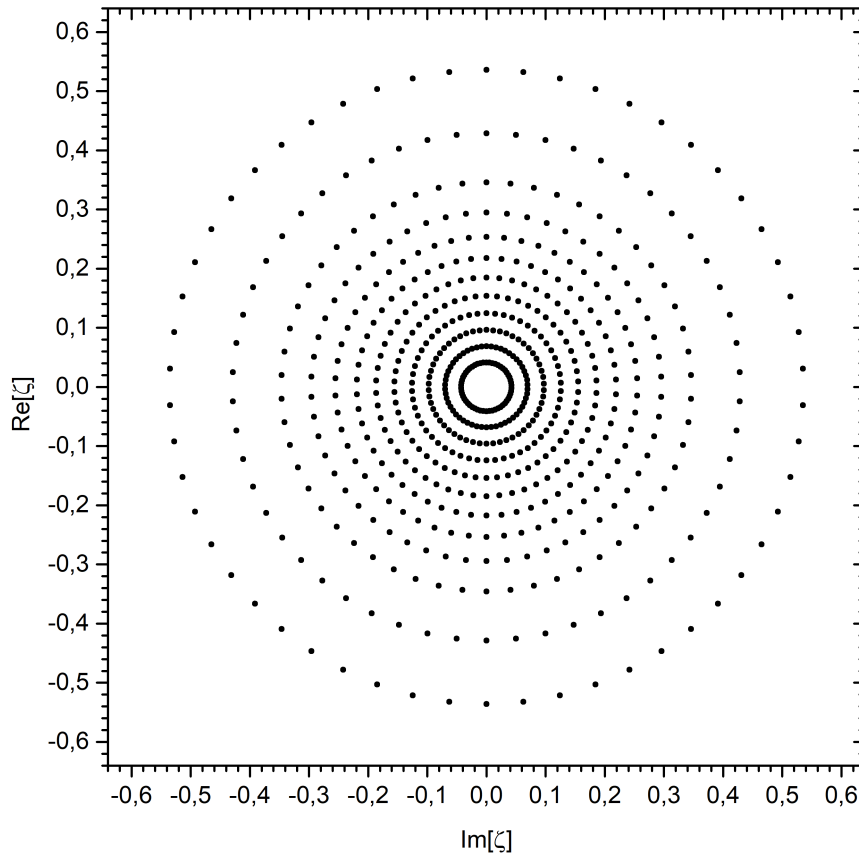


Figura 5.12: Direção dos raios refratados no plano complexo ζ para o caso II-a.

Os resultados da síntese foram obtidos após 42 iterações com $|\Gamma|_{mean} = 3,15795^{-13}$ nos pontos interiores ao contorno e $|\Gamma|_{mean} = 9,84897^{-15}$ nos pontos da borda quando o algoritmo despreza as perdas por reflexão. Já considerando as perdas, o algoritmo converge após 47 iterações com $|\Gamma|_{mean} = 3,13925^{-13}$ nos pontos interiores ao contorno e $|\Gamma|_{mean} = 1,16739^{-14}$ nos pontos da borda. A direção dos raios refratados pela lente sintetizada e o respectivo traçado de raios estão ilustrados nas Figuras 5.12 e 5.13. Conforme pode ser observado, as condições de contorno são atendidas e não há ocorrências de raios refratados interceptando o interior da lente. Além disso, é possível observar que há uma concentração menor de raios próximo ao centro da grade quando comparado ao caso I-a. Assim, como discutido naquele estudo de caso, esse resultado é consequência da Conservação da Energia implícita na equação de Monge-Ampère, que está direcionando a iluminação do alimentador para atender a distribuição de potência especificada na região de cobertura, que neste caso é -30 dB.

Uma vez que os resultados da síntese foram satisfatórios, os mesmos foram interpolados por splines cúbicas e os diagramas de radiação da lente sintetizada operando nas frequências de 30 GHz, 60 GHz e 120 GHz foram obtidos e estão ilustrados nas Figuras 5.14, 5.15 e 5.16, respectivamente. Neste estudo de caso, na direção $\theta = 0^\circ$, as perdas por reflexão também foram inferiores a 1 dB nas frequências de 30 GHz e 60 GHz, e de 1,46

dB na frequência de 120 GHz.

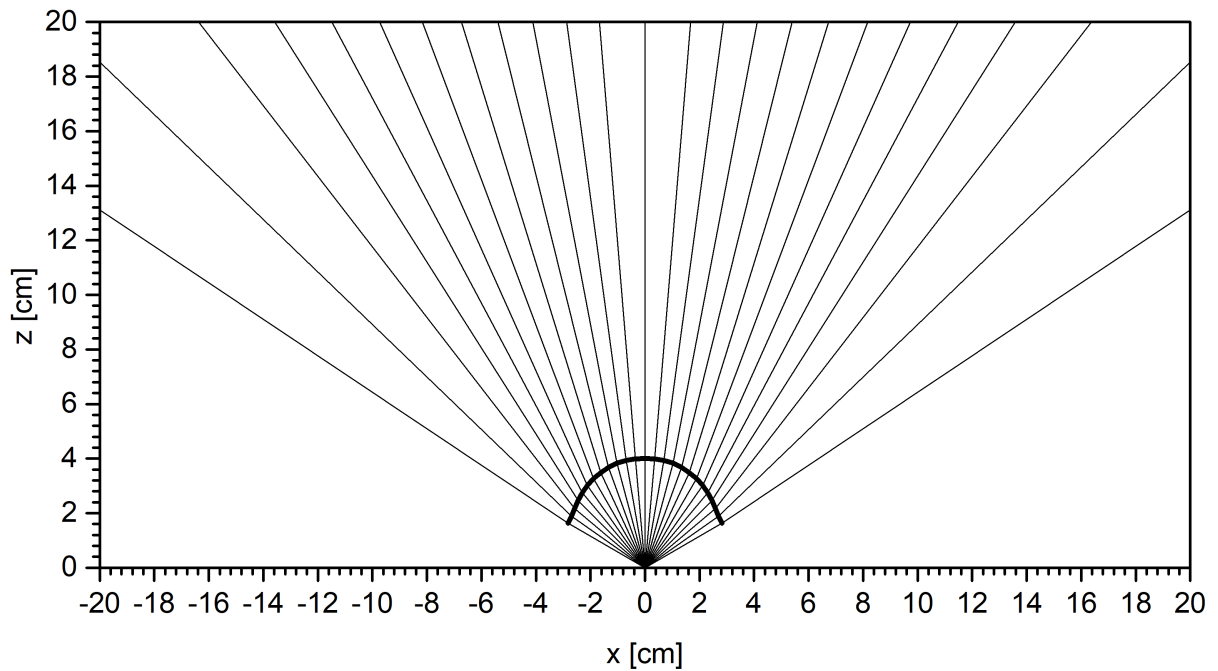


Figura 5.13: Traçado de raios da lente sintetizada para o caso II-a.

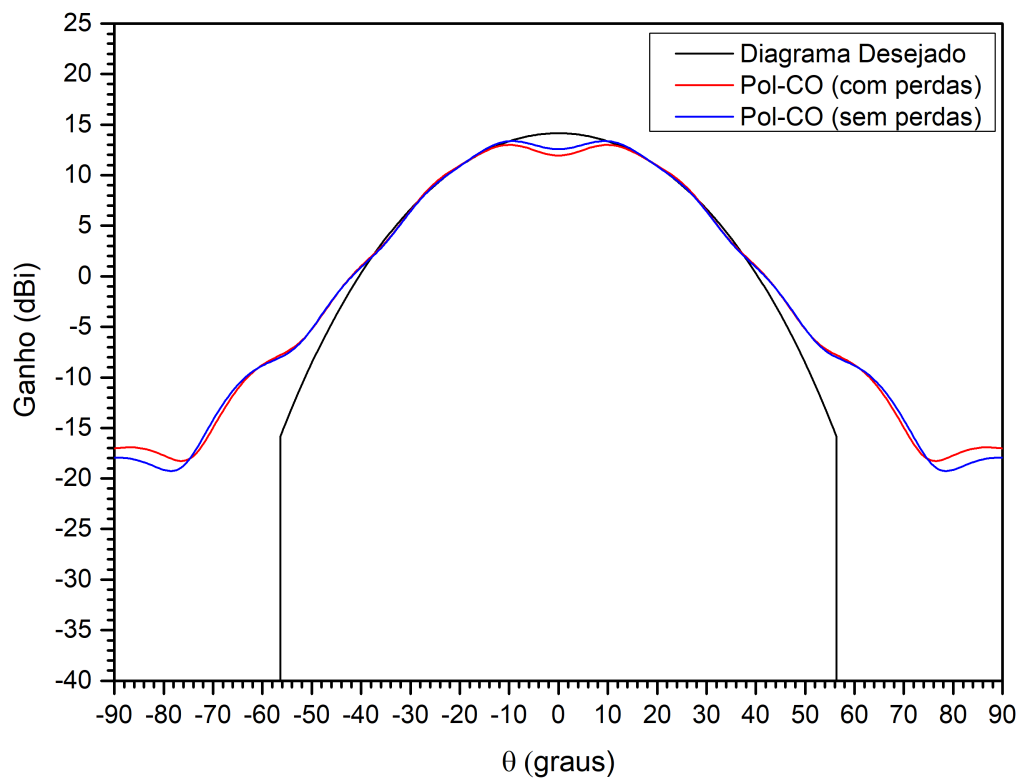


Figura 5.14: Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^\circ$ com a lente operando na frequência de 30 GHz para o caso II-a.

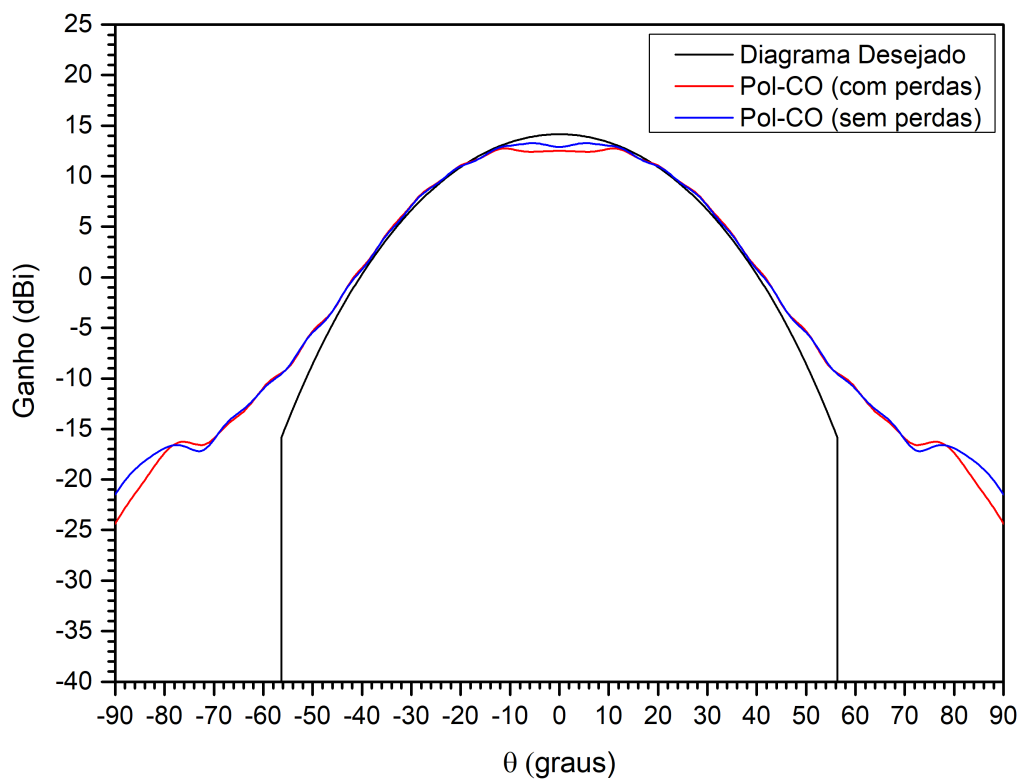


Figura 5.15: Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^\circ$ com a lente operando na frequência de 60 GHz para o caso II-a.

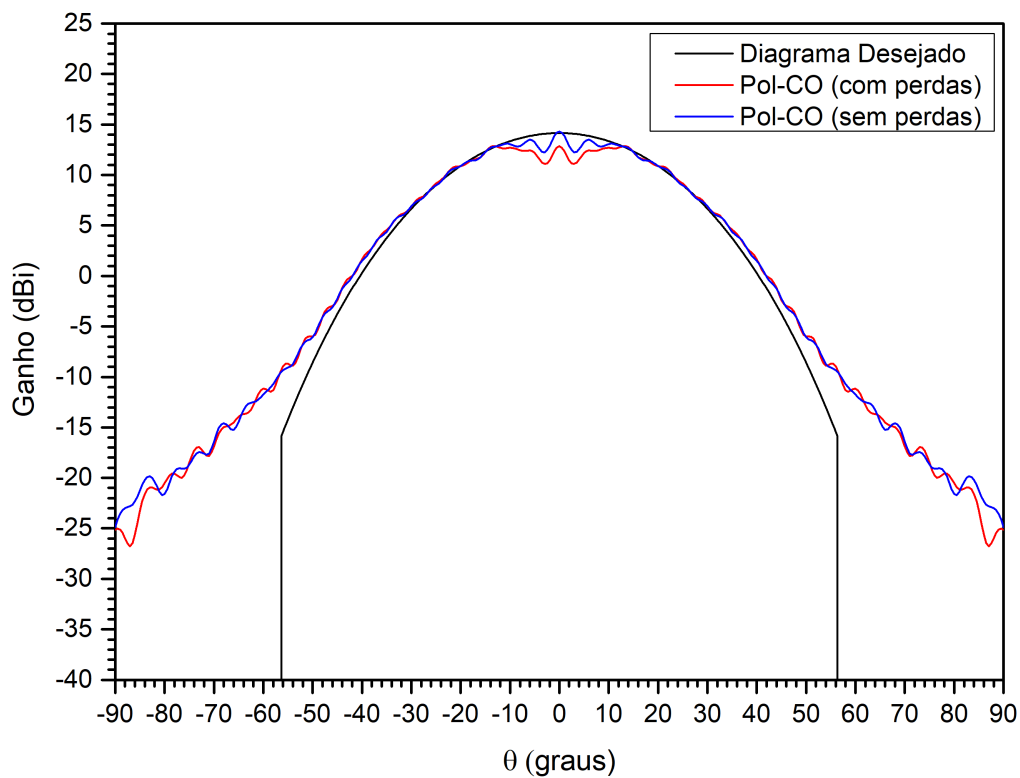


Figura 5.16: Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^\circ$ com a lente operando na frequência de 120 GHz para o caso II-a.

A partir da análise gráfica dos resultados apresentados é possível verificar uma boa concordância entre os diagramas gerados e aquele desejado, sendo que as diferenças observadas podem ser atribuídos aos fatores discutidos no estudo de caso I-a: erros numéricos da síntese uma vez que a superfície é representada por um conjunto finito de pontos; erros de interpolação; e efeitos difrativos não levados em conta pelo método de síntese. De forma análoga, nos resultados para a frequência de 120 GHz, essas diferenças foram menos evidentes, visto que as dimensões elétricas da lente são maiores e, conseqüentemente, os efeitos difrativos são menos relevantes.

Atenuação na borda de -15 dB: Caso II-b

Na sequência, é imposto mais um grau de dificuldade ao algoritmo de síntese. Para isso, uma lente é projetada para obter uma densidade de potência com distribuição de amplitude Gaussiana com atenuação na borda de $L_G = -15$ dB ($\psi = 3,45388$), em um contorno circular ($\sigma = 1$) com $\alpha_{u_f} = \alpha_{v_f} = 37,052^0$, logo, $G_0 = 15,2586$ dB. Neste estudo de caso, a atenuação da borda é menor em módulo e o feixe circular mais estreito. Para obter o feixe mais estreito na região de cobertura, optou-se por escolher uma solução inicial que já forneça tal feixe. Por isso, foi adotada como solução inicial uma lente circularmente simétrica com foco virtual em $Z_0 = -2$ cm e $\rho_0 = 0$ cm. A largura do feixe desta lente é $\alpha_c = 37,052^0$, que será mantida na solução final. Para discretizar a lente dielétrica foi escolhida uma grade polar uniforme ($\alpha = 1,0$) no plano complexo $1/\eta'$ definida com 12 anéis ($J = 12$) e 54 radiais ($K = 54$).

Os resultados da síntese foram obtidos após 32 iterações com $|\Gamma|_{mean} = 1,80913^{-13}$ nos pontos interiores ao contorno e $|\Gamma|_{mean} = 4,0125^{-14}$ nos pontos da borda quando o algoritmo despreza as perdas por reflexão. Já considerando as perdas, o algoritmo converge após 36 iterações com $|\Gamma|_{mean} = 1,81098^{-13}$ nos pontos interiores ao contorno e $|\Gamma|_{mean} = 4,11414^{-14}$ nos pontos da borda. A direção dos raios refratados pela lente sintetizada e o respectivo traçado de raios estão ilustrados nas Figuras 5.17 e 5.18. Novamente, é importante destacar que os resultados da síntese devem atender as condições de contorno e a ausência de raios refratados interceptando a superfície dielétrica. Também é possível verificar que as direções dos raios refratados estão mais distribuídos próximos à borda do contorno desejado, quando comparado com os resultados obtidos para os estudos de caso I-a e II-a. Conforme discutido anteriormente, este comportamento é resultado do Princípio da Conservação da Energia implícito na equação de Monge Ampère que tende a redistribuir a concentração da energia do alimentador dado que a atenuação na borda especificada da região de cobertura é -15 dB. Ou seja, o diagrama de radiação está tendendo para uma distribuição de amplitude uniforme. Assim, a energia antes concentrada na região central deve ser redistribuída para as bordas da região de cobertura.

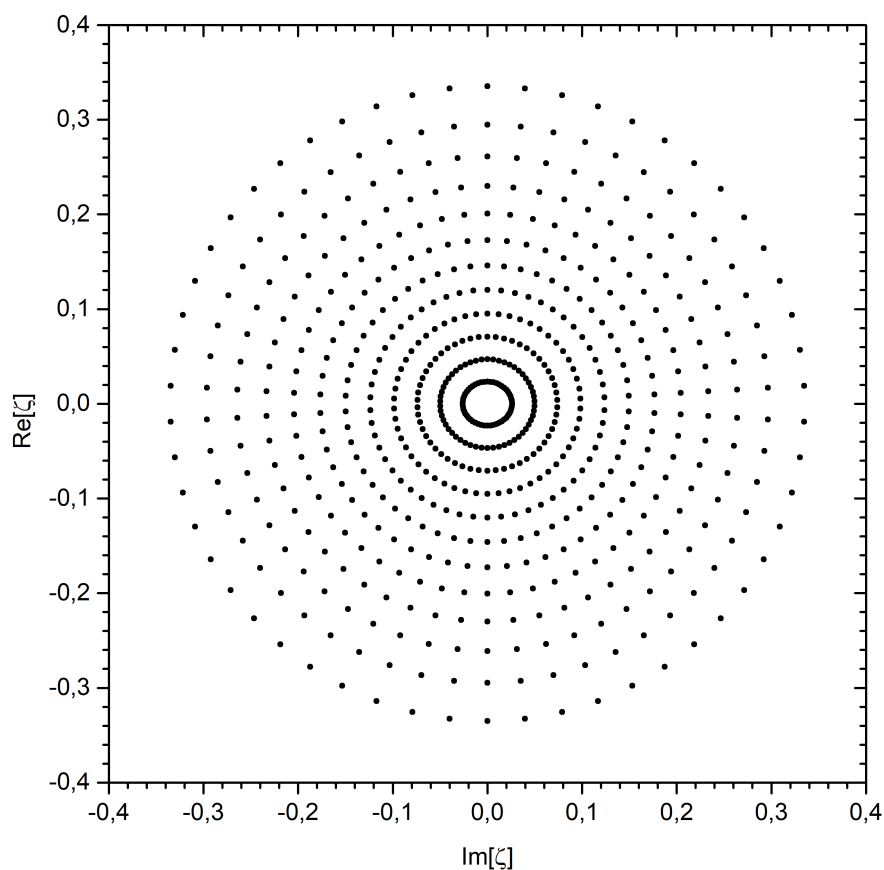


Figura 5.17: Direção dos raios refratados no plano complexo ζ para o caso II-b.

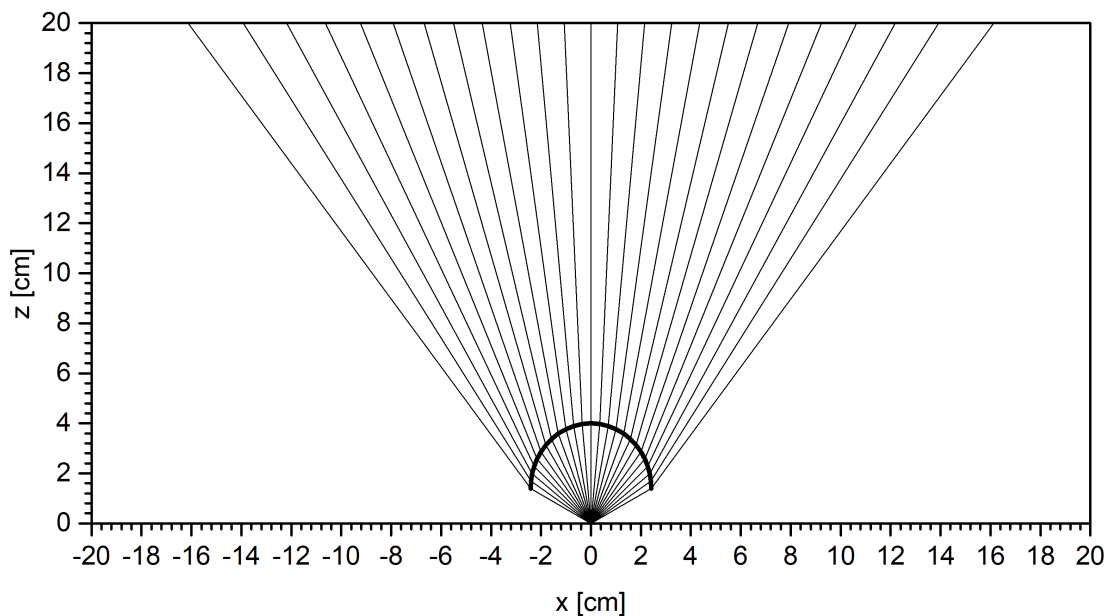


Figura 5.18: Traçado de raios da lente sintetizada para o caso II-b.

Após a interpolação dos resultados da síntese, os diagramas de radiação obtidos estão ilustrados nas Figuras 5.19, 5.20 e 5.21 para a lente operando nas frequências de 30 GHz, 60 GHz e 120 GHz, respectivamente.

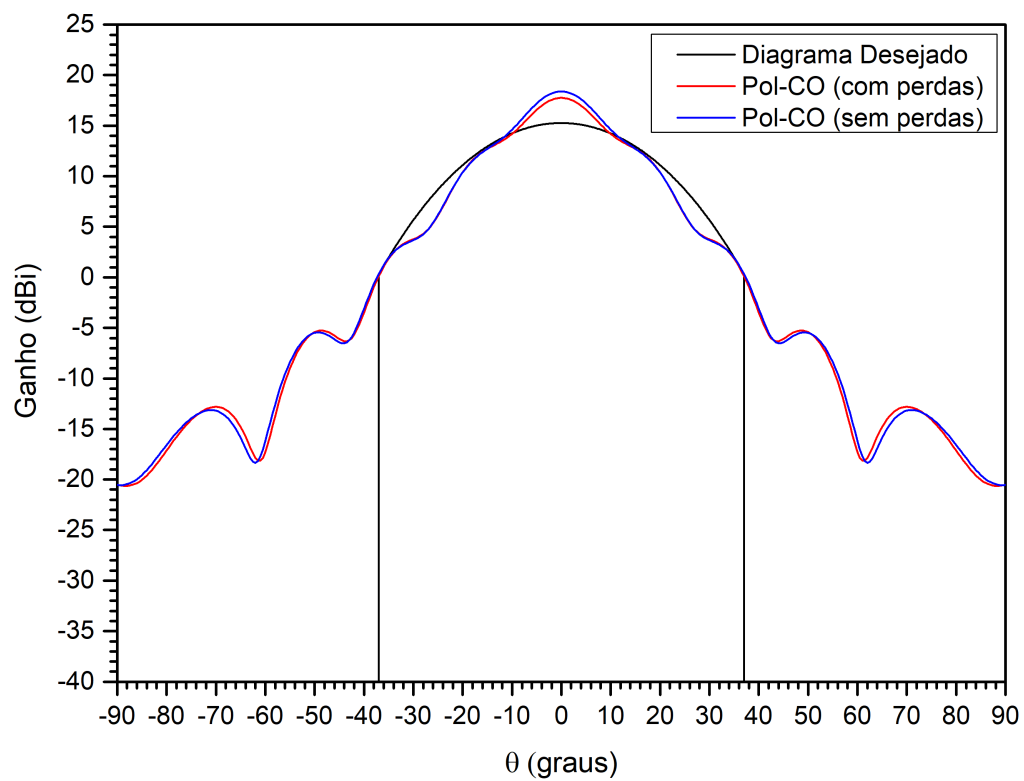


Figura 5.19: Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^\circ$ com a lente operando na frequência de 30 GHz para o caso II-b.

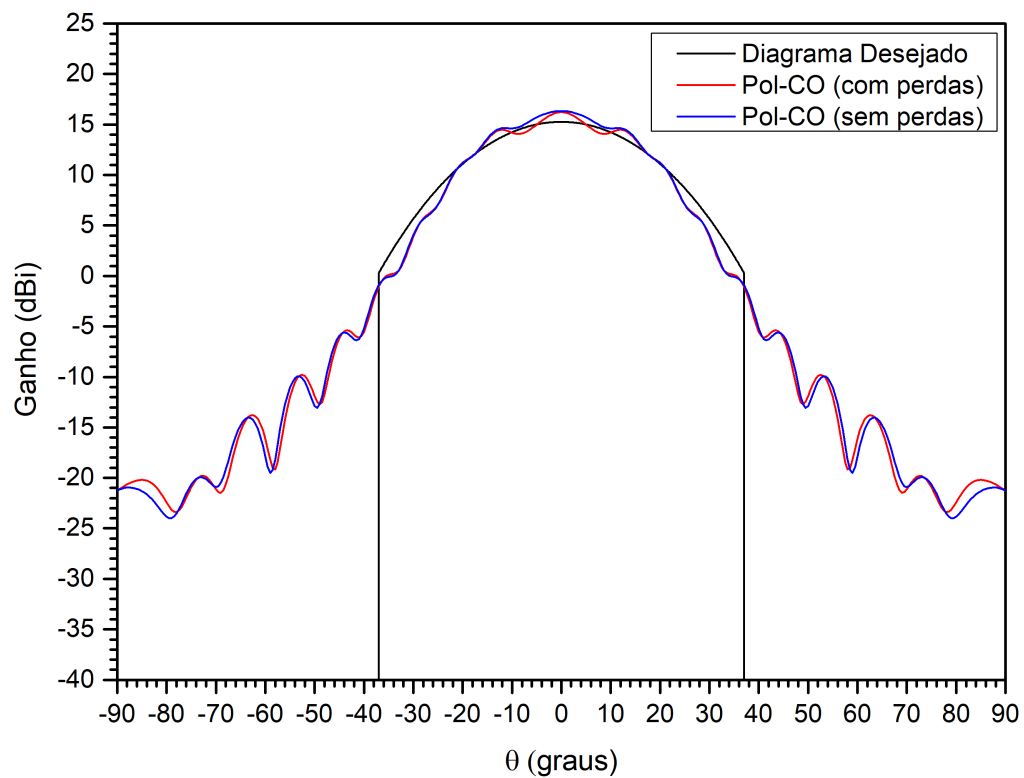


Figura 5.20: Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^\circ$ com a lente operando na frequência de 60 GHz para o caso II-b.

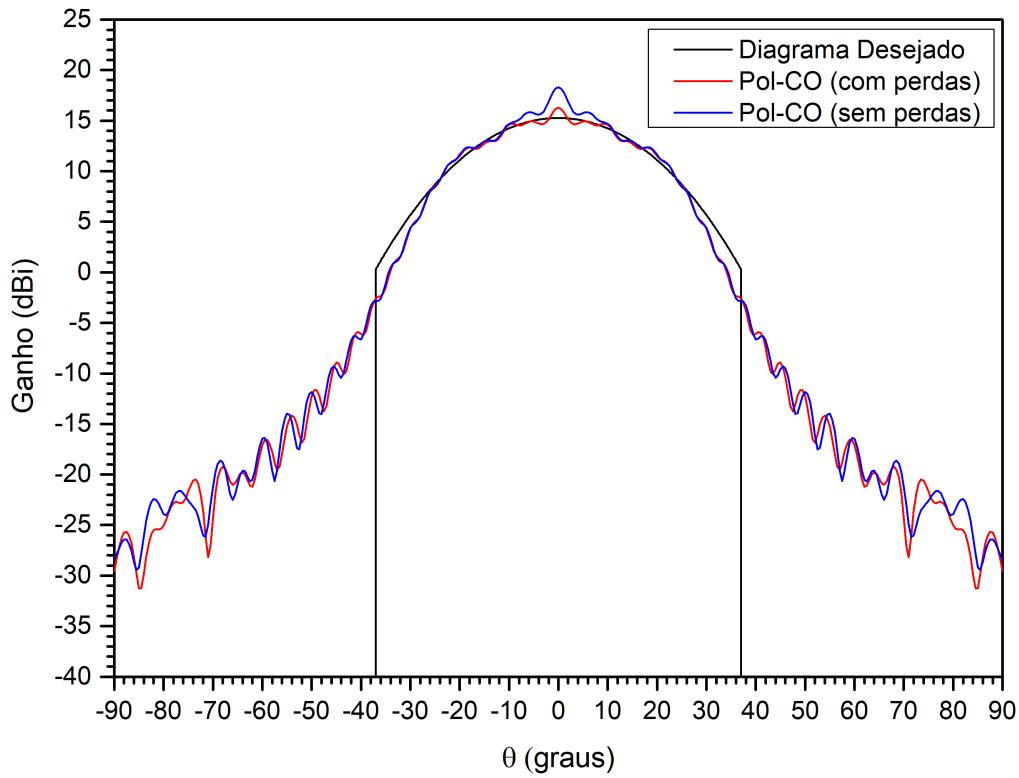


Figura 5.21: Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^\circ$ com a lente operando na frequência de 120 GHz para o caso II-b.

Dos resultados da análise, é possível visualizar os diagramas de radiação para a polarização principal no plano $\phi = 0$ para os resultados interpolados da síntese com perdas e sem perdas, além do diagrama desejado da GO. A partir desses diagramas, nota-se a presença de oscilações na região central do diagrama de radiação (na direção $\theta = 0^\circ$) onde também se evidencia a maior diferença devido as perdas por reflexão, em particular para a análise realizada em 120 GHz que foi de 2,01 dB, e ficando abaixo de 1 dB para as outras duas frequências. De modo geral, os diagramas concordam com aquele especificado, sendo que as diferenças observadas podem ser atribuídas aos fatores discutidos nos estudos de caso I-a e II-a.

Atenuação na borda de -3 dB: Caso II-c

Neste estudo de caso, será exigido mais um grau de dificuldade e é imposto ao algoritmo sintetizar uma lente que gere um diagrama de radiação Gaussiano com atenuação de -3 dB na borda do contorno da região de cobertura, ou seja, $\psi = 0,690776$, em um contorno circular ($\sigma = 1$) com $\alpha_{u_f} = \alpha_{v_f} = 37,052^\circ$, logo, $G_0 = 11,3200$ dB. A solução inicial será a mesma adotada no estudo de caso II-b, bem como as especificações da grade polar para discretizar a superfície dielétrica.

Os resultados da síntese foram obtidos após 35 iterações com $|\Gamma|_{mean} = 2,18961 \cdot 10^{-13}$ nos pontos interiores ao contorno e $|\Gamma|_{mean} = 3,31009 \cdot 10^{-14}$ nos pontos da borda quando o

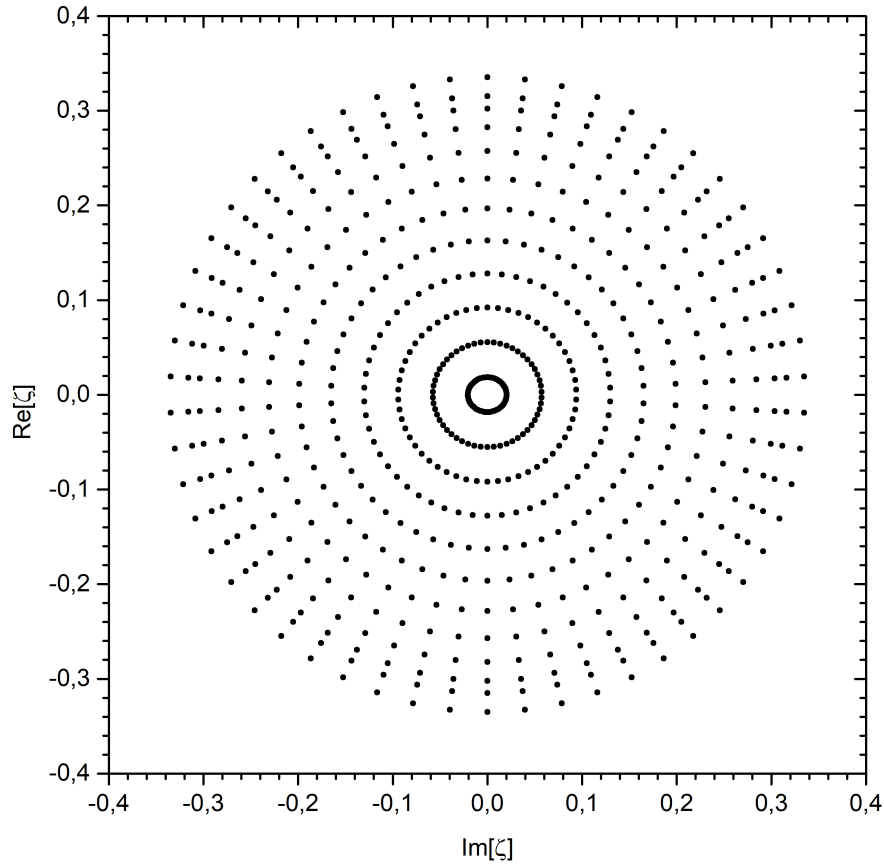


Figura 5.22: Direção dos raios refratados no plano complexo ζ para o caso II-c.

algoritmo despreza as perdas por reflexão. Já considerando as perdas, o algoritmo converge após 37 iterações com $|\Gamma|_{mean} = 2,34416^{-13}$ nos pontos interiores ao contorno e $|\Gamma|_{mean} = 3,50036^{-14}$ nos pontos da borda. A direção dos raios refratados pela lente sintetizada e o respectivo traçado de raios estão ilustrados nas Figuras 5.22 e 5.23. Conforme pode ser observado, o resultado da síntese atende às condições de contorno bem como a ausência de raios refratados que interceptam a superfície da lente. Para atender ao Princípio da Conservação da energia implícito na equação de Monge-Ampère, há uma maior concentração das direções dos raios refratados próximo ao contorno quando comparado aos estudos de caso II-a e II-b, visto que atenuação na borda é de -3 dB.

Uma vez que os resultados da síntese são interpolados por splines cúbicas, os diagramas de radiação da lente sintetizada operando nas frequências de 30 GHz, 60 GHz e 120 GHz são obtidos pelo método híbrido baseado na GO-PO e estão ilustrados nas Figuras 5.24, 5.25 e 5.26, respectivamente. Pode ser observado nestes gráficos que a superfície obtida gera diagramas de radiação com topo aproximadamente plano, no entanto, as oscilações próximas à direção central ($\theta = 0^\circ$) observadas no estudo de caso II-b também são verificadas neste exemplo, sendo, no entanto, mais expressivas. Este comportamento é consequência da baixa atenuação especificada na borda do diagrama desejado (-3 dB). Além disso, as diferenças observadas entre os diagramas da GO-PO e aquele desejado,

também são devido aos fatores já discutidos nos estudos de caso anteriores.

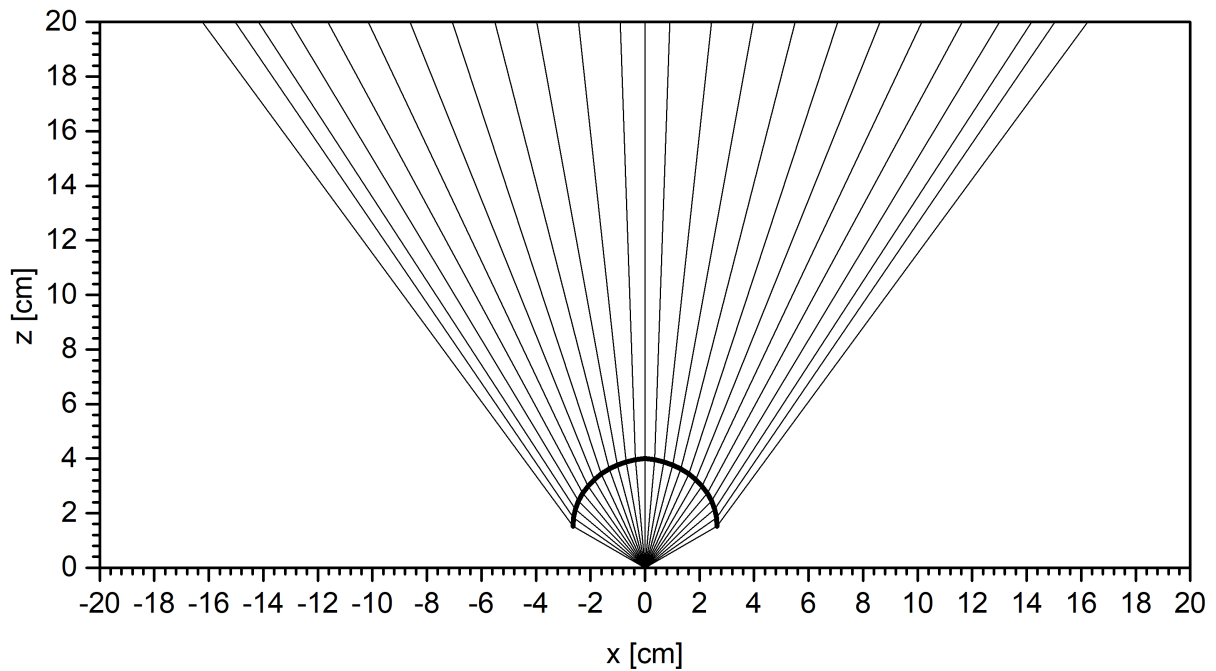


Figura 5.23: Traçado de raios da lente sintetizada para o caso II-c.

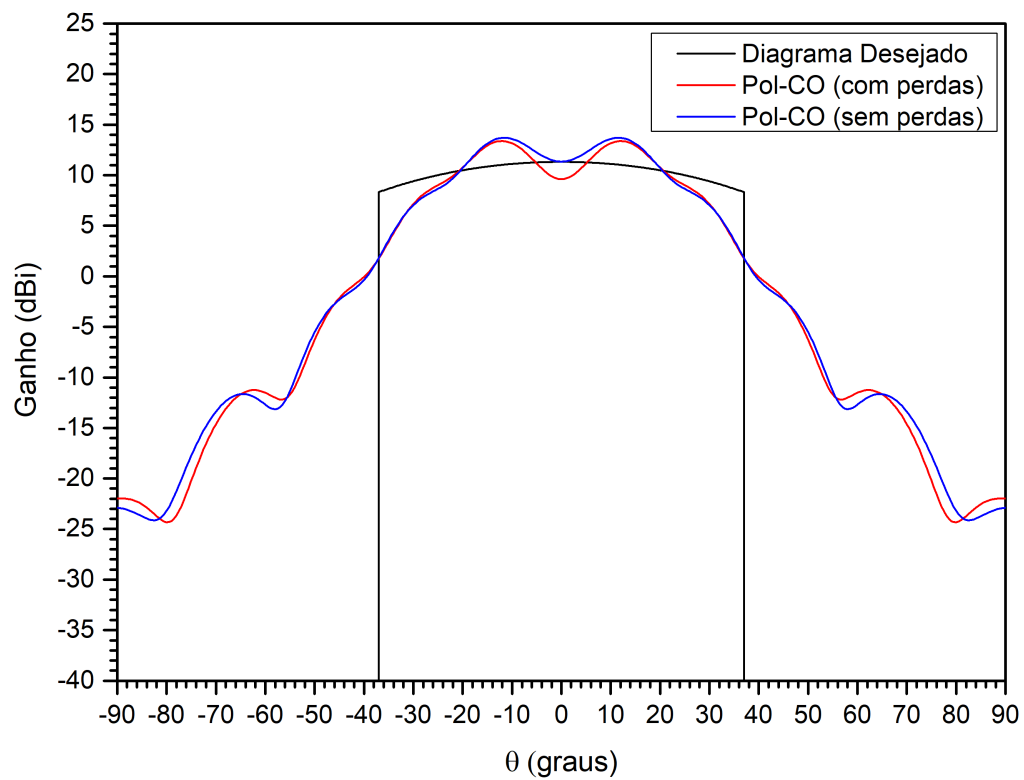


Figura 5.24: Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^\circ$ com a lente operando na frequência de 30 GHz para o caso II-c.

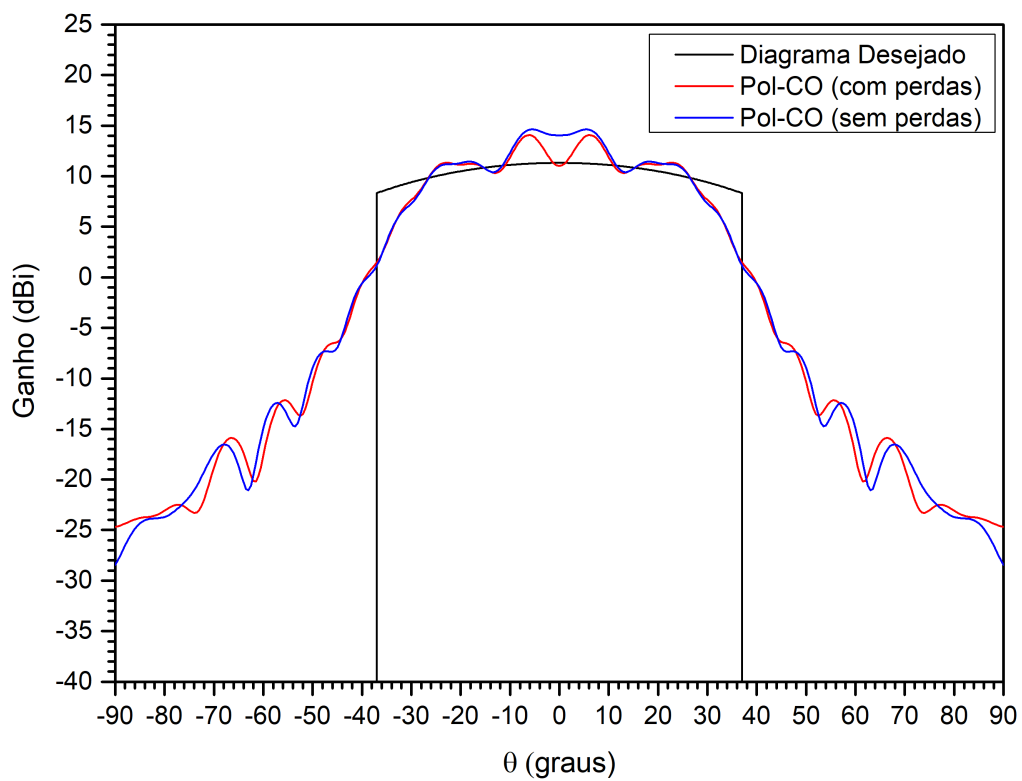


Figura 5.25: Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^\circ$ com a lente operando na frequência de 60 GHz para o caso II-c.

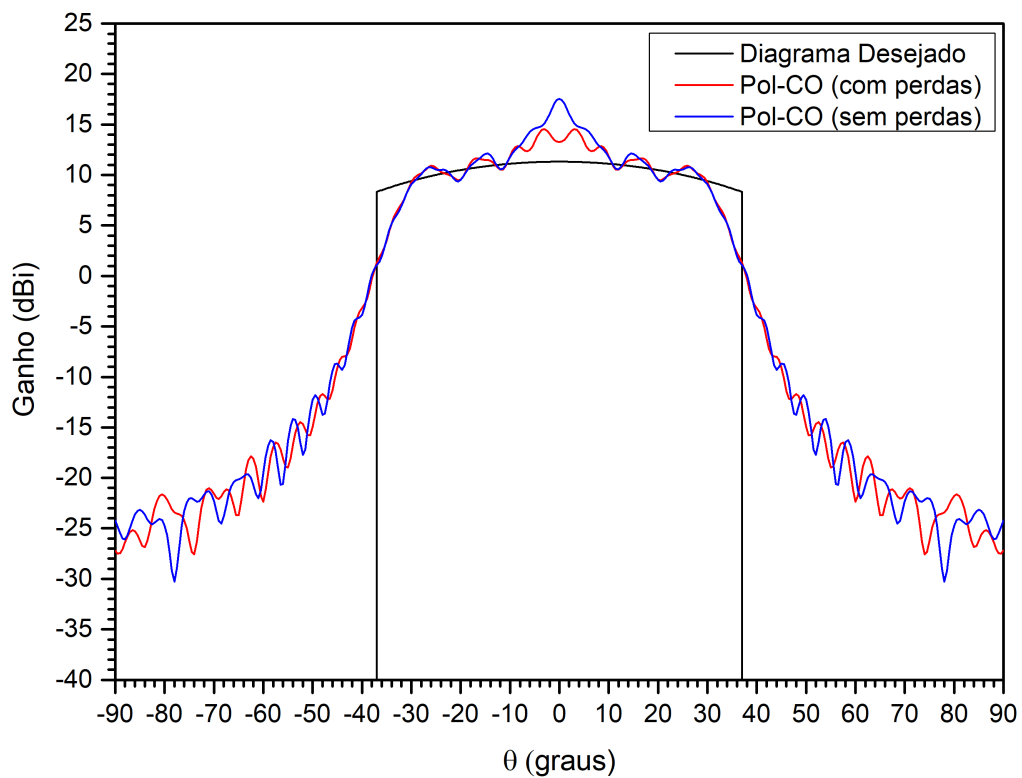


Figura 5.26: Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^\circ$ com a lente operando na frequência de 120 GHz para o caso II-c.

Além disso, as perdas por reflexão ficaram mais acentuadas comparativamente aos casos anteriores. Na direção $\theta = 0^0$, as perdas representaram uma diferença de 1,75 dB na frequência de 30 GHz, 3,03 dB em 60 GHz, chegando a 4,25 dB em 120 GHz.

Atenuação na borda de 0 dB: Caso II-d

Por fim, é imposto ao algoritmo sintetizar uma lente que gere um diagrama de radiação com topo plano, ou seja, distribuição Gaussiana com atenuação de 0 dB ($\psi = 0$) na borda do contorno da região de cobertura, que será mantido circular ($\sigma = 1$) com $\alpha_{uf} = \alpha_{vf} = 37,052^0$, logo, $G_0 = 9,9586$ dB. A solução inicial será a mesma adotada no estudo de caso II-b, bem como as especificações da grade polar para discretizar a superfície dielétrica. O algoritmo de síntese convergiu após 38 iterações com $|\Gamma|_{mean} = 2,52644^{-13}$ nos pontos interiores ao contorno e $|\Gamma|_{mean} = 3,66088^{-14}$ nos pontos da borda quando o algoritmo despreza as perdas por reflexão. Já considerando as perdas, o algoritmo convergiu após 40 iterações com $|\Gamma|_{mean} = 2,66224^{-13}$ nos pontos interiores ao contorno e $|\Gamma|_{mean} = 3,70238^{-14}$ nos pontos da borda. A direção dos raios refratados pela lente sintetizada e o respectivo traçado de raios estão ilustrados nas Figuras 5.27 e 5.28.

Dos resultados da síntese, é verificado que a condição de contorno é atendida bem como a ausência de raios refratados interceptando a superfície da lente. Também pode ser visto que há uma maior concentração de raios próximos a borda da região de cobertura quando comparado ao estudo de caso II-c, que atende o princípio da Conservação de Energia implícito na equação de Monge-Ampère, a fim de obter o diagrama de radiação com distribuição de amplitude uniforme. Além disso, é importante destacar que a distância entre o penúltimo anel e antepenúltimo anel é menor do que aquela entre o penúltimo e o último anel, distorção também observada na síntese de duplo-refletores. No entanto, não foram observadas distorções nas radiais nem na região central da grade, regiões onde geralmente ocorrem distorções em virtude dos pontos serem mais espaçados (anéis mais próximos a borda) ou muito próximos (anéis próximos ao centro), conforme discutido na Seção 2.4.1.

Na sequência, os resultados da síntese são interpolados por splines cúbicas e, então, analisados pelo método híbrido da GO-PO. Os diagramas de radiação para a lente sintetizada nas frequências de 30 GHz, 60 GHz e 120 GHz estão ilustrados nas Figuras 5.29, 5.30 e 5.31, respectivamente. Dos resultados obtidos pelo algoritmo de análise, pode-se destacar que há poucas diferenças significativas para aqueles resultados obtidos no estudo de caso II-c. Isto é consequência do grau de dificuldade imposto neste problema de síntese, em virtude da amplitude uniforme do diagrama de radiação desejado. Assim com no caso II-c, deve ser dado ênfase às oscilações expressivas próximas à direção central ($\theta = 0^0$) do diagrama. No entanto, neste caso, as oscilações contribuíram para diminuir as diferenças das perdas reflexão, tornando-as inferiores a 1dB para as três frequências analisadas. Adi-

cionalmente, as diferenças observadas entre os diagramas da GO-PO e aquele desejado, também são devido aos fatores já discutidos: erros numéricos da síntese uma vez que a superfície é representada por um conjunto finito de pontos; erros de interpolação; efeitos difrativos não levados em conta pelo método de síntese; entre outros.

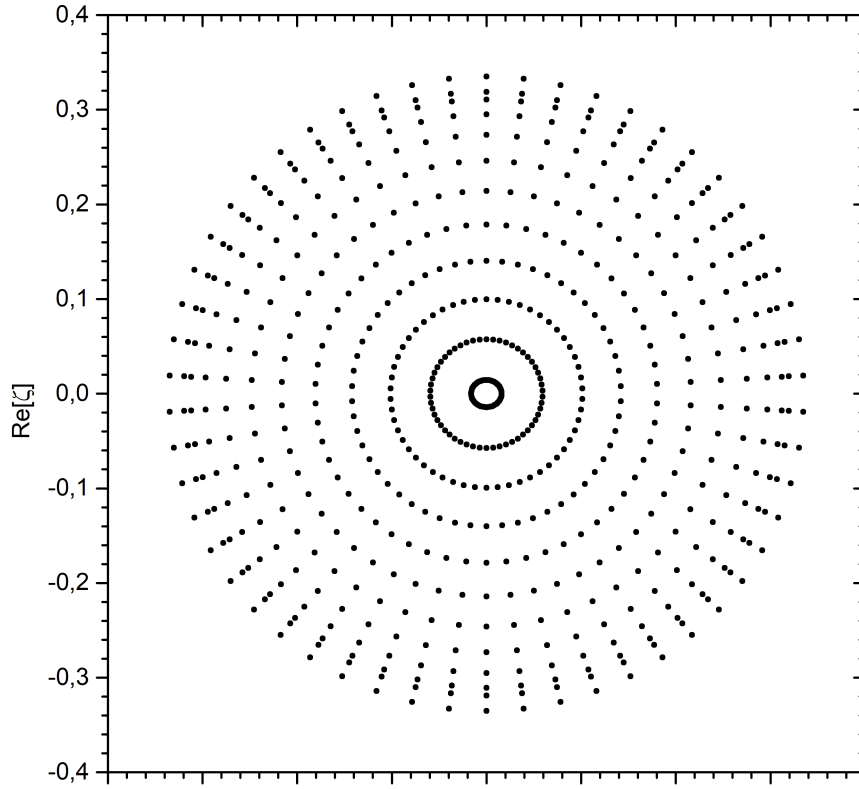


Figura 5.27: Direção dos raios refratados no plano complexo ζ para o caso II-d.

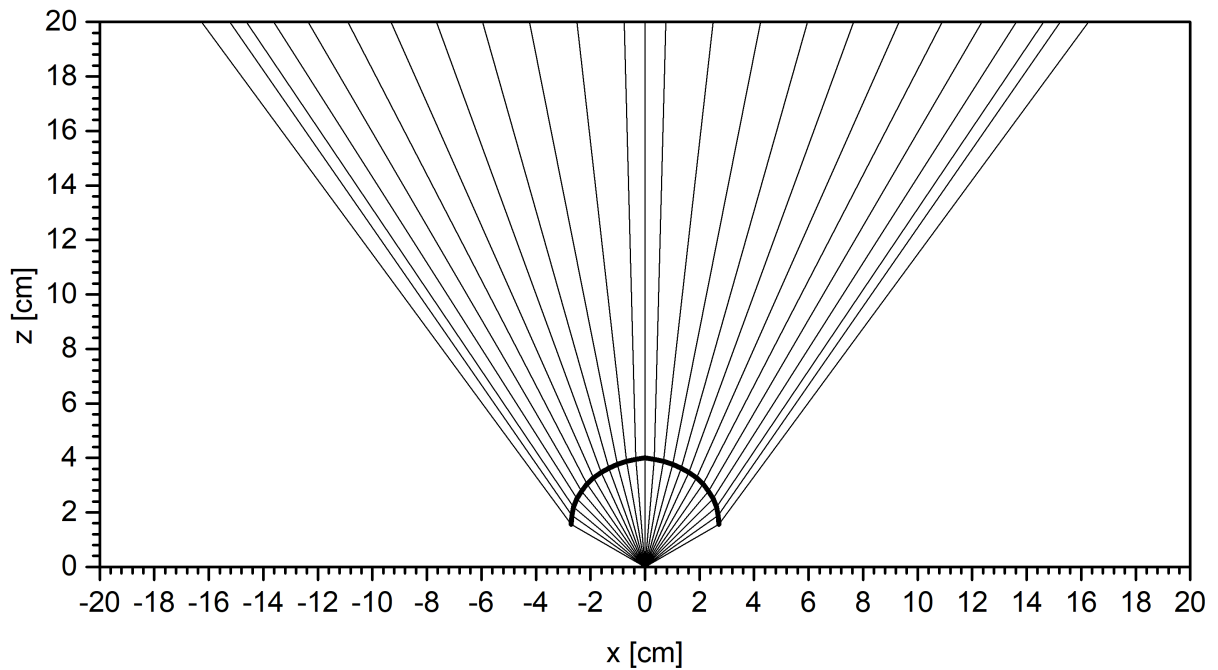


Figura 5.28: Traçado de raios da lente sintetizada para o caso II-d.

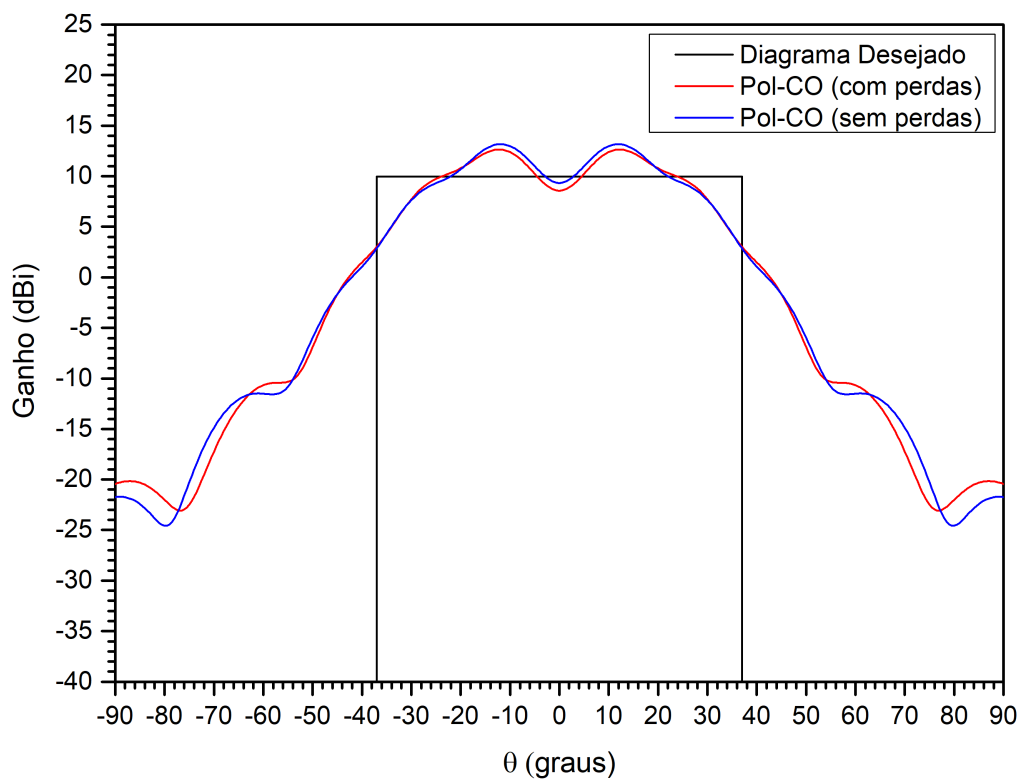


Figura 5.29: Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^\circ$ com a lente operando na frequência de 30 GHz para o caso II-d.

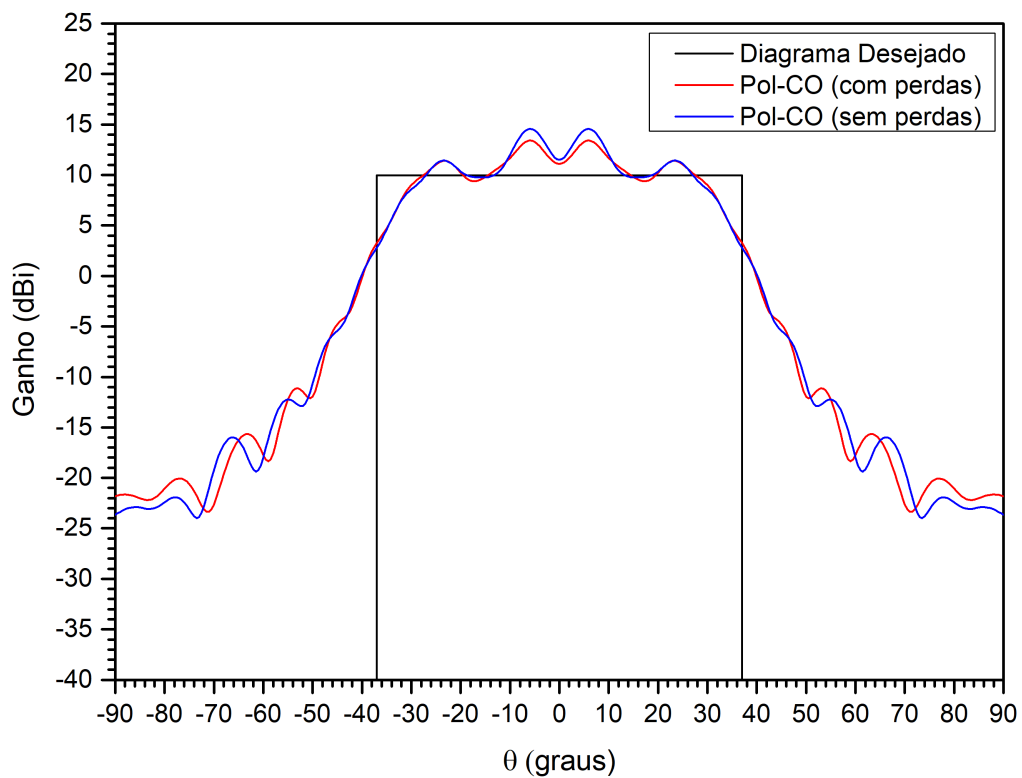


Figura 5.30: Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^\circ$ com a lente operando na frequência de 60 GHz para o caso II-d.

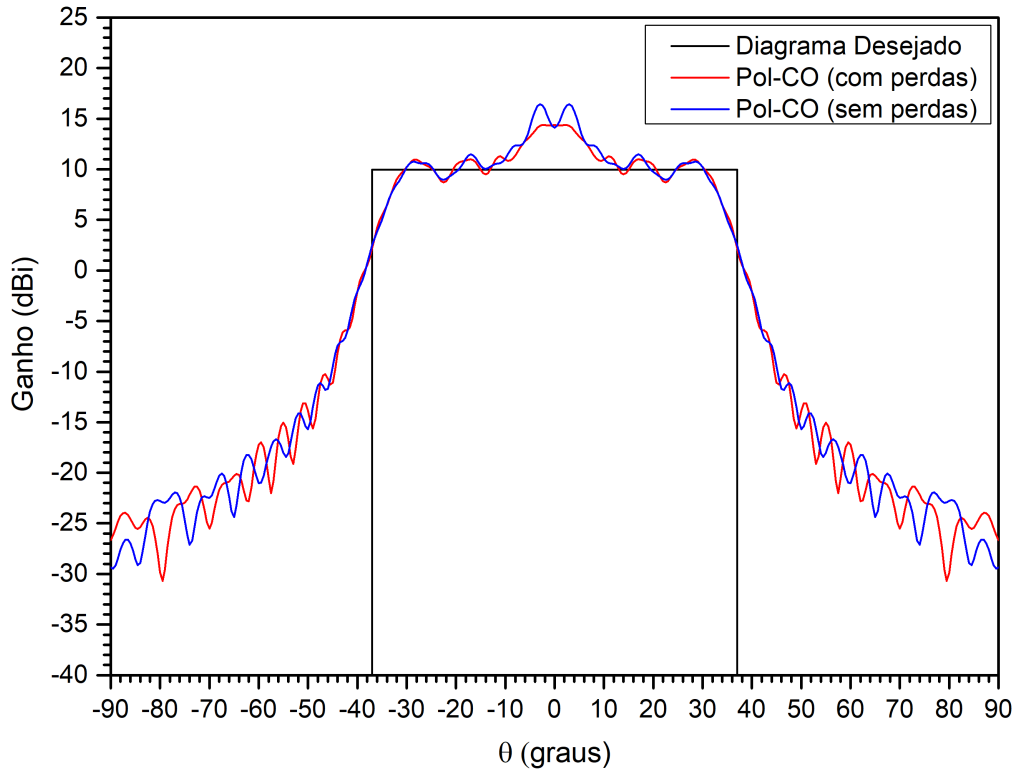


Figura 5.31: Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^\circ$ com a lente operando na frequência de 120 GHz para o caso II-d.

5.11.3 Projeto de Lentes Dielétricas com Cobertura Elíptica ($0 \leq \theta \leq 60^\circ$)

Nos estudos de caso I e II, a superfície de uma lente dielétrica foi modelada a fim de controlar a distribuição de amplitude do diagrama de radiação na região de campo distante. A largura do feixe principal não foi modificada, uma vez que optou-se por escolher uma solução inicial com a largura de feixe requerida. Agora será imposto um grau maior de dificuldade para o algoritmo de síntese, uma vez que será especificado um feixe elíptico para a região de cobertura. Para isso, além da distribuição de amplitude da intensidade de radiação em campo distante, será requerido que o algoritmo controle a largura do feixe.

Atenuação na borda de -30 dB: Caso III-a

Inicialmente, é exigido uma atenuação na borda de -30 dB em um contorno elíptico ($\sigma = 1$), com $\alpha_{u_f} = 25^\circ$ e $\alpha_{v_f} = 40^\circ$. Para esta especificação, $\psi = 6,90776$ e $G_0 = 19,4397$ dB. Para a síntese deste problema foi necessário uma grade com 12 anéis ($J = 12$) e 54 radiais ($K = 54$), dispostos em uma grade polar não-uniforme com $\alpha = 0,45$. Será sintetizada a lente para $0 \leq \theta \leq 60^\circ$. A solução inicial consiste na lente circularmente simétrica com foco virtual em $Z_0 = -2$ cm e $\rho_0 = 0$ cm. A largura do feixe da solução

inicial é $\alpha_c = 37,052^0$.

Os resultados da síntese foram obtidos após 44 iterações com $|\Gamma|_{mean} = 2,08116^{-13}$ nos pontos interiores ao contorno e $|\Gamma|_{mean} = 8,33833^{-14}$ nos pontos da borda quando o algoritmo despreza as perdas por reflexão. Já considerando as perdas, o algoritmo converge também após 44 iterações com $|\Gamma|_{mean} = 2,35121^{-13}$ nos pontos interiores ao contorno e $|\Gamma|_{mean} = 6,92956^{-14}$ nos pontos da borda. A direção dos raios refratados pela lente sintetizada e o respectivo traçado de raios estão ilustrados nas Figuras 5.32 e 5.33. Dos resultados da síntese, é importante avaliar se as condições de contorno foram atendidas bem como se houve a ausência de raios refratados interceptando a superfície dielétrica. Para este estudo de caso, os resultados foram satisfatórios. Além disso, como a atenuação de borda é alta (em módulo), a distribuição de raios está mais concentrada na região central da grade. Também é importante destacar que, para a convergência do algoritmo de síntese, foi necessário uma grade não-uniforme em θ , contrastando com os estudos de caso II-a – II-d, para contorno circular. Outra questão que deve ser observada é o maior número de iterações necessários para a convergência do algoritmo, que resulta do maior grau de dificuldade desta síntese imposto pelo contorno elíptico.

Para obter o diagrama de radiação gerado pela superfície sintetizada, os pontos

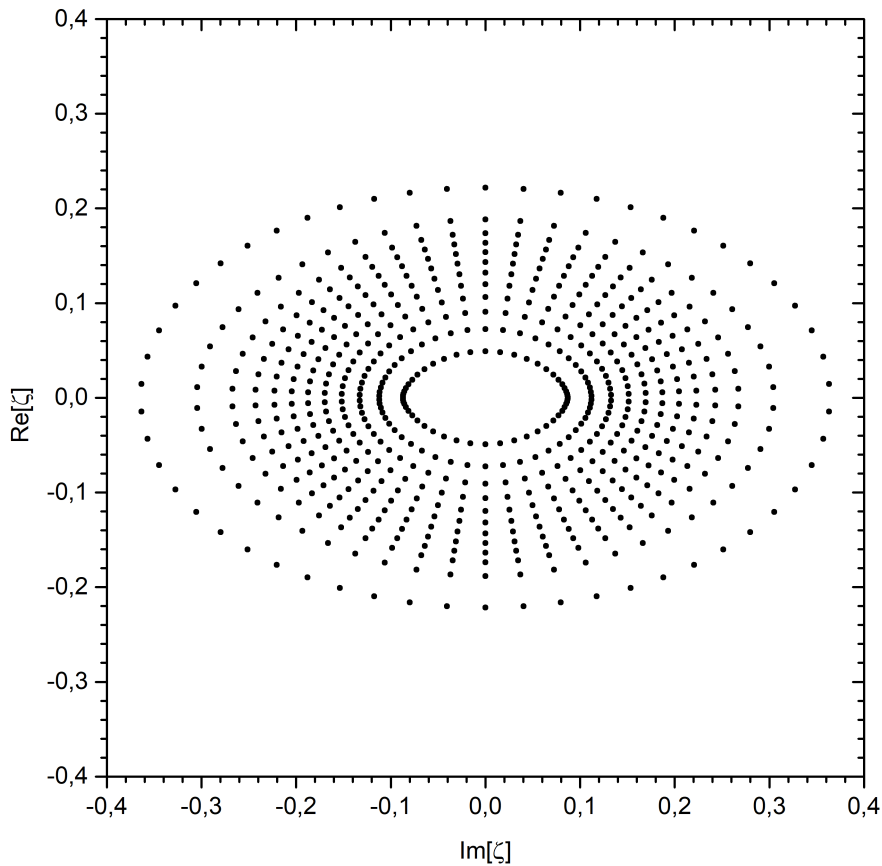


Figura 5.32: Direção dos raios refratados no plano complexo ζ para o caso III-a.

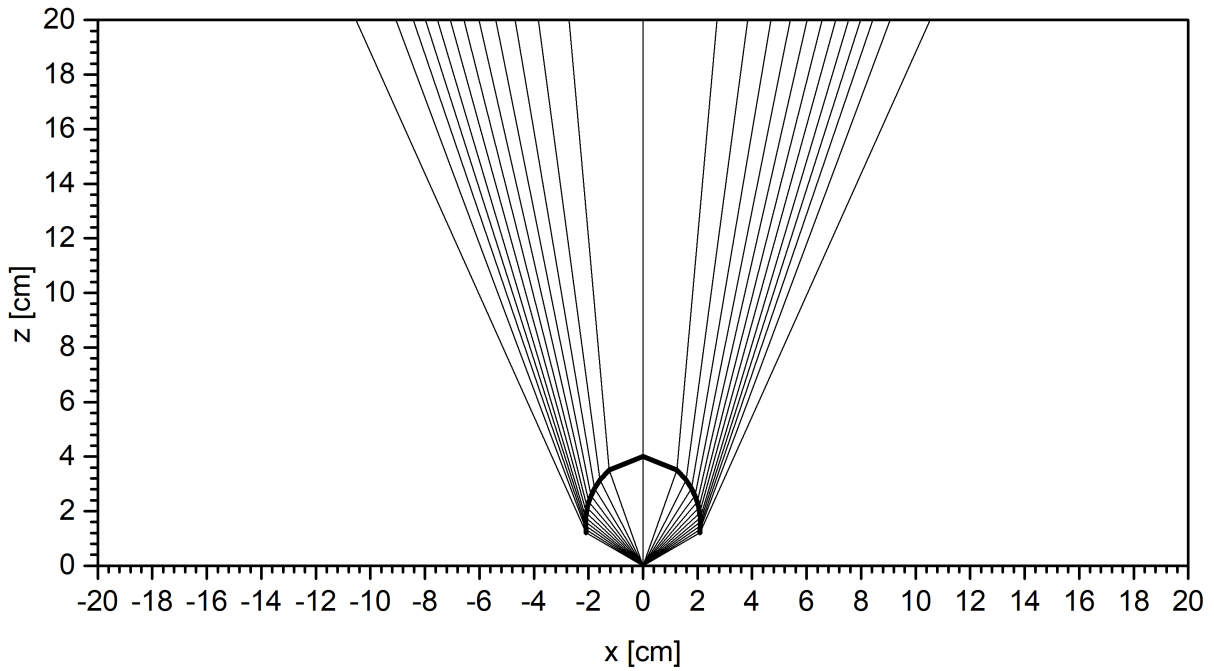


Figura 5.33: Traçado de raios da lente sintetizada para o caso III-a.

dados pelo método de síntese foram interpolados por splines cúbicas e então analisados pelo método híbrido GO-PO. Os diagramas de radiação no plano $\phi = 0^\circ$ da lente operando nas frequências de 30 GHz, 60 GHz e 120 GHz estão ilustrados nas Figuras 5.34, 5.36 e 5.38 respectivamente. Já os diagramas de radiação no plano $\phi = 90^\circ$ estão ilustrados nas Figuras 5.35, 5.37 e 5.39, respectivamente. Assim como nas discussões apresentadas para as lentes sintetizadas para um contorno circular na região de cobertura, as diferenças observadas entre o diagrama desejado e os diagramas obtidos também podem ser atribuídos aos fatores previamente discutidos, entre eles: erros numéricos da síntese uma vez que a superfície é representada por um conjunto finito de pontos; erros de interpolação; e efeitos difrativos não levados em conta pelo método de síntese. No entanto, para a cobertura elíptica, é fácil perceber que surgem mais oscilações nos planos de corte do diagrama de radiação cuja largura de feixe é mais estreita, ficando evidente o lóbulo principal e sucessivos lóbulos laterais.

Embora não tenha surgido distorções significativas no procedimento de síntese, os resultados da análise sugerem uma limitação na performance do algoritmo para sintetizar lentes dielétricas que gerem um feixe de radiação mais estreito. Essas limitações podem ser decorrentes da escolha das quádricas confocais para a representação local da superfície, como também da grade usada para discretizar a superfície sintetizada. Além disso, deve-se observar que as diferenças decorrentes das perdas por reflexão foram inferiores a 1 dB para as frequências de 30 GHz e 120 GHz, e ficando em 1,16 dB na frequência de 60 GHz na direção de $\theta = 0^\circ$ do plano $\phi = 0^\circ$.

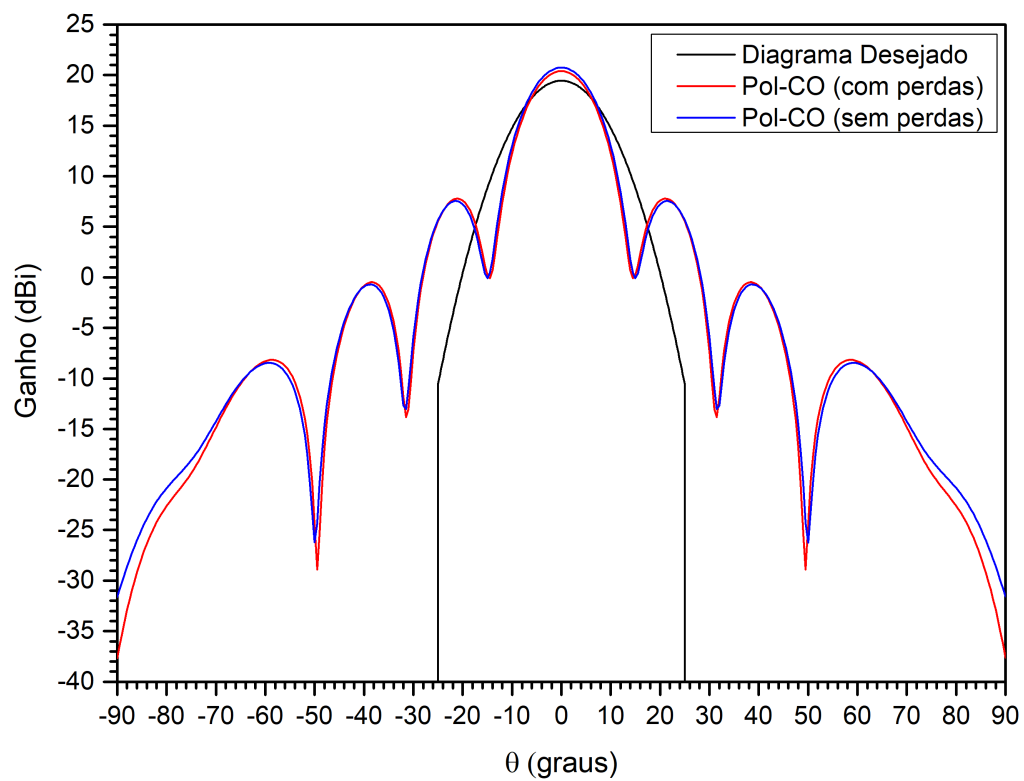


Figura 5.34: Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^\circ$ com a lente operando na frequência de 30 GHz para o caso III-a.

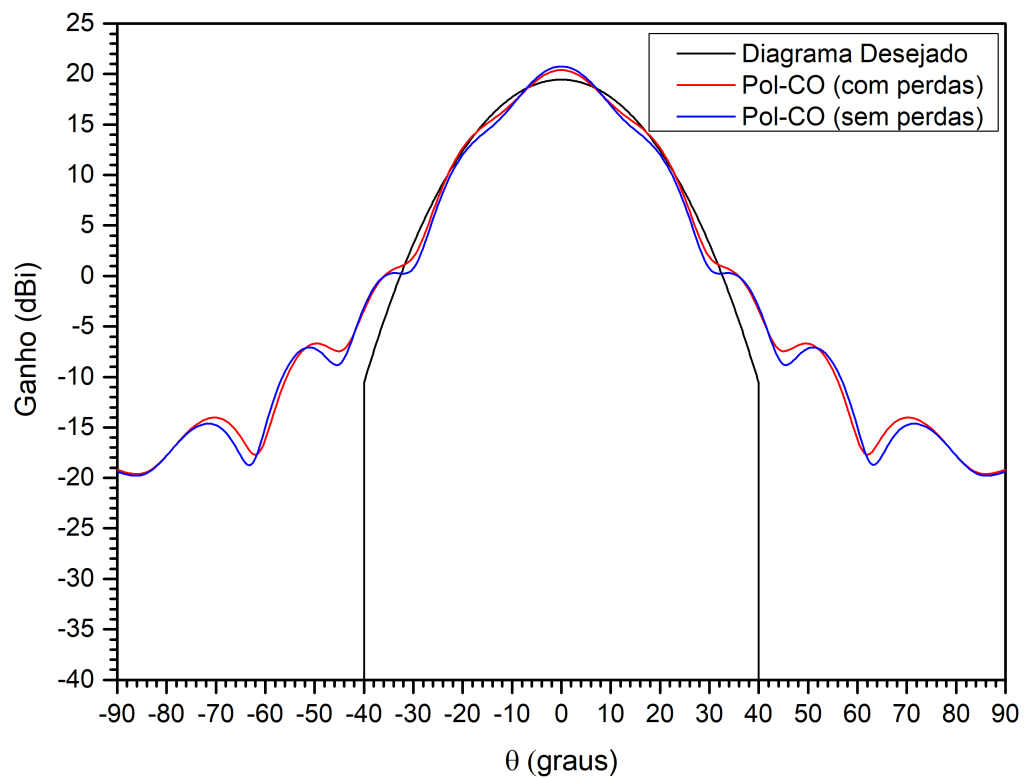


Figura 5.35: Diagrama de radiação no plano $\phi = 90^\circ$ com a lente operando na frequência de 30 GHz para o caso III-a.

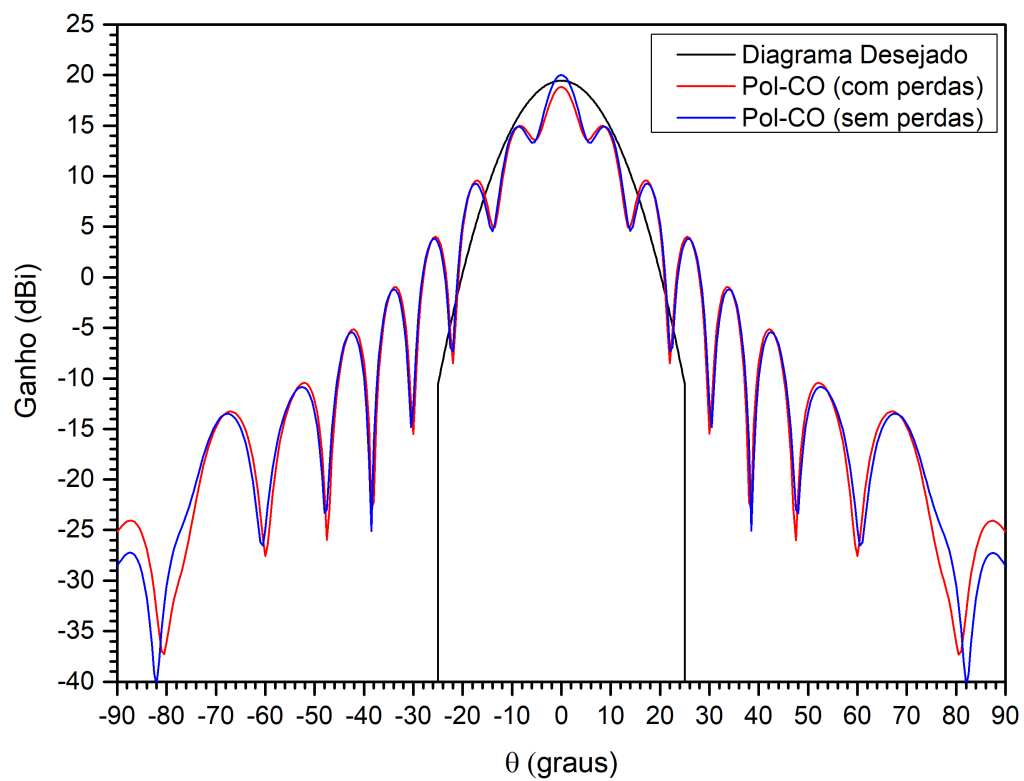


Figura 5.36: Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^\circ$ com a lente operando na frequência de 60 GHz para o caso III-a.

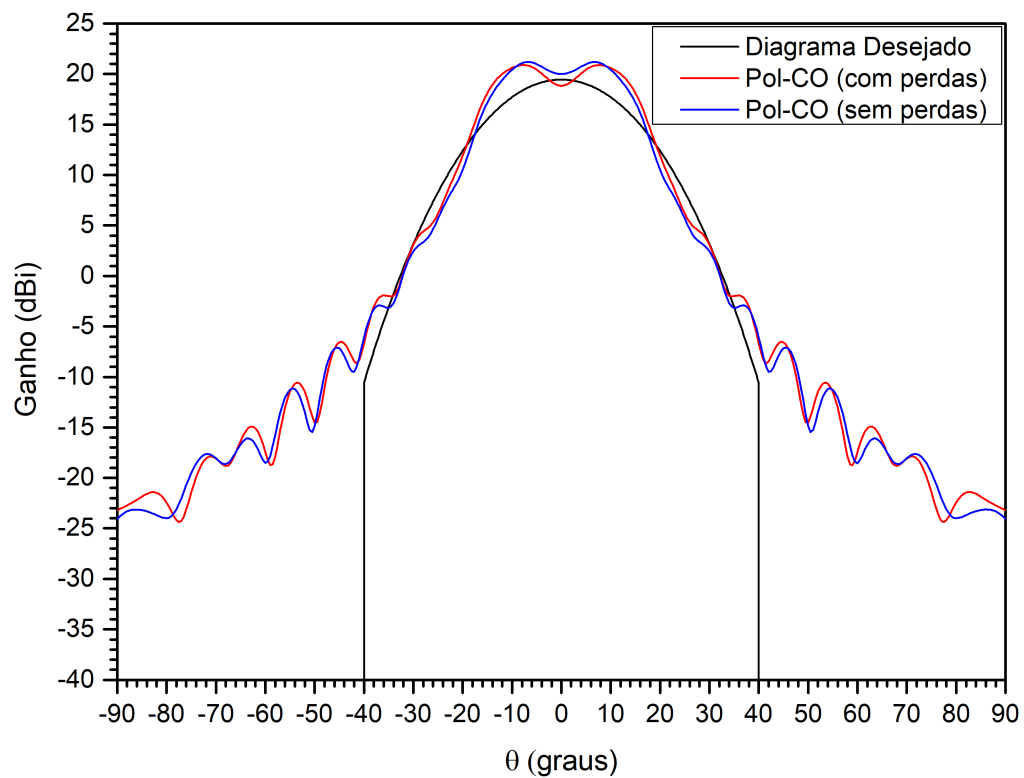


Figura 5.37: Diagrama de radiação no plano $\phi = 90^\circ$ com a lente operando na frequência de 60 GHz para o caso III-a.

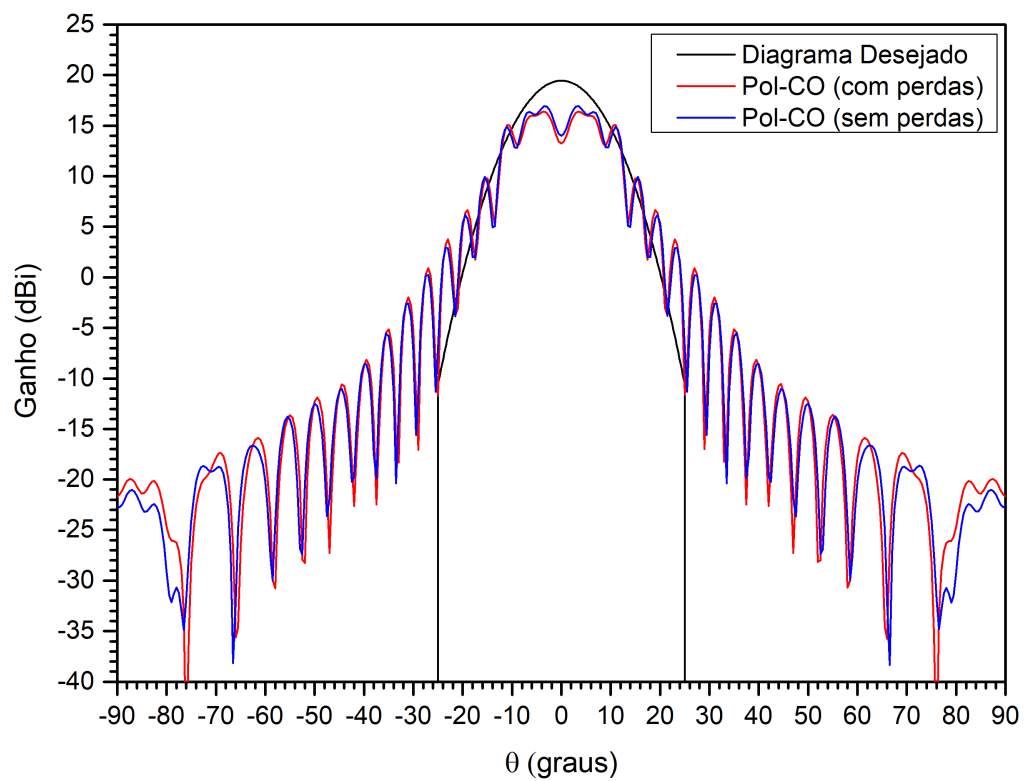


Figura 5.38: Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^\circ$ com a lente operando na frequência de 120 GHz para o caso III-a.

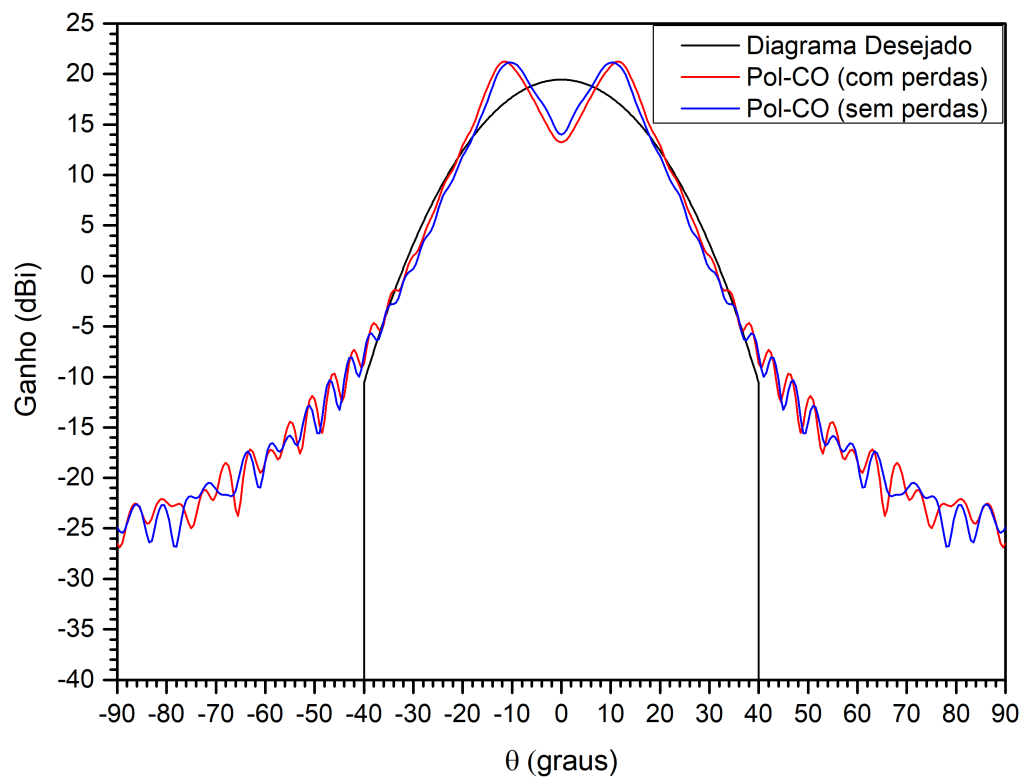


Figura 5.39: Diagrama de radiação no plano $\phi = 90^\circ$ com a lente operando na frequência de 120 GHz para o caso III-a.

Atenuação na borda de -15 dB: Caso III-b

Neste estudo de caso, será requerido que o algoritmo sintetize uma lente que gere um diagrama de radiação Gaussiano com contorno elíptico ($\sigma = 1$) e atenuação de -15 dB na borda, ou seja, $\psi = 3,45388$. As larguras de feixe serão mantidas em $\alpha_{u_f} = 25^\circ$ e $\alpha_{v_f} = 40^\circ$, logo, $G_0 = 16,64860$ dB. Para a síntese deste problema foi necessário uma grade com 10 anéis ($J = 12$) e 54 radiais ($K = 54$), dispostos em uma grade polar não-uniforme com $\alpha = 0,55$. A solução inicial adotada é a mesma do estudo de caso III-a.

Os resultados da síntese foram obtidos após 43 iterações com $|\Gamma|_{mean} = 1,24239^{-13}$ nos pontos interiores ao contorno e $|\Gamma|_{mean} = 1,02576^{-13}$ nos pontos da borda quando o algoritmo despreza as perdas por reflexão. Já considerando as perdas, o algoritmo converge após 42 iterações com $|\Gamma|_{mean} = 1,22253^{-13}$ nos pontos interiores ao contorno e $|\Gamma|_{mean} = 8,11934^{-14}$ nos pontos da borda. A direção dos raios refratados pela lente sintetizada e o respectivo traçado de raios estão ilustrados nas Figuras 5.40 e 5.41. A condição de contorno foi atendida e não há ocorrência de raios refratados interceptando a superfície dielétrica. Embora tenha surgido distorções nas direções de algumas radiais próximas à borda, na direção do eixo menor da elipse, os resultados da síntese são satisfatórios. Assim como na síntese dos duplo-refletores, essas distorções surgem devido a dificuldade de representar com quádricas confocais a superfície dielétrica quando deseja-se controlar o feixe sem simetria circular e, simultaneamente, atender a especificação de atenuação na borda requerida. Também pode ser observado que as direções dos raios refratados estão mais bem distribuídos dentro do contorno elíptico, consequência do princípio da Conservação da Energia implícita na equação de Monge-Ampère para atender à atenuação na borda de -15 dB.

Uma vez obtida a superfície sintetizada, os pontos dados pelo método de síntese são interpolados por splines cúbicas e então analisados pelo método híbrido GO-PO. Os diagramas de radiação no plano $\phi = 0^\circ$ da lente sintetizada operando nas frequências de 30 GHz, 60 GHz e 120 GHz estão ilustrados nas Figuras 5.42, 5.44 e 5.46 respectivamente. Já os diagramas de radiação no plano $\phi = 90^\circ$ estão ilustrados nas Figuras 5.43, 5.45 e 5.47 respectivamente. Destes resultados, pode ser observado que as oscilações nos planos de corte do diagrama de radiação cuja largura de feixe é mais estreita relatadas anteriormente também são observadas neste estudo de caso. Adicionalmente, pode ser verificado que os diagramas obtidos tendem para o comportamento do diagrama desejado, sendo que as diferenças observadas são, também, atribuídas aos fatores previamente discutidos no estudo caso III-a. Além disso, é importante destacar que para este estudo de caso, as perdas por reflexão foram inferiores a 1 dB para as três frequências analisadas, na direção $\theta = 0$.

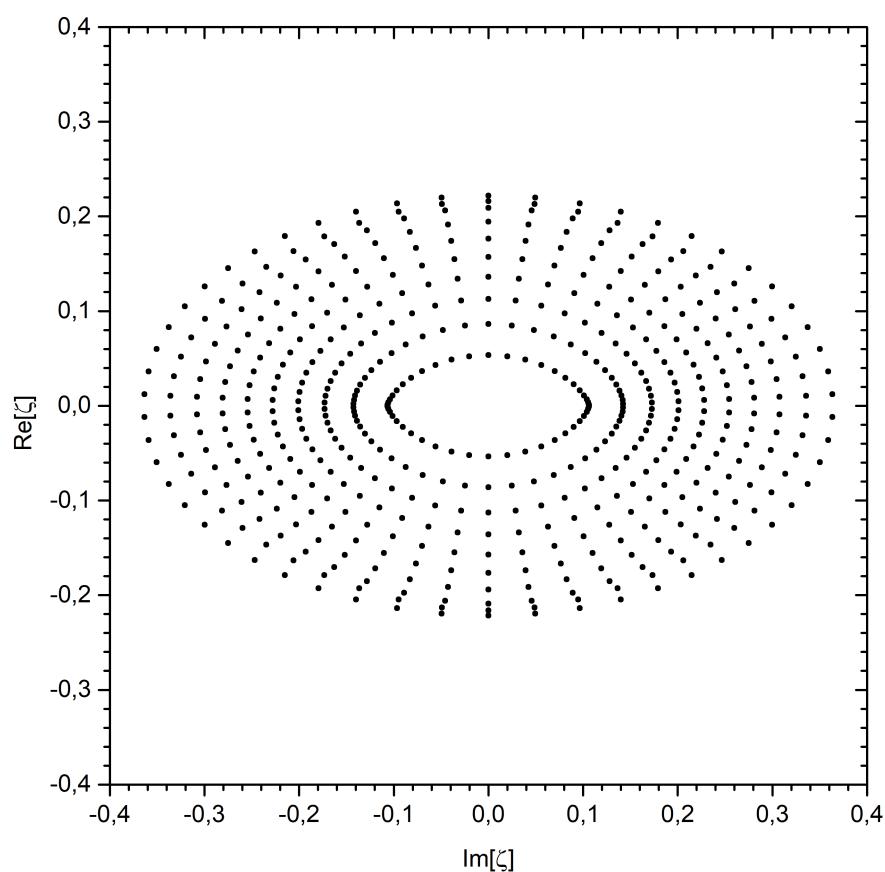


Figura 5.40: Direção dos raios refratados no plano complexo ζ para o caso III-b.

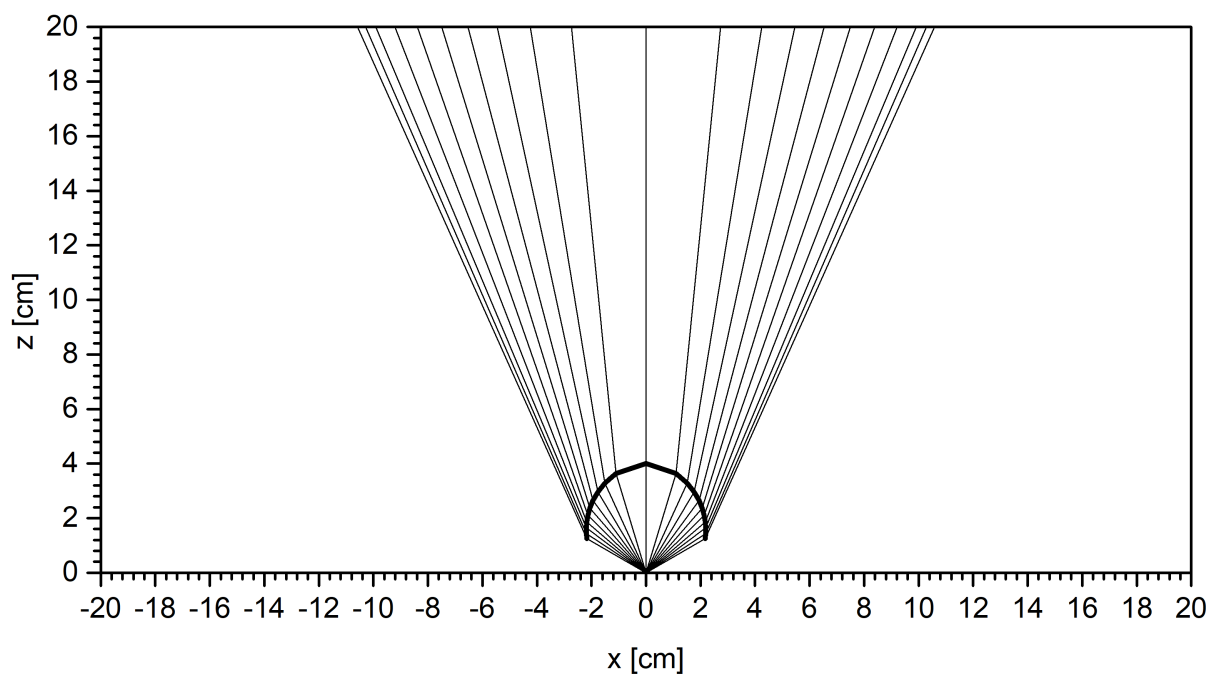


Figura 5.41: Traçado de raios da lente sintetizada para o caso III-b.

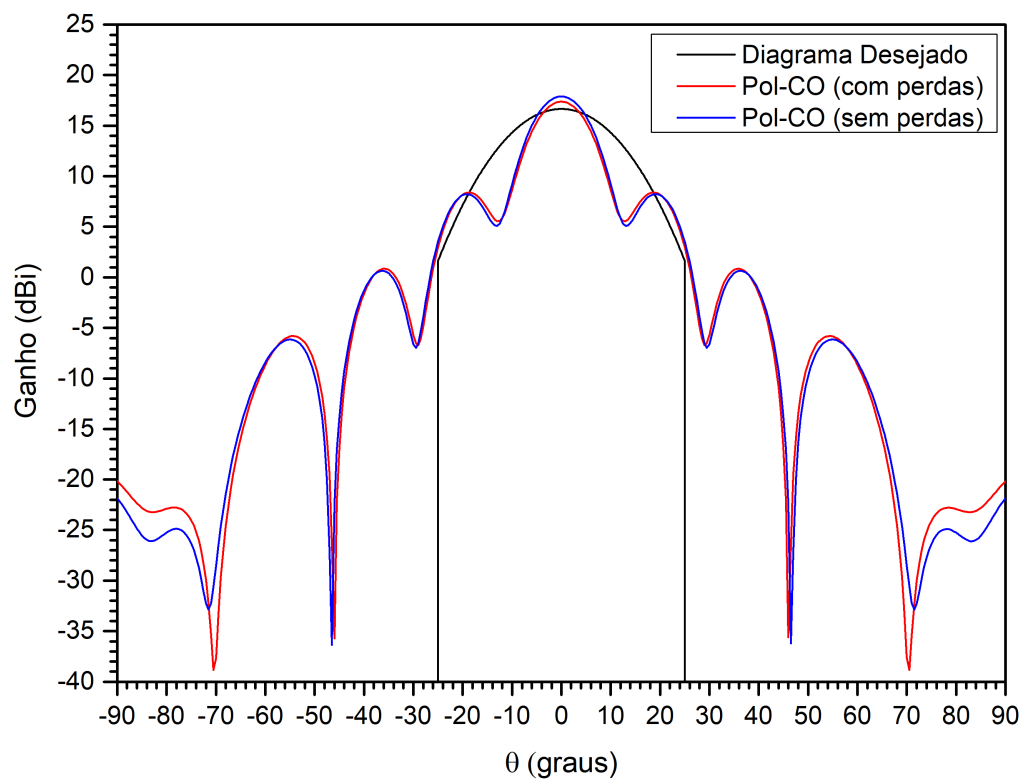


Figura 5.42: Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^\circ$ com a lente operando na frequência de 30 GHz para o caso III-b.

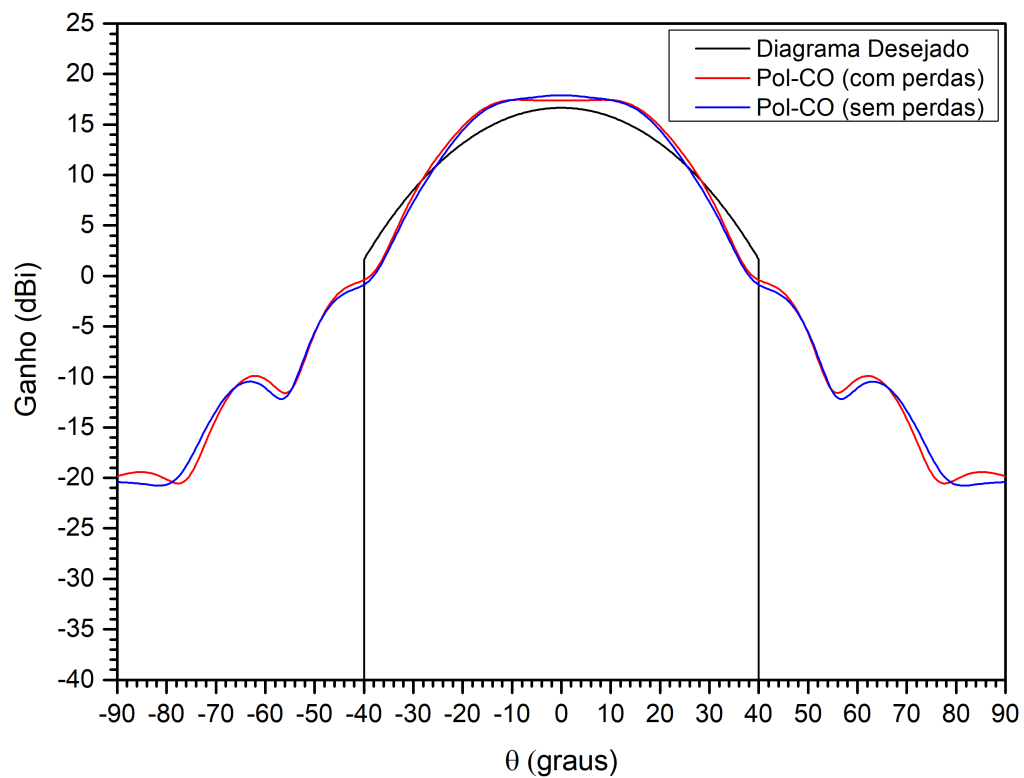


Figura 5.43: Diagrama de radiação no plano $\phi = 90^\circ$ com a lente operando na frequência de 120 GHz para o caso III-b.

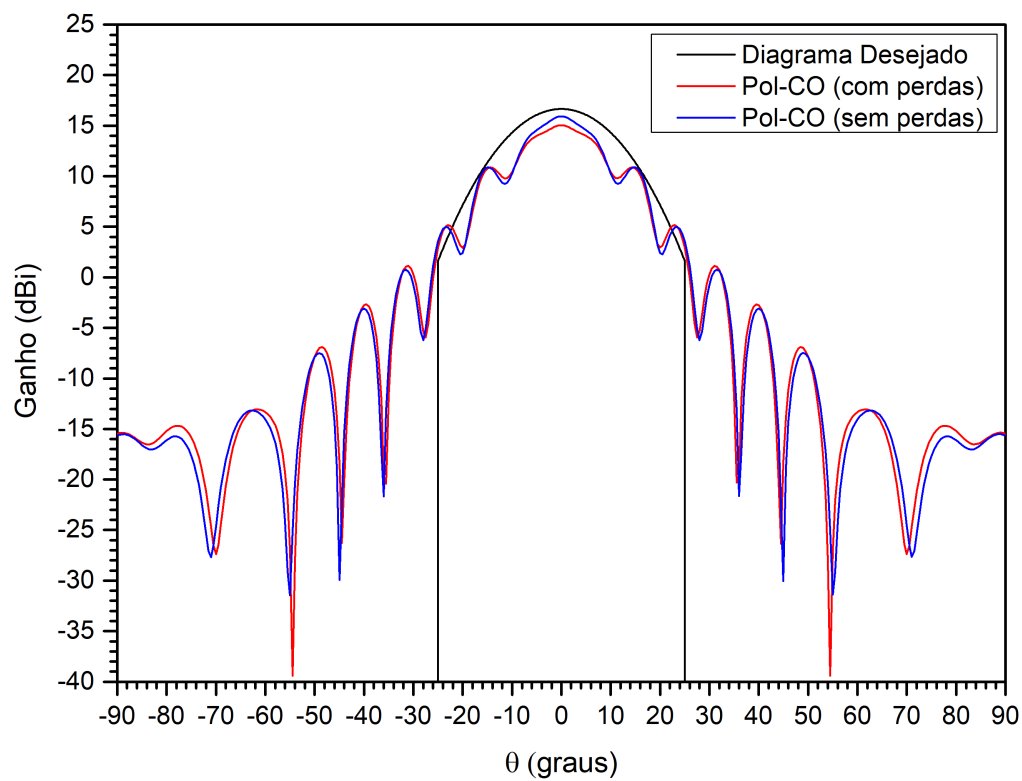


Figura 5.44: Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^\circ$ com a lente operando na frequência de 60 GHz para o caso III-b.

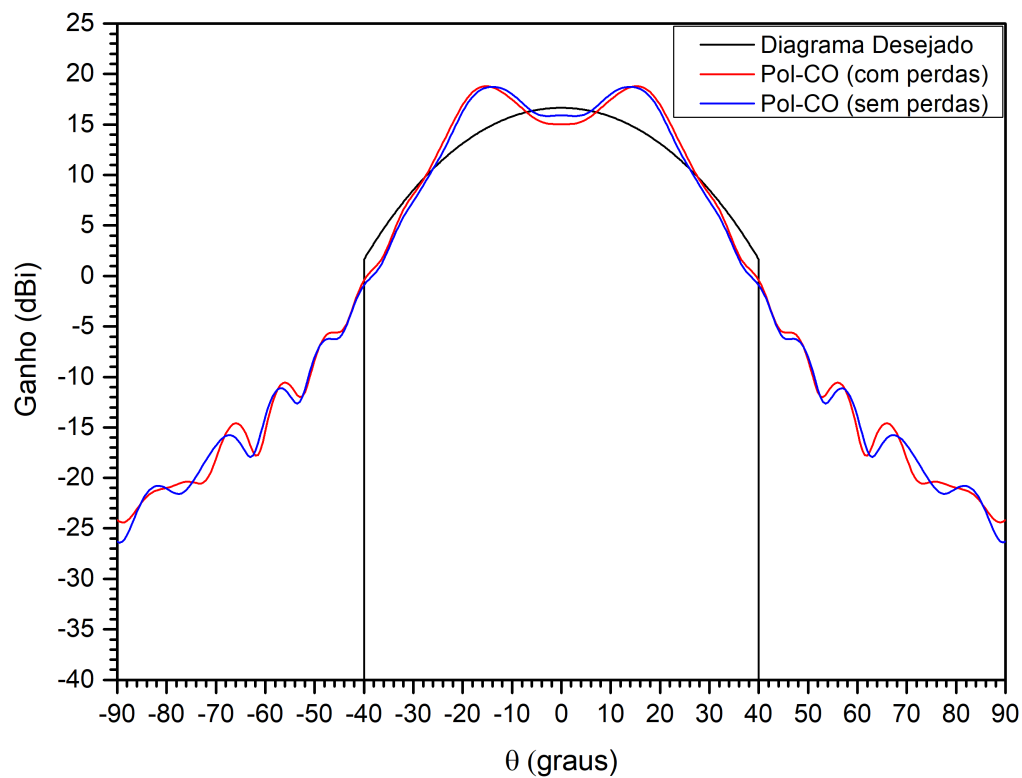


Figura 5.45: Diagrama de radiação no plano $\phi = 90^\circ$ com a lente operando na frequência de 60 GHz para o caso III-b.

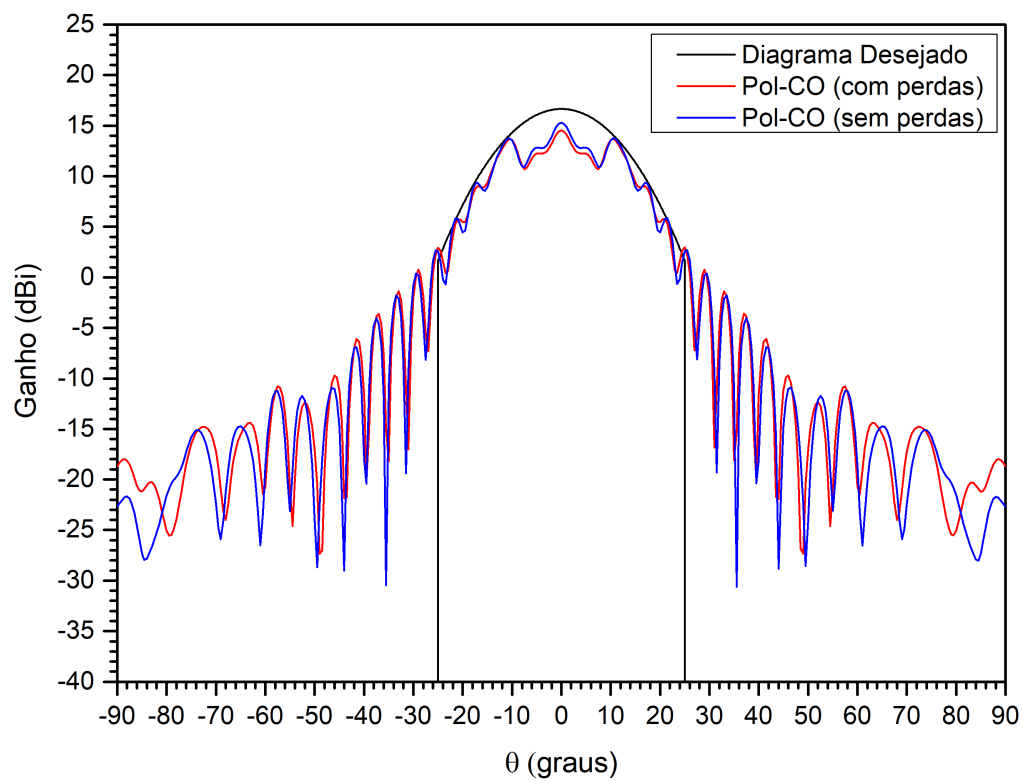


Figura 5.46: Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^\circ$ com a lente operando na frequência de 120 GHz para o caso III-b.

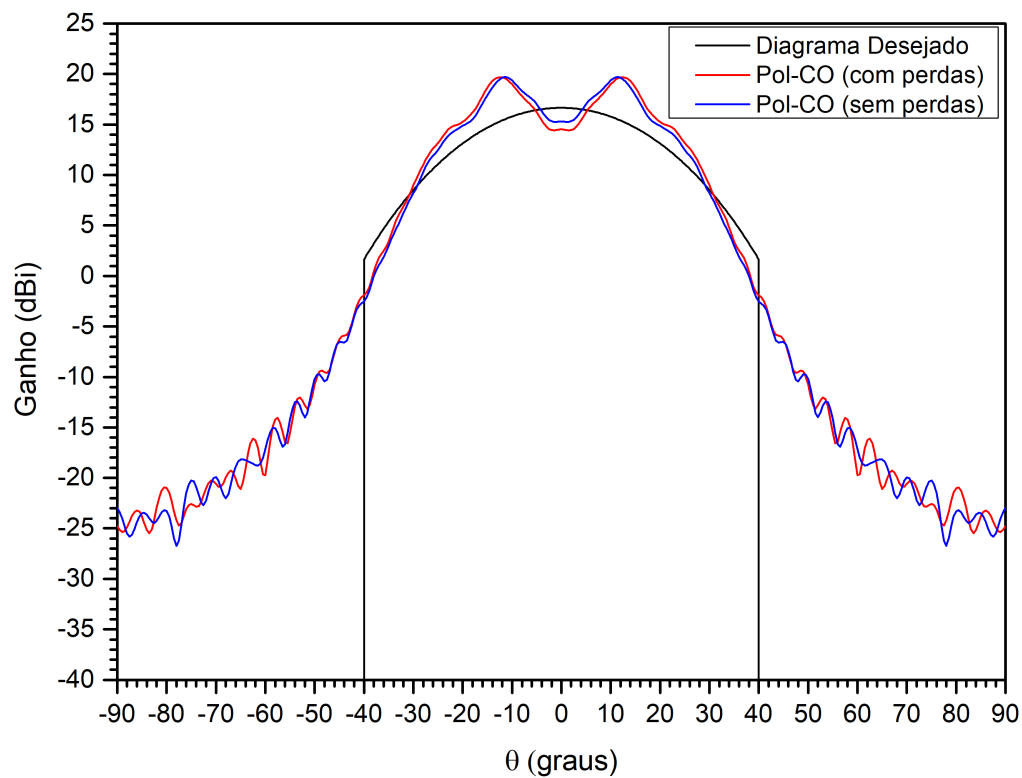


Figura 5.47: Diagrama de radiação no plano $\phi = 90^\circ$ com a lente operando na frequência de 120 GHz para o caso III-b.

Atenuação na borda de -3 dB: Caso III-c

Agora será imposto mais um grau de dificuldade para o algoritmo de síntese que deve sintetizar uma lente que gere um diagrama de radiação Gaussiano com contorno elíptico com atenuação de -3 dB na borda ($\psi = 0,690776$). Para essa síntese será necessário uma grade com 10 anéis ($J = 10$) e 54 radiais ($K = 54$) dispostos em uma grade polar não-uniforme com $\alpha = 0,78$ e a solução inicial adotada é a mesma do estudo de caso III-a. Para alcançar a atenuação na borda de -3 dB, a especificação da largura do feixe mais estreito foi afrouxada para obter convergência do algoritmo de síntese. Assim, as larguras de feixe foram ajustadas para $\alpha_{uf} = 30^\circ$ e $\alpha_{vf} = 40^\circ$, e consequentemente, $G_0 = 11,8956$ dB.

Os resultados da síntese foram obtidos após 36 iterações com $|\Gamma|_{mean} = 1,17699^{-13}$ nos pontos interiores ao contorno e $|\Gamma|_{mean} = 4,15715^{-14}$ nos pontos da borda quando o algoritmo despreza as perdas por reflexão. Já considerando as perdas, o algoritmo converge após 37 iterações com $|\Gamma|_{mean} = 1,27188^{-13}$ nos pontos interiores ao contorno e $|\Gamma|_{mean} = 4,39843^{-14}$ nos pontos da borda. A direção dos raios refratados pela lente sintetizada e o respectivo traçado de raios estão ilustrados nas Figuras 5.48 e 5.49. Além disso, a condição de contorno foi atendida bem como as direções dos raios refratados não interceptam a superfície da lente.

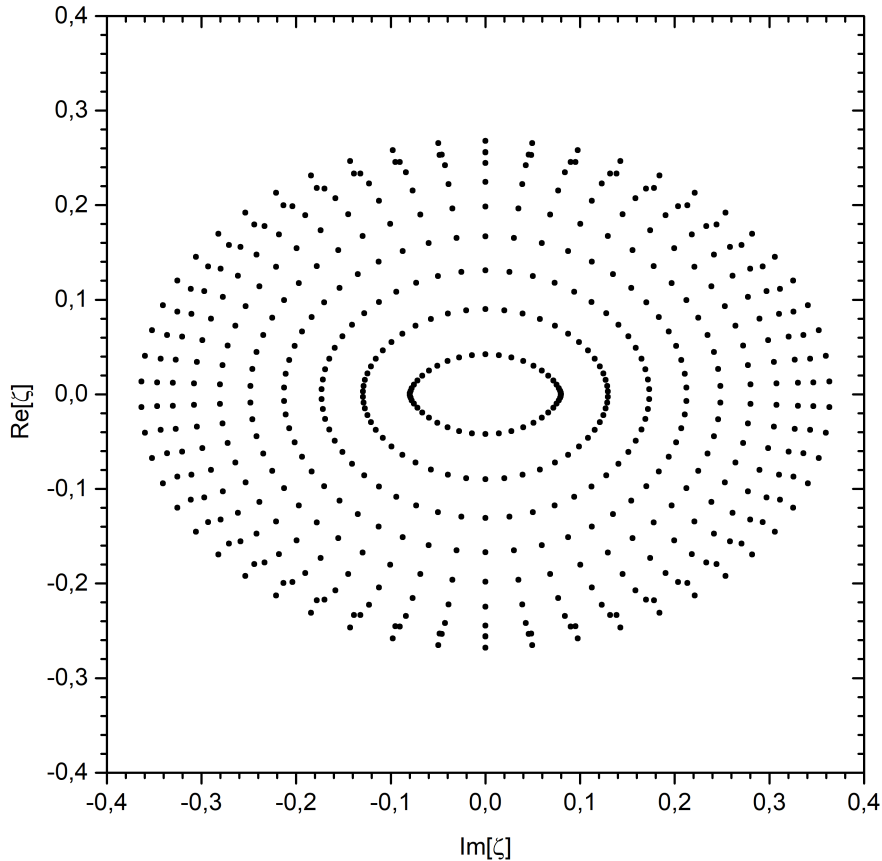


Figura 5.48: Direção dos raios refratados no plano complexo ζ para o caso III-c.

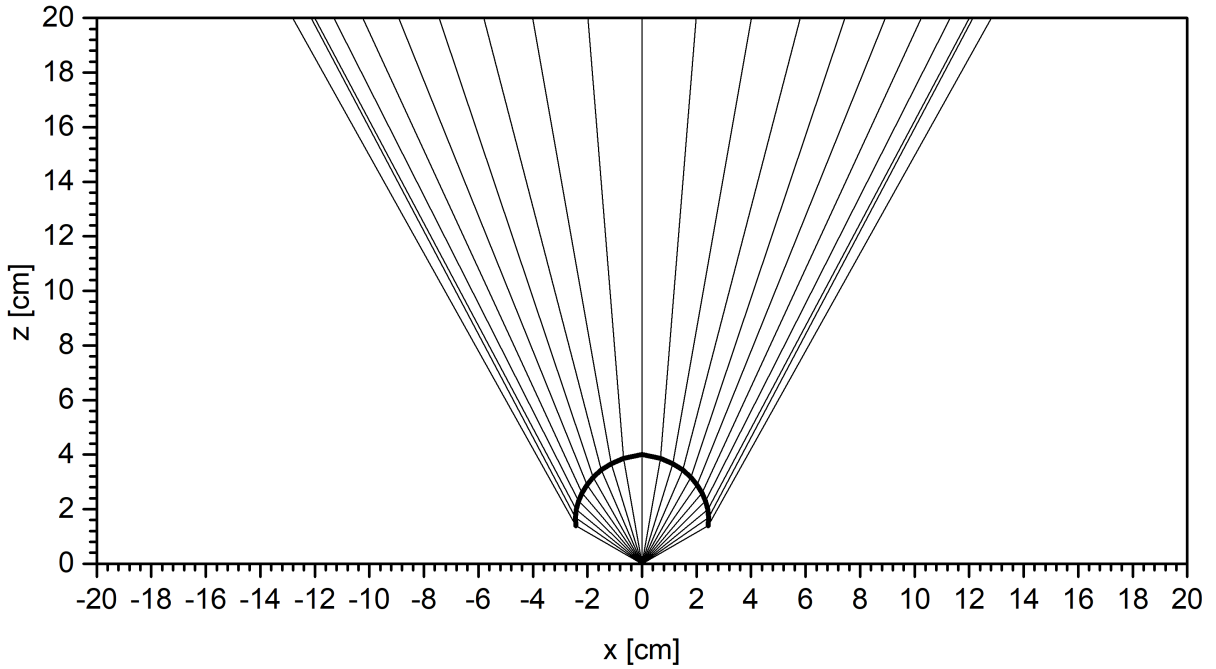


Figura 5.49: Traçado de raios da lente sintetizada para o caso III-c.

Dos resultados da síntese, é possível observar que as direções de refração dos raios mapeados nos anéis mais externos começaram a distorcer próximo a borda ao longo do eixo menor do contorno elíptico, assim como relatado no caso III-b. Também, o anel mais interno fica próximo ao limiar de distorção ao longo do eixo maior da elipse. Essas distorções surgem e se intensificam quando os eixos do contorno desejado têm dimensões diferentes, que é o caso dos contornos elípticos, e a atenuação na borda é próxima a 0 dB. Essas distorções são indesejadas, uma vez que os resultados numéricos representam superfícies distorcidas que não correspondem a uma solução física para o problema, visto que pela aproximação da Óptica Geométrica, a lente dielétrica deve apresentar apenas variações suaves em sua superfície.

Apesar das distorções relatadas na síntese da lente, os resultados apresentados foram satisfatórios e, em seguida, foram interpolados por splines cúbicas e analisados pela método da GO-PO. Os diagramas de radiação no plano $\phi = 0^\circ$ da lente operando nas frequências de 30 GHz, 60 GHz e 120 GHz estão ilustrados nas Figuras 5.50, 5.52 e 5.54, respectivamente. Já os diagramas no plano $\phi = 90^\circ$ estão ilustrados nas Figuras 5.51, 5.53 e 5.55, respectivamente. Apesar da largura do feixe mais estreito ter sido alterada de 25° para 30° , ainda é possível verificar a presença de oscilações no correspondente plano do diagrama de radiação. As oscilações são mais evidentes na região especificada pelo feixe da GO, enquanto que os sucessivos lóbulos laterais surgem onde o diagrama desejado é nulo. As diferenças devido as perdas por reflexão ficaram abaixo de 1 dB nas frequências de 30 GHz e 60 GHz, e chegou a 2,03 dB na direção $\theta = 0^\circ$ em 120 GHz.

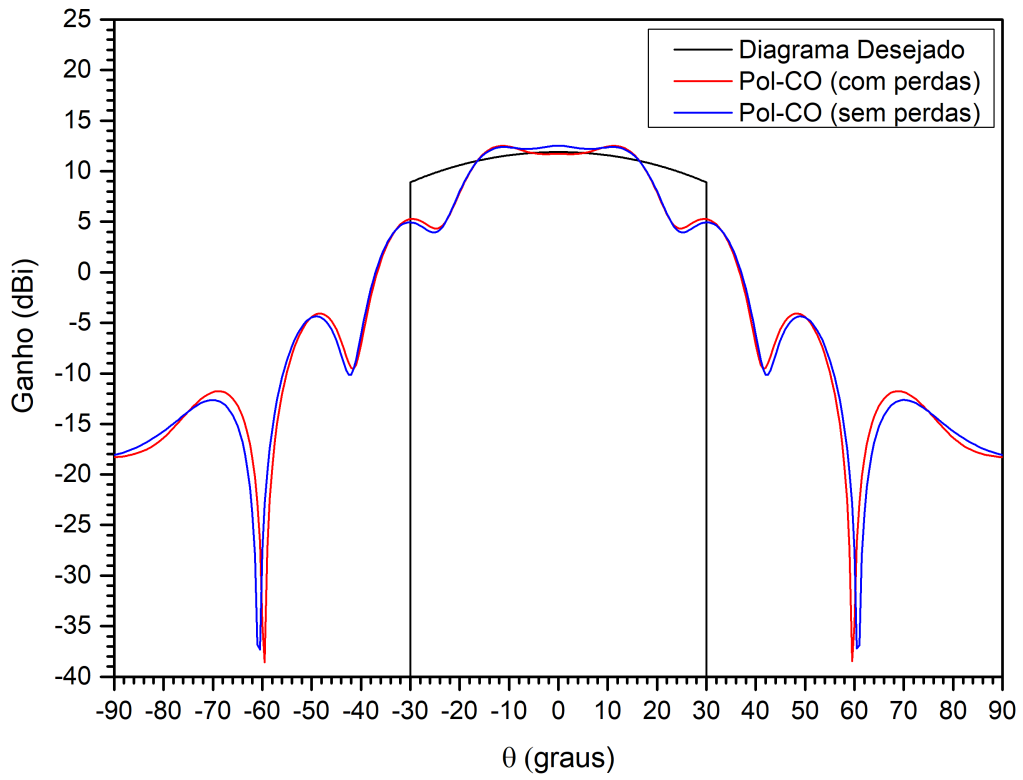


Figura 5.50: Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^\circ$ com a lente operando na frequência de 30 GHz para o caso III-c.

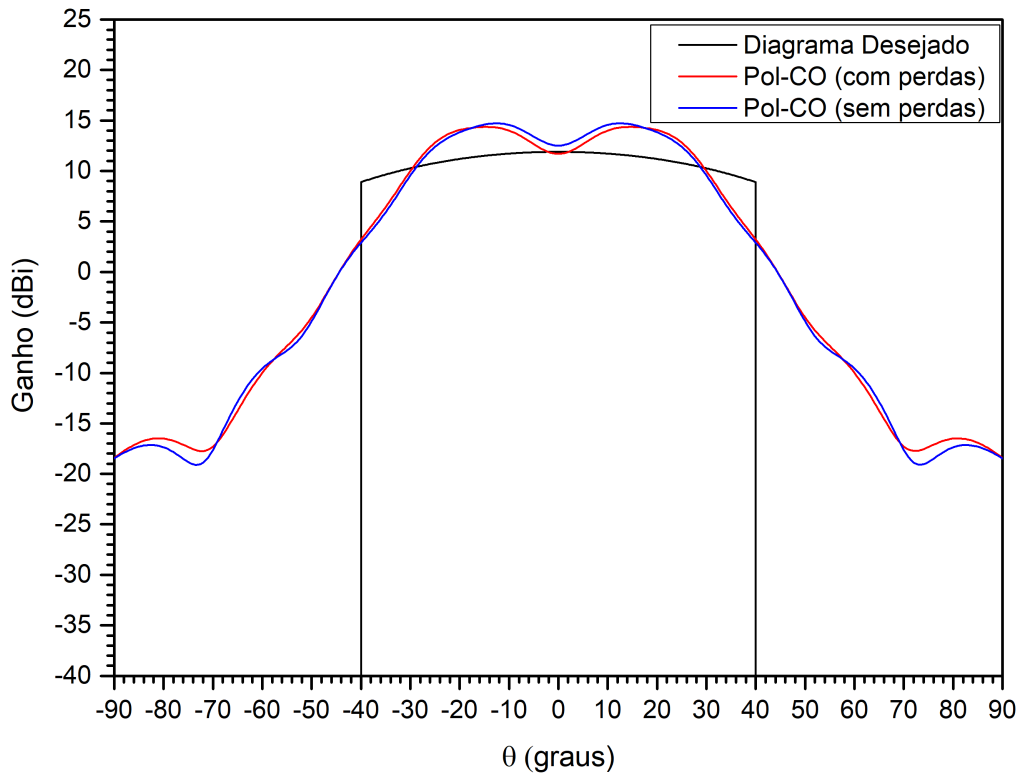


Figura 5.51: Diagrama de radiação no plano $\phi = 90^\circ$ com a lente operando na frequência de 30 GHz para o caso III-c.

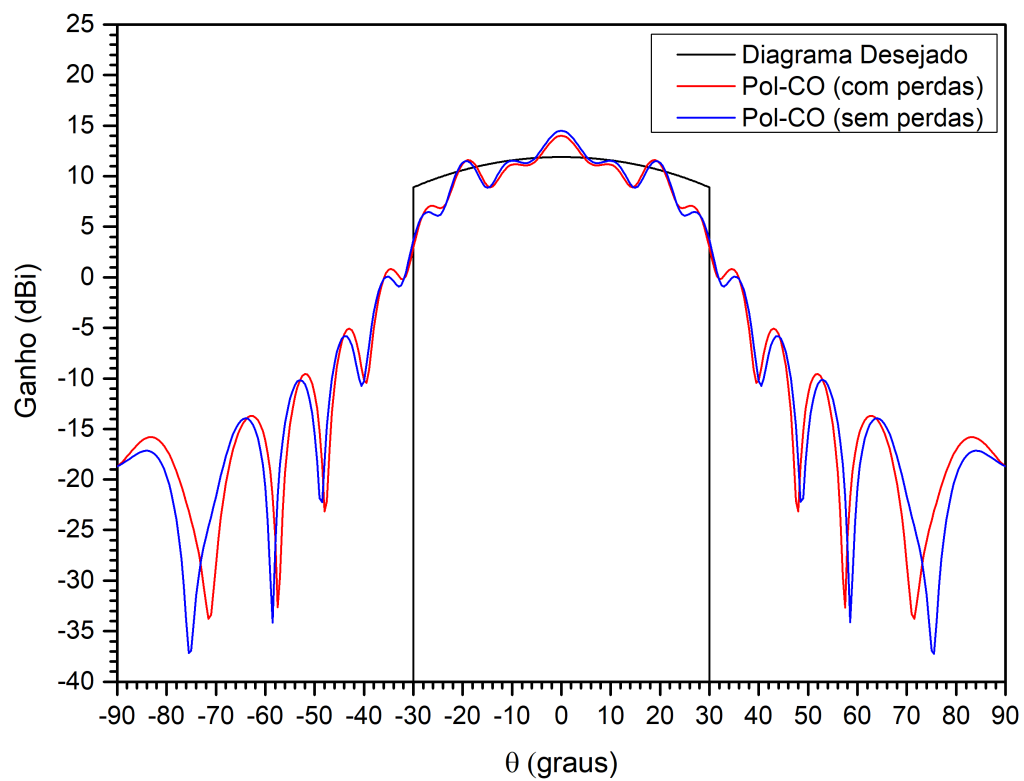


Figura 5.52: Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^\circ$ com a lente operando na frequência de 60 GHz para o caso III-c.

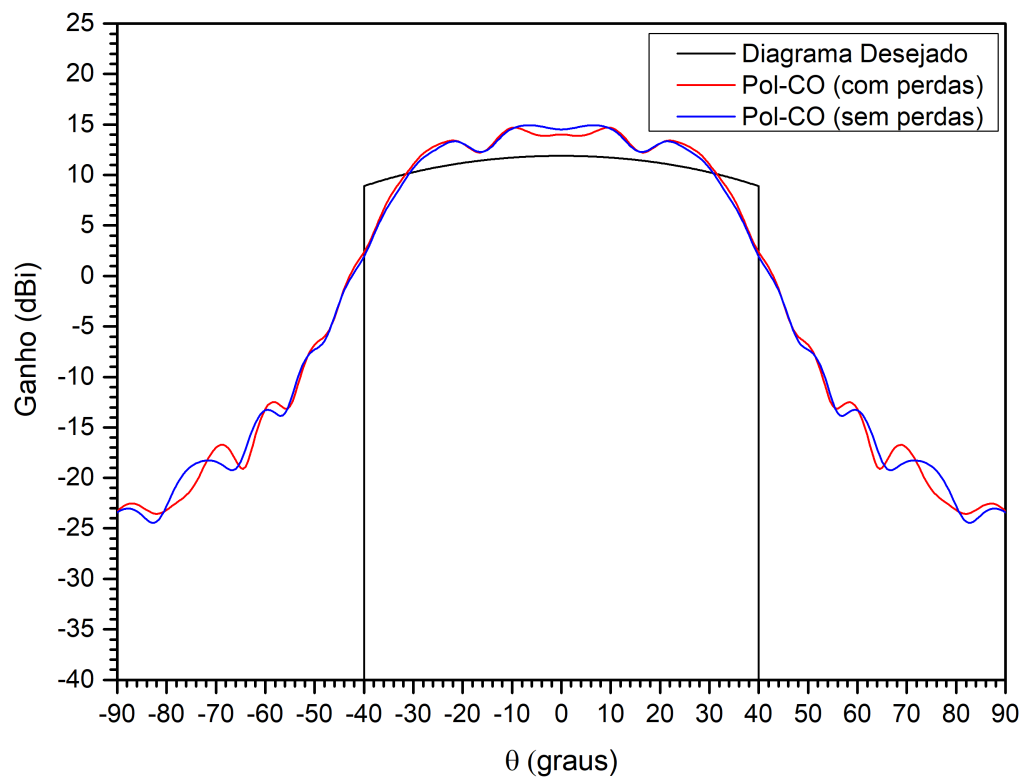


Figura 5.53: Diagrama de radiação no plano $\phi = 90^\circ$ com a lente operando na frequência de 60 GHz para o caso III-c.

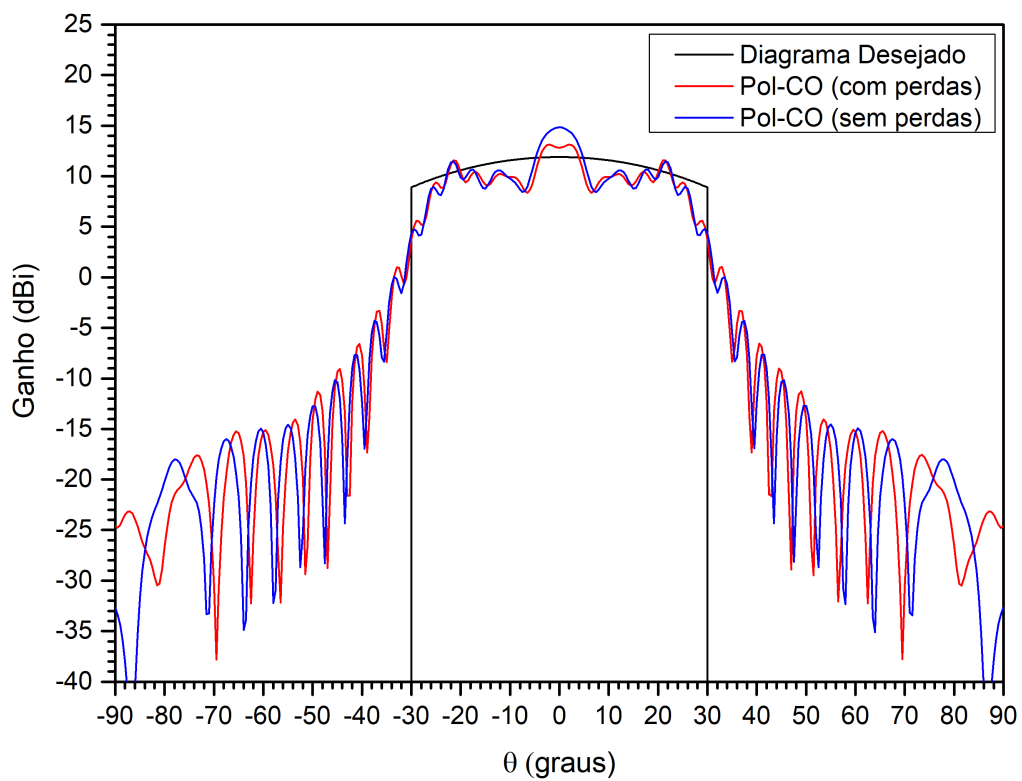


Figura 5.54: Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^\circ$ com a lente operando na frequência de 120 GHz para o caso III-c.

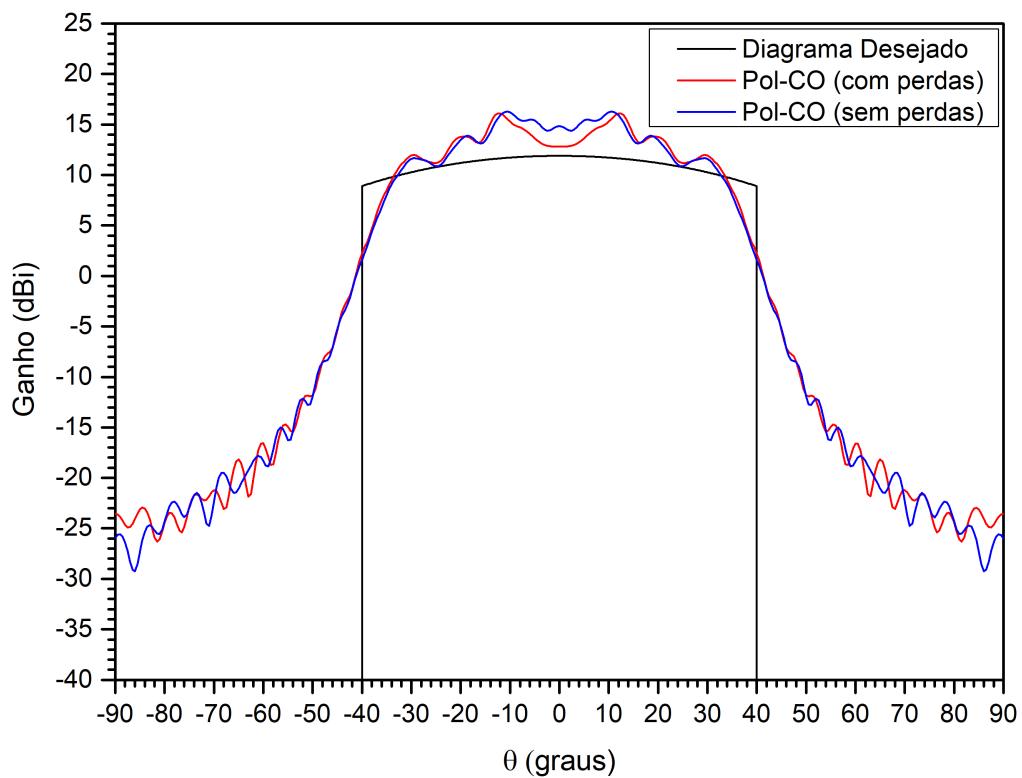


Figura 5.55: Diagrama de radiação no plano $\phi = 90^\circ$ com a lente operando na frequência de 120 GHz para o caso III-c.

Atenuação na borda de 0 dB: Caso III-d

Para completar a avaliação do procedimento de síntese, o algoritmo deve projetar uma lente que gere um diagrama de radiação Gaussiano em um contorno elíptico com topo plano, ou seja, atenuação de 0 dB ($\psi = 0$) na borda. Assim como no estudo de caso III-c, $\alpha_{u_f} = 30^\circ$ e $\alpha_{v_f} = 40^\circ$. Portanto, $G_0 = 10,5294$ dB. Para essa síntese será necessário uma grade com 10 anéis ($J = 10$) e 54 radiais ($K = 54$) dispostos em uma grade polar não-uniforme com $\alpha = 0,8$, sendo a solução inicial adotada aquela do estudo de caso III-a.

Os resultados da síntese foram obtidos após 39 iterações com $|\Gamma|_{mean} = 1,36124^{-13}$ nos pontos interiores ao contorno e $|\Gamma|_{mean} = 5,41227^{-13}$ nos pontos da borda quando o algoritmo despreza as perdas por reflexão. Já considerando as perdas, o algoritmo converge após 40 iterações com $|\Gamma|_{mean} = 1,41953^{-13}$ nos pontos interiores e $|\Gamma|_{mean} = 5,28215^{-14}$ nos pontos da borda. A direção dos raios refratados pela lente sintetizada e o respectivo traçado de raios estão ilustrados nas Figuras 5.56 e 5.57. Para a convergência do algoritmo de síntese para os estudos de caso com distribuição Gaussiana em um contorno elíptico foi necessário adotar grades polares não-uniformes com diferentes valores de α . Essa característica evidencia que a escolha da grade usada para discretizar a superfície dielétrica

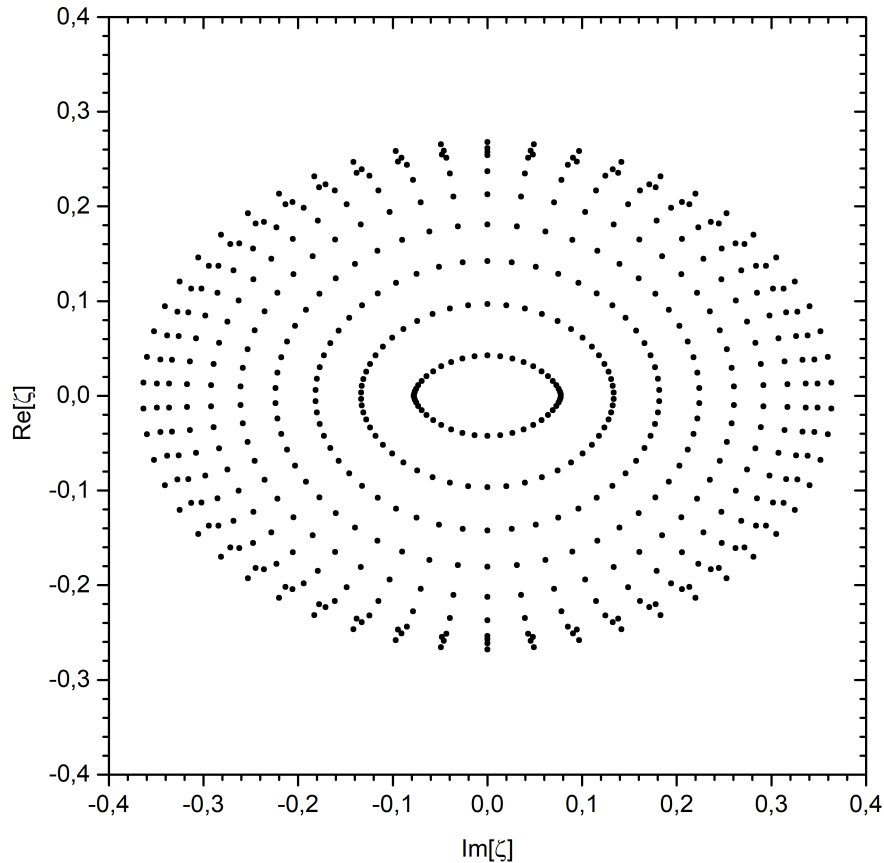


Figura 5.56: Direção dos raios refratados no plano complexo ζ para o caso III-d.

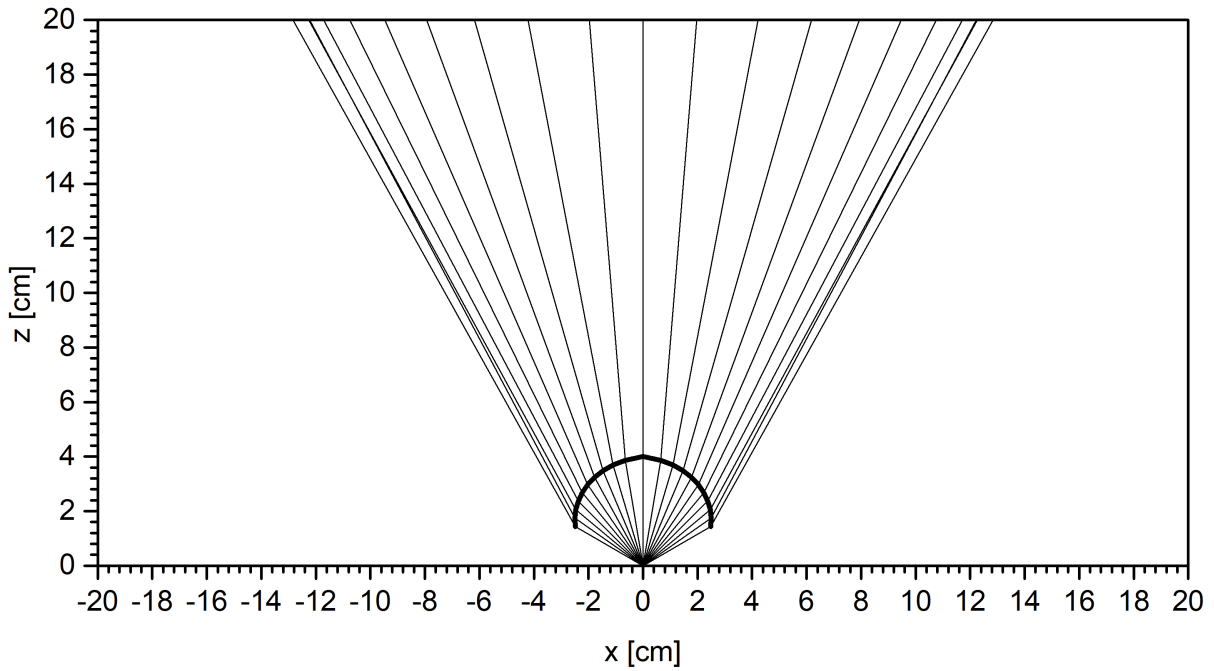


Figura 5.57: Traçado de raios da lente sintetizada para o caso III-d.

é um fator determinante para a obtenção de resultados satisfatórios para o problema de síntese.

Conforme pode ser observado nos resultados da síntese, as distorções descritas no estudos de caso III-b e III-c ficam mais evidentes neste exemplo, visto que é desejado um diagrama de radiação com topo plano, resultando em uma redistribuição de energia da região central para as regiões próximas à borda imposta pelo princípio da Conservação da Energia implícita na equação de Monge-Ampère. Embora haja distorções nos anéis mais externos próximos ao eixo menor do elipse e o anel mais interno esteja na iminência da distorção, este resultado atende as condições de contorno e não há presença de raios refratados interceptando a superfície da lente, sendo, portanto, um resultado satisfatório.

Os diagramas de radiação no plano $\phi = 0^\circ$ da lente sintetizada operando nas frequências de 30 GHz, 60 GHz e 120 GHz estão ilustrados nas Figuras 5.58, 5.60 e 5.62 respectivamente. Já os diagramas de radiação no plano $\phi = 90^\circ$ estão ilustrados nas Figuras 5.59, 5.61 e 5.63 respectivamente. As análises apresentadas para os estudos de caso III-a, III-b e III-c podem ser estendidas para este exemplo, frisando a presença de oscilações na região especificada pelo feixe da GO, bem como os sucessivos lóbulos laterais nas faixas onde o diagrama da GO é nulo, em particular no plano $\phi = 0^\circ$, que corresponde ao eixo de menor dimensão da região de cobertura. Também merece destaque as diferenças devido as perdas por reflexão, sendo inferiores a 1 dB nas frequências 30 GHz e 60 GHz, e chegando a 1,23 dB na direção $\theta = 0^\circ$ em 120 GHz.

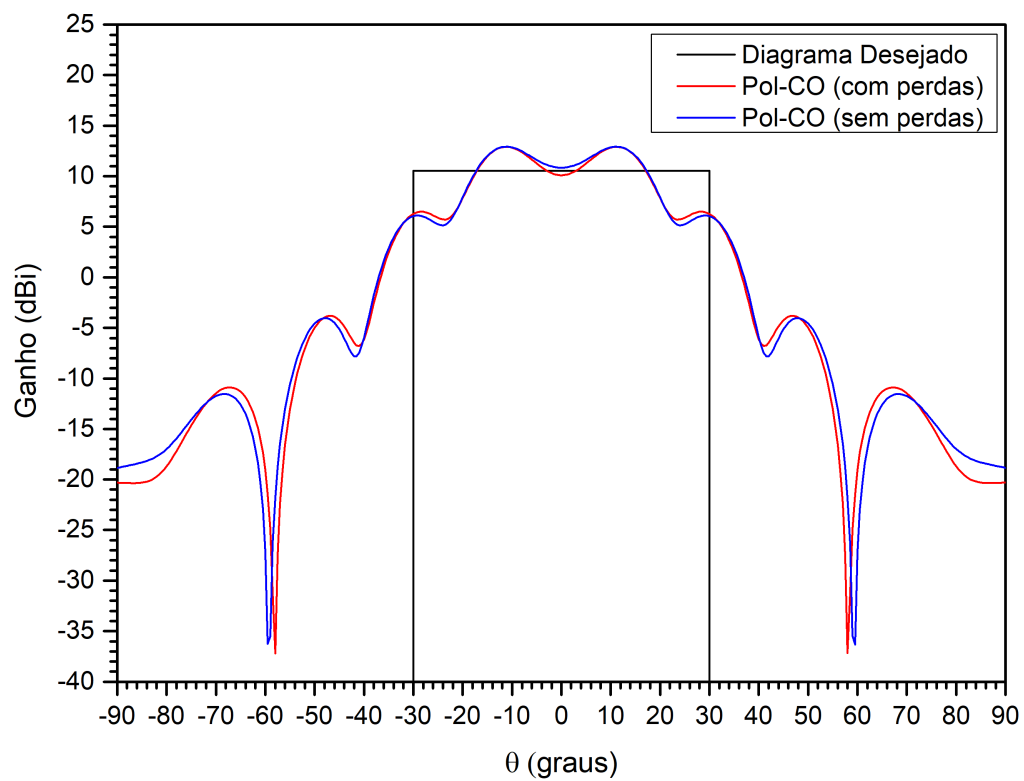


Figura 5.58: Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^\circ$ com a lente operando na frequência de 30 GHz para o caso III-d.

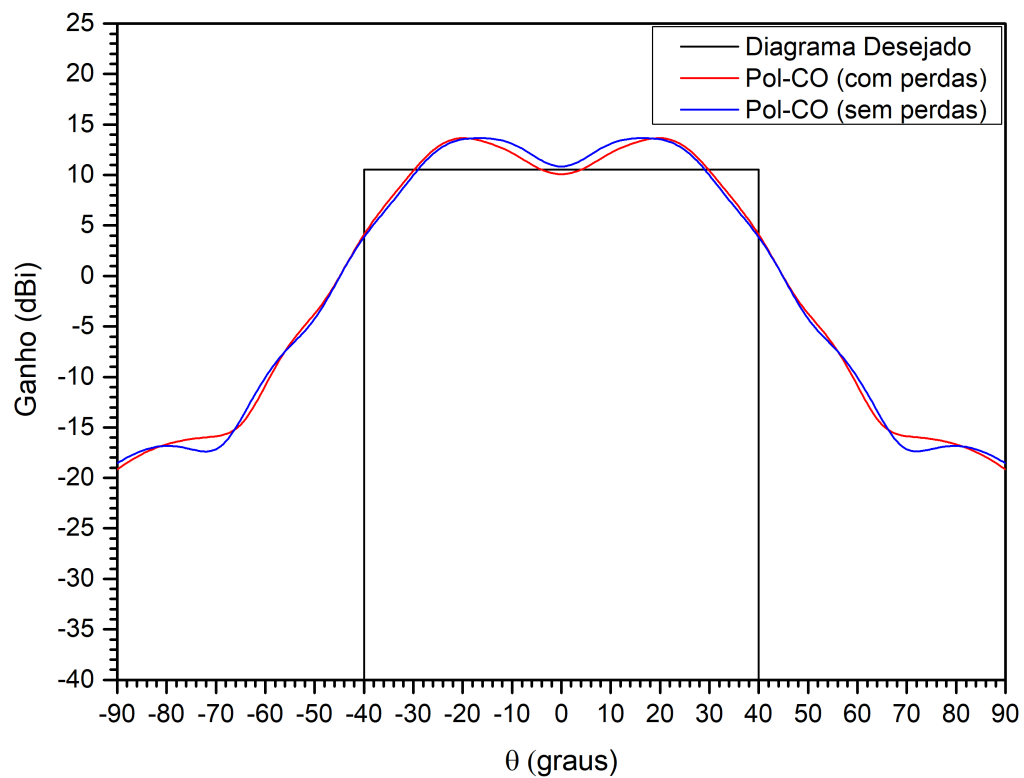


Figura 5.59: Diagrama de radiação no plano $\phi = 90^\circ$ com a lente operando na frequência de 30 GHz para o caso III-d.

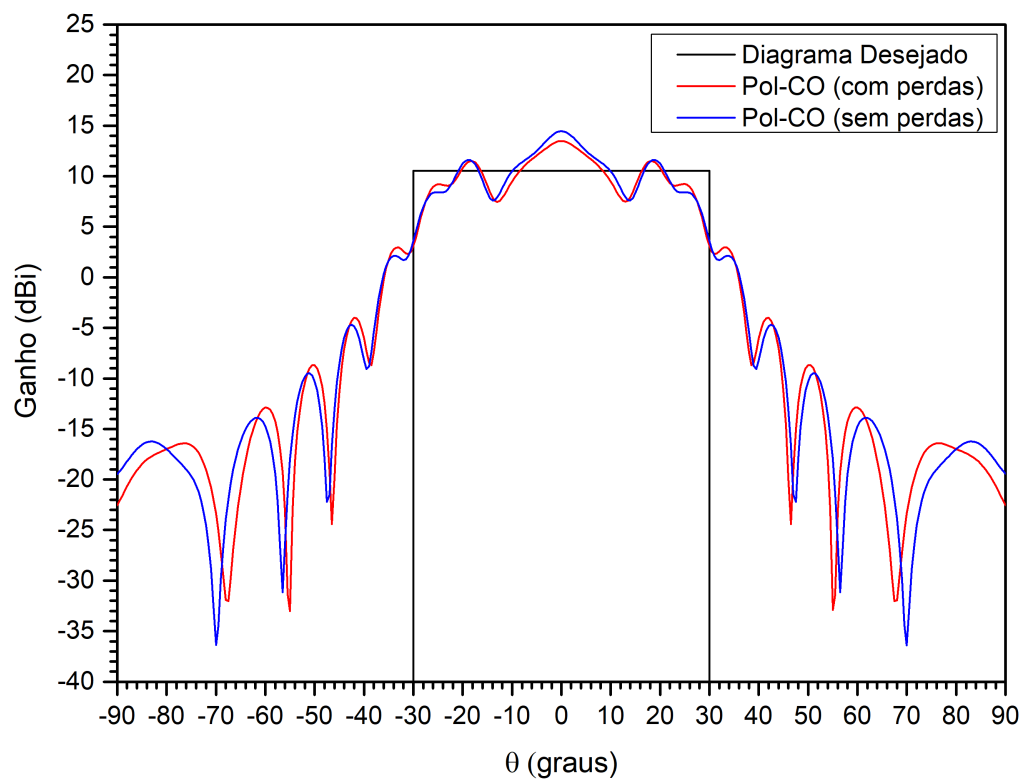


Figura 5.60: Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^\circ$ com a lente operando na frequência de 60 GHz para o caso III-d.

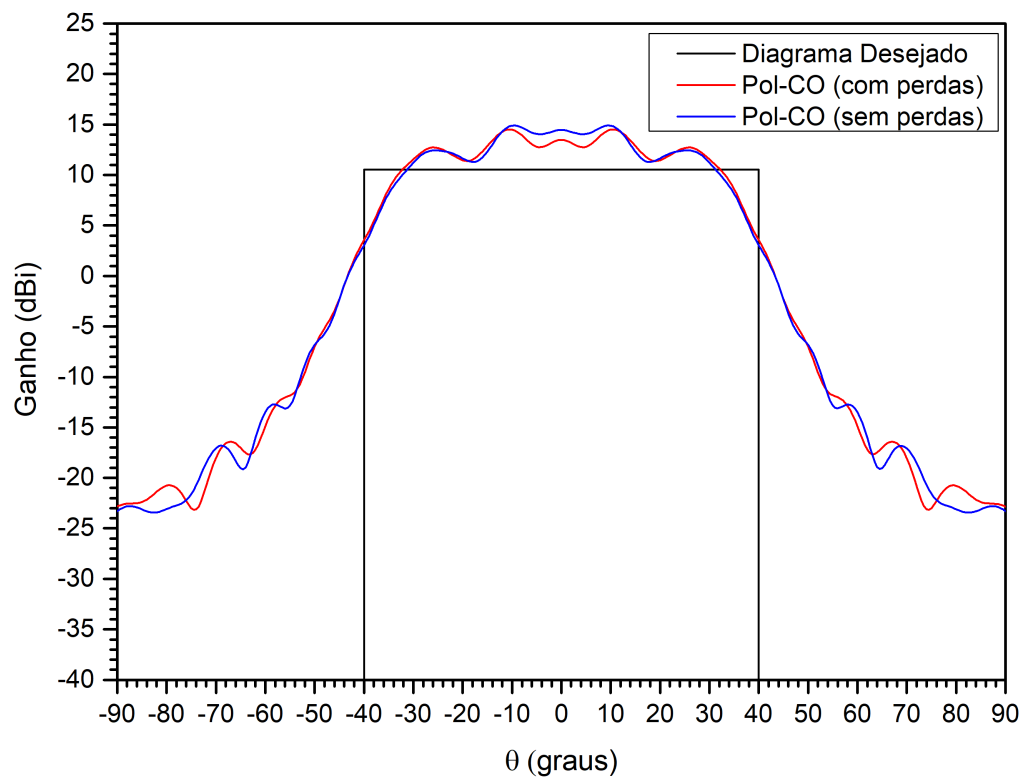


Figura 5.61: Diagrama de radiação no plano $\phi = 90^\circ$ com a lente operando na frequência de 60 GHz para o caso III-d.

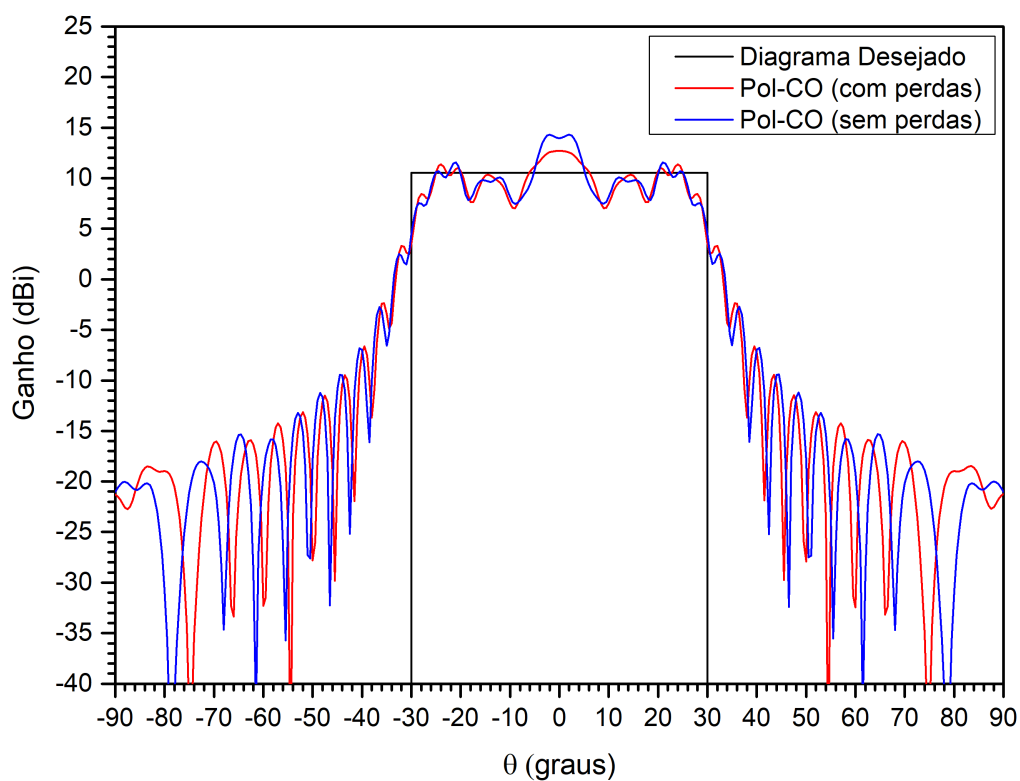


Figura 5.62: Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^\circ$ com a lente operando na frequência de 120 GHz para o caso III-d.

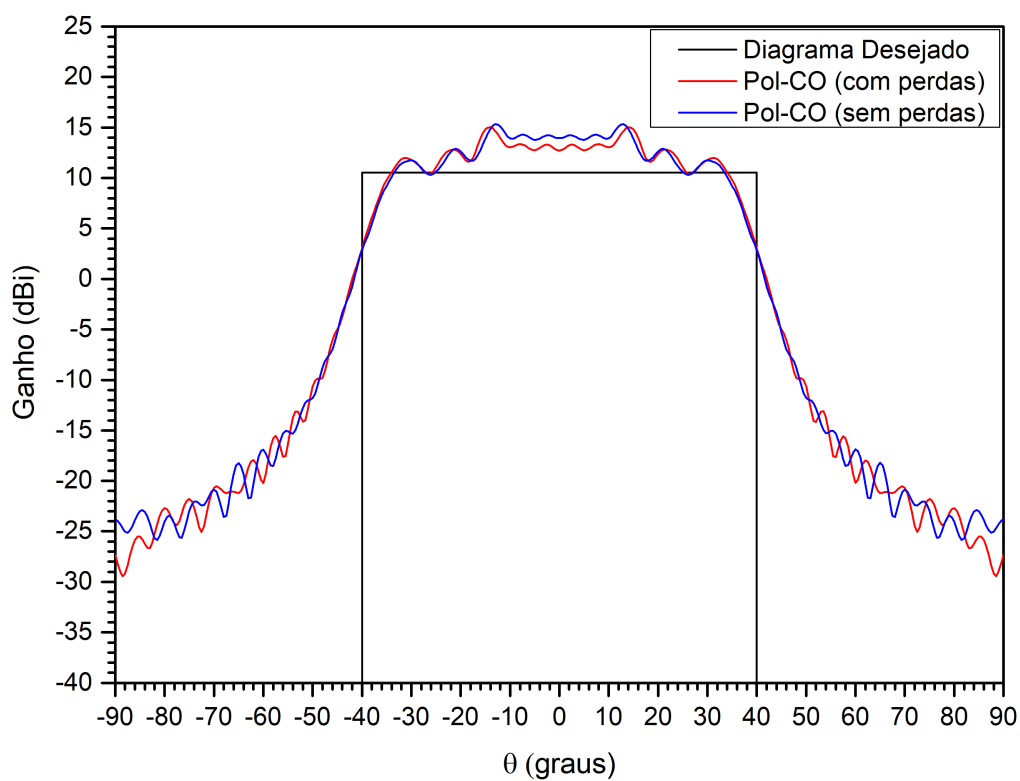


Figura 5.63: Diagrama de radiação no plano $\phi = 90^\circ$ com a lente operando na frequência de 120 GHz para o caso III-d.

5.12 Considerações Finais

Neste capítulo foi proposta uma formulação inédita, em coordenadas complexas, baseada nos princípios da GO para o problema de síntese de uma lente dielétrica sem simetria circular. Além disso, o problema foi resolvido numericamente usando a estratégia numérica alternativa descrita no Capítulo 2 que representa a superfície sintetizada por um conjunto de quádricas confocais com eixos deslocados. O método numérico conseguiu sintetizar lentes dielétricas cujas amplitudes dos diagrama de radiação em campo distante, bem como, a largura de feixe pudessem ser controlados. Embora a convergência do algoritmo tenha mostrado depender da grade escolhida para discretizar a superfície dielétrica, os resultados foram promissores, em particular, quando foi possível sintetizar lentes para uma cobertura uniforme em contornos circular e elíptico. Os estudos de caso apresentados neste capítulo também podem ser facilmente adaptados para uma cobertura super-elíptica, bastando para isso fazer $\sigma \neq 1$ na expressão (5.41) que define o contorno na região de campo distante.

Capítulo 6

Conclusões e Trabalhos Futuros

Baseadas na abordagem alternativa proposta por [2] para a síntese de antenas refletoras *offset* para um único refletor, foram apresentadas neste trabalho soluções para os problemas de síntese de antenas duplo-refletoras *offset* e lentes dielétricas sem simetria circular. Diferentemente do método tradicional que utiliza diferenças finitas para aproximar as derivadas de primeira e segunda ordem presentes na formulação do problema de síntese, adotou-se a expressão de uma superfície quádrlica confocal para representar localmente as superfícies sintetizadas. Segundo [2], através desta representação não há erro de discretização das derivadas, uma vez que as expressões analíticas exatas das derivadas parciais da função de mapeamento são conhecidas. Desta forma, no Capítulo 2 o problema da síntese geométrica de antenas duplo-refletoras *offset* foi apresentado em coordenadas complexas [19] bem como foi definida a superfície quádrlica confocal com eixo deslocado usada para interpolar a superfície discretizada. Além disso, foi apresentado o algoritmo de solução da equação de Monge-Ampère baseado no método iterativo de Newton-Raphson [2].

No Capítulo 3, o problema de síntese de antenas duplo-refletoras *offset* com fase uniforme na abertura foi formulado aplicando a representação por superfícies quádrlicas focais para a superfície do subrefletor. A técnica de solução numérica proposta por [2] foi utilizada para implementar o algoritmo de síntese de tal forma que a matriz Jacobiana foi obtida analiticamente. Os resultados da síntese foram interpolados por pseudo *splines* quádrlicas [52] e os refletores modelados foram analisados via aproximações da Óptica Física com correções das correntes de borda [47], [48], considerando a antena operando na frequência de 11,725 GHz. De modo geral, o algoritmo de síntese conseguiu gerar sistemas duplo-refletores *offset* com eficiência de iluminação de até 86,46%, com abertura circular uniforme em amplitude e fase. O algoritmo mostrou-se eficiente para gerar os contornos de abertura circular e elíptico, e a solução foi obtida em até 6 iterações para aberturas com contorno circular e, no máximo, em 11 iterações, para os casos de convergência mais

difícil. Para sintetizar antenas com abertura em contornos elípticos, a grade polar regular não se mostrou eficiente para sintetizar uma solução física para o problema de síntese, sendo necessário gerar uma grade não uniforme em θ para obter resultados satisfatórios.

A técnica de solução numérica proposta em [2] foi, então, implementada no Capítulo 4 para a solução do problema de síntese de sistemas duplo-refletores *offset* com fase não-uniforme [19]. O algoritmo apresentado é geral e também sintetiza duplo-refletores com fase uniforme na abertura. O algoritmo foi capaz de controlar o diagrama de radiação em uma cobertura circular com distribuição de amplitude uniforme e em uma cobertura com formato de *boomerang*. O algoritmo também realizou a síntese de um sistema duplo-refletor com abertura super-elíptica. As soluções foram obtidas em até 22 iterações para o caso da cobertura em formato *boomerang*. Os elementos da matriz Jacobiana foram obtidos analiticamente e o algoritmo mostrou-se robusto e eficiente, assim como aquele apresentado em [31] que utiliza diferenças finitas para aproximar as derivadas presentes na formulação. Além disso, como na síntese de uma abertura elíptica com fase uniforme, foram adotadas grades não uniformes em θ para melhorar a convergência do algoritmo, bem como os resultados da síntese.

No Capítulo 5 foi desenvolvida uma formulação matemática exata baseada nos princípios da GO em coordenadas complexas para a síntese de lentes dielétricas sem simetria circular composta por uma única interface de transmissão. Aplicando a lei de Snell da refração [44] na expressão da Conservação da Energia [17], foi obtida uma equação diferencial parcial não linear de segunda ordem do tipo Monge Ampère para a síntese da superfície dielétrica. A matriz Jacobiana foi obtida analiticamente e uma lente dielétrica circularmente simétrica [46] foi usada para iniciar o algoritmo de síntese. O algoritmo convergiu após 37 iterações para gerar um diagrama de radiação em coberturas circulares e após 40 iterações para gerar diagramas de radiação em coberturas elípticas. Nas etapas intermediárias da síntese foi exigido um critério de convergência da ordem de 10^{-6} , enquanto que na etapa final o critério de convergência foi de 10^{-10} .

O algoritmo conseguiu projetar superfícies refrativas satisfatórias, ou seja, lentes cujos diagramas de radiação concordam com as especificações prescritas. No entanto, deve ser destacada a dificuldade da síntese de obter resultados quando se deseja modelar toda a superfície da lente, ou seja, aquela compreendida no intervalo $0 \leq \theta \leq 90^\circ$, e em especial para gerar feixes mais estreitos na região de campo distante, uma vez que a condição de contorno não é obedecida para os raios mais próximos à borda da grade. Assim, optou-se por modelar apenas uma seção da lente, para $0 \leq \theta \leq 60^\circ$, o que flexibilizou o algoritmo de síntese e conduziu a resultados satisfatórios. Além disso, assim como na síntese das antenas duplo-refletoras *offset*, surgiram problemas nos anéis mais internos e nos anéis mais externos quando o campo distante especificado tinha atenuação na borda próxima a 0 dB e contorno mais difícil, ou seja, contorno elíptico e mais estreito.

6.1 Trabalhos Futuros

O uso de uma expressão analítica exata, ao invés de numérica aproximada, para representar localmente as superfícies sintetizadas mostrou-se uma estratégia eficiente para obter soluções numéricas para os problemas de síntese de antenas duplo-refletoras *offset* e lentes dielétricas sem simetria circular. Como proposta para trabalhos futuros, pretende-se avaliar o algoritmo de síntese de sistemas duplo-refletores em um problema prático, por exemplo, projetar um sistema duplo-refletor *offset* capaz de gerar um diagrama de radiação para a cobertura eficiente do território brasileiro. Para isso, é necessário determinar a função fase $l(\omega)$ e a densidade de potência na abertura $G(\omega)$ que provê o formato da cobertura do diagrama de radiação especificado.

Em relação ao problema de síntese de lentes dielétricas sem simetria circular, os trabalhos futuros consistem em avaliar as lentes projetadas em um software especializado de simulação eletromagnética para comparar com os resultados obtidos pela método híbrido da GO-PO [43]. Além disso, pretende-se aprimorar o algoritmo de análise implementado substituindo o uso de *splines* cúbicas por um método de interpolação que conduza a uma superfície contínua para representar a superfície sintetizada. Como exemplo, poderia ser usado pseudo-*splines* de sétima ordem, visto que a interpolação das superfícies dielétricas sintetizadas por pseudo-*splines* de quinta ordem não conduzem a resultados satisfatórios. Essa abordagem permite determinar as derivadas presentes no algoritmo da GO-PO de forma analítica, reduzindo os erros numéricos no cálculo do diagrama de radiação.

Aspectos relacionados à implementação do algoritmo de síntese também podem ser explorados visando melhorar sua convergência. Por exemplo, avaliar o uso de outros tipos de grade com células de quatro pontos na interpolação da superfície sintetizada por um conjunto de superfícies quádricas confocais com eixos deslocados nas sínteses onde são requeridas grades polares não uniformes em θ para obter convergência. Além disso, o algoritmo também pode ser facilmente adaptado para utilizar outros tipos de superfícies na etapa de interpolação local. Como exemplo, podem ser usadas quádricas, ao invés de quádricas confocais para representar localmente a superfície sintetizada. Para essa classe de superfícies, o termo $|L_{\eta\eta} - L_\eta|^2$ presente na equação de Monge Ampère não será nulo, podendo resolver os problemas de distorção que surgiram nas relações de mapeamento. Visto que a equação da quádrica é um polinômio definido por nove constantes (e não quatro como no caso da superfície quádrica confocal com eixo deslocado), a célula utilizada para representar localmente a superfície sintetizada deverá ter nove pontos da grade. Neste caso, como haverá maior acoplamento entre os elementos que compõem a superfície, essa aproximação poderá conduzir a soluções mais estáveis uma vez que estas superfícies podem representar mais adequadamente as assimetrias que surgem durante o procedimento iterativo.

Referências

- [1] BALANIS, C., *Antenna Theory: Analysis and Design*. Wiley, 2012.
- [2] PENCHEL, R. A., *Síntese de antenas refletoras utilizando seções cônicas e superfícies quádricas confocais*. PhD thesis, Puc-Rio, Rio de Janeiro, Brasil, 2014.
- [3] RUDGE, A. W.; ADATIA, N. A., “Offset parabolic reflector antennas: a review,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 66, pp. 1592–1618, 1978.
- [4] COOK, J.; ELAM, E.; ZUCKER, H., “The open cassegrain antenna: Part i. eletromagnetic design and analysis,” *Bell System Thechnical Journal*, vol. 44, pp. 1255–1300, 1965.
- [5] PENCHEL, R. A.; BERGMANN, J. R.; MOREIRA, F. J. S., “Shaping single offset reflector antennas using local axis-displaced confocal quadrics,” *International Journal of Antennas and Propagation*, vol. 2016, pp. 1–9, 2016.
- [6] DENKMANN, W.; GEYLING, F.; POPE, D.; SCHWARZ, A., “The open cassegrain antenna: Part ii. structural and mechanical evaluation,” *Bell System Thechnical Journal*, vol. 44, pp. 1301–1319, 1965.
- [7] CHU, T. S.; TURRIN, R., “Depolarization properties of offset reflector antennas,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 21, pp. 339–345, 1973.
- [8] HILBERT, D.; COHN-VOSSEN, S., *Geometry and the Imaginations*. AMS Chelsea Publishing Series, 1999.
- [9] TANAKA, H.; MIZUSAWA, M., “Elimination of cross polarization in offset dual-reflector antennas,” *Electronics Communications of Japan*, vol. 58, pp. 71–78, 1975.
- [10] MIZUGUTCH, Y.; AKAGAWA, M.; YOKOI, H., “Offset dual reflector antenna,” *Antennas and Propagation Society International Symposium*, vol. 14, pp. 2–5, 1976.
- [11] DRAGONE, C., “Offset multireflector antennas with perfect pattern symetry and polarization discrimination,” *Bell System Thechnical Journal*, vol. 57, pp. 2663–2684, 1978.

- [12] J. S. SCHRUBEN, "Formulation of a reflector-design problem for a lighting fixture," *Journal of the Optical Society of America*, vol. 62, p. 1498–1501, 1972.
- [13] WESTCOTT, B. S.; NORRIS, A. P., "Reflector synthesis for generalized farfields," *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 8, pp. 521–523, 1975.
- [14] NORRIS, A. P.; WESTCOTT, B. S., "Computation of reflector surfaces for bivariate beamshaping in the elliptic case," *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1976.
- [15] BRICKELL, F.; WESTCOTT, B. S., "Reflector design for two-variable beam shaping in the hyperbolic case," *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 9, pp. 113–128, 1976.
- [16] WESTCOTT, B. S.; BRICKELL, F., "Computation of reflector surfaces for two-variable beam shaping in the hyperbolic case," *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 9, pp. 611–625, 1976.
- [17] BRICKELL, F.; MARDER, L.; WESTCOTT, B. S., "The geometrical optics design of reflectors using complex coordinates," *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 10, no. 2, pp. 245–260, 1977.
- [18] H. SCHWERDTFEGGER, *Geometry of Complex Numbers: Circle Geometry, Moebius Transformation, Non-Euclidean Geometry*. Dover: Dover Books on Mathematics Series, 1976.
- [19] BRICKELL, F.; WESTCOTT, B. S., "Phase and power density distributions on plane apertures of reflector antennas," *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 11, no. 4, pp. 777–789, 1978.
- [20] GALINDO-ISRAEL, V.; MITTRA, R.; CHA, A., "Aperture amplitude and phase control of offset dual reflectors," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 27, pp. 154–164, 1979.
- [21] MITTRA, R.; HYJAZIE, F.; GALINDO-ISRAEL, V., "Synthesis of offset dual reflector antennas transforming a given feed illumination pattern into a specified aperture distribution," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 30, pp. 251–259, 1982.
- [22] GALINDO, V., "Design of dual reflector antennas with arbitrary phase and amplitude distributions," *Antennas and Propagation Society International Symposium*, vol. 1, pp. 91–95, 1963.

- [23] WESTCOTT, B. S.; BRICKELL, F., “Dual offset reflectors shaped for zero cross-polarization and prescribed aperture illumination,” *Journal of Physics D: Applied Physics*, vol. 12, pp. 169–186, 1979.
- [24] ALBERTSEN, N. C., “Shaped-beam antenna with low cross polarization,” *7th European Microwave Conference*, pp. 339–342, 1978.
- [25] WESTCOTT, B. S.; BRICKELL, F., “Dual offset reflectors shaped for zero crosspolarization with asymmetric feed pattern,” *IEE Proceedings H, Microwaves, Optics and Antennas*, vol. 129, pp. 307–314, 1982.
- [26] WESTCOTT, B. S.; STEVENS, F. A.; BRICKELL, F., “Go synthesis of offset dual reflectors,” *IEE Proceedings H, Microwaves, Optics and Antennas*, vol. 128, no. 1, pp. 11–18, 1981.
- [27] WESTCOTT, B. S.; GRAHAM, R.; BRICKELL, F., “Systematic design of a dual offset reflector antenna with an elliptical aperture,” *IEE Proceedings H, Microwaves, Optics and Antennas*, vol. 131, pp. 365–370, 1981.
- [28] MEHLER, M.; TUN, S.; ADATIA, N., “Direct far-field go synthesis of shaped beam reflector antennas,” *IEE Proceedings H, Microwaves, Optics and Antennas*, vol. 133, pp. 213–220, 1986.
- [29] BERGMANN, J.; BROWN, R.; CLARRICOATS, P., “Dual reflector synthesis for specified aperture power and phase,” *Electronics Letters*, vol. 21, pp. 820–821, 1985.
- [30] BERGMANN, J.; BROWN, R.; CLARRICOATS, P.; ZHOU, H., “Synthesis of shaped-beam reflector antenna patterns,” *IEE Proceedings H, Microwaves, Optics and Antennas*, vol. 135, pp. 48–53, 1988.
- [31] BERGMANN, J. R., *The Geometrical Optics Design of Dual Reflector Antennas*. PhD thesis, Queen Mary University of London, London, UK, 1986.
- [32] CAFFARELLI, L.; OLIKER, V., “Weak solutions of one inverse problem in geometric optics,” *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 154, no. 1, pp. 39–49, 2008.
- [33] OLIKER, V. I., “A rigorous method for synthesis of offset shaped reflector antennas,” *Computing Letters*, vol. 2, pp. 29–49, 2006.
- [34] GLIMM, T.; OLIKER, V., “Optical design of single reflector systems and the monge-kantorovich mass transfer problem,” *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 117, pp. 4096–4108, 2003.
- [35] GLIMM, T.; OLIKER, V., “Optical design of two-reflector systems, the monge-kantorovich mass transfer problem and fermat’s principle,” *Indiana University Mathematics Journal*, vol. 53, pp. 1255–1278, 2004.

- [36] BORISKIN, A.; SAULEAU, R., *Aperture Antennas for Millimeter and Sub-millimeter Wave Applications*. Springer, 2018.
- [37] UEHARA, K.; MIYASHITA, K.; NATSUMA, K.; HATAKEYAMA, K.; MIZUNO, K., “Lens-coupled imaging arrays for the millimeter- and submillimeter-wave regions,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 40, no. 5, pp. 806–811, 1992.
- [38] FERNANDES, C. A.; FERNANDES, C. G., “Performance of lens antennas in wireless indoor millimeter-wave applications,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 47, no. 6, pp. 732–737, 1999.
- [39] RAMAN, S.; BARKER, N. S., “A w-band dielectric-lens-based integrated monopulse radar receiver,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 46, no. 12, pp. 2308–2316, 1998.
- [40] VAN RUDD, J.; MITTLEMAN, D. M., “Influence of substrate-lens design in terahertz time-domain spectroscopy,” *Journal of Optical Society of America*, vol. 19, no. 2, pp. 319–329, 2002.
- [41] BÜTTGENBACH, T. H., “An improved solution for integrated array optics in quasi-optical mm and submm receivers: the hybrid antenna,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 41, no. 10, pp. 1750–1761, 1993.
- [42] LEMAIRE, D.; FERNANDES, C. A.; SOBIESKI, P.; BARBOSA, A., “A method to overcome the limitations of g.o. in axis-symmetric dielectric lens shaping,” *International Journal of Infrared and Millimeter Waves*, vol. 17, no. 8, pp. 1377–1390, 1996.
- [43] CHANTRAINE-BARÈS, B.; SAULEAU, R.; LE COQ, L.; MAHDJOUBI, K., “A new accurate design method for millimeter-wave homogeneous dielectric substrate lens antennas of arbitrary shape,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 53, no. 3, pp. 1069–1082, 2005.
- [44] WESTCOTT, B. S.; BRICKELL, F., “General dielectric-lens shaping using complex co-ordinates,” *IEE Proceedings H, Microwaves, Optics and Antennas*, vol. 133, no. 2, pp. 122–126, 1986.
- [45] WESTCOTT, B. S.; BRICKELL, F., “On the synthesis of a single offset reflector with dielectric cone feed,” *Journal of Modern Optics*, vol. 40, no. 6, pp. 1161–1173, 1993.
- [46] PATIÑO, L. S., “Síntese de refletores omnidirecionais alimentados por lente dielétricas associadas à corneta coaxial,” Master’s thesis, Puc-Rio, Rio de Janeiro, Brasil, 2016.

- [47] MICHAELI, A., “Equivalent edge currents for arbitrary aspects of observation,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 32, no. 3, pp. 252–258, 1984.
- [48] MICHAELI, A., “Correction to “Equivalent edge currents for arbitrary aspects of observation,”” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 33, no. 2, p. 227, 1985.
- [49] WESTCOTT, B. S., *Shaped Reflector Antenna Design*. Letchworth, U.K.: Research Studies Press Ltd., 1983.
- [50] ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A., *Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Applied mathematics series, Dover Publications, 1964.
- [51] LUDWIG, A., “The definition of cross polarization,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 21, pp. 116–119, 1973.
- [52] BERGMANN, J. R.; HASSELMANN, F. J. V.; TEIXEIRA, F. L.; REGO, C. G., “A comparison between techniques for global surface interpolation in shaped reflector analysis,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 42, no. 1, pp. 47–53, 1994.
- [53] ASSIS, A. R.; MOREIRA, F. J. S.; BERGMANN, J. R., “Go synthesis of offset dual reflector antennas using local axis-displaced confocal quadrics,” *Journal of Microwaves, Optoelectronics and Electromagnetic Applications*, vol. 19, no. 2, pp. 177–190, 2020.
- [54] PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, W. T., FLANNERY, B. P., *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 3th ed., 2007.
- [55] DESCHAMPS, G. A., “Ray techniques in electromagnetics,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 60, no. 9, pp. 1022–1035, 1972.

Apêndice A

Lente Circularmente Simétrica

A solução inicial para o algoritmo de síntese de uma lente dielétrica apresentado no Capítulo 5 será uma lente circularmente simétrica proposta em [46] e é dada pela relação:

$$r_1(\theta) = \frac{NC + r_0 \cos(\theta + \gamma) \pm A}{N^2 - 1}, \quad (\text{A.1})$$

onde

$$A = \sqrt{C^2 + r_0^2(N^2 - 1) + 2r_0NC \cos(\theta + \gamma) + r_0^2 \cos^2(\theta + \gamma)},$$

C é uma constante associada a espessura da lente Z_A e é dada em (A.2), r_0 é a distância entre o foco virtual $P(\rho_0, Z_0)$ e a origem O , $r_0 = \sqrt{\rho_0^2 + Z_0^2}$, γ é o ângulo formado entre o lado r_0 e o eixo z negativo contado na direção horária, conforme ilustrado na Figura A.1, sendo expresso por $\tan(\gamma) = \rho_0/Z_0$.

$$C = NZ_A - \sqrt{(Z_A - Z_0)^2 + \rho_0^2}. \quad (\text{A.2})$$

A largura de feixe (α_c) desta lente é controlada pela escolha da posição do foco virtual $P(\rho_0, Z_0)$ e da espessura da lente Z_A e é obtida pela expressão [46]:

$$\alpha_c = \sin^{-1} \left[\frac{r_1(\theta_{ic}) - \rho_0}{Nr_1(\theta_{ic}) - C} \right], \quad (\text{A.3})$$

onde θ_{ic} é o ângulo de incidência crítico e é dado por:

$$\theta_{ic} = \gamma + \cos^{-1} \frac{-C}{Nr_0}. \quad (\text{A.4})$$

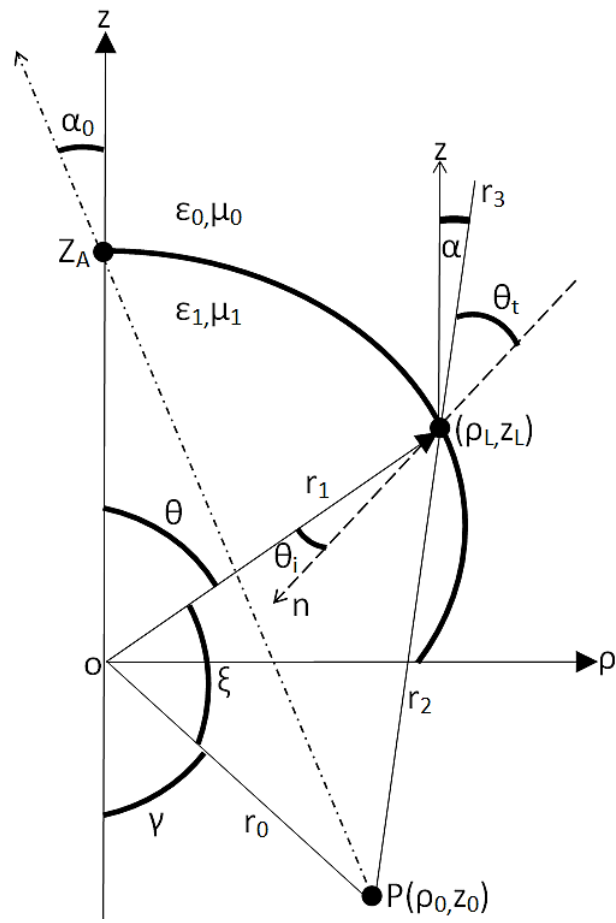


Figura A.1: Geometria da lente com foco virtual no ponto $P(\rho_0, Z_0)$ [46].