

# Síntese Óptica de Antenas Refletoras *Offset* Utilizando Superfícies Cônicas com Eixos Deslocados

Rafael A. Penchel<sup>1</sup>, José R. Bergmann<sup>2</sup>

CETUC - PUC-Rio

Rio de Janeiro, RJ 22453-130

rapenchel@cetuc.puc-rio.com<sup>1</sup>, bergmann@cetuc.puc-rio.br<sup>2</sup>

Fernando J. S. Moreira

Depto. Engenharia Eletrônica - UFMG

Belo Horizonte, MG 31270-901

fernandomoreira@ufmg.br

**Resumo** — Este trabalho apresenta um procedimento numérico alternativo para a síntese óptica rigorosa de antenas refletoras *offset* com diagrama de radiação arbitrário na região de campo distante. O método utiliza funções de superfícies cônicas com eixos deslocados para a descrição e determinação dos pontos de uma superfície refletora. Nesta abordagem, uma equação diferencial parcial deve ser resolvida como um problema de contorno. Para ilustrar o método, foi escolhida uma configuração *offset* com contorno de cobertura circular e densidade de potência constante. Os resultados foram validados através da Óptica Física (PO – *Physical Optics*).

**Palavras-chaves** — Antenas refletoras, antenas *offset*, seções cônicas, óptica geométrica.

## I. INTRODUÇÃO

A formulação exata para a síntese óptica de antenas refletoras *offset* com um ou dois refletores foi amplamente estudada por Westcott em [1]–[4]. Nestes trabalhos, a solução do problema envolve a avaliação numérica de uma equação diferencial parcial de segunda ordem altamente não linear do tipo Monge–Ampère, sujeita a uma condição de contorno também não linear. O método numérico utilizado em [1]–[4] envolve a linearização de um operador não linear e uma generalização do método de Newton. As equações linearizadas são então resolvidas de forma iterativa, utilizando o método das diferenças finitas como aproximação para derivadas presentes na formulação. Se a convergência é obtida, a solução é dada como um número finito de pontos definindo a superfície refletora.

Apesar de a síntese rigorosa de antenas refletoras *offset* baseada na equação de Monge–Ampère ter sido amplamente estudada durante quase duas décadas, ainda persiste o problema de aumento exponencial do erro de discretização na região central das grades polares onde há uma singularidade. Em [4] é apresentado um método alternativo que resolve o problema com uma grade retangular, mas gera outro nas bordas, onde a dificuldade na descrição do contorno é maior.

A síntese para antenas duplo-refletoras circularmente simétricas baseada na combinação das seções cônicas locais foi investigada [5]. Em [6] a técnica foi generalizada para diversas configurações axialmente simétricas e, recentemente, estendidas para antenas duplo-refletoras com cobertura omnidirecional e diagrama de radiação arbitrário no plano de elevação do campo distante [7]. Em [6] e [7] mostrou-se que a

técnica de síntese que utiliza seções cônicas é numericamente mais eficiente e têm melhor convergência do a técnica baseada na solução de uma equação diferencial. Neste trabalho, a técnica explorada em [5]–[7] é estendida para síntese geométrica rigorosa de antenas refletoras *offset*. Diferente das configurações axialmente simétricas onde seções de cônicas compõe uma geratriz, a configuração *offset* requer um conjunto de painéis de superfícies cônicas com eixos deslocados para representar a superfície refletora. No método descrito em [1]–[4] as derivadas da função de mapeamento são representadas por um esquema de diferenças finitas com uma singularidade no centro da grade polar. Nessa abordagem, a expressão analítica para a função de mapeamento é conhecida, sendo necessário determinar quatro parâmetros que a definem cada cônica. São eles: distância focal, excentricidade, ângulo de rotação e ângulo de elevação. Como a técnica numérica utilizada é fundamenta em um algoritmo iterativo que utiliza o erro para corrigir a solução anterior e obter a próxima, com essa nova representação é esperada uma convergência mais rápida, de forma análoga ao ocorrido na síntese de antenas duplo-refletoras circularmente simétricas.

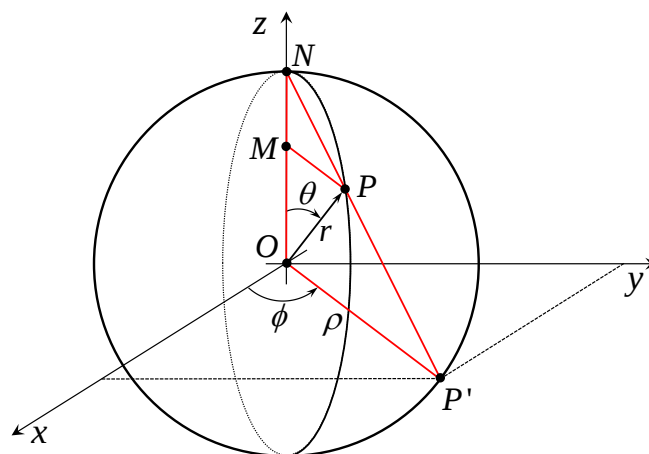


Fig. 1. Projeção estereográfica

## II. NOTAÇÃO EM COORDENADAS COMPLEXAS

Para descrever a formulação da síntese óptica rigorosa de antenas refletoras *offset* é conveniente adotar a notação complexa amplamente utilizada em [1]–[4], e brevemente descrita aqui.

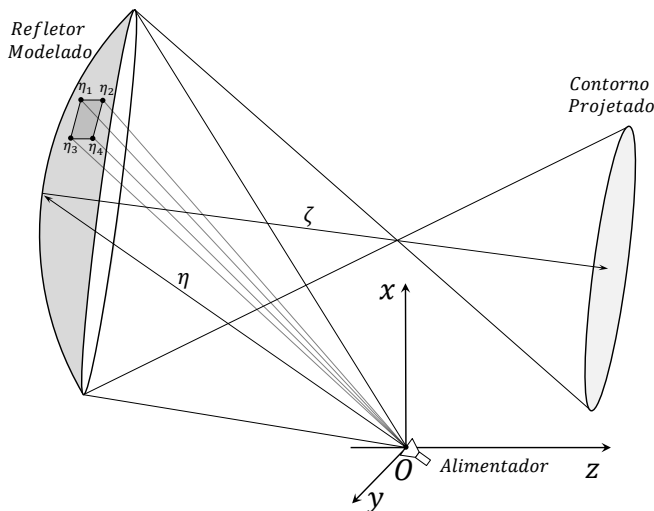


Fig. 2. Geometria da antena refletora offset modelada

Em um sistema de coordenadas esféricas, qualquer direção do espaço pode ser representada pelos ângulos  $\phi$  e  $\theta$  associados a um ponto sobre a superfície de uma esfera de raio unitário ( $r = 1$ ), como ilustrado na Fig. 1. Esta superfície pode ser parametrizada nas coordenadas cartesianas  $x$  e  $y$ , ou polares  $\rho$  e  $\phi$  obtidas a partir da projeção estereográfica da superfície esférica no plano  $xy$ . Através da projeção estereográfica, a partir do ponto  $N$  o ponto  $P$  da superfície esférica projeta o ponto  $P'$  no plano  $z = 0$ , definindo-se a coordenada complexa  $\eta$  do ponto  $P'$  como:

$$\eta = x + iy = \cot(\theta/2) e^{i\phi} \quad (1)$$

### III. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE SÍNTESE

Na Fig. 2 é apresentada a geometria do problema, onde um conjunto de raios partindo de uma fonte pontual na origem do sistema de coordenadas e coincidente com o centro de fase do alimentador, cujo diagrama de radiação é descrito  $I(\eta)$  e refletido por uma superfície refletora modelada na direção  $\zeta$  e diagrama de radiação  $G(\zeta)$  onde

$$\zeta = \cot(\alpha/2) e^{i\beta} \quad (2)$$

O problema de síntese consiste em determinar a função de mapeamento  $\tau: \eta \rightarrow \zeta$  que relaciona a densidade de potência proveniente do alimentador  $I(\eta)$  à densidade de potência do campo distante  $G(\zeta)$ . Duas condições devem ser atendidas na determinação de  $\tau$ : a conservação da energia e a Lei de Snell. Além disso, deve-se definir o contorno no qual o problema será avaliado.

#### A. Lei de Snell

A primeira condição de mapeamento relaciona a direção de incidência  $\eta$  e a direção de reflexão  $\zeta$ , expressa através da seguinte equação diferencial parcial [1]:

$$L_\eta = \frac{1}{\bar{\zeta} - \eta} \quad (3)$$

onde  $\partial L / \partial \eta = L_\eta$  é a derivada parcial da função real  $L(\eta, \bar{\eta})$  relacionada à distância  $r(\eta, \bar{\eta})$  através da seguinte equação:

$$r = e^{L(\eta, \bar{\eta})} (|\eta|^2 + 1) \quad (4)$$

onde  $\bar{\eta}$  denota o complexo conjugado da coordenada  $\eta$ . Para que a função  $L(\eta, \bar{\eta})$  seja real impõe-se a seguinte condição de integrabilidade [1]:

$$\frac{\zeta_{\bar{\eta}}}{(\bar{\zeta} - \eta)^2}, \text{ deve ser real.} \quad (5)$$

onde  $\partial \zeta / \partial \bar{\eta} = \zeta_{\bar{\eta}}$ . Note que  $L_\eta$  em (3) é complexo e, portanto, representa um conjunto de duas equações diferenciais, uma relacionada à parte real e outra à imaginária.

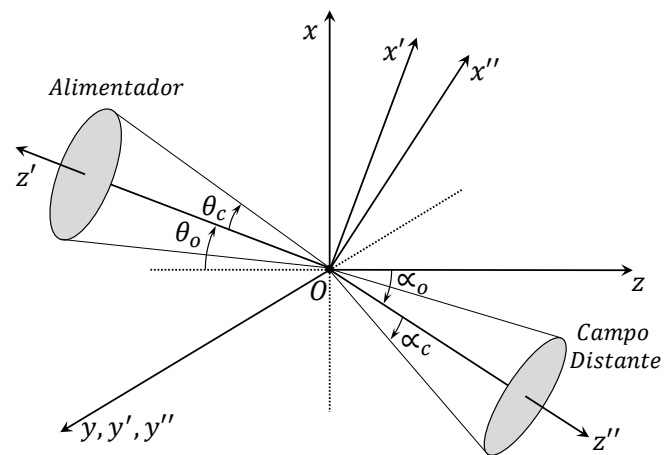


Fig. 3. Conservação da energia

#### B. Conservação da Energia

A relação entre as densidades de potência implica que o mapeamento  $\tau: \eta \rightarrow \zeta$  tenha que alterar ângulo sólido na razão  $I/G$ , onde  $I$  é a densidade de potência proveniente da fonte e  $G$  a densidade de potência no campo distante, conforme ilustrado na Fig. 3. A equação diferencial que descreve a conservação da energia no presente problema de síntese é dada por [1]:

$$|\zeta_\eta|^2 - |\zeta_{\bar{\eta}}|^2 = \pm N \frac{I(\eta)}{G(\zeta)} \left( \frac{1 + |\zeta|^2}{1 + |\eta|^2} \right)^2 \quad (7)$$

onde

$$N = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_c} I(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\alpha_c} G(\alpha, \beta) \sin \alpha d\alpha d\beta} \quad (6)$$

Substituindo (3) em (7), obtém-se uma equação diferencial parcial de segunda ordem do tipo Monge–Ampere [1]:

$$\begin{aligned} |L_{\eta\eta} - L_\eta^2|^2 - |L_{\eta\bar{\eta}}|^2 \\ = \pm N \frac{I(\eta)}{G(\zeta)} \left( \frac{1 + |\zeta|^2}{1 + |\eta|^2} \right)^2 |L_\eta|^4 \end{aligned} \quad (8)$$

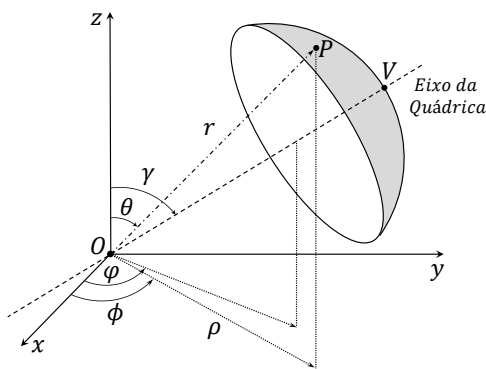


Fig. 4. Superfície cônica com eixos deslocados

### C. Superfícies de Cônicas

No método de síntese descrito em [1], as derivadas parciais em (7) são representadas através de diferenças finitas uma vez que não se conhece a função de mapeamento  $L(\eta, \bar{\eta})$ . Neste esquema há um erro de truncamento das derivadas parciais que são proporcionais à  $1/\rho$  e  $1/\rho^2$  e, por consequência, erro infinito no ponto central da grade. Diferente disto, propõe-se neste trabalho utilizar a função de representação de uma superfície cônica para descrever cada ponto da superfície refletora. Esta função é obtida a partir da rotação de uma seção cônica sobre seu próprio eixo de simetria e descritas, em coordenadas esféricas, por:

$$r = \frac{a}{b \sin \theta \cos \phi + c \sin \theta \sin \phi + d \cos \theta - 1} \quad (9)$$

e coordenadas complexas por

$$ae^{-L(\eta, \bar{\eta})} = (\bar{\eta} + \eta)b + i(\bar{\eta} - \eta)c + (|\eta|^2 - 1)d - |\eta|^2 - 1 \quad (10)$$

onde

$$a = -ev \quad (11-a)$$

$$b = e \sin \gamma \cos \varphi \quad (11-b)$$

$$c = e \sin \gamma \sin \varphi \quad (11-c)$$

$$d = e \cos \gamma \quad (11-d)$$

onde  $a$  é o semilatus rectum,  $e$  a excentricidade,  $\varphi$  ângulo de rotação e  $\gamma$  ângulo de elevação.

Utilizando a Lei de Snell expressa em (3), mostra-se que a relação entre a direção de incidência e reflexão para esta superfície cônica é dada por:

$$\zeta = \eta - \frac{(d-1)\eta\bar{\eta} + (b-ic)\eta + (b+ic)\bar{\eta} - d-1}{(d-1)\bar{\eta} + (b-ic)} \quad (12)$$

### D. Operador

Através das derivadas parciais de (12) e da conservação da energia expressa em (7) pode-se definir o seguinte operador para função  $L(\eta, \bar{\eta})$ :

$$\Gamma[L] = \pm N \frac{I(\eta)}{G(\zeta)} \left( \frac{1 + |\zeta|^2}{1 + |\eta|^2} \right)^2 + \frac{(b^2 + c^2 + d^2 - 1)^2}{|(d-1)\bar{\eta} + (b-ic)|^4} \quad (13)$$

Nota-se que a função  $L(\eta, \bar{\eta})$  não está explícita em (13), apenas os parâmetros da cônica  $a, b, c$  e  $d$  estão. A relação entre estes parâmetros e a função  $L(\eta, \bar{\eta})$  é dada por um sistema de equações lineares, obtido a partir de quatro pontos que formam uma seção de superfície cônica, como ilustrado na Fig. 3. Substituindo os quatro pontos em (10) obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & \delta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \end{bmatrix} \quad (14)$$

onde

$$\alpha(\eta, \bar{\eta}) = -e^{-L(\eta, \bar{\eta})} \quad (15-a)$$

$$\beta(\eta, \bar{\eta}) = \bar{\eta} + \eta \quad (15-b)$$

$$\gamma(\eta, \bar{\eta}) = i(\bar{\eta} - \eta) \quad (15-c)$$

$$\delta(\eta, \bar{\eta}) = |\eta|^2 - 1 \quad (15-d)$$

$$\varepsilon(\eta, \bar{\eta}) = |\eta|^2 + 1 \quad (15-e)$$

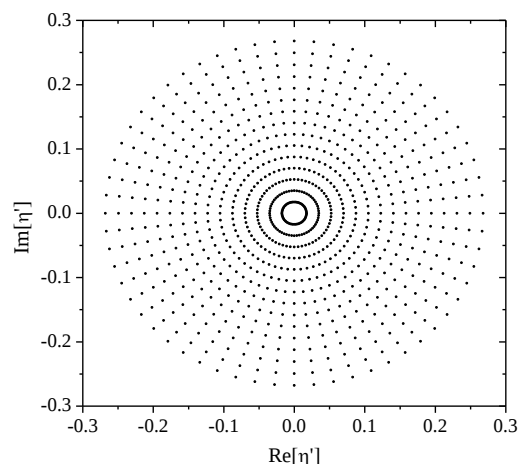


Fig. 5. Grade polar do alimentador no plano complexo  $\eta'$

## IV. SOLUÇÃO NUMÉRICA

A solução da equação diferencial como um problema de contorno pode ser numericamente realizada de diferentes formas. Observando que em geral as aberturas buscadas e alimentadores adotados são circulares, a literatura mostra que a grande maioria dos métodos de síntese utiliza um esquema onde a função de mapeamento é representada por pontos de uma grade polar (Fig. 5) e as derivadas parciais são aproximadas através do método de diferenças finitas. O resultado é um conjunto de equações não lineares, uma equação para cada ponto da grade, resolvido através de uma generalização do Método de Newton.

Neste trabalho o procedimento iterativo de síntese tem início com um conjunto de valores da função  $L^{(0)}$  em cada

ponto da grade dados por uma solução inicial. Esta superfície cônica inicial, definida pelos parâmetros  $a^{(0)}$ ,  $b^{(0)}$ ,  $c^{(0)}$  e  $d^{(0)}$ , é obtida impondo que dois raios na borda do refletor sejam refletidos na borda do contorno no campo distante. A correta escolha desta solução é essencial para a convergência da síntese. O processo tem início com o teste do operador em cada ponto da grade. Utilizando quadro pontos marginais determina-se os parâmetros  $a^{(1)}$ ,  $b^{(1)}$ ,  $c^{(1)}$  e  $d^{(1)}$  e em seguida o valor do operador. Caso o valor seja maior que o critério de convergência, uma nova iteração do método é resolvida e um novo conjunto de  $L^{(1)}$  é obtido através de:

$$[L^{(n+1)}] = [L^{(n)}] - [D^{(n)}]^{-1}[\Gamma^{(n)}] \quad (16)$$

onde  $D^{(n)}$  são as derivadas do operador na enésima iteração. Mais uma vez são obtidos os parâmetros da cônica em cada ponto do grid e testado o operador. Esse processo é repetido até que o critério de convergência seja alcançado.

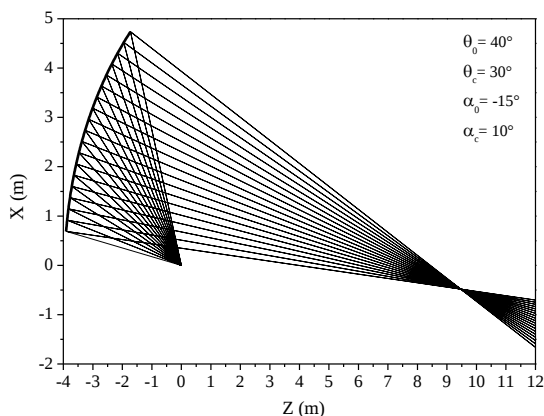


Fig. 6. Diagrama de raios da solução inicial no plano  $\phi = 0$ .

## V. ESTUDO DE CASO

Para avaliar os resultados da solução numérica proposta neste trabalho é apresentado nesta seção um estudo de caso onde uma antena refletora *offset* foi sintetizada para prover, segundo os princípios da GO, um diagrama de radiação constante em uma região cônica com centro em  $\alpha_0 = -15^\circ$  e semi-ângulo  $\alpha_c = 10^\circ$ . O eixo do alimentador faz um ângulo de  $\theta_0 = 40^\circ$  com o eixo z-negativo e a borda do refletor esta contida em cone com semi-ângulo de  $\theta_c = 30^\circ$ , como descrito na Figura 3. O diagrama de alimentador foi modelado por uma função  $\cos^8\theta$  para obter uma atenuação de  $-10$  dB na borda do refletor. A distância  $r_0$  foi ajustada para que a superfície refletora tivesse um diâmetro de 4 metros. Na Fig. 6 é apresentada o diagrama de raios no plano  $\phi = 0$  e a Figura 7 apresenta a grade de raios mapeados na região de campo distante. A Figura 8 mostra o diagrama de radiação objetivo (GO) e o obtido através de método de análise via as aproximações da Ótica Física mais correntes de borda. O análise foi efetuada supondo que a antena esteja operando em 1 GHz e 5 GHz e, consequentemente, apresenta um diâmetros de  $13,33\lambda$  e  $66,66\lambda$ .

## VI. CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou um método de síntese óptica rigorosa de antenas refletoras *offset* baseado na utilização de

superfícies cônicas. A formulação apresentada foi aplicada em um estudo de caso e os resultados foram validados PO.

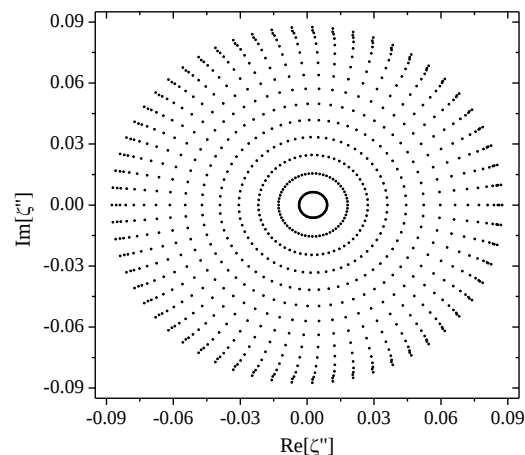


Fig. 7. Grade (15x60) polar do campo distante no plano complexo  $\zeta''$

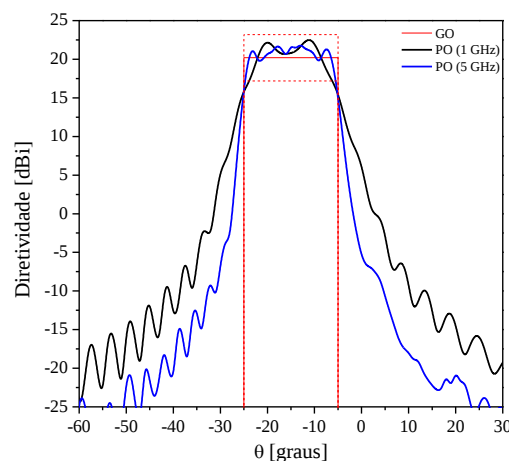


Fig. 8. Diagrama de radiação da antena modelada no plano  $\phi = 0$ . Em linhas tracejadas limites  $\pm 3$ dB.

## REFERENCES

- [1] F. Brickell, L. Marder and B. S. Westcott, "The Geometrical Optics Design of Reflectors Using Complex Coordinates," *J. Phys. A: Math. Gen.*, vol. 10, n. 2, pp. 245–260, February 1977.
- [2] F. Brickell and B. S. Westcott, "Phase and Power Density Distributions on Plane Apertures of Reflector Antennas," *J. Phys. A: Math. Gen.*, vol. 11, n. 4, pp. 777–789, April 1978.
- [3] B. S. Westcott, F. A. Stevens and F. Brickell, "GO Synthesis of Offset Dual Reflector," *IEE Proceedings H, Microwaves, Optics and Antennas*, vol. 128, n. 1, pp. 11–18, February 1981.
- [4] B. S. Westcott, R. K. Graham and I. C. Wolton, "Synthesis of Dual-Offset Shaped Reflectors for Arbitrary Aperture Shapes Using Continuous Domain Deformation," *IEE Proceedings H, Microwaves, Antennas and Propagation*, vol. 133, no. 1, pp. 57–64, February 1986.
- [5] Y. Kim and T.-H. Lee, "Shaped Circularly Symmetric dual reflector Antennas by Combining Local Conventional Dual Reflector Systems," *IEEE Trans. Antennas Propagation*, vol. 57, no 1, pp. 47–56, Jan. 2009.
- [6] F. J. S. Moreira and J. R. Bergmann, "Shaping Axis-Symmetric Dual-Reflector Antennas by Combining Conic Sections," *IEEE Trans. Antennas Propagation*, vol. 59, no. 3, pp. 1042–1046, March 2011.
- [7] R. A. Penchel, José R. Bergmann, and Fernando J. S. Moreira, "Main-Reflector Shaping of Omnidirectional Dual Reflectors Using Local Conic Sections," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 61, no. 8, pp. 4379–4383, Aug. 2013.