Circuitos Elétricos III

Prof. Danilo Melges

Depto. de Eng. Elétrica

Universidade Federal de Minas Gerais

Filtros Ativos – parte 2

Filtros Butterworth

- Função de Transferência do Butterworth de ganho unitário:

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^{2n}}},$$

onde n é a ordem do filtro.

Características do Filtro:

- ω_c é a freqüência de corte para todos os valores de n.
- P/ n grande, o denominador estará próximo a 1, quando $\omega<\omega_c$.
- O expoente de ($\omega<\omega_c$) é sempre par (condição necessária para que o filtro seja realizável).

Determinando H(s)

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^{2n}}},$$

- Consideremos o filtro protótipo com freq. de corte ω_c=1 rad/s (ω^2=-s^2):

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\omega^{2n}} = \frac{1}{1+(-s^2)^n} = \frac{1}{1+(-1)^n s^{2n}}$$

- Mas: $|H(j\omega)|^2 = H(s)H(-s).$

- Logo:

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + (-1)^n s^{2n}}.$$

Determinando H(s)

- Como determinar H(s)?

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + (-1)^n s^{2n}}.$$

1. Resolver o polinômio do denominador:

$$1+(-1)^n s^{2n}=0$$

2. Atribuir raízes negativas (semi-plano esquerdo) a H(s) e raízes positivas a H(-s).

3. Combinar termos do denominador para formar fatores de primeira e segunda ordem.

- Posteriormente, pode-se aplicar mudanças de escala sobre o filtro protótipo para obter-se o filtro desejado.

Exercício

- Determinar H(s) para n=2

$$1+(-1)^n s^{2n}=0$$

$$1+(-1)^2 s^4=0$$

$$s_1=1\measuredangle 45^o=1/\sqrt{(2)}+j/\sqrt{(2)}$$

$$s_2=1\measuredangle 135^o=-1/\sqrt{(2)}+j/\sqrt{(2)}$$

$$s_3=1\measuredangle 225^o=-1/\sqrt{(2)}-j/\sqrt{(2)}$$

$$s_4=1\measuredangle 315^o=1/\sqrt{(2)}-j/\sqrt{(2)}$$

As raízes do denominador estão igualmente espaçadas sobre o círculo unitário.

Exercício

- Determinar H(s) para n=2

$$1+(-1)^n s^{2n}=0$$

$$1+(-1)^2 s^4=0$$

$$s_1=1\measuredangle 45^o=1/\sqrt{(2)}+j/\sqrt{(2)}$$

$$s_2=1\measuredangle 135^o=-1/\sqrt{(2)}+j/\sqrt{(2)}$$

$$s_3=1\measuredangle 225^o=-1/\sqrt{(2)}-j/\sqrt{(2)}$$

$$s_4=1\measuredangle 315^o=1/\sqrt{(2)}-j/\sqrt{(2)}$$

- s_2 e s_3 estão no semi-plano esquerdo, logo:

$$H(s)=\frac{1}{(s+1/\sqrt{(2)}-j/\sqrt{(2)})(s+1/\sqrt{(2)}+j/\sqrt{(2)})}=\frac{1}{(s^2+\sqrt{(2)}s+1)}$$

Polinômios de Butterworth normalizados

- Como determinar H(s)?

1	$(s+1)$
2	$(s^2+\sqrt{(2)}s+1)$
3	$(s+1)(s^2+s+1)$
4	$(s^2+0{,}765\,s+1)(s^2+1{,}848\,s+1)$
5	$(s+1)(s^2+0{,}618\,s+1)(s^2+1{,}618\,s+1)$
6	$(s^2+0{,}518\,s+1)(s^2+\sqrt{(2)}s+1)(s^2+1{,}932\,s+1)$
7	$(s+1)(s^2+0{,}445\,s+1)(s^2+1{,}247\,s+1)(s^2+1{,}802\,s+1)$
8	$(s^2+0{,}390\,s+1)(s^2+1{,}111\,s+1)(s^2+1{,}6663\,s+1)(s^2+1{,}962\,s+1)$

Polinômios de Butterworth (ω_c=1 rad/s): formado por produtos de fatores de 1a e 2a ordem em s.

Polinômios de Butterworth normalizados

- Como determinar H(s)?

1	$(s+1)$
2	$(s^2+\sqrt{(2)}s+1)$
3	$(s+1)(s^2+s+1)$
4	$(s^2+0{,}765\,s+1)(s^2+1{,}848\,s+1)$
5	$\boxed{(s+1)(s^2+0{,}618\,s+1)(s^2+1{,}618\,s+1)}$ Exemplo
6	$(s^2+0{,}518\,s+1)(s^2+\sqrt{(2)}s+1)(s^2+1{,}932\,s+1)$
7	$(s+1)(s^2+0{,}445\,s+1)(s^2+1{,}247\,s+1)(s^2+1{,}802\,s+1)$
8	$(s^2+0{,}390\,s+1)(s^2+1{,}111\,s+1)(s^2+1{,}6663\,s+1)(s^2+1{,}962\,s+1)$

Polinômios de Butterworth (ω_c=1 rad/s): formado por produtos de fatores de 1a e 2a ordem em s.

Filtros baseados em polinômios de Butterworth normalizados

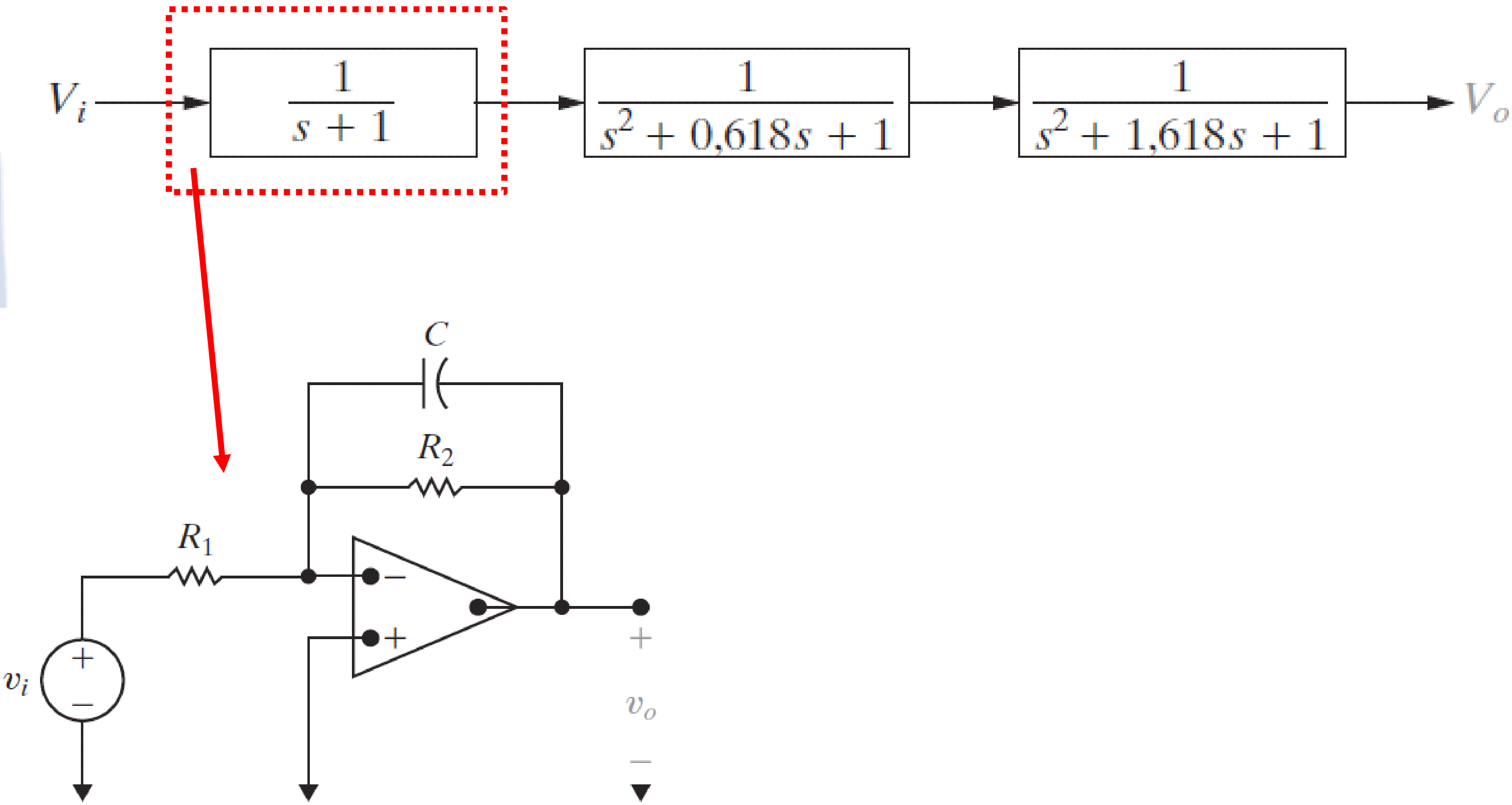
- Construímos os filtros com base em polinômios de 1a e 2a ordem:

$$V_i \longrightarrow \boxed{\frac{1}{s+1}} \longrightarrow \boxed{\frac{1}{s^2+0{,}618s+1}} \longrightarrow \boxed{\frac{1}{s^2+1{,}618s+1}} \longrightarrow V_o$$

Polinômios de Butterworth: formado por produtos de fatores de 1a e 2a ordem em s.

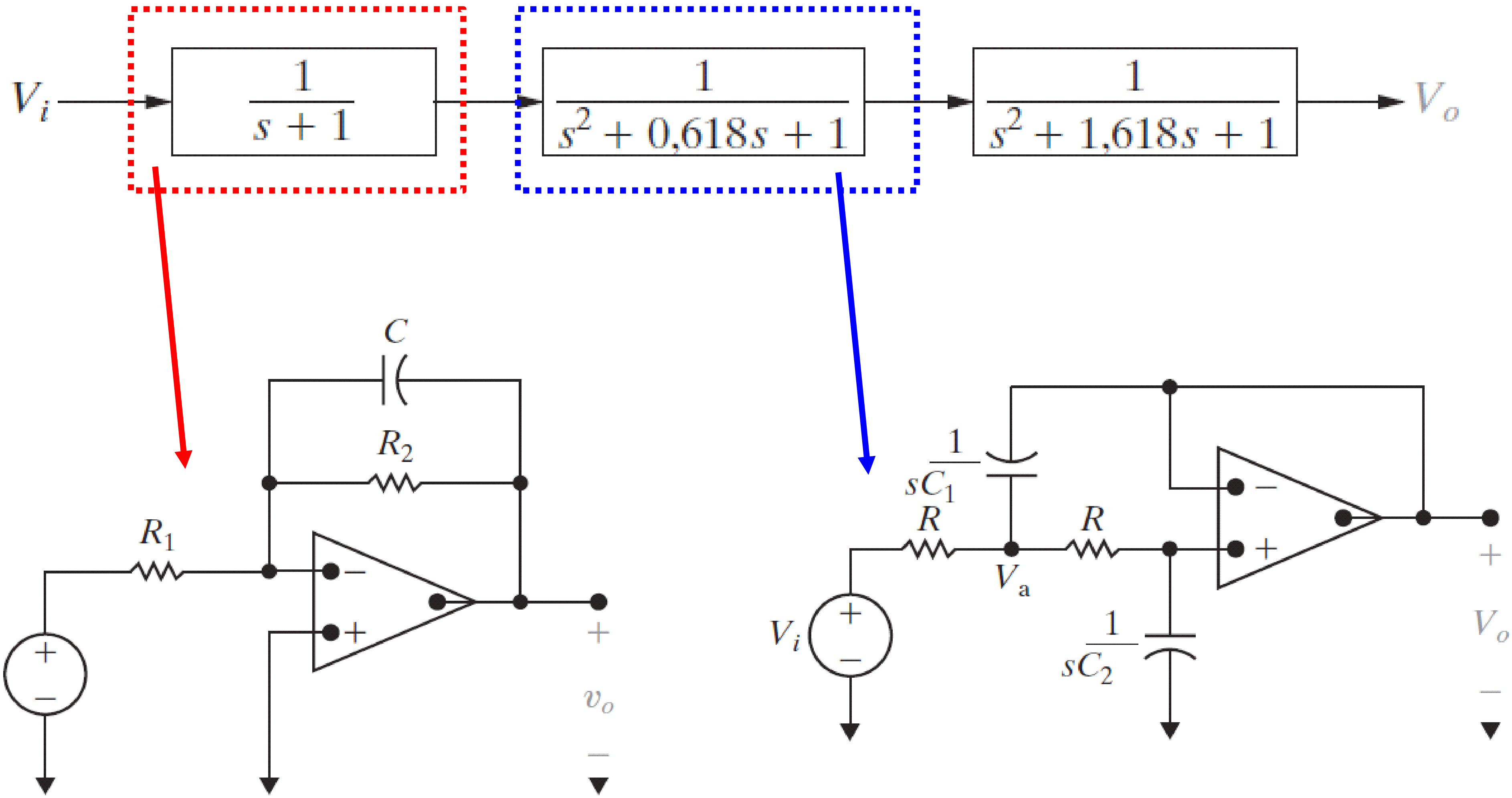
Filtros baseados em polinômios de Butterworth normalizados

- Construímos os filtros com base em polinômios de 1a e 2a ordem:



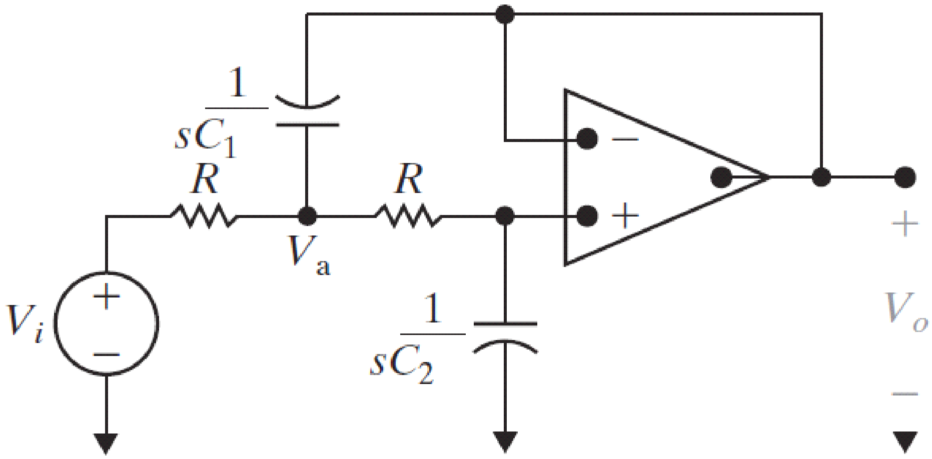
Filtros baseados em polinômios de Butterworth normalizados

- Construímos os filtros com base em polinômios de 1a e 2a ordem:



Filtros baseados em polinômios de Butterworth normalizados

- Obtendo o H(s) do filtro de 2a ordem:



$$\frac{V_a - V_i}{R} + (V_a - V_o)sC_1 + \frac{V_a - V_o}{R} = 0,$$

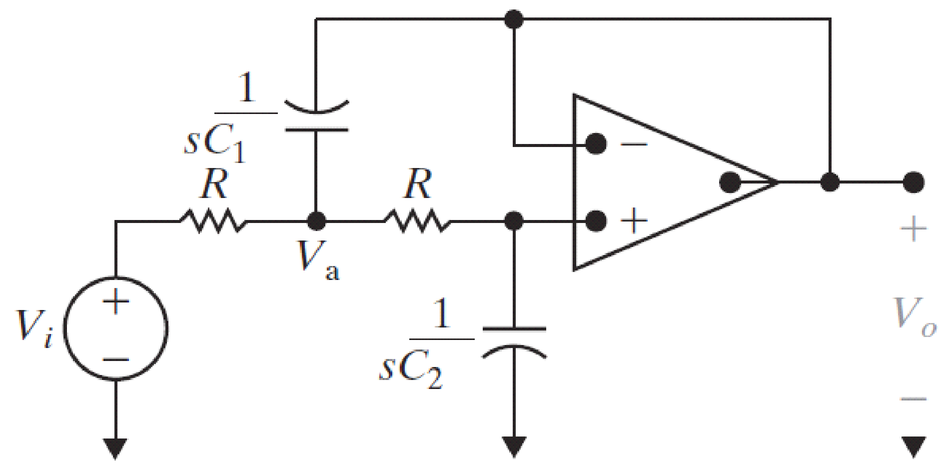
$$V_o s C_2 + \frac{V_o - V_a}{R} = 0.$$

$$(2 + RC_1 s)V_a - (1 + RC_1 s)V_o = V_i,$$

$$-V_a + (1 + RC_2 s)V_o = 0.$$

Filtros baseados em polinômios de Butterworth normalizados

- Empregando Cramer:

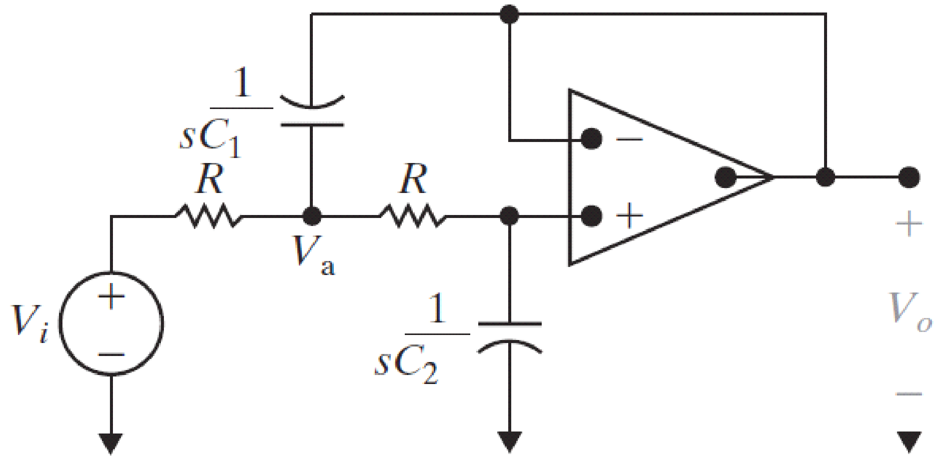


$$V_o = \frac{\begin{vmatrix} 2+RC_1s & V_i \\ -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2+RC_1s & -(1+RC_1s) \\ -1 & 1+RC_2s \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{V_i}{R^2C_1C_2s^2 + 2RC_2s + 1}.$$

Filtros baseados em polinômios de Butterworth normalizados

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{\frac{1}{R^2C_1C_2}}{s^2 + \frac{2}{RC_1}s + \frac{1}{R^2C_1C_2}}.$$



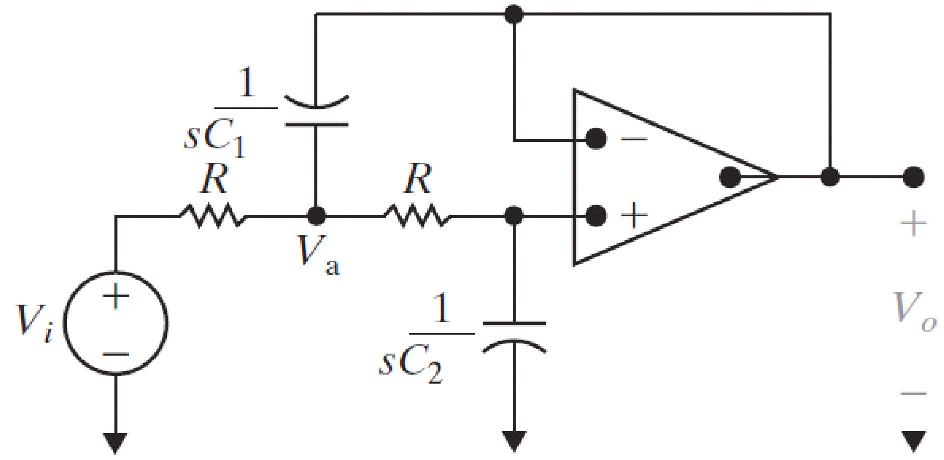
- Fazendo R=1Ω:

$$H(s) = \frac{\frac{1}{C_1C_2}}{s^2 + \frac{2}{C_1}s + \frac{1}{C_1C_2}}.$$

Filtros baseados em polinômios de Butterworth normalizados

- Comparando H(s) obtido com um circuito de 2a ordem na cascata de Butterworth:

$$H(s) = \frac{\frac{1}{C_1C_2}}{s^2 + \frac{2}{C_1}s + \frac{1}{C_1C_2}}.$$



$$H(s) = \frac{1}{s^2 + b_1 s + 1}$$

$$b_1 = \frac{2}{C_1} \quad \text{e} \quad 1 = \frac{1}{C_1C_2}.$$

- Ou seja, sabemos projetar um Butterworth passa-baixas de n-ésima ordem com freqüência de corte 1 rad/s e ganho unitário.

Projeto de Filtro Butterworth passa-baixas

- Projetar um filtro Butterworth passa-baixas de 4a ordem: f_c=500Hz, Ganho=10. Utilizar a maior quantidade de resistores de 1kΩ possível.

Polinômios de Butterworth normalizados

- Como determinar H(s)?

1	$(s+1)$
2	$(s^2+\sqrt{(2)}\,s+1)$
3	$(s+1)(s^2+s+1)$
4	$\boxed{(s^2+0{,}765\,s+1)(s^2+1{,}848\,s+1)}$
5	$(s+1)(s^2+0{,}618\,s+1)(s^2+1{,}618\,s+1)$
6	$(s^2+0{,}518\,s+1)(s^2+\sqrt{(2)}\,s+1)(s^2+1{,}932\,s+1)$
7	$(s+1)(s^2+0{,}445\,s+1)(s^2+1{,}247\,s+1)(s^2+1{,}802\,s+1)$
8	$(s^2+0{,}390\,s+1)(s^2+1{,}111\,s+1)(s^2+1{,}6663\,s+1)(s^2+1{,}962\,s+1)$

Projeto de Filtro Butterworth passa-baixas

- Projetar um filtro Butterworth passa-baixas de 4a ordem: f'_c=500Hz, Ganho=10. Utilizar a maior quantidade de resistores de 1kΩ possível.

Polinômios de 4a ordem (Tabela):

$$(s^2+0{,}765\,s+1)(s^2+1{,}848\,s+1)$$

1o estágio:

$$H(s)=\frac{\frac{1}{C_1C_2}}{s^2+\frac{2}{C_1}s+\frac{1}{C_1C_2}}.$$

$$H(s)=\frac{1}{s^2+b_1\,s+1}$$

$$b_1=\frac{2}{C_1}=0{,}765 \longrightarrow C_1=\frac{2}{0{,}765}=2{,}61\,F$$

$$1=\frac{1}{C_1C_2} \longrightarrow C_2=\frac{1}{C_1}=0{,}38\,F$$

Projeto de Filtro Butterworth passa-baixas

- Projetar um filtro Butterworth passa-baixas de 4a ordem: f'_c=500Hz, Ganho=10. Utilizar a maior quantidade de resistores de 1kΩ possível.

Polinômios de 4a ordem (Tabela):

$$\left(s^2+0{,}765\,s+1\right)\left(s^2+1{,}848\,s+1\right)$$

2o estágio:

$$H(s)=\frac{\frac{1}{C_1C_2}}{s^2+\frac{2}{C_1}s+\frac{1}{C_1C_2}}.$$

$$H(s)=\frac{1}{s^2+b_1\,s+1}$$

$$b_1=\frac{2}{C_3}=1{,}848 \longrightarrow C_3=\frac{2}{1{,}848}=1{,}08\,F$$

$$1=\frac{1}{C_3C_4} \longrightarrow C_4=\frac{1}{C_3}=0{,}924\,F$$

Projeto de Filtro Butterworth passa-baixas

- Projetar um filtro Butterworth passa-baixas de 4a ordem: f'_c=500Hz, Ganho=10. Utilizar a maior quantidade de resistores de 1kΩ possível.

Os valores encontrados nos dão uma freqüência de corte de 1rad/s.
Para converter para a f_c=500Hz => $k_f=2\pi.500Hz/(1)=3.141$

Também precisamos converter para ka=1kΩ/1Ω=1.000.

Projeto de Filtro Butterworth passa-baixas

- Projetar um filtro Butterworth passa-baixas de 4a ordem: f_c=500Hz, Ganho=10. Utilizar a maior quantidade de resistores de 1kΩ possível.

Aplicando os fatores de escala: $R = 1\text{k}\,\Omega$

$$C_1' = \frac{C_1}{k_a k_f} = \frac{2,61}{3.141\,x\,1.000} = 831\text{nF}$$

$$C_3' = \frac{1,08}{3.141\,x\,1.000} = 344\text{nF}$$

$$C_2' = \frac{C_2}{k_a k_f} = \frac{0,38}{3.141\,x\,1.000} = 121\text{nF}$$

$$C_4' = \frac{0,924}{3.141\,x\,1.000} = 294\text{nF}$$

Projeto de Filtro Butterworth passa-baixas

- Projetar um filtro Butterworth passa-baixas de 4a ordem: f_c=500Hz, Ganho=10. Utilizar a maior quantidade de resistores de 1kΩ possível.

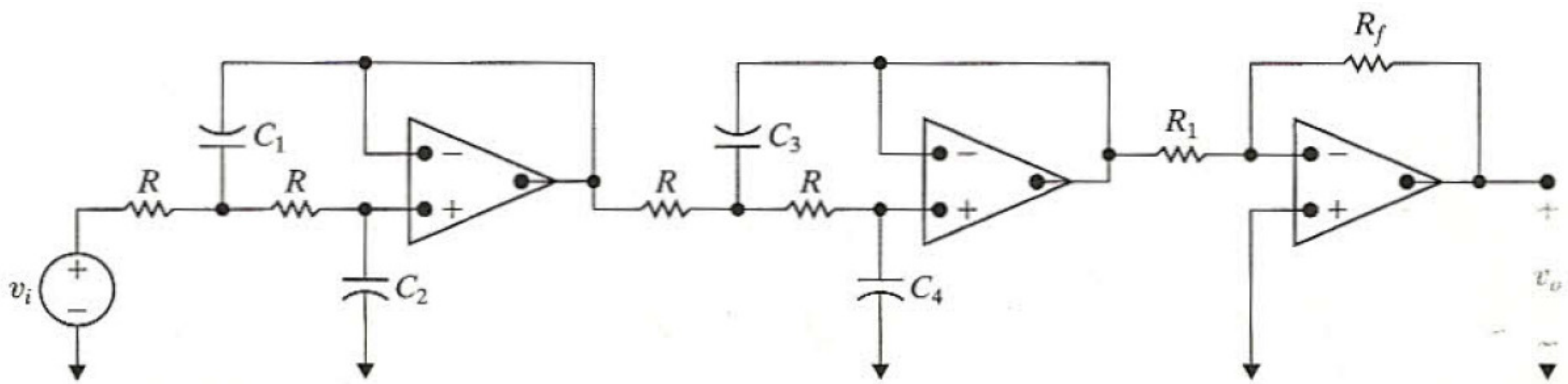
Polinômios de 4a ordem (Tabela):

$$\left(s^2+0{,}765\,s+1\right)\left(s^2+1{,}848\,s+1\right)$$

Para obtermos um ganho de 10, pode-se criar um estágio amplificador (inversor) com o resistor de realimentação 10R=10kΩ

Projeto de Filtro Butterworth passa-baixas

- Projetar um filtro Butterworth passa-baixas de 4a ordem: f_c=500Hz, Ganho=10. Utilizar a maior quantidade de resistores de 1kΩ possível.



$$C_1' = 831\text{nF} \qquad R = 1\text{k}\,\Omega$$

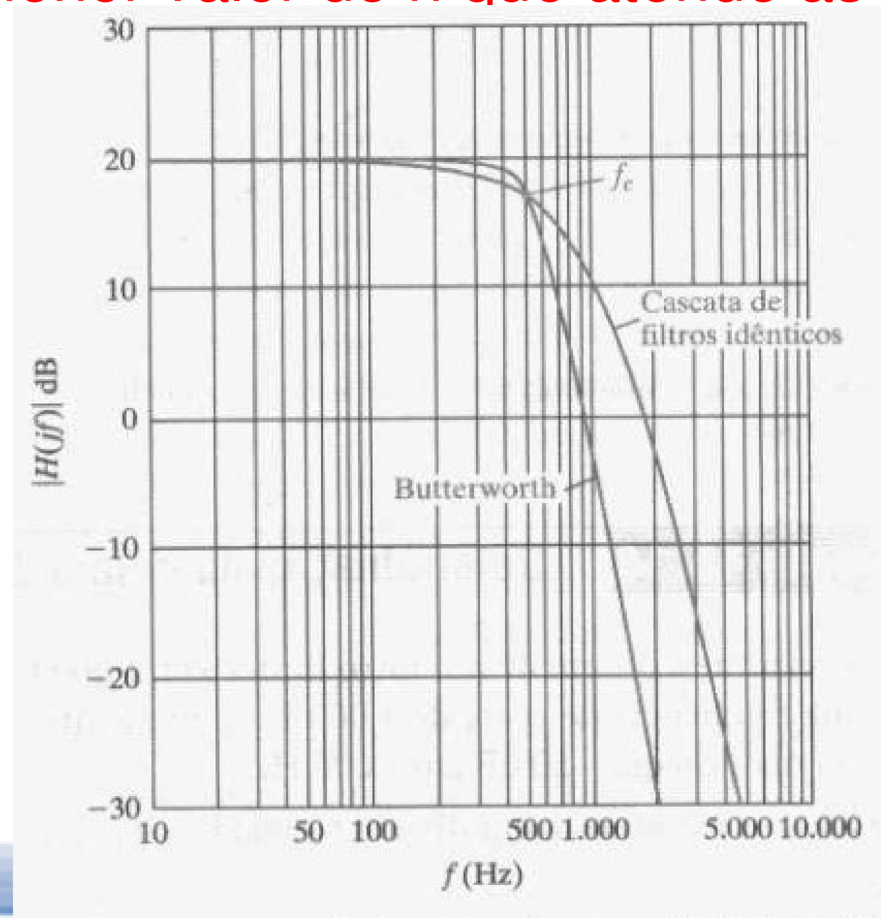
$$C_2' = 121\text{nF} \qquad R_i = 1\text{k}\,\Omega$$

$$C_3' = 294\text{nF} \qquad R_f = 10\text{k}\,\Omega$$

$$C_4' = 294\text{nF}$$

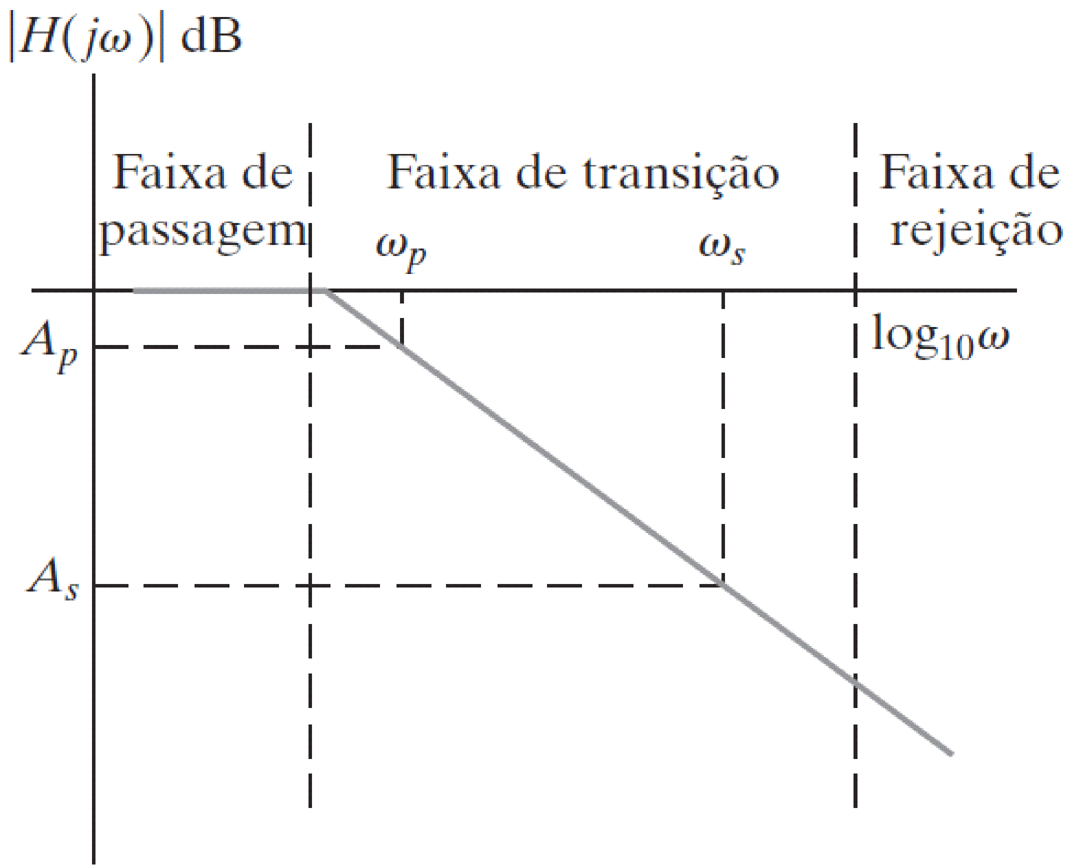
Ordem de um filtro Butterworth

- Quanto mais alta a ordem, mais próximo do ideal será o filtro.
- Quanto mais alta a ordem, maior o número de componentes.
- Função do projetista: determinar o menor valor de n que atende às especificações do filtro.



Especificações de um filtro

- Definição em função da largura da faixa de transição: A_p, A_s, ω_p, ω_s.
  → A definição destes 4 parâmetros determina a ordem do filtro.



Especificações de um filtro

- Como obter a ordem em função dos 4 parâmetros fornecidos?

$$A_p = 20\log_{10}\frac{1}{\sqrt{1+\omega_p^{2n}}}$$

$$A_p = 20\log_{10} 1 - 20\log\left(1+\omega_p^{2n}\right)^{1/2} = -10\log_{10}\left(1+\omega_p^{2n}\right)$$

$$A_s = 20\log_{10}\frac{1}{\sqrt{1+\omega_s^{2n}}}$$

$$A_s = 20\log_{10} 1 - 20\log\left(1+\omega_s^{2n}\right)^{1/2} = -10\log_{10}\left(1+\omega_s^{2n}\right)$$

Especificações de um filtro

- Como obter a ordem em função dos 4 parâmetros fornecidos?

$$A_p = 20\log_{10} 1 - 20\log\left(1+\omega_p^{2n}\right)^{1/2} = -10\log_{10}\left(1+\omega_p^{2n}\right)$$

$$10^{-0,1\,A_p} = 1+\omega_p^{2n}$$

$$A_s = 20\log_{10} 1 - 20\log\left(1+\omega_s^{2n}\right)^{1/2} = -10\log_{10}\left(1+\omega_s^{2n}\right)$$

$$10^{-0,1\,A_s} = 1+\omega_s^{2n}$$

$$\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)^n = \frac{\sqrt{\left(10^{-0,1\,A_s}-1\right)}}{\sqrt{\left(10^{-0,1\,A_p}-1\right)}} = \frac{\sigma_s}{\sigma_p}$$

Especificações de um filtro

- Tomando o logaritmo dos dois lados:

$$\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)^n = \frac{\sqrt{\left(10^{-0,1A_s}-1\right)}}{\sqrt{\left(10^{-0,1A_p}-1\right)}} = \frac{\sigma_s}{\sigma_p}$$

$$n\log_{10}\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right) = \log_{10}\frac{\sigma_s}{\sigma_p}$$

$$\boxed{n = \frac{\log_{10}\sigma_s/\sigma_p}{\log_{10}\left(\omega_s/\omega_p\right)}}$$

Especificações de um filtro

- Entretanto, sendo $A_p = 20\log_{10}\frac{1}{\sqrt{(2)}} = -20\log_{10}\sqrt{(2)}$

$$\sigma_p = \sqrt{\left(10^{-0,1A_p} - 1\right)} = \sqrt{\left(10^{-0,1\left(-20\log_{10}\sqrt{(2)}\right)} - 1\right)}$$

$$\sigma_p = \sqrt{\left(10^{2\log_{10}\sqrt{(2)}} - 1\right)} = \sqrt{\left(10^{2\log_{10}\sqrt{(2)}} - 1\right)} = \sqrt{\left(10^{\log_{10}2} - 1\right)}$$

$$\sigma_p = 1$$

$$\boxed{n = \frac{\log_{10}\sigma_s/\sigma_p}{\log_{10}\left(\omega_s/\omega_p\right)} = \frac{\log_{10}\sigma_s}{\log_{10}\left(\omega_s/\omega_p\right)}}$$

Especificações de um filtro

- Assumindo também que a faixa de transição é acentuada: $10^{-0,1As} >> 1$

$$\sigma_s = \sqrt{\left(10^{-0,1A_s} - 1\right)} \approx 10^{-0,05A_s}$$

$$\log_{10} \sigma_s \approx -0,05 A_s$$

- Logo:

$$n = \frac{\log_{10} \sigma_s}{\log_{10}\left(\omega_s / \omega_p\right)} = \frac{-0,05 A_s}{\log_{10}\left(\omega_s / \omega_p\right)}$$

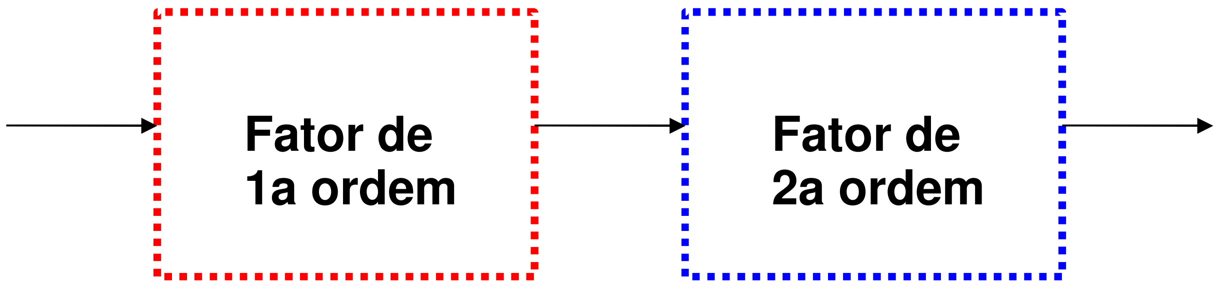
Ou:

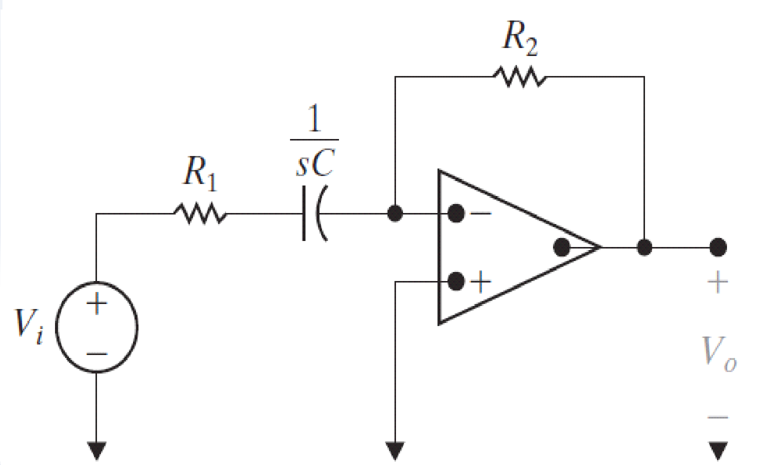
$$\boxed{n = \frac{-0,05 A_s}{\log_{10}\left(f_s / f_p\right)}}$$

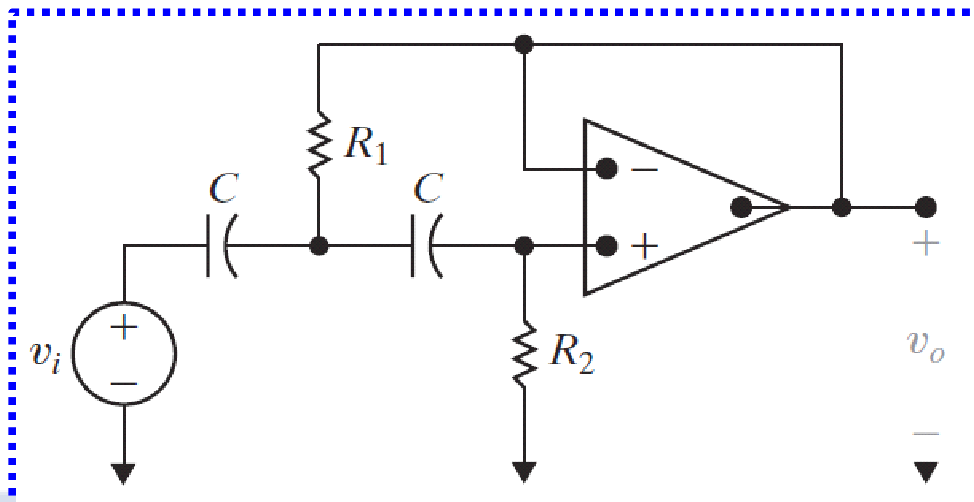
Filtro Buterworth passa-altas

Filtro Butterworth protótipo passa-altas de n-ésima ordem:

- Possui um polinômio de n-ésima ordem no denominador de H(s).
- Numerador de H(s): s^n.
- Usamos filtros em cascata para obter H(s) desejado.

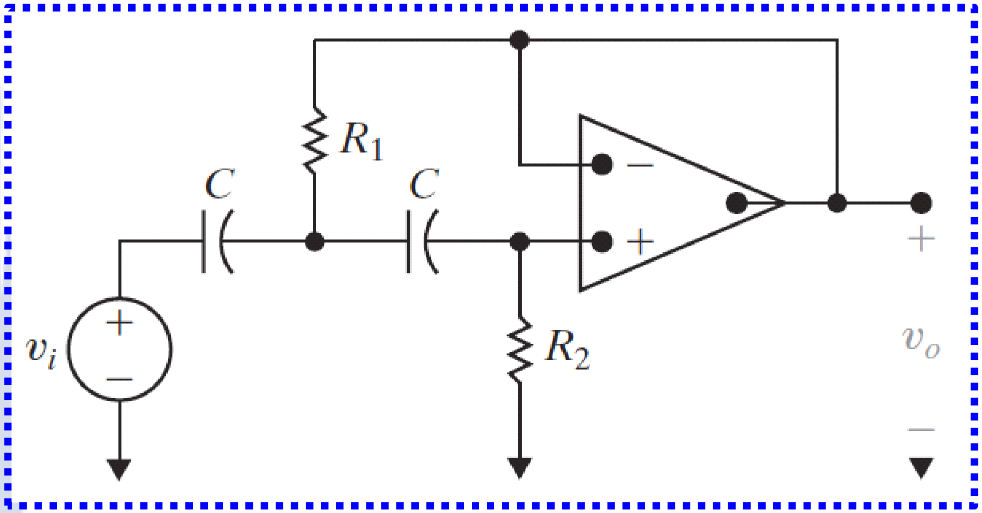






Filtro Buterworth passa-altas

- Função de transferência para o circuito passa-altas de 2a ordem.



$$H(s) = \frac{s^2}{s^2 + b_1 s + 1}$$

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{s^2}{s^2 + \frac{2}{R_2 C}s + \frac{1}{R_1 R_2 C^2}}.$$

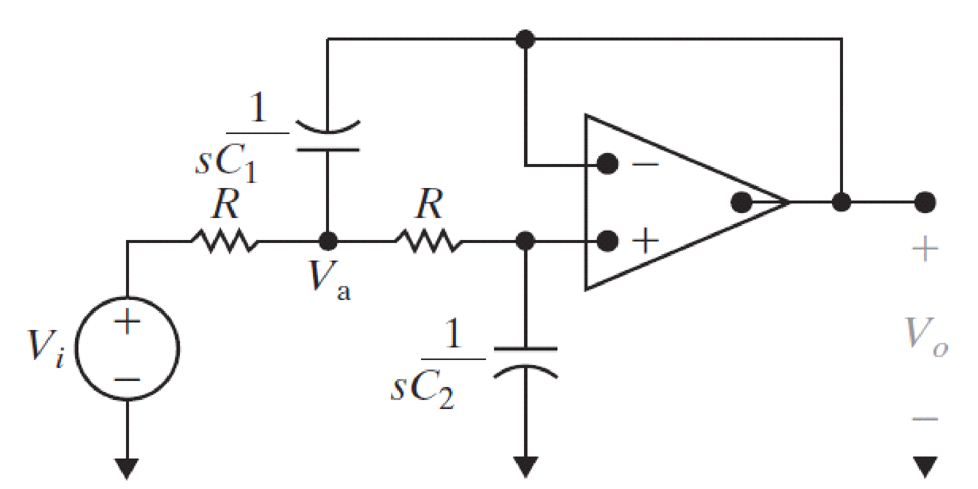
- Fazendo C=1F, temos:

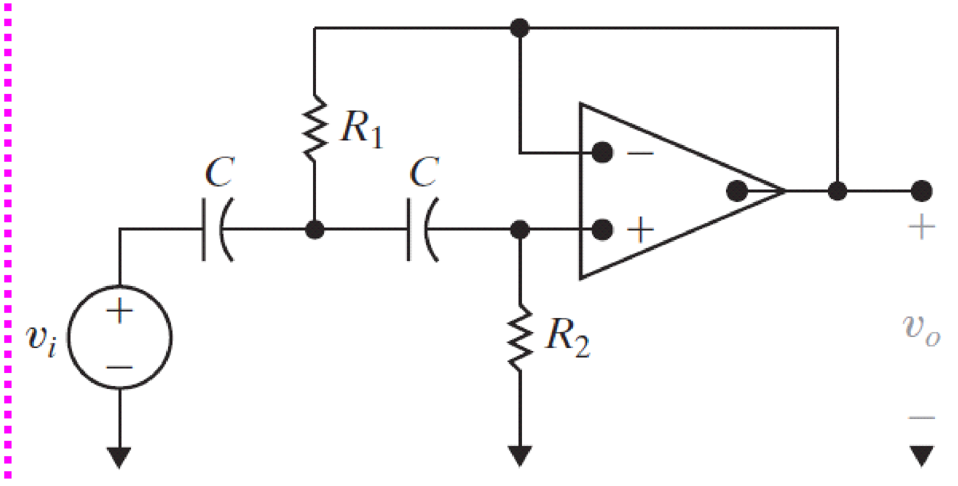
$$H(s) = \frac{s^2}{s^2 + \frac{2}{R_2}s + \frac{1}{R_1 R_2}}.$$

$$b_1 = \frac{2}{R_2} \quad \text{e} \quad 1 = \frac{1}{R_1 R_2}.$$

Relação entre os Filtros Buterworth passa-baixas e passa-altas e H(s) protótipo

- Obtemos o P-altas, trocando Cs e Rs no P-baixas.





- Obtemos H(s) do p-altas (protótipo) substituindo s por 1/s no H(s) do p-baixas (protótipo).

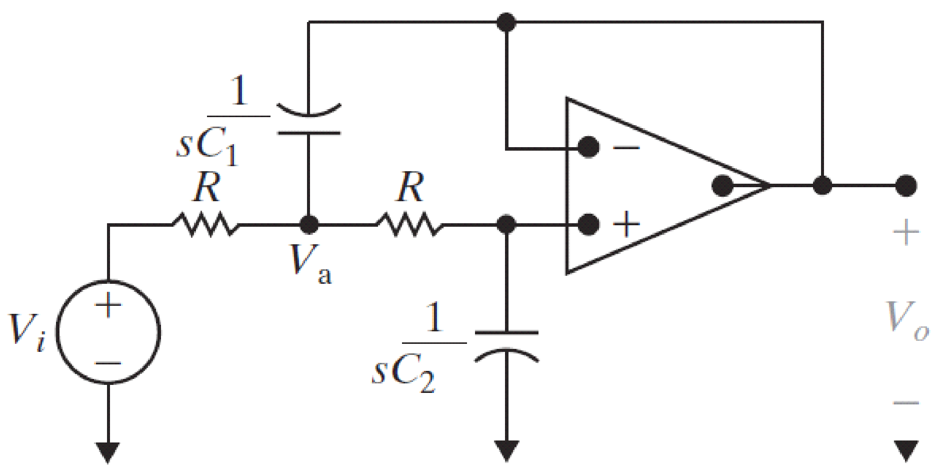
$$H(s)=\frac{1}{s^2+b_1 s+1}$$

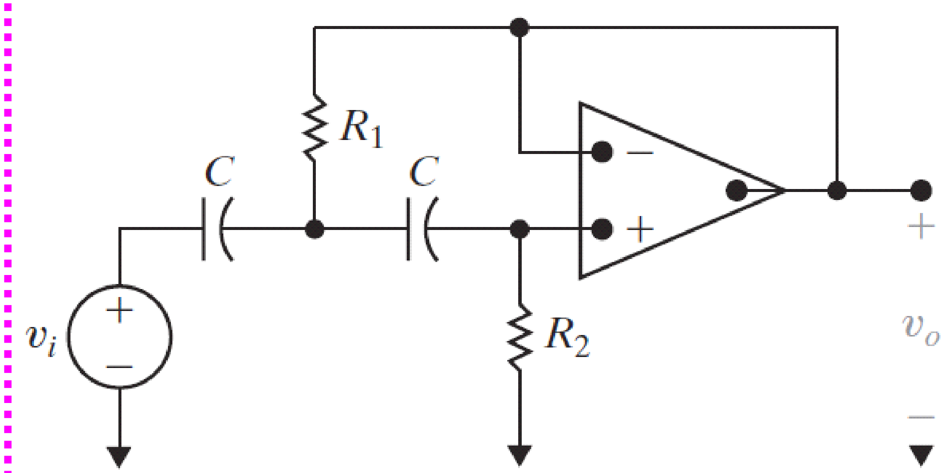
$$H(s)=\frac{s^2}{s^2+b_1 s+1}$$

Projeto de filtros passa-baixas ou passa-altas Butterworth

- Calcular valores de R e C, com base nos polinômios de Butterworth normalizados.

- Realizar mudanças de escala de freqüência e amplitude → circuito com valores reais de componentes e $\omega_c \neq 1$rad/s.





$$H(s) = \frac{1}{s^2 + b_1 s + 1}$$

$$H(s) = \frac{s^2}{s^2 + b_1 s + 1}$$

Projeto de filtros passa-faixa e rejeita-faixa Butterworth

- Passa-faixa: obtido por passa-baixas e passa-altas em cascata.

- Rejeita-faixa: obtido por passa-baixas e passa-altas em paralelo.

PROBLEMA: esta abordagem leva a filtros com valores baixos de Q → técnica funciona para freqüências de corte amplamente espaçadas.

Projeto de filtros passa-faixa Butterworth

- Supondo que p-baixas e p-altas tem a mesma freq. corte → condição para o maior Q possível p/ p-faixa obtido por cascata.

$$H(s) = \left(\frac{-\omega_c}{s + \omega_c}\right)\left(\frac{-s}{s + \omega_c}\right)$$

$$= \frac{s\omega_c}{s^2 + 2\omega_c s + \omega_c^2}$$

$$= \frac{0{,}5\beta s}{s^2 + \beta s + \omega_c^2}.$$

Que está na forma padrão de um filtro passa-faixa.

$$\beta = 2\omega_c,$$

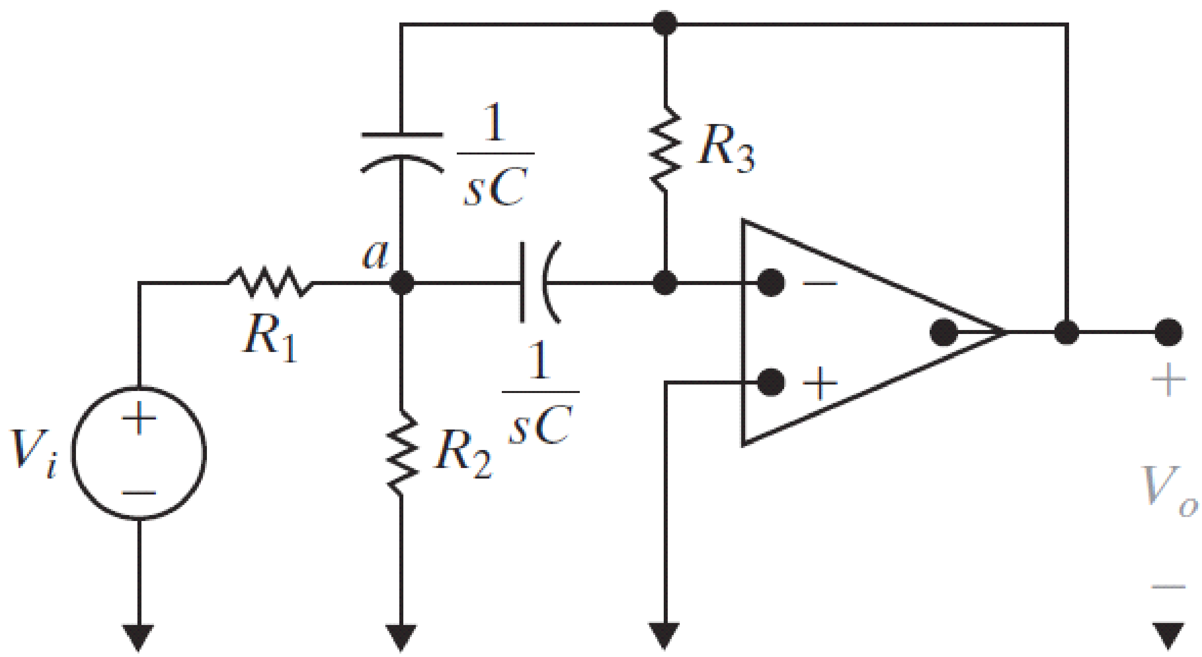
$$\omega_o^2 = \omega_c^2.$$

$$Q = \frac{\omega_o}{\beta} = \frac{\omega_c}{2\omega_c} = \frac{1}{2}.$$

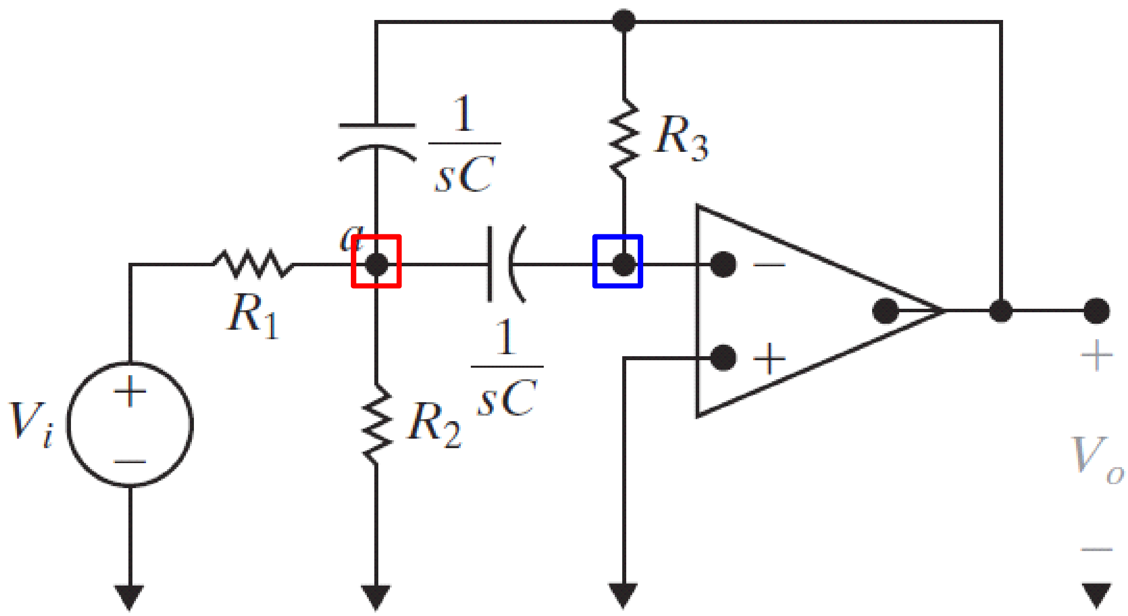
Maior Q possível com pólos discretos reais.

Projeto de filtros passa-faixa Butterworth

- Filtros com valores mais elevados de Q -> Precisamos de um circuito cuja função de transferência apresente pólos complexos conjugados.



Projeto de filtros passa-faixa Butterworth



$$\boxed{\frac{V_a}{1/sC} = \frac{-V_o}{R_3}.}$$

$$V_a = \frac{-V_o}{sR_3C}.$$

$$\boxed{\frac{V_i - V_a}{R_1} = \frac{V_a - V_o}{1/sC} + \frac{V_a}{1/sC} + \frac{V_a}{R_2}.}$$

$$V_i = (1 + 2sR_1C + R_1/R_2)V_a - sR_1CV_o.$$

Projeto de filtros passa-faixa Butterworth

$$V_a = \frac{-V_o}{sR_3C}.$$

$$V_i = (1 + 2sR_1C + R_1/R_2)V_a - sR_1CV_o.$$

$$H(s) = \frac{\dfrac{-s}{R_1C}}{s^2 + \dfrac{2}{R_3C}s + \dfrac{1}{R_{eq}R_3C^2}},$$

onde $$R_{eq} = R_1 \| R_2 = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}.$$

Projeto de filtros passa-faixa Butterworth

$$H(s) = \frac{\dfrac{-s}{R_1C}}{s^2 + \dfrac{2}{R_3C}s + \dfrac{1}{R_{eq}R_3C^2}},$$

Está na forma de um filtro passa-faixa

$$H(s) = \frac{K\beta s}{s^2 + \beta s + \omega_o^2}$$

$$\beta = \frac{2}{R_3C};$$

$$K\beta = \frac{1}{R_1C};$$

$$\omega_o^2 = \frac{1}{R_{eq}R_3C^2}.$$

$$R_{eq} = R_1 \| R_2 = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}.$$

Projeto de filtros passa-faixa Butterworth

Definição de um filtro protótipo baseado no circuito proposto, fazendo ω_o=1rad/s e C=1F;

$$\beta = \frac{2}{R_3 C};$$

$$K\beta = \frac{1}{R_1 C};$$

$$\omega_o^2 = \frac{1}{R_{eq} R_3 C^2}.$$

$$R_{eq} = R_1 \| R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Logo, as resistências podem ser dadas em função do ganho (K) e do fator de qualidade (Q).

$$R_1 = Q / K$$

$$R_2 = Q / \left(2Q^2 - K \right)$$

$$R_3 = 2Q$$

Projeto de filtros passa-faixa: Exemplo

- Projetar um filtro Butterworth passa-faixa de alto Q com f_c=3.000Hz, Q=10 e ganho na faixa de passagem K=2. Utilizar capacitores de 0,01μF.

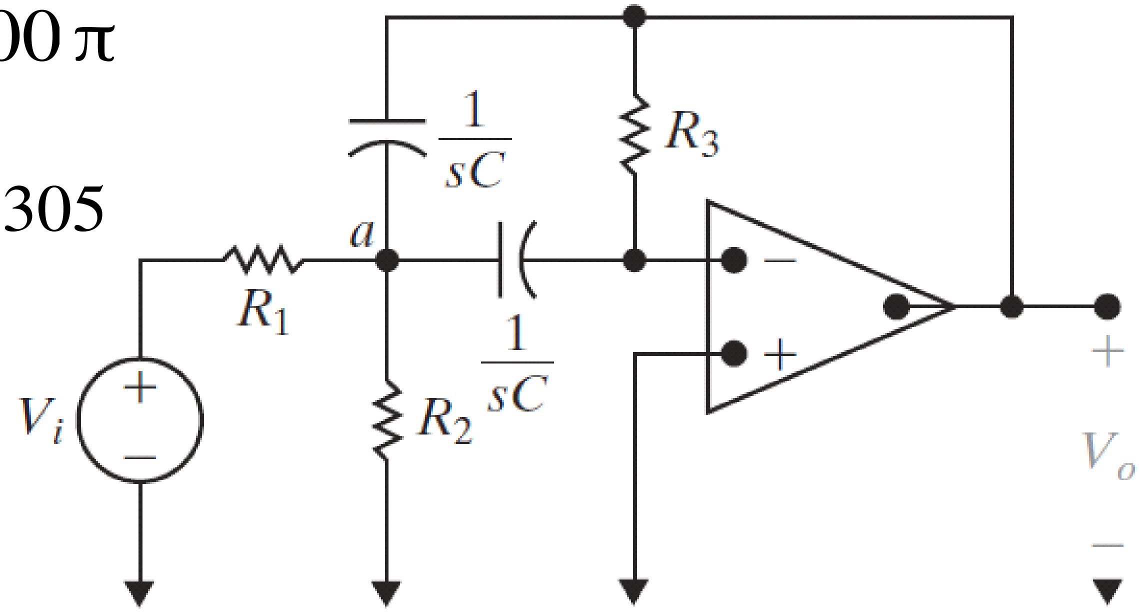
$$R_1 = Q/K = 10/2 = 5 \qquad R_3 = 2Q = 20$$

$$R_2 = Q/\left(2Q^2 - K\right) = 10/\left(2x100 - 2\right) = 10/198$$

- Fatores de escala:

$$k_f = 2\pi x3.000/1 = 6.000\pi$$

$$k_a = \frac{1}{\left(C'k_f\right)}C = 10^8/k_f \approx 5305$$



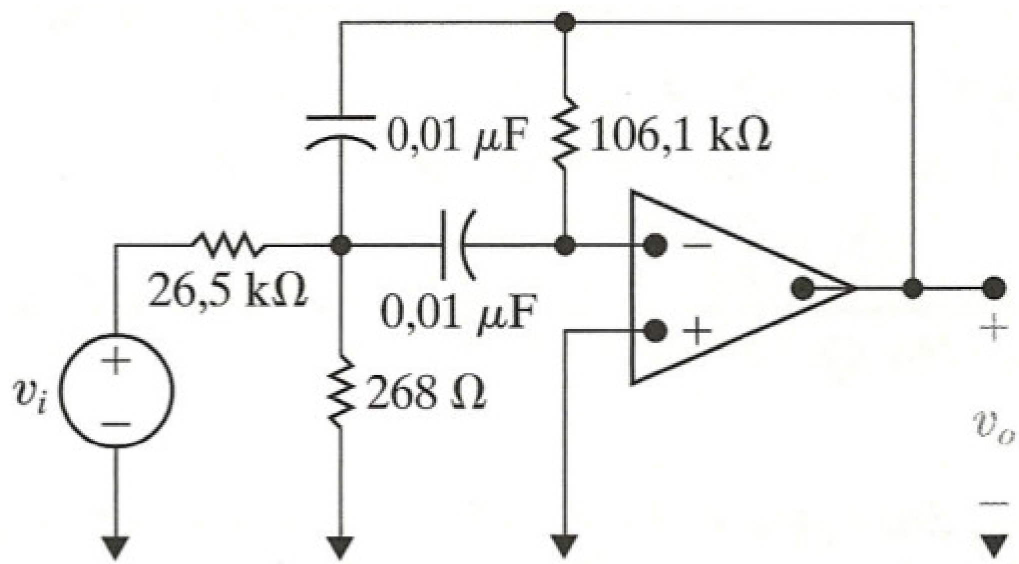
Projeto de filtros passa-faixa: Exemplo

- Projetar um filtro Butterworth passa-faixa de alto Q com f_c=3.000Hz, Q=10 e ganho na faixa de passagem K=2. Utilizar capacitores de 0,01µF.

$$R'_1 = 5\text{x}\mathrm{k}_a = 5\text{x}5305 = 26{,}5\,k\,\Omega$$

$$R'_2 = 10\mathrm{k}_a / 198 = 260$$

$$R'_3 = 20\text{x}\mathrm{k}_a = 106{,}1\,k\,\Omega$$

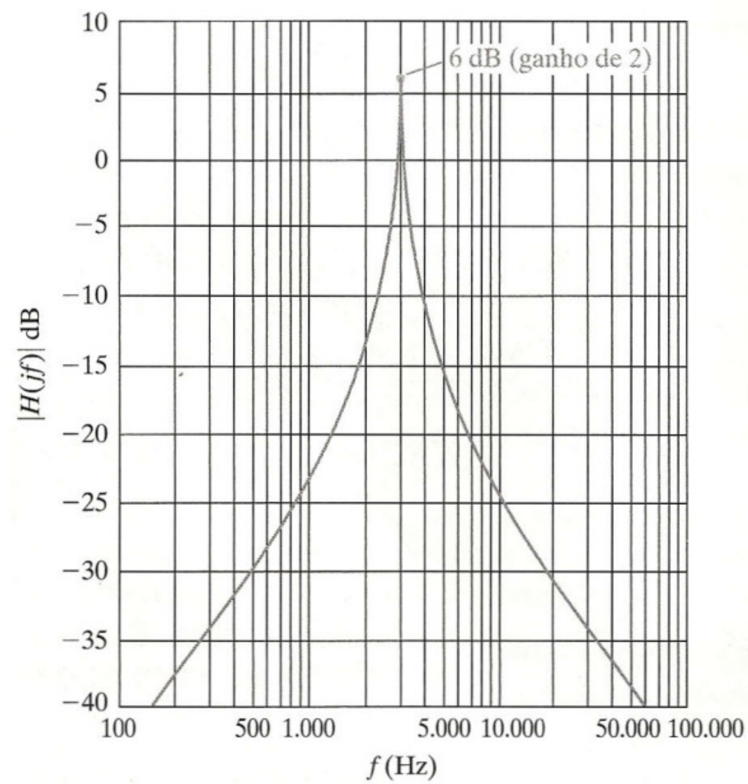


Projeto de filtros passa-faixa: Exemplo

- Projetar um filtro Butterworth passa-faixa de alto Q com f_c=3.000Hz, Q=10 e ganho na faixa de passagem K=2. Utilizar capacitores de 0,01μF.

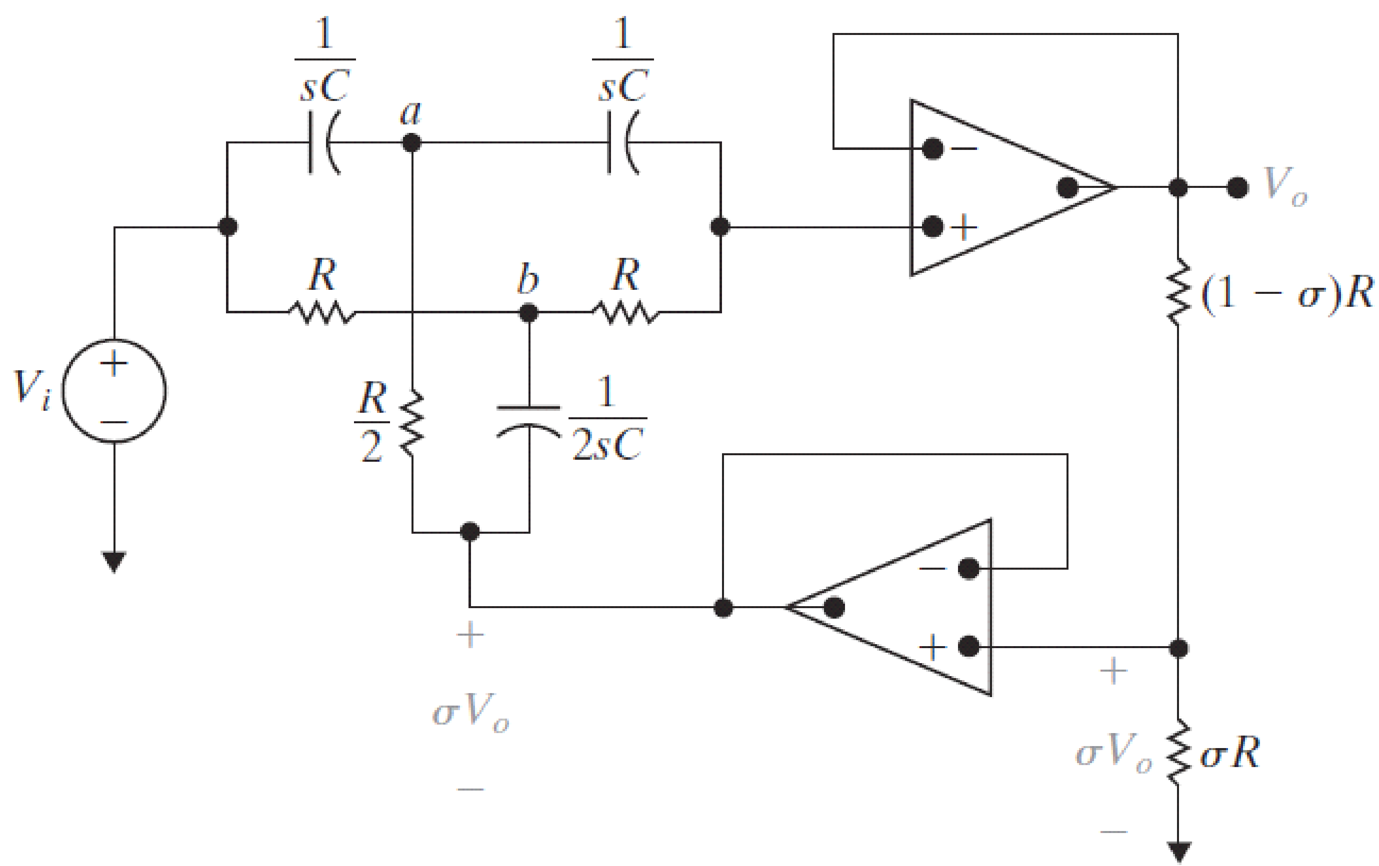
Substituindo valores de capacitores e resistências em H(s), temos:

$$H(s) = \frac{-3.770s}{s^2 + 1.885s + 355x10^6}$$



Projeto de filtros rejeita-faixa Butterworth

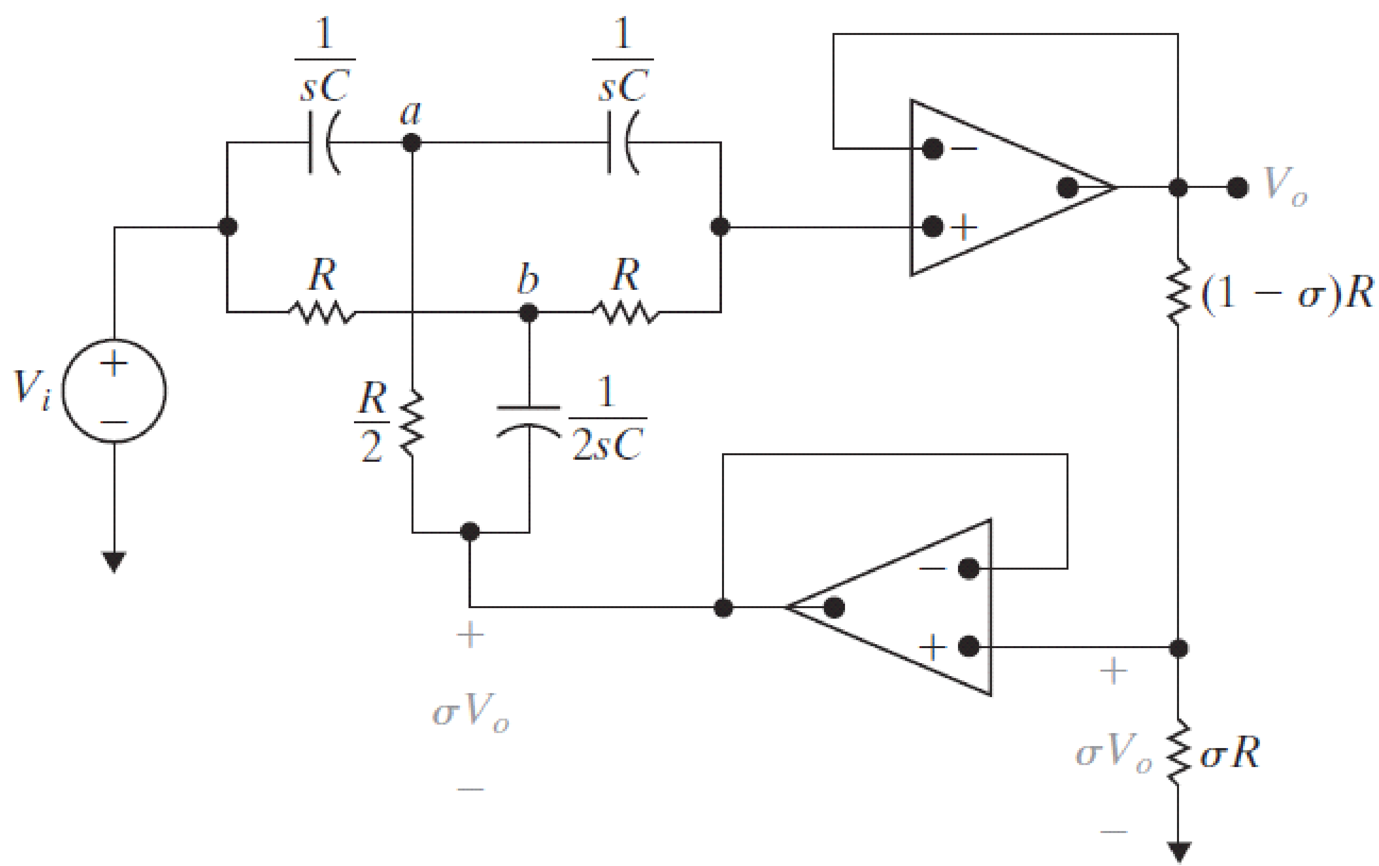
- Filtro rejeita-faixa obtido pelo paralelo de passa-baixas e passa-alta: valores baixos de Q.
- Solução: Filtro rejeita-faixa Duplo T.



Projeto de filtros rejeita-faixa Butterworth

- Soma das correntes que saem do nó a:

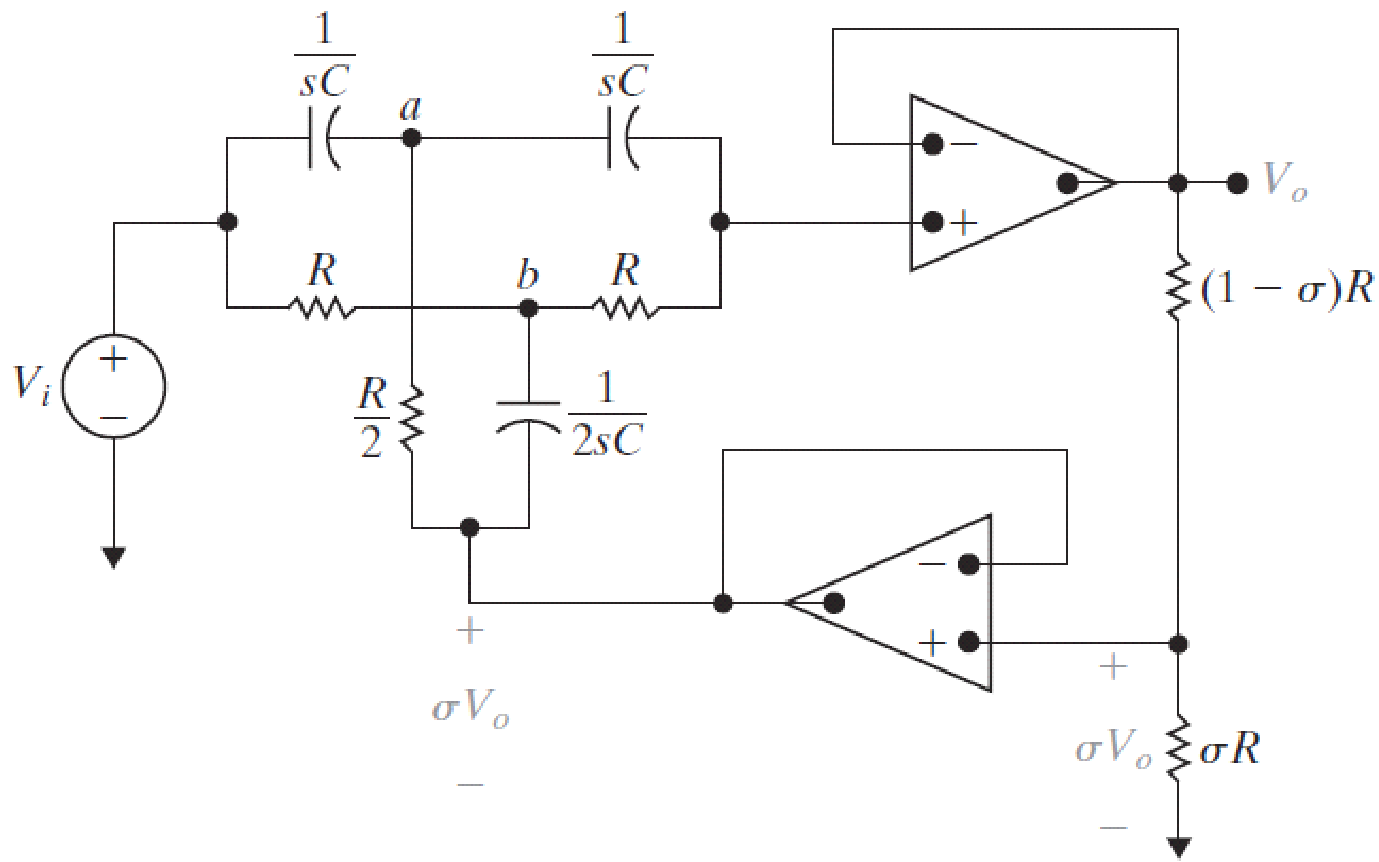
$$V_a[2sCR + 2] - V_o[sCR + 2\sigma] = sCRV_i.$$



Projeto de filtros rejeita-faixa Butterworth

- Soma das correntes que saem do nó b:

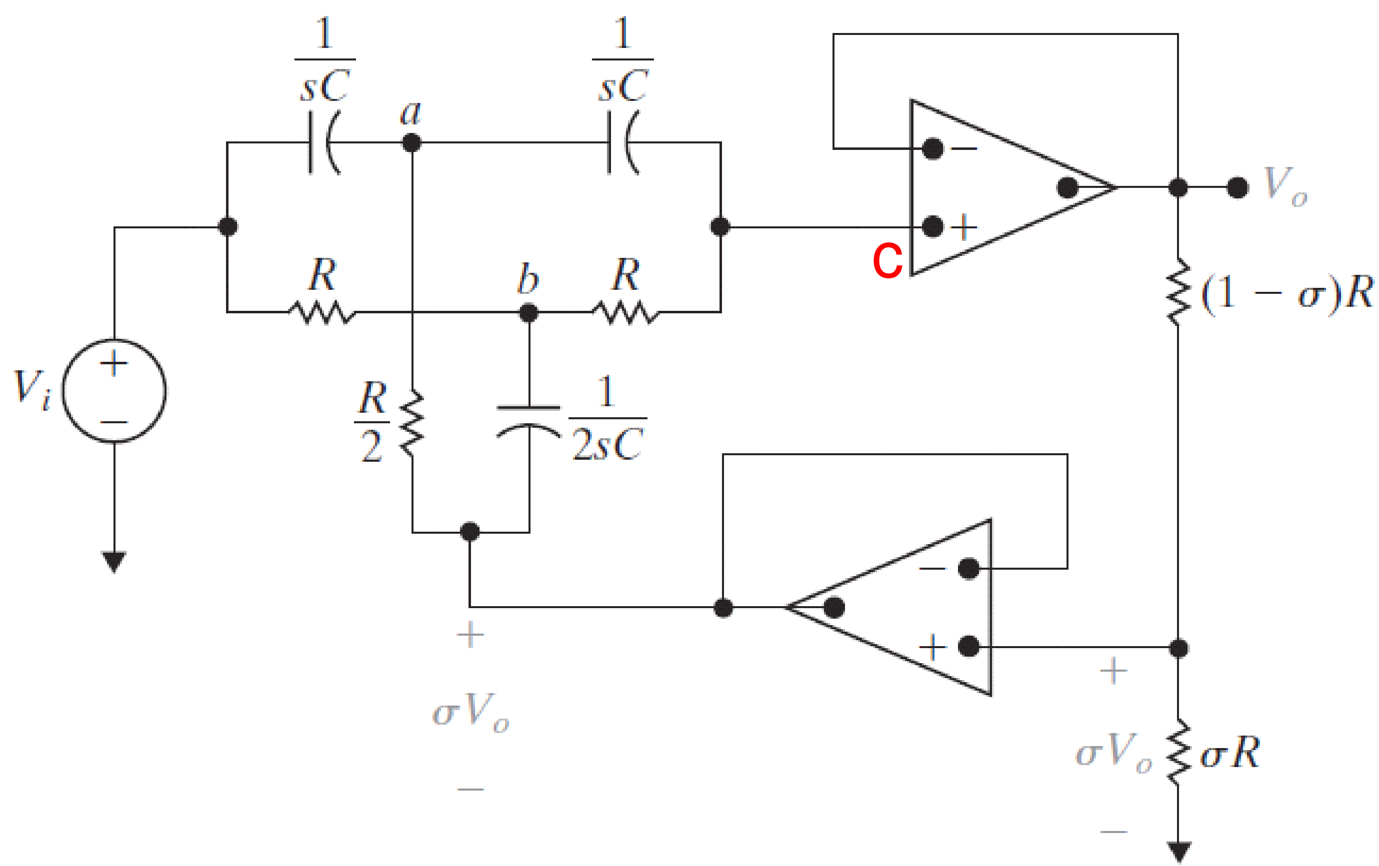
$$V_b[2 + 2RCs] - V_o[1 + 2\sigma RCs] = V_i.$$



Projeto de filtros rejeita-faixa Butterworth

- Soma das correntes que saem do nó c:

$$-sRCV_a - V_b + (sRC + 1)V_o = 0.$$



Projeto de filtros rejeita-faixa Butterworth

$$V_a[2sCR + 2] - V_o[sCR + 2\sigma] = sCRV_i.$$

$$V_b[2 + 2RCs] - V_o[1 + 2\sigma RCs] = V_i.$$

$$-sRCV_a - V_b + (sRC + 1)V_o = 0.$$

- Pela Regra de Cramer, temos:

$$V_o = \frac{\begin{vmatrix} 2(RCs + 1) & 0 & sCRV_i \\ 0 & 2(RCs + 1) & V_i \\ -RCs & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2(RCs + 1) & 0 & -(RCs + 2\sigma) \\ 0 & 2(RCs + 1) & -(2\sigma RCs + 1) \\ -RCs & -1 & RCs + 1 \end{vmatrix}}$$

Projeto de filtros rejeita-faixa Butterworth

- Pela Regra de Cramer, temos:

$$V_o = \frac{\begin{vmatrix} 2(RCs+1) & 0 & sCRV_i \\ 0 & 2(RCs+1) & V_i \\ -RCs & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2(RCs+1) & 0 & -(RCs+2\sigma) \\ 0 & 2(RCs+1) & -(2\sigma RCs+1) \\ -RCs & -1 & RCs+1 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{(R^2C^2s^2+1)V_i}{R^2C^2s^2+4RC(1-\sigma)s+1}.$$

- Da qual obtemos a função de transferência:

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{\left(s^2 + \frac{1}{R^2C^2}\right)}{\left[s^2 + \frac{4(1-\sigma)}{RC}s + \frac{1}{R^2C^2}\right]},$$

Projeto de filtros rejeita-faixa Butterworth

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{\left(s^2 + \frac{1}{R^2C^2}\right)}{\left[s^2 + \frac{4(1-\sigma)}{RC}s + \frac{1}{R^2C^2}\right]},$$

- Note que H(s) segue a forma de um filtro rejeita-faixa:

$$H(s) = \frac{s^2 + \omega_0^2}{s^2 + \beta s + \omega_0^2}.$$

- De onde podemos extrair:

$$\omega_o^2 = \frac{1}{R^2C^2}, \qquad \beta = \frac{4(1-\sigma)}{RC}.$$

Projeto de filtros rejeita-faixa Butterworth

- Temos 3 parâmetros (R,C e σ) e duas restrições de projeto ω_0 e β):

$$\omega_o^2 = \frac{1}{R^2C^2}, \qquad \beta = \frac{4(1-\sigma)}{RC}.$$

- Logo, precisamos arbitrar um valor (decisão de projeto):

$$R = \frac{1}{\omega_o C}, \qquad \sigma = 1 - \frac{\beta}{4\omega_o} = 1 - \frac{1}{4Q}.$$

Projeto de filtros rejeita-faixa: Exemplo

- Projetar um filtro Butterworth rejeita-faixa de alto Q (Duplo T) com ω_0=5000 rad/s e β=1000 rad/s. Utilizar capacitores de 1μF.

$$Q = \frac{\omega_o}{\beta} = 5 \qquad R = \frac{1}{\omega_o C} = \frac{1}{5.000\,x\,1\,\mathrm{x}\,10^{-6}} = 200\,\Omega$$

- Logo: $\sigma = 1 - \frac{1}{4Q} = 0{,}95$

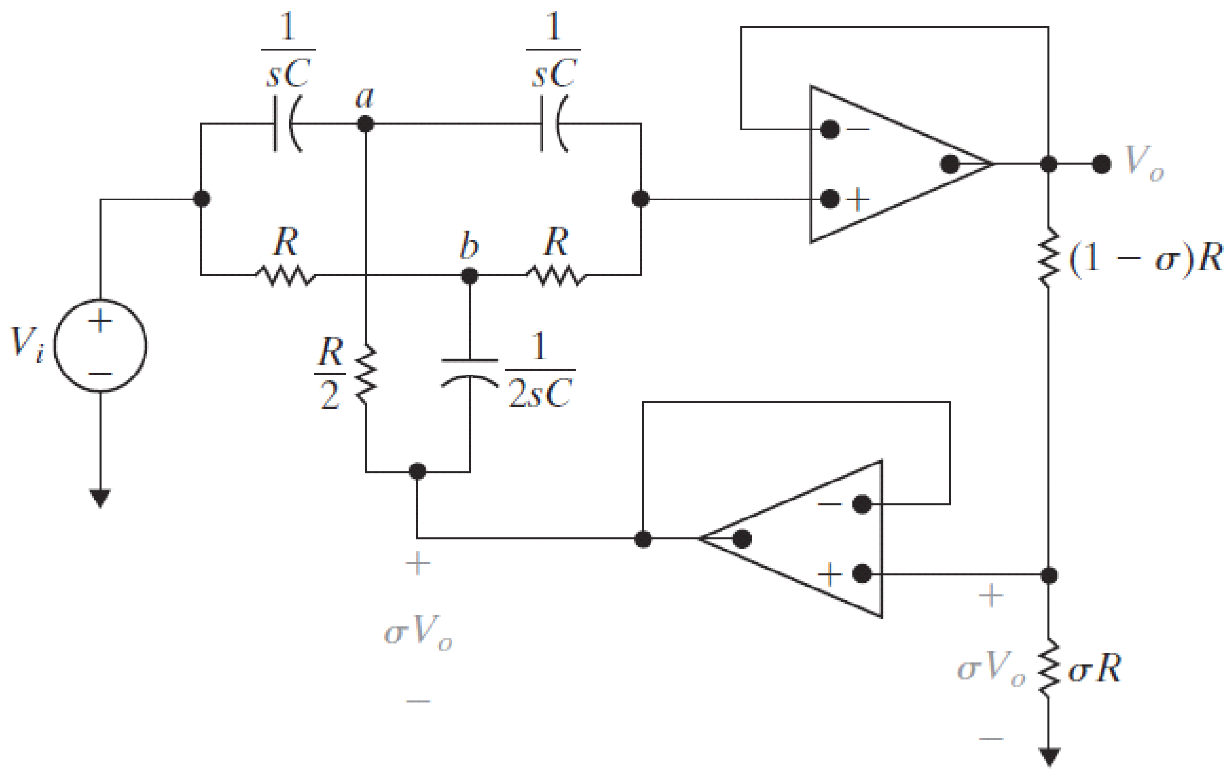
- Outros componentes:

$$R/2 = 100\,\Omega$$

$$\sigma\,R = 190\,\Omega$$

$$(1 - \sigma\,R) = 10\,\Omega$$

$$2\mathrm{C} = 2\mu\,F$$



Projeto de filtros rejeita-faixa: Exemplo

- Projetar um filtro Butterworth rejeita-faixa de alto Q (Duplo T) com ω_0=5000 rad/s e β=1000 rad/s. Utilizar capacitores de 1μF.