

Modelagem de Antenas Refletoras Circularmente Simétrica através da Concatenação de Seções de Elipses

Tcharles V. B. Faria¹ e Fernando J. S. Moreira²

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica- GAPTEM – UFMG
Av. Antônio Carlos 6627, 31270-901, Belo Horizonte, MG, Brasil
tcharlesdefaria@ufmg.br¹ e fernandomoreira@ufmg.br²

Resumo—Este trabalho investiga um procedimento de modelagem de antenas refletoras circularmente simétricas. O procedimento de síntese baseia-se na modelagem da superfície refletora através da concatenação de seções de elipses, considerando-se um padrão de distribuição de potência especificado sobre a abertura da antena (região de campo próximo) segundo os princípios da Óptica Geométrica. Além disso, utilizou-se um processo iterativo para o cálculo dos ângulos do alimentador através da Lei da Conservação da Energia. Para ilustrar a técnica, optou-se por modelar a superfície refletora de uma antena com um único refletor. Os resultados obtidos apontam boa precisão comparando-os com uma configuração clássica.

Palavras-chave—Antenas refletoras; lei da conservação da energia; óptica geométrica; seções de elipses; região de campo próximo.

I. INTRODUÇÃO

Sabe-se que o campo de estudo das antenas refletoras é amplo e dinâmico e, nos últimos 60 anos, graças aos avanços da tecnologia de comunicações a busca por este tipo de antena torna-se maior [1]. Atualmente, devido à grande necessidade de comunicações a longas distâncias, formas geométricas mais sofisticadas de antenas refletoras estão sendo projetadas (sintetizadas) para receber sinais que se propagam por longas distâncias.

Assim, fica evidente a real necessidade de se projetar refletores com a máxima eficiência possível e com um padrão de distribuição de potência eficiente sobre a abertura da antena, culminando em um grande progresso no desenvolvimento de técnicas para a modelagem de superfícies refletoras desta espécie de antena. É nesta perspectiva que diversos pesquisadores [2]-[13] têm focado os seus estudos nas técnicas aplicadas à síntese de refletores de inúmeras configurações geométricas.

Vários trabalhos já foram apresentados tratando-se da síntese geométrica de refletores através da solução de uma equação diferencial ordinária [5], [7]. É possível, ainda, destacar que em [8] o autor apresenta o problema de síntese através de uma equação diferencial parcial de segunda ordem de *Monge-Ampère* para uma determinada função de valor complexo.

Entretanto, é importante enfatizar que as técnicas descritas anteriormente trazem em si uma complexidade matemática e

um esforço computacional devido ao processo de linearização das equações. É neste sentido que, recentemente, novas técnicas de modelagem baseadas na concatenação de seções cônicas foram apresentadas em [6], [9]-[13].

Técnicas que utilizam a concatenação de cônicas têm mostrado resultados promissores diante das outras técnicas supracitadas, conforme descrito em [9] e [13]. Além disso, estas técnicas podem ser empregadas utilizando-se diferentes abordagens matemáticas e diversos tipos de algoritmos.

Em [12] os autores utilizam os conceitos e as formulações descritas em [6] e [11] para o desenvolvimento de um algoritmo a fim de modelar a superfície refletora de uma configuração *offset*. Este algoritmo baseia-se na combinação de seções cônicas através dos conceitos da Óptica Geométrica (*Geometrical Optics-GO*) e da conservação da energia que irão formar a superfície do refletor, considerando-se uma distribuição de potência especificada sobre a abertura da antena (região de campo próximo) ou na região de campo distante. Em [9] e [13] os autores utilizam a mesma técnica, porém com um desenvolvimento matemático diferente fornecendo outro tipo de algoritmo.

Diante dos fatores mencionados acima, o presente trabalho tem como objetivo investigar a técnica de síntese geométrica de antenas refletoras descrita em [6], [11] e [12]. Neste caso, optou-se por modelar a superfície refletora de uma antena constituída por um único refletor circularmente simétrico através da concatenação de seções de elipses, obtendo-se um padrão de distribuição de potência especificado sobre a abertura da antena (região de campo próximo) de acordo com [6], segundo os princípios da GO e da Lei da Conservação da Energia.

II. PROCESSO DE MODELAGEM

A idéia básica deste processo de síntese é obter a curva geratriz que descreve a superfície refletora de uma antena com um único refletor circularmente simétrico através de seções cônicas concatenadas consecutivamente entre si. Porém, esta técnica pode ser estendida para a síntese de outros tipos de configurações, assim como definido em [6] e [9].

O presente processo de concatenação baseia-se em seções de elipses (veja a Fig. 1) devido à síntese do refletor ser feita na região de campo próximo (abertura da antena). Além disso, a síntese pode ser feita na região de campo distante utilizando-se seções de parábolas como mostrado em [10].

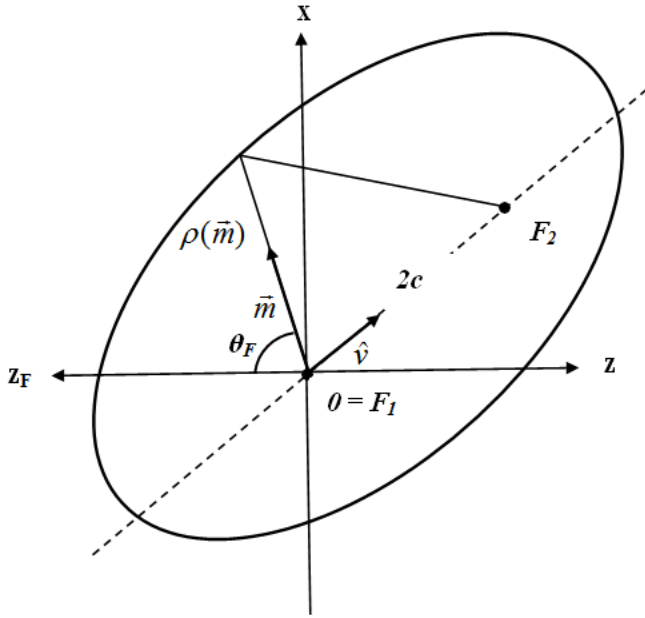


Fig. 1. Elipse com um de seus focos (F_1) na origem (0) e o outro foco (F_2) em um determinado ponto de destino.

Considera-se que todas as elipses utilizadas nesta abordagem de síntese estão com um de seus focos em comum, sendo que o mesmo localiza-se na origem (0), e o outro foco em um determinado ponto de destino, conforme está ilustrado na Fig. 1 onde F_1 e F_2 são os focos da elipse. Neste trabalho, em particular, os focos F_2 estarão no plano focal ($z = 0$).

De acordo com os princípios da GO, o refletor é iluminado por um fonte pontual na origem (0) com diagrama de radiação $I_F(\theta_F)$ do tipo circularmente simétrico (observe a Fig. 2), onde θ_F é o ângulo relativo ao eixo z_F do raio que parte da origem (fonte). Contudo, através das propriedades geométricas de uma elipse, qualquer raio emitido pelo alimentador localizado em F_1 é refletido pela elipse atingindo F_2 , que é o outro foco.

A. Modelo de Alimentador

O alimentador (fonte) utilizado neste trabalho é um alimentador modelo cosseno-elevado (*Raised Cosine Feed*-RCF). Este tipo de alimentador é bastante utilizado na representação da irradiação de alimentadores circularmente simétricos. A Fig. 2 representa o diagrama de radiação deste modelo de alimentador. Os campos elétrico e magnético para o alimentador RCF são equacionados da seguinte forma:

$$\vec{E}_F(\vec{r}_F) = f(\theta_F) [\cos(\phi)\hat{\theta}_F - \sin(\phi)\hat{\phi}_F] \frac{e^{-jk r_F}}{r_F} \quad (1)$$

$$\vec{H}_F(\vec{r}_F) \approx \left[\frac{\hat{r}_F \times \vec{E}_F(\vec{r}_F)}{\eta} \right] \quad (2)$$

onde $\eta \approx 120\pi\Omega$ para o vácuo e

$$f(\theta_F) = \begin{cases} \cos^n(\theta_F), & \theta_F \leq \pi/2 \\ 0, & \theta_F > \pi/2. \end{cases} \quad (3)$$

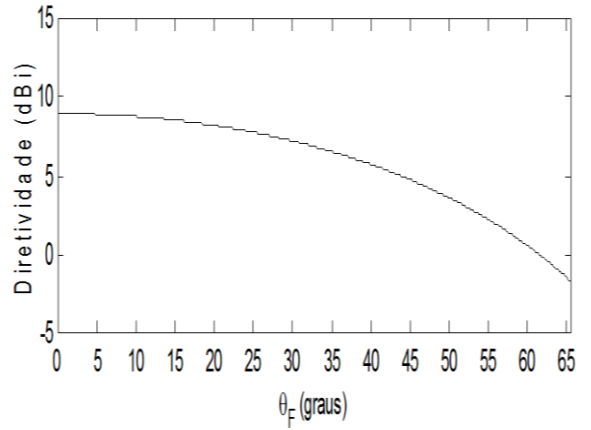


Fig. 2. Diagrama de radiação do alimentador RCF para $n = 1,14$.

Em (3), o expoente n ajusta o modelo RCF ao diagrama de radiação do alimentador. A Fig. 2 representa o diagrama de radiação do modelo de alimentador utilizado para $n = 1,14$.

III. EQUAÇÕES DE MODELAGEM

O aspecto principal desta técnica de síntese de superfícies refletoras é discretizar a distribuição dos pontos de destino (alvo) em N_T pontos sobre a abertura da antena no plano $z = 0$ (plano de origem 0). Estes pontos correspondem a todos os focos F_2 das N_T elipses a serem concatenadas.

Consequentemente, a distância da origem (F_1) ao foco F_2 da i -ésima elipse localizada no plano $z = 0$ é a distância entre os focos desta elipse (distância interfocal $2c_i$), conforme a Fig. 3, dada por:

$$2c_i = \frac{i * r}{N_T}. \quad (4)$$

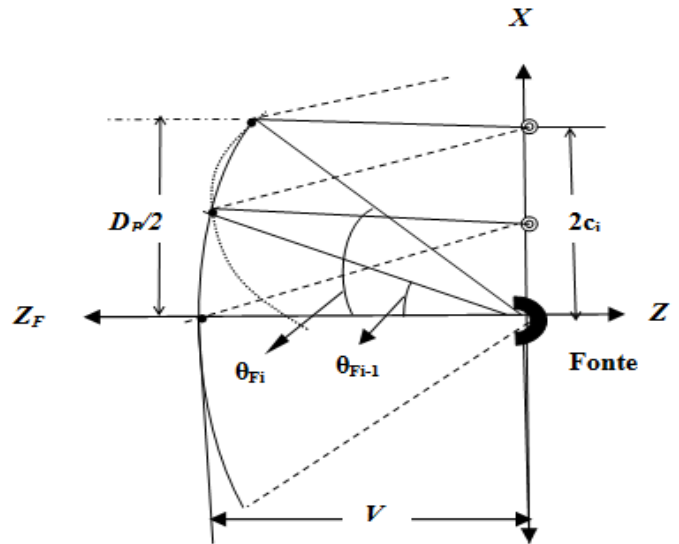


Fig. 3. Parametrização das seções cônicas.

Em (4), $i = 1, \dots, N_T$, r é o raio da abertura (metade do diâmetro do refletor) e

$$N_T = N_S - 1. \quad (5)$$

com N_S sendo a quantidade de raios emitidos pelo alimentador RCF, iniciando com $\theta_{F0} = 0$.

Logo, todas das distâncias calculadas através de (4) são equidistantes entre si. Outro princípio da GO utilizado neste processo é a Lei da Conservação da Energia que é empregada para o cálculo das direções dos raios que partem da fonte (na origem O) com ângulos θ_{Fi} com $i = 1, \dots, N_T$ (observe a Fig. 3).

Considerando-se que a abertura da antena em questão é definida por um conjunto de pontos discretos:

$$x = \{2c_1, 2c_2, \dots, 2c_{N_T}\} \quad (6)$$

sendo que a potência que parte do alimentador entre os ângulos θ_{Fi-1} e θ_{Fi} mostrados na Fig. 3 deve ser igual à potência que chega ao foco F_2 da i -ésima elipse, isto é:

$$\int_{\theta_{Fi-1}}^{\theta_{Fi}} I_F(\theta_F) r_F^2 \sin(\theta_F) d\theta_F = F P_i, \quad (7)$$

onde $I_F(\theta_F)$ é a densidade de potência radiada pelo alimentador, P_i ($i = 1, \dots, N_T$) é a potência que chega ao foco F_2 da i -ésima elipse (potência esta que é proporcional à distribuição de potência desejada sobre a abertura do refletor) e F é o fator de normalização dado por

$$F = \left(\sum_{i=1}^{N_T} P_i \right)^{-1} \int_0^{\theta_E} I_F(\theta_F) r_F^2 \sin(\theta_F) d\theta_F, \quad (8)$$

onde θ_E é o ângulo de borda do refletor. Ou seja, F é o fator que garante que toda a energia que o alimentador emite seja igual a energia que chega na abertura da antena garantindo assim que (7) seja satisfeita.

Com isso, através de (7) e (8) e do modelo de alimentador descrito na seção anterior encontram-se os valores de θ_{Fi} (com $i = 1, \dots, N_T$). Para o cômputo destes ângulos o processo iterativo inicia-se $i = 1$ sendo $\theta_{F0} = 0$. O último ângulo (θ_{FN_T}) deve ser igual ao ângulo de borda do refletor (θ_E) definido como um dos parâmetros de entrada. Logo, o processo de concatenação das seções de elipses é iniciado.

Através da Fig. 3, é possível identificar que a distância entre a fonte e o vértice do refletor corresponde ao raio $i = 0$ que parte do alimentador e o seu valor (V) também é um dado de entrada deste processo de síntese. Os pontos definidos em (4) definem as distâncias focais ($2c_i$) das elipses utilizadas na concatenação.

No intuito de especificar cada uma das seções elípticas E_i que representam a geratriz da superfície do refletor modelado, os parâmetros mais importantes do processo de concatenação devem ser determinados. Utilizando-se a notação descrita em [6], a equação do raio polar de uma elipse com um de seus focos na origem em coordenadas polares é dada por:

$$\rho_{Fi}(\vec{m}) = \frac{d_{i-1}}{1 - \varepsilon_{i-1} \vec{m}_{i-1} \cdot \hat{v}} \quad (9)$$

onde d_{i-1} é o parâmetro focal da $(i-1)$ -ésima elipse que é representado por:

$$d_{i-1} = a_{i-1} - \frac{c_{i-1}^2}{a_{i-1}}. \quad (10)$$

Em (9) ε_{i-1} é a excentricidade da $(i-1)$ -ésima elipse, e para o presente caso

$$\vec{m}_{i-1} = -\cos(\theta_{Fi}) \hat{z} + \sin(\theta_{Fi}) \hat{x} \quad (11)$$

é o vetor que representa a direção de incidência sobre a $(i-1)$ -ésima elipse e $\hat{v}$ representa a direção do foco F_2 . Enquanto que em (11), a_{i-1} é o semi-eixo maior da $(i-1)$ -ésima elipse e c_{i-1} é o foco $(i-1)$ -ésima elipse. Observe que, para elipses, $0 < \varepsilon_{i-1} < 1$.

IV. RESULTADOS

Nesta seção estão dispostos os principais resultados obtidos no presente estudo através do processo de modelagem geométrica de refletores utilizando-se o procedimento descrito nas Seções II e III. Neste estudo, para representar a curva geratriz da superfície modelada utilizou-se uma antena refletora de um único refletor circularmente simétrico.

A geratriz da superfície refletora modelada obtida é comparada com a geratriz de uma antena clássica de mesma configuração usada para a síntese geométrica. Para isso, as potências P_i ($i = 1, \dots, N_T$) sobre os focos F_2 no plano $z = 0$ foram especificadas proporcionalmente à distribuição de potência na abertura do parabolóide (antena clássica), segundo os princípios da GO. O modelo RCF do alimentador possui $n = 1,14$, o diâmetro do parabolóide $D_p = 36\lambda$ e o foco $V = 14\lambda$. Finalmente, o diagrama de radiação da antena é aquele disposto na Fig. 4 para o plano $\phi = 45^\circ$.

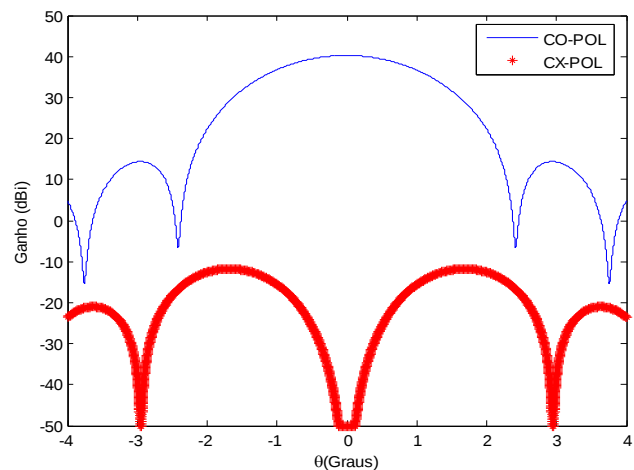


Fig. 4. Diagrama de radiação da antena refletora clássica no plano $\phi = 45^\circ$.

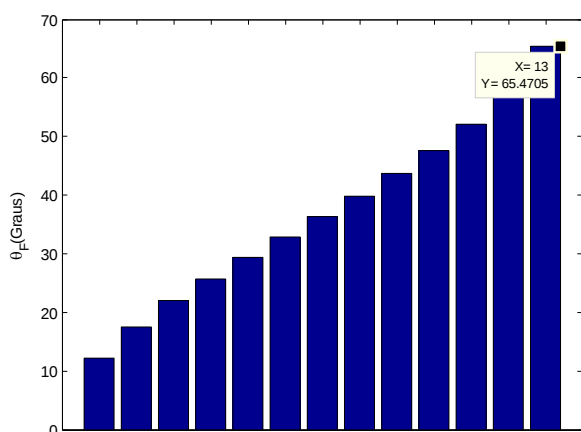
Utilizaram-se as mesmas medidas geométricas para se obter as geratrizes das superfícies modelada e clássica. A fim de determinar a geratriz que descreve o refletor modelado foram empregados os seguintes parâmetros de entrada: os pontos N_T , a frequência f , a distância entre a fonte e o vértice do refletor

V , o ângulo de borda do refletor θ_E , o diâmetro da antena refletora D_p , o expoente n do modelo de alimentador RCF, conforme especificado em (3). Esta parametrização está disposta na Tabela 1. Além destes parâmetros, considera-se que a potência P_i que chega ao foco F_2 da i -ésima elipse com $i = 1, \dots, N_T$ é um parâmetro de entrada. A escolha de P_i é feita para assegurar a Lei da Conservação da Energia especificada em (7). Também é importante enfatizar que a definição de P_i depende do valor de N_T , ou seja, para valores diferentes de N_T tem-se uma determinada distribuição de P_i , conforme (7) e (8).

Com o objetivo de ilustrar a acurácia do algoritmo proposto para o processo iterativo do cômputo dos ângulos do alimentador θ_{Fi} foram utilizadas 13 iterações com a parametrização descrita na Tabela 1. Para $i = 0$ tem-se $\theta_{F0} = 0$, sendo assim, é possível observar através da Fig. 5 que na última iteração, ou seja, para $N_T = 13$ $\theta_{F13} = 65,4705^\circ$ que é equivalente ao ângulo de borda do refletor utilizado como um dos parâmetros de entrada. Isto garante a convergência deste algoritmo para calcular todos os ângulos θ_{Fi} empregando-se a Lei da Conservação da Energia dado por (7). Além disso, outro fator importante a destacar é que com um número pequeno de N_T garante-se a acurácia do algoritmo para o cálculo de θ_{Fi} .

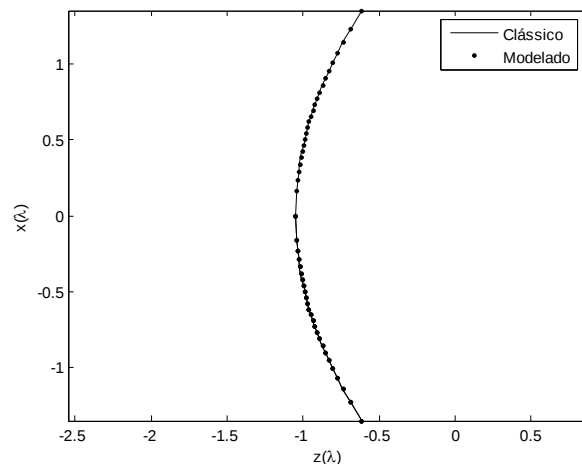
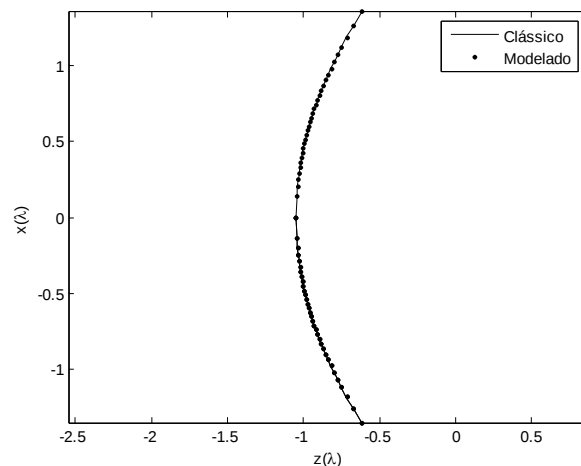
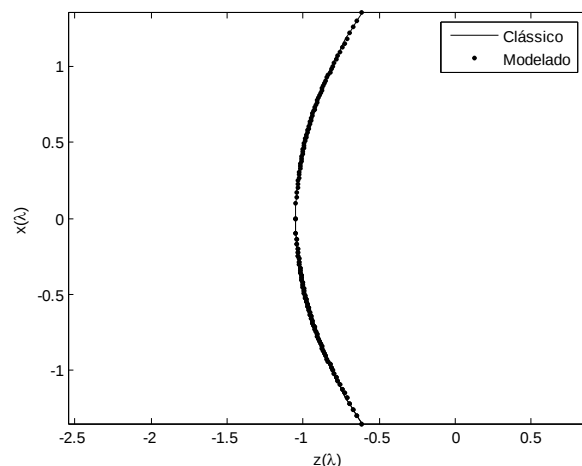
TABELA I. PARÂMETROS DE ENTRADA

Variáveis	Valores
N_T	24
D_p	36λ
f	4 GHz
V	14λ
n	1,14
θ_E	$65,4705^\circ$


Fig. 5. Ângulos do alimentador para $N_T = 13$.

Através dos parâmetros caracterizados na Tabela 1 tem-se a curva geratriz que descreve o refletor modelado juntamente com a geratriz do refletor clássico, conforme a Fig. 6. Com o objetivo de verificar o desempenho da técnica de síntese deste

trabalho alterou-se apenas o valor do parâmetro N_T da Tabela 1 para 32 e 65, logo se tem dois outros estudos de caso que representam as geratrizes das superfícies modelada e clássica de acordo com as Figs. 7 e 8.


Fig. 6. Geratrizes das superfícies refletoras clássica e modelada para $N_T = 24$.

Fig. 7. Geratrizes dos refletores clássico e modelado para $N_T = 32$.

Fig. 8. Geratrizes dos refletores clássico e modelado para $N_T = 65$.

Cabe ressaltar que para os três estudos realizados neste trabalho considerando-se $N_T = 24, 32$ e 65 , o cálculo do erro RMS (observe a Fig. 9) foi obtido. Para o cômputo do erro RMS comparou-se as distâncias entre a fonte e os refletores modelado e clássico (raios emitidos pelo alimentador).

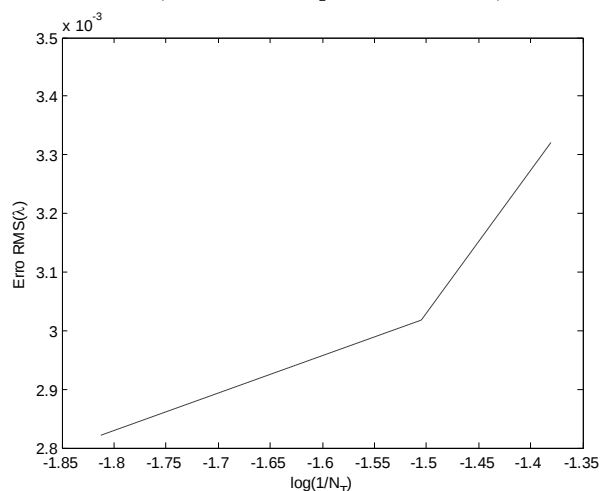


Fig. 9. Erro RMS das distâncias entre a fonte e os refletores modelado e clássico para $N_T = 24, 32$ e 65 .

De acordo com a Fig. 9, é possível verificar que quando se utiliza mais elipses (N_T maior) no processo o erro RMS diminui em função da variável N_T . Logo, para valores menores de N_T o erro RMS é maior. Portanto para que seja garantida a acurácia do procedimento de síntese de antenas refletoras adotado no presente estudo é conveniente utilizar no processo mais elipses.

V. CONCLUSÕES

Este trabalho investigou a técnica de síntese de antenas refletoras descrita em [6], [11] e [12]. Com o objetivo de avaliar a técnica investigada, modelou-se a superfície refletora de uma antena de um único refletor circularmente simétrico através da concatenação de seções de elipses. De acordo com os princípios da GO e da conservação da energia foi obtido um padrão de distribuição de potência especificado sobre a abertura da antena (região de campo próximo). Além disso, foi proposto um processo iterativo para o cálculo dos ângulos do alimentador.

O desempenho do procedimento de modelagem geométrica de refletores apresentado no presente estudo foi demonstrado através da comparação das curvas geratrizes que descrevem as superfícies dos refletores modelado e clássico através de três estudos de caso. Em cada estudo de caso foi alterado o valor da variável N_T . Verificou-se que para $N_T = 65$ o erro RMS é menor comparando-se com $N_T = 24$ e 32 . Portanto, o melhor desempenho é obtido utilizando-se um número maior de elipses neste processo.

AGRADECIMENTOS

Os autores deste trabalho agradecem ao apoio da CAPES, CNPq, FAPEMIG e ao INCTCSF.

REFERÊNCIAS

- [1] C. A. Balanis, *Antenna Theory: Analysis and Design*, 3rd ed. John Wiley and Sons, Inc., New York, 2005.
- [2] V. Galindo, "Design of dual reflector antennas with arbitrary phase and amplitude distribution," *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, vol. 12, no. 4, pp. 403-408, July 1964.
- [3] F. Brickell and B. Westcott, "Reflector design as an initial-value problem," *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, vol. 24, no. 4, pp. 531-533, July 1976.
- [4] V. Galindo-Israel and R. Mitra, "Synthesis of offset dualshaped subreflector antennas for control of Cassegrain aperture distribution," *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, vol. 32, no. 1, pp. 86-92, 1984.
- [5] A. Noris and W. Waddoup, "A millimetric wave omnidirectional antenna with prescribed elevation shaping," in *Proc. ICAP 4th Int. Conf. Antennas and Propagation*, 1985, pp. 141-145.
- [6] V. I. Oliker, "A rigorous method for synthesis of offset shaped reflector antennas," *Computing Letters*, vol. 2, no. 1-2, pp. 29-49, March 2006.
- [7] F. J. S. Moreira and J. R. Bergmann, "GO shaping of omnidirectional dual-reflector antennas for a prescribed equi-phase aperture field distribution," *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, vol. 55, pp. 99-106, 2007.
- [8] P. Gusn and X.-J. Wang, "On a Monge-Ampère Equation arising in Geometric Optics," *Jornal Differential Geometry*, vol. 48, pp. 205-233, 1998.
- [9] R. A. Penchel, J. R. Bergmann and F. J. S. Moreira, "Main-reflector shaping of omnidirectional dual reflectors using local conic-sections," *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, vol. 61, no. 8, pp. 4379-4383, August 2013.
- [10] C. Canavesi, W. J. Cassarly and J. P. Rolland, "Direct calculation algorithm for 2D reflector design," *Optics Letter*, vol. 37, Issue 18, pp. 3852-3854, 2012.
- [11] S. Kochengin and V. I. Oliker, "Determination of reflector surfaces from near-field scattering data II," *Numerical solution*, *Numrishe Mathematik* vol. 79, no. 4, pp. 553-568, 1998.
- [12] S. Kochengin and V. I. Oliker, "Computational algorithms for constructing reflectors," *Computing and Visualization in Science*, vol. 6, pp. 15-21, 2006.
- [13] F. J. S. Moreira and J. R. Bergmann, "Shaping axis-symmetric dual-reflector antennas by combining conic sections," *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, vol. 59, no. 3, pp. 1042-1046, March 2011.