

Aplicação de Equações Integrais para a Predição da Propagação Radioelétrica sobre Solos Suavemente Irregulares e Incidência Rasante

Fernando J. S. Moreira

Universidade Federal de Minas Gerais, Depto. Engenharia Eletrônica
Av. Pres. Antônio Carlos 6627, Pampulha, Belo Horizonte, MG, CEP 31270-901

Resumo—Este trabalho discute a aplicação das equações integrais do campo magnético (MFIE) e elétrico (EFIE) na predição de cobertura em enlaces radioelétricos sobre solos suavemente irregulares. Assume-se que o enlace é suficientemente longo, de forma a considerar a incidência localmente rasante. Nesta situação, as perdas no terreno (considerado homogêneo) são aproximadamente tratadas através das condições de contorno de Leontovich. Assume-se também que o perfil do terreno é perpendicularmente invariante em relação ao plano de incidência, permitindo o tratamento aproximado do espalhamento esférico pelo método da fase estacionária. Através de casos de estudo mostra-se que para a polarização vertical a MFIE é a mais indicada, do ponto de vista numérico, e que a aproximação de solo condutor magnético perfeito é preverível à de condutor elétrico perfeito. A formulação e conclusões podem ser diretamente aplicadas no tratamento da polarização horizontal com o auxílio do conceito de dualidade.

Palavras Chave— Propagação radioelétrica, equações integrais.

I. INTRODUÇÃO

A utilização de equações integrais na caracterização da propagação radioelétrica vem despertando o interesse de pesquisadores desde o trabalho clássico de Hufford [1]–[4]. Dada a complexidade inerente das formulações propostas, diversas aproximações foram estabelecidas para a solução de enlaces eletricamente longos, sendo as mais usuais o tratamento puramente bidimensional do problema [5] e a aproximação de solo condutor elétrico perfeito [6],[7]. Recentemente, Hviid *et. al* propuseram uma técnica baseada na equação integral do campo elétrico (EFIE) para uma propagação verticalmente polarizada sobre terrenos suaves [8]. Assumindo incidência localmente rasante, e dada a polarização vertical, foi proposta a aproximação do solo como um condutor magnético perfeito e, consequentemente, a resolução do problema através de correntes magnéticas equivalentes. O solo também foi assumindo perpendicularmente invariante e o espalhamento esférico foi tratado através do método da fase estacionária, culminando em uma equação integral de linha sem a necessidade do tratamento puramente bidimensional. O retro-espalhamento da energia foi desprezado (dada a condição de terreno eletricamente

suave), permitindo a avaliação recursiva das correntes equivalentes através do método dos momentos (MoM) sem a necessidade de uma matriz cheia. Técnicas de aceleração numérica foram propostas posteriormente [9]–[11]. Recentemente, foi desenvolvida uma solução para o problema discutido em [8] baseada na equação integral do campo magnético (MFIE). Tal solução mostrou-se numericamente mais estável, com convergência rápida [12],[13].

O presente trabalho visa estender a EFIE em [8] e a MFIE proposta em [12],[13] no tratamento da condutividade do terreno, mantendo-se as demais características e aproximações discutidas em [8]. Resultados numéricos são apresentados para a cunha de Luebbers [14]. Nela, as soluções são comparadas com a teoria uniforme da difração (UTD), com o tratamento heurístico da condutividade proposto em [15]. Os resultados demonstram que, nas atuais circunstâncias, a aproximação de solo condutor magnético perfeito é preferível à de elétrico perfeito. Além disso, observa-se que a MFIE propicia resultados mais estáveis quando comparada à EFIE, mesmo no caso de solo condutor elétrico perfeito.

Ressalta-se que a formulação a ser apresentada pode ser diretamente modificada, através do conceito de dualidade, para o tratamento da polarização horizontal. Esta polarização, no entanto, não é aqui discutida, já que não traz nenhuma novidade no ponto de vista numérico. Finalmente, é assumida uma variação temporal da forma $\exp(j\omega t)$.

II. EQUAÇÕES INTEGRAIS

A EFIE e a MFIE podem ser convenientemente representadas como [16]:

$$\vec{E}(\vec{r}) = T \left[\vec{E}_{in}(\vec{r}) + \eta \vec{L}_1(\vec{J}) + \vec{L}_2(\vec{M}) \right], \quad (1)$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = T \left[\vec{H}_{in}(\vec{r}) + \frac{1}{\eta} \vec{L}_1(\vec{M}) - \vec{L}_2(\vec{J}) \right], \quad (2)$$

respectivamente, onde $\vec{E}_{in}$ e $\vec{H}_{in}$ representam o campo incidente radiado pelas fontes, η é a impedância intrínseca do meio (vácuo), $T = 1$ ou 2 para um observador fora ou sobre a su-

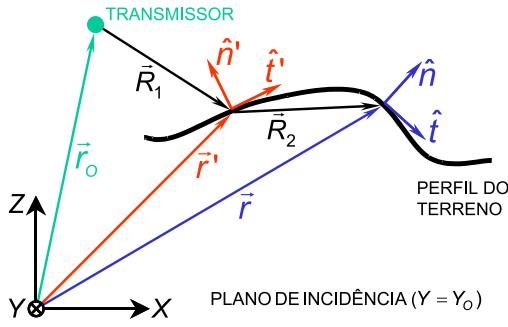


Fig. 1. Geometria básica do problema.

perfície S do terreno, respectivamente,

$$\vec{L}_1(\vec{r}) = -jk \oint_S \left[\vec{J}(\vec{r}') G - \frac{1}{k^2} \nabla' \cdot \vec{J}(\vec{r}') \nabla' G \right] ds', \quad (3)$$

$$\vec{L}_2(\vec{r}) = - \oint_S \vec{J}(\vec{r}') \times \nabla' G ds' \quad (4)$$

e

$$G = G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{\exp(-jk|\vec{r} - \vec{r}'|)}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (5)$$

é a função de Green do espaço livre. Como de costume, o observador é localizado por $\vec{r}$ e as correntes equivalentes por $\vec{r}'$ (Fig. 1). As correntes são então avaliadas através da imposição das condições de contorno sobre S . Aqui serão adotadas condições de contorno de Leontovich, para a consideração aproximada das perdas no solo [17]:

$$\hat{n} \times \vec{E} = Z_g \hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{H}) \Rightarrow \vec{J} = \frac{\hat{n} \times \vec{M}}{Z_g}, \quad (6)$$

onde $\hat{n}$ é a normal unitária à S ,

$$Z_g = \frac{\sqrt{\mu_g(\varepsilon_g - j\sigma_g/\omega) - \mu\varepsilon}}{\varepsilon_g - j\sigma_g/\omega} \quad (7)$$

e μ_g , ε_g e σ_g são as permeabilidade, permissividade e condutividade do solo, enquanto que μ e ε referem-se à atmosfera homogênea (vácuo). Observe que a aproximação do solo por um condutor elétrico perfeito é obtida quando $Z_g \rightarrow 0$, enquanto que para o condutor magnético perfeito, $|Z_g| \rightarrow \infty$.

Dadas as considerações sobre a geometria do terreno adotadas em [8] e assumindo que a antena transmissora-fonte do campo incidente encontra-se suficientemente afastada do terreno, as correntes $\vec{J}$ e $\vec{M}$, aqui generalizadas por $\vec{J}$, são assumidas com distribuição de fase esférica [8]:

$$\vec{J}(\vec{r}') = \vec{J}_A(\vec{r}') e^{-jk|\vec{r}' - \vec{r}_o|} \quad (8)$$

e, consequentemente,

$$\nabla' \cdot \vec{J}(\vec{r}') = \left[-jk\vec{J}_A \cdot \frac{(\vec{r}' - \vec{r}_o)}{|\vec{r}' - \vec{r}_o|} + \nabla' \cdot \vec{J}_A \right] e^{-jk|\vec{r}' - \vec{r}_o|}, \quad (9)$$

onde $\vec{r}_o$ localiza a fonte transmissora (Fig. 1).

Para a representação das correntes e avaliação das integrais em (3) e (4) é adotado um sistema de coordenadas ortogonal local ($\hat{t}$, $\hat{y}$, $\hat{n}$), onde t representa a distância ao longo do perfil do terreno e $\hat{n} = \hat{t} \times \hat{y}$ (Fig. 1). Seguindo a metodologia em [8], o terreno é assumido invariante na direção $\hat{y}$ e a integral correspondente avaliada pelo método da fase estacionária (SPM), cujo resultado pode ser descrito de maneira geral como:

$$-jk \oint_S \vec{F}_A(\vec{r}') e^{-jk|\vec{r}' - \vec{r}_o|} G ds' \approx \int \vec{F}_A(t', y' = y_o) \mathcal{G}_1 dt', \quad (10)$$

onde $y = y_o$ é o plano de incidência (Fig. 1),

$$\mathcal{G}_1 = \frac{\exp[-jk(R_1 + R_2) - j\pi/4]}{4\pi\sqrt{(1 + R_2/R_1)R_2/\lambda}}, \quad (11)$$

$$R_1 = |\vec{r}' - \vec{r}_o|_{y'=y_o} = \sqrt{(x' - x_o)^2 + (z' - z_o)^2}, \quad (12)$$

$$R_2 = |\vec{r} - \vec{r}'|_{y=y'=y_o} = \sqrt{(x - x')^2 + (z - z')^2}. \quad (13)$$

A aplicação de (8)–(10) em (3) e (4) fornece:

$$\vec{L}_1(\vec{r}) \approx - \int [\vec{J}_A \mathcal{G}_1 - (\vec{J}_A \cdot \hat{R}_1) \hat{R}_2 \mathcal{G}_2] dt', \quad (14)$$

$$\vec{L}_2(\vec{r}) \approx - \int \vec{J}_A \times \hat{R}_2 \mathcal{G}_2 dt', \quad (15)$$

onde os vetores unitários $\hat{R}_1$ e $\hat{R}_2$ são definidos conforme a Fig. 1 e

$$\mathcal{G}_2 = \left(1 - \frac{j}{kR_2}\right) \mathcal{G}_1. \quad (16)$$

Note que o termo $\nabla' \cdot \vec{J}_A$ foi descartado em (14), dado que a aplicação do SPM pressupõe variações desprezíveis da amplitude com y' e também antecipando que pulsos serão utilizados para a representação de $\vec{J}_A$, de maneira que suas derivadas em relação a t' são nulas.

Finalmente, observando a condição de contorno (6) e que $\vec{M} \parallel \hat{y}$ em $y = y_o$ para a polarização vertical, a substituição de (14) e (15) em (1) e (2), com $T = 2$, resulta em:

$$\begin{aligned} -\frac{M_A}{2} e^{-jkR_1} &= \hat{t} \cdot \vec{E}_{in} + \frac{\eta}{Z_g} \int M_A [(\hat{n} \cdot \hat{n}') \mathcal{G}_1 \\ &\quad - (\hat{t} \cdot \hat{R}_2)(\hat{t}' \cdot \hat{R}_1) \mathcal{G}_2] dt' \\ &\quad - \int M_A (\hat{n} \cdot \hat{R}_2) \mathcal{G}_2 dt', \quad \text{EFIE}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{Z_g} \frac{M_A}{2} e^{-jkR_1} &= \eta(\hat{y} \cdot \vec{H}_{in}) - \int M_A \mathcal{G}_1 dt' \\ &\quad + \frac{\eta}{Z_g} \int M_A (\hat{n}' \cdot \hat{R}_2) \mathcal{G}_2 dt', \quad \text{MFIE}, \end{aligned} \quad (18)$$

onde M_A representa a amplitude da corrente magnética orientada em $\hat{y}$ (a ser determinada), os vetores $\hat{n}'$ e $\hat{t}'$ referem-se à posição $\vec{r}'$ da fonte, enquanto que $\hat{n}$ e $\hat{t}$ referem-se ao observador em $\vec{r}$.

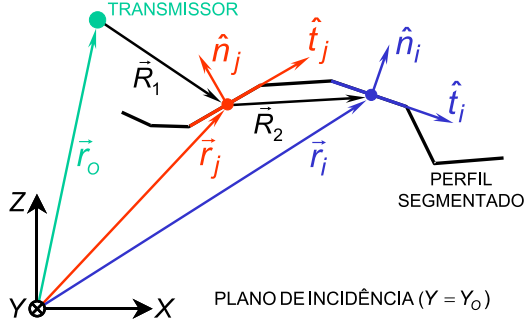


Fig. 2. Segmentação do perfil do terreno.

III. SOLUÇÃO ATRAVÉS DO MÉTODO DOS MOMENTOS

Para a solução das integrais (17) e (18) é adotado o MoM tradicional. Seguindo a referência [8], o perfil do terreno é segmentado (Fig. 2) e as correntes M_A são discretizadas por pulsos, cujas amplitudes complexas (I_j) são determinadas através do *point-matching* no centro de cada segmento. As integrais em t' resultantes são avaliadas pelo método do retângulo com o valor do integrando tomado no centro do segmento. As integrais associadas ao termo-próprio são avaliadas com o devido cuidado, tomando-se o limite do integrando para $R_2 \rightarrow 0$. Desta maneira, para a EFIE (17) tem-se que

$$V_i \approx \hat{t}_i \cdot \vec{E}_{in}, \quad (19)$$

$$Z_{ij} \approx (\hat{n}_i \cdot \hat{R}_2) \mathcal{G}_2 k \Delta_j - \frac{\eta}{Z_g} \left[(\hat{n}_i \cdot \hat{n}_j) \mathcal{G}_1 - (\hat{t}_i \cdot \hat{R}_2) (\hat{t}_j \cdot \hat{R}_1) \mathcal{G}_2 \right] k \Delta_j, \quad (20)$$

$$Z_{ii} \approx \left[-\frac{1}{2} - \frac{\eta}{Z_g} \text{Fresnel} \left(\sqrt{\frac{k \Delta_i}{\pi}} \right) e^{j\pi/4} \right] e^{-jkR_1}, \quad (21)$$

onde os subíndices i e j referem-se aos segmentos do observador e da fonte, respectivamente (Fig. 2), Δ é o comprimento do segmento e $\text{Fresnel}(x) = C(x) - jS(x)$ é a integral de Fresnel como definida em [18]. Para a MFIE (18):

$$V_i \approx \eta \hat{y} \cdot \vec{H}_{in}, \quad (22)$$

$$Z_{ij} \approx \mathcal{G}_1 k \Delta_j - \frac{\eta}{Z_g} (\hat{n}_j \cdot \hat{R}_2) \mathcal{G}_2 k \Delta_j, \quad (23)$$

$$Z_{ii} \approx \left[\text{Fresnel} \left(\sqrt{\frac{k \Delta_i}{\pi}} \right) e^{j\pi/4} + \frac{\eta}{Z_g} \frac{1}{2} \right] e^{-jkR_1}. \quad (24)$$

Note das equações acima que o termo $\exp(-jkR_1)$ pode ser incorporado dentro da corrente a ser determinada.

As amplitudes I_j das correntes M_A podem ser obtidas da maneira usual:

$$[V_i] = [Z_{ij}] [I_j]. \quad (25)$$

No caso de terrenos suaves, o desprezo dos mecanismos de retro-espalhamento permitem a solução das correntes de maneira recursiva [8]. Neste caso, os termos Z_{ij} com $j > i$ são considerados nulos e as correntes determinadas por

$$I_i = \frac{1}{Z_{ii}} \left(V_i - \sum_{j=1}^{i-1} Z_{ij} I_j \right), \quad (26)$$

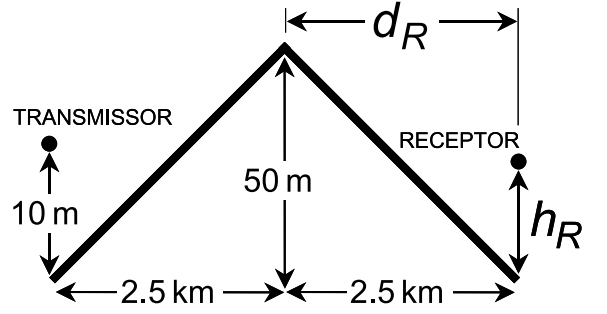


Fig. 3. Geometria da cunha.

com o índice i variado sequencialmente do primeiro ao último segmento. Tal método será aqui denominado esquema *forward* (MoM-FW) [8].

Após a solução das correntes, o campo espalhado pode ser obtido de (1) e (2), agora com $T = 1$ e com o auxílio das aproximações discutidas anteriormente.

IV. ESPALHAMENTO PELA CUNHA DE LUEBBERS

A cunha proposta por Luebbers [14] será utilizada para a validação da formulação apresentada nas seções anteriores (Fig. 3). Em todos os exemplos a serem analisados, o transmissor é um dipolo de Hertz verticalmente posicionado no início do perfil da cunha, a uma altura de 10 m da superfície. Serão consideradas três condições de contorno distintas para a superfície: condutor elétrico perfeito, condutor magnético perfeito e condutor imperfeito com $\epsilon_g = 15\epsilon_0$ e $\sigma_g = 0,012$ S/m.

O primeiro caso a ser estudado é a atenuação para um observador posicionado na base oposta da cunha ($d_R = 2,5$ km) com altura h_R variável em relação à superfície, em 100 MHz. Neste caso, e para cada condição de contorno, a análise foi feita de três maneiras distintas: pelo MoM com matriz cheia (25), pelo MoM-FW (26) e pela UTD heurística representada pela Eq. (17) em [15]. Note que tal formulação deixa de ser heurística nos casos dos condutores perfeitos. Além disso, deve-se ressaltar que as análises baseadas na UTD levaram em consideração tanto a difração no topo da cunha como a difração na borda final do perfil (tratada como um semi-plano, de acordo com a Fig. 3), não considerando as parcelas da *slope diffraction* dado que as distâncias elétricas envolvidas são suficientemente grandes e, consequentemente, o campo incidente nas bordas quase invariante. Já as análises baseadas no MoM assumiram a cunha descrita como uma superfície aberta (Fig. 3), em conformidade com a análise via UTD. Só serão apresentados resultados do MoM referentes à MFIE, já que a EFIE só convergiu no caso do condutor magnético perfeito (as causas encontram-se sob investigação).

Na Fig. 4 são apresentadas as atenuações em função de h_R para as três condições de contorno distintas. Em cada caso, os resultados da MFIE/MoM com matriz cheia (4 segmentos/ λ) são comparados, inicialmente, aos da UTD. Nota-se que para o condutor magnético perfeito a concordância entre ambas as técnicas é quase perfeita, dada a fraca difração na borda da base da cunha e graças à MFIE ser uma equação integral de

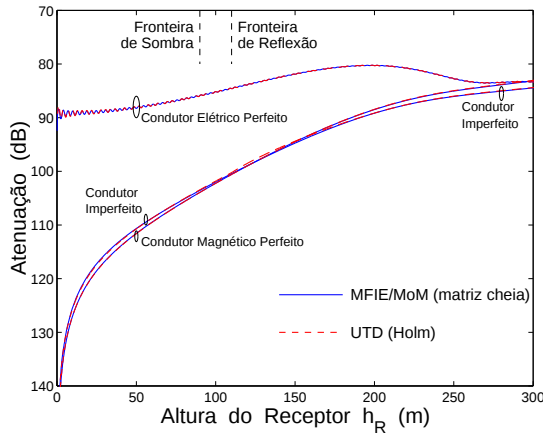


Fig. 4. Atenuação pela cunha em função de h_R , em 100 MHz e para as três condições de contorno. Cada caso é analisado pela MFIE/MoM com matriz cheia (4 segmentos/ λ) e pela UTD heurística de Holm [15].

primeiro tipo nesta situação, não apresentando problemas de convergência pelo fato da cunha ter sido modelada como uma superfície aberta. Para o condutor elétrico perfeito os resultados apresentam fortes oscilações próximo à borda ($h_R \rightarrow 0$) devido aos efeitos de difração nesta borda. Isto é comprovado pelos próprios resultados da UTD, já que se a segunda difração na borda do perfil tivesse sido descartada, a UTD não estimaria tais oscilações. No caso do condutor imperfeito, existe uma discordância entre a UTD e a MFIE/MoM de até 10 dB para $h_R \rightarrow 0$. Além disso, os resultados se aproximam daqueles obtidos para um condutor magnético perfeito, mais indicado nesta situação do que o elétrico perfeito, em concordância com o procedimento em [8]. Na Fig. 5 são apresentados os erros absolutos entre a MFIE/MoM e a UTD, relativos à Fig. 4 para $h_R < 10$ m. Dadas as pequenas discrepâncias obtidas, conclui-se que a formulação MFIE desenvolvida neste trabalho é adequada ao problema proposto. Resultados preliminares (não apresentados aqui) indicam que a EFIE é adequada apenas para o condutor magnético perfeito, caso este estudado em [8]. Porém, ainda não se pode concluir nada decisivo a respeito de sua utilização para as outras condições de contorno e o assunto ainda se encontra sob investigação.

Neste trabalho, o interesse prático é na análise baseada no MoM-FW da (26), dado o elevado esforço computacional inerente à análise através de uma matriz cheia, e também na quantidade de funções de base necessárias à estimativa satisfatória do espalhamento eletromagnético. Logo, na Fig. 6 são apresentados os erros absolutos entre a MFIE/MoM com matriz cheia (4 segmentos/ λ , cujos resultados são aqueles apresentados na Fig. 4) e a MFIE/MoM-FW para diferentes valores de segmentos/ λ . Observa-se que no caso do condutor elétrico perfeito a MFIE/MoM-FW converge sem maiores problemas, mesmo quando a amostragem das correntes é relativamente pequena (1 segmento/ λ). Já para as demais condições de contorno, erros de até 10 dB são observados para 4 segmentos/ λ . Tal observação talvez possa ser explicada através da inspeção de (23). Para o condutor elétrico perfeito, $Z_g \rightarrow 0$ e a segunda parcela do lado direito de (23) passa a ser dominante. Nes-

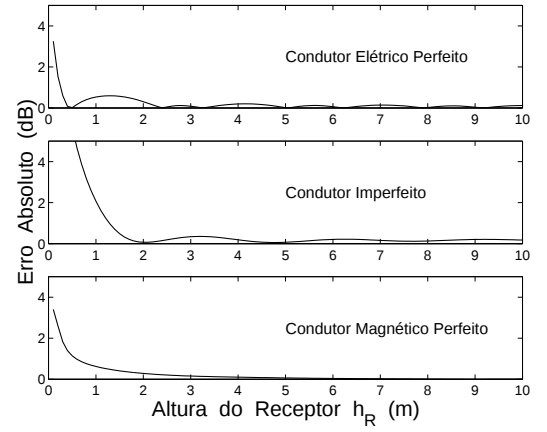


Fig. 5. Erro absoluto entre a MFIE/MoM com matriz cheia (4 segmentos/ λ) e a UTD heurística de Holm [15] no cálculo da atenuação pela cunha em função de h_R , em 100 MHz e para as três condições de contorno.

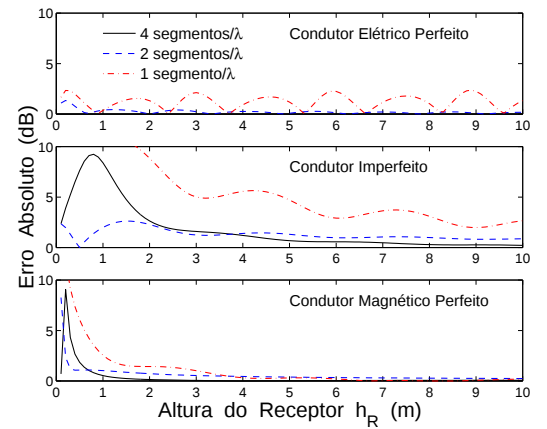


Fig. 6. Erro absoluto entre a MFIE/MoM com matriz cheia (4 segmentos/ λ) e a MFIE/MoM-FW (4, 2 e 1 segmento/ λ) no cálculo da atenuação pela cunha em função de h_R , em 100 MHz e para as três condições de contorno.

tas condições e para terrenos eletricamente suaves, o termo $(\hat{n}_j \cdot \hat{R}_2) \approx 0$ entre segmentos do terreno próximos entre si e, conseqüentemente, o somatório em (26) torna-se numericamente estável. Isto também explicaria a convergência da EFIE no caso de um condutor magnético perfeito, como observado em [8]. Neste caso $|Z_g| \rightarrow \infty$ e de (20) observa-se que $Z_{ij} \propto (\hat{n}_i \cdot \hat{R}_2) \approx 0$ para os segmentos próximos.

Os resultados não convergentes apresentados na Fig. 6 podem estar associados, por exemplo, ao truncamento do perfil, que afetaria diretamente a estimativa do campo para $h_R \rightarrow 0$, ou à proximidade excessiva do observador em relação às correntes, o que tornaria imprecisa a avaliação numérica das integrais de radiação (também avaliadas pelo método do retângulo descrito na Seção III). Para livrar a presente investigação de possíveis efeitos associados ao truncamento do perfil, foi analisado um segundo caso, aonde o observador teve sua altura em relação à superfície fixada em $h_R = 1$ m, enquanto deslocado ao longo do perfil ($0 \leq d_R \leq 2,5$ km). Os resultados obtidos pela MFIE/MoM com matriz cheia (4 segmentos/ λ) são apresentados na Fig. 7 e indicam mais uma vez que a aproxi-

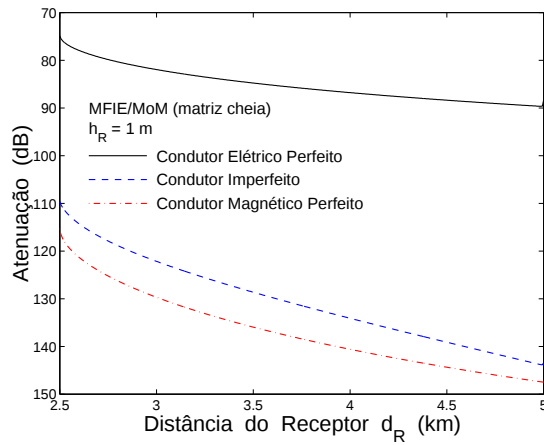


Fig. 7. Atenuação pela cunha em função de d_R , em 100 MHz, $h_R = 1$ m e para as três condições de contorno. Análise pela MFIE/MoM com matriz cheia (4 segmentos/ λ).

mação do solo como condutor magnético perfeito é mais apropriada do que a de elétrico perfeito nas atuais circunstâncias. Os resultados das análises baseadas na MFIE/MoM-FW foram então comparados aos da matriz cheia e são apresentados na Fig. 8, observando-se que todas as correntes foram utilizadas no cálculo do campo espalhado (mesmo aquelas posteriores ao observador) para manter a conformidade com a análise através da matriz cheia. Os resultados indicam que para um condutor elétrico perfeito a convergência da MFIE/MoM-FW ocorre sem maiores problemas, como esperado. Para o magnético perfeito, até 3 segmentos/ λ podem ser utilizados no esquema *forward* sem que os erros ultrapassem 1 dB. Já no caso do condutor imperfeito abordado neste trabalho, só houve uma convergência satisfatória para 10 segmentos/ λ com discrepâncias máximas de 2 dB. Estes resultados parecem indicar que o problema de convergência está associado à primeira parcela do lado direito de (23), ou seja, ao termo $\tilde{L}_1$ em (3) e aproximado em (14). A solução talvez seja uma melhor representação das correntes equivalentes (ao invés dos pulsos utilizados), com um melhor tratamento do termo divergente em (3).

V. CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou a extensão da EFIE em [8] e da MFIE em [12],[13] para a inclusão aproximada das perdas no solo homogêneo, na predição da propagação sobre um terreno eletricamente suave, assumindo incidência localmente rasante e ausência de obstruções laterais sobre o elipsóide de Fresnel. Foi considerada apenas a polarização vertical, mas o princípio da dualidade pode ser utilizado na obtenção da formulação para a polarização horizontal. A teoria foi aplicada para a geometria da cunha proposta em [14] com três condições de contorno diferentes: condutores elétrico e magnético perfeitos e condutor imperfeito. Os resultados foram comparados à UTD heurística proposta em [15] e indicam não só a praticidade do solo condutor magnético perfeito sugerido em [8] para incidências rasantes, como também a suposta eficiência numérica da MFIE sobre a EFIE nos problemas estudados.

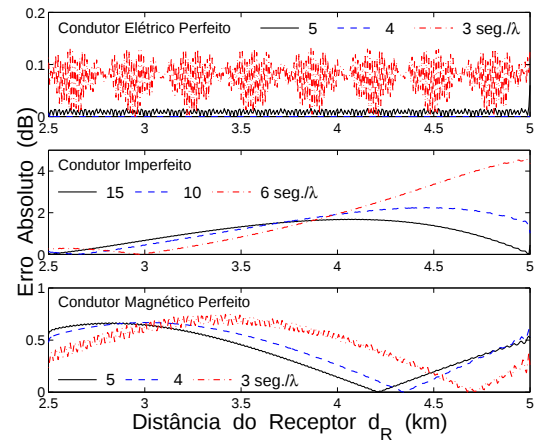


Fig. 8. Erro absoluto entre a MFIE/MoM com matriz cheia (4 segmentos/ λ) e a MFIE/MoM-FW (número de segmentos como indicado em cada gráfico) no cálculo da atenuação pela cunha em função de d_R , em 100 MHz, $h_R = 1$ m e para as três condições de contorno.

REFERÊNCIAS

- [1] G. A. Hufford, "An integral equation approach to the problem of wave propagation over an irregular surface," *Quarterly Appl. Math.*, vol. 9, pp. 391–404, Jan. 1952.
- [2] R. H. Ott, "An alternative integral equation for propagation over irregular terrain, 2," *Radio Science*, vol. 6, pp. 429–435, Apr. 1971.
- [3] J. R. Wait, "Recent analytical investigations of electromagnetic ground wave propagation over Inhomogeneous earth models," *Proc. IEEE*, vol. 62, pp. 1061–1072, Aug. 1974.
- [4] Z. Wu, T. S. M. Maclean, D. J. Bagwell, and M. J. Mehler, "Propagation over an inhomogeneous irregular surface," *Radio Science*, vol. 23, pp. 33–40, Jan.–Feb. 1988.
- [5] R. Janaswamy, "A Fredholm integral equation method for propagation predictions over small terrain irregularities," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 40, pp. 1416–1422, Nov. 1992.
- [6] D. A. Kapp and G. S. Brown, "A new numerical method for rough-surface scattering calculations," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 44, pp. 711–721, May 1996.
- [7] D. Holliday, L. L. DeRaad, Jr., and G. J. St-Cyr, "Forward-backward: a new method for computing low-grazing angle scattering," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 44, pp. 722–729, May 1996.
- [8] J. T. Hviid, J. B. Andersen, J. Toftgård, and J. Bøjer, "Terrain-based propagation model for rural area—An integral equation approach," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 43, pp. 41–46, Jan. 1995.
- [9] C. Brennan and P. J. Cullen, "Application of the fast far-field approximation to the computation of UHF pathloss over irregular terrain," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 46, pp. 881–890, June 1998.
- [10] C. Brennan and P. J. Cullen, "Multilevel tabulated interaction method applied to UHF propagation over irregular terrain," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 47, pp. 1574–1578, Oct. 1999.
- [11] F. K. Akorli and E. Costa, "An efficient solution of an integral equation applicable to simulation of propagation along irregular terrain," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 49, pp. 1033–1036, July 2001.
- [12] F. J. S. Moreira, "A MFIE-based prediction for UHF vertically-polarized wave propagation over irregular terrains," in *IEEE AP-S Symp. Dig.*, vol. 1, July 2001, pp. 456–459.
- [13] F. J. S. Moreira, "MFIE-based propagation prediction," in *SBMO / IEEE MTT-S Conf. Proc.*, Aug. 2001, pp. 199–202.
- [14] R. J. Luebbers, "Finite conductivity uniform GTD versus knife edge diffraction in prediction of propagation path loss," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. AP-32, pp. 70–76, Jan. 1984.
- [15] P. D. Holm, "A new heuristic UTD diffraction coefficient for non-perfectly conducting wedges," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 48, pp. 1211–1219, Aug. 2000.
- [16] A. J. Poggio and E. K. Miller, *Computer Techniques for Electromagnetics*. Oxford, U.K.: Pergamon, 1973, ch. 4.
- [17] T. B. A. Senior and J. L. Volakis, *Approximate Boundary Conditions in Electromagnetics*. London, U.K.: IEE, 1995, ch. 2.
- [18] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*. New York, USA: Dover, sect. 7.3.