Circuitos Elétricos III

Prof. Danilo Melges

Depto. de Eng. Elétrica

Universidade Federal de Minas Gerais

Filtros Ativos – parte 1

Vantagens dos filtros ativos

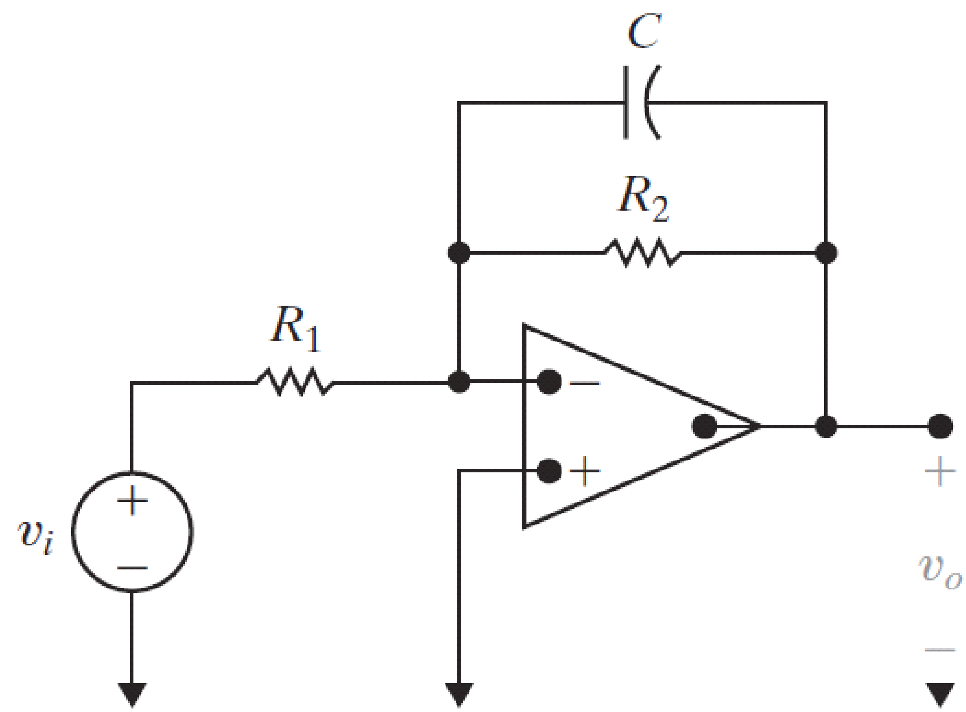
- Filtros sem utilizar indutores, que introduzem efeitos eletromagnéticos que comprometem as características desejadas.

- Permitem o controle da amplificação.

- São utilizados quando ganho, variação de carga e tamanho físico são importantes nas especificações do projeto.

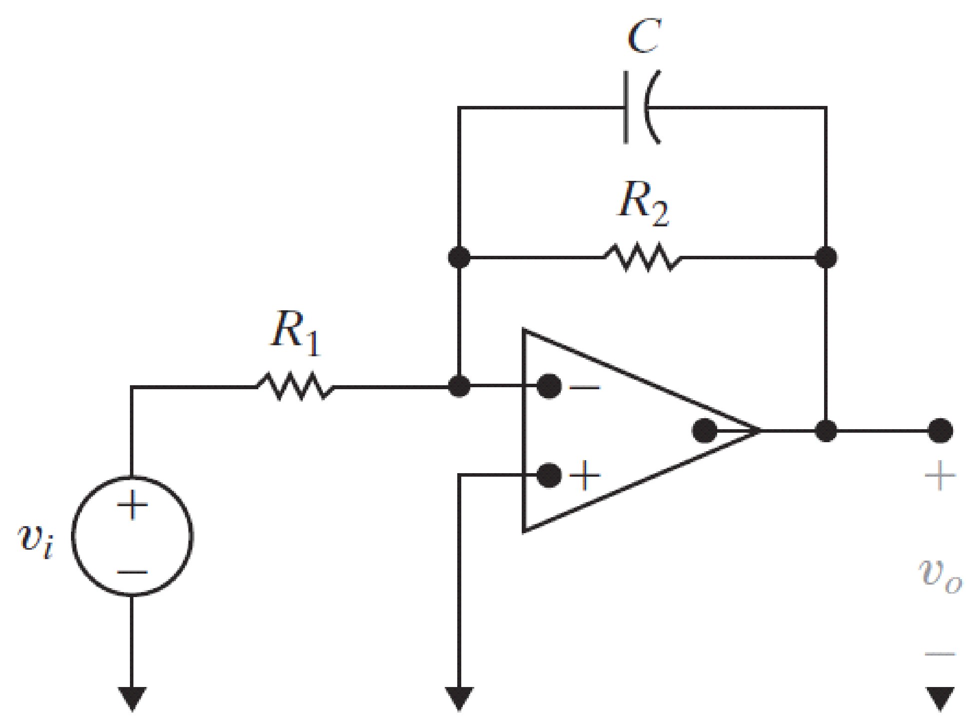
Filtro ativo passa-baixas

- Analise qualitativamente o circuito...

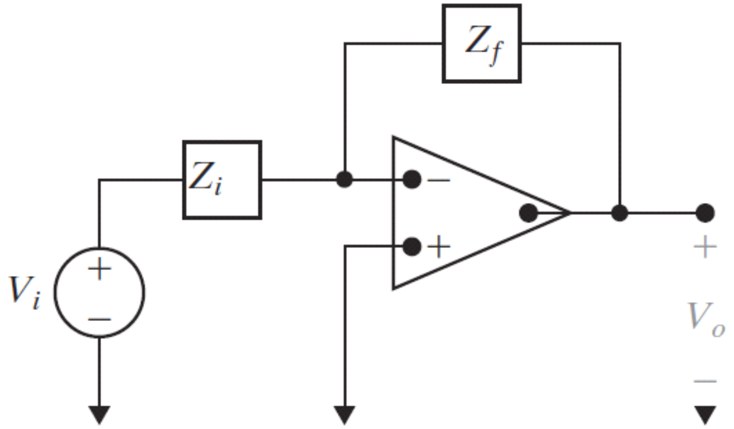


Filtro ativo passa-baixas

- P/ baixas freqüências: C age como um circuito aberto e o amp op funciona como um amplificador inversor de ganho $-R_2/R_1$.
- P/freqüências elevadas: C age como um curto circuito, ligando a saída ao terra (terra virtual).



Filtro ativo passa-baixas de 1a ordem



$$H(s) = \frac{-Z_f}{Z_i}$$

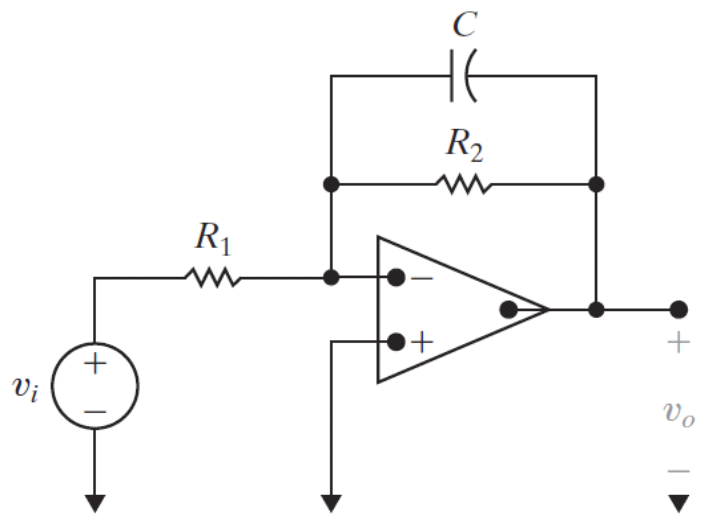
$$= \frac{-R_2 \| \left(\frac{1}{sC}\right)}{R_1}$$

$$= -K\frac{\omega_c}{s + \omega_c},$$

onde

$$K = \frac{R_2}{R_1},$$

$$\omega_c = \frac{1}{R_2C}.$$



- A expressão H(s) tem a forma de um filtro passa-baixas.
- Ganho na banda passante e freqüência de corte podem ser definidos de forma independente.

Mudança de escala

- Por conveniência, pode-se projetar filtros usando valores como 1Ω, 1H e 1F.
- E depois transformamos para valores realistas usando mudança de escala.
- Há dois tipos de escala: de amplitude e de frequência.

Mudança de escala

- **Escala de amplitude:** multiplica-se a impedância a uma dada frequência por um fator de escala.

$$R' = k_a R, \quad L' = k_a L, \quad \text{e} \quad C' = C/k_a.$$

Onde k_a é o fator de escala

- **Escala de freqüência:** os parâmetros são alterados para que as impedâncias sejam a mesma que na freqüência original.

$$R' = R, \quad L' = L/k_f, \quad \text{e} \quad C' = C/k_f.$$

Onde k_f é o fator de escala

Mudança de escala

- A escala de um circuito pode ser mudada em amplitude e freqüência simultaneamente.

$$R' = k_a R,$$

$$L' = \frac{k_a}{k_f} L,$$

$$C' = \frac{1}{k_a k_f} C.$$

Mudança de escala no projeto de filtros

1. Freqüência de corte igual a ω_c=1rad/s no caso de filtros passa-baixas ou passa-altas (no caso de passa-faixa ou rejeita-faixa, faça ω_0=1rad/s).

2. Seleção de um capacitor de 1F.

3. Cálculo dos resistores para obter um dado ganho na faixa de passagem.

4. Mudança de escala para se obter valores realistas dos componentes para a freqüência de corte desejada.

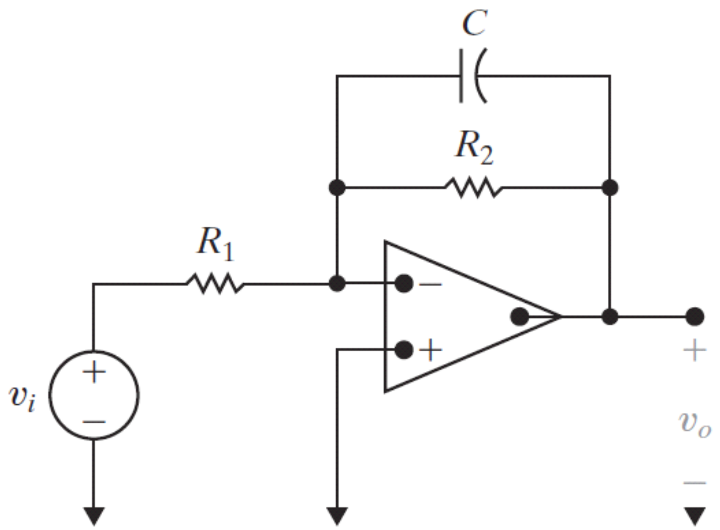
Projeto de um passa-baixas

Calcular C e R_2 para que o circuito funcione como um passa-baixas com $R_1=1$, ganho na banda passante K=1 e freqüência de corte $\omega_c=1$ rad/s.

Projeto de um passa-baixas

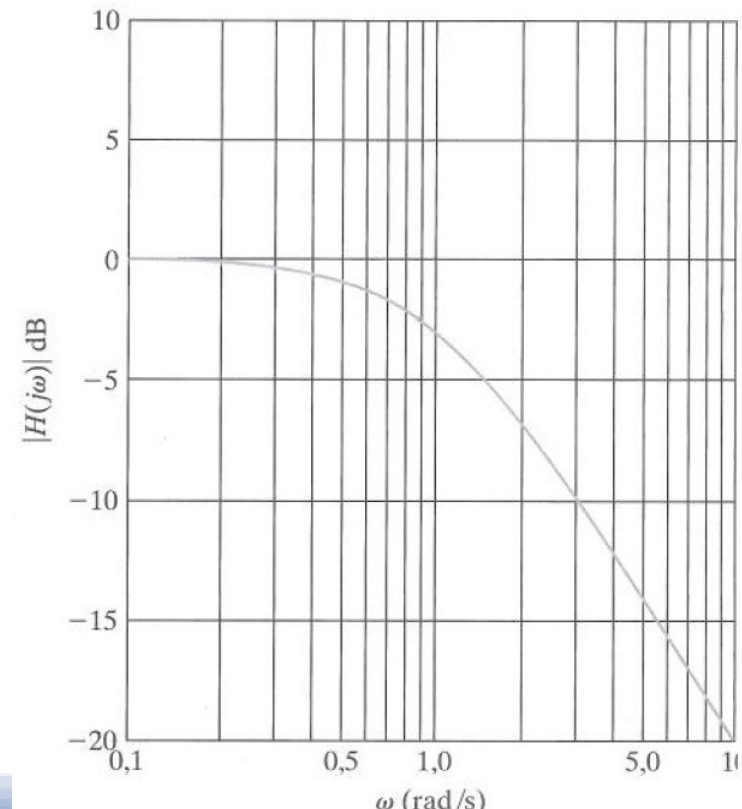
Calcular C e R_2 para que o circuito funcione como um passa-baixas com R_1=1, ganho na banda passante K=1 e freqüência de corte ω_c=1 rad/s.

Filtro protótipo



$$R_2 = K\, R_1 = 1\text{x}1 = 1\,\Omega$$

$$C = \frac{1}{R_2\,\omega_c} = \frac{1}{1\text{x}1} = 1\text{F}$$



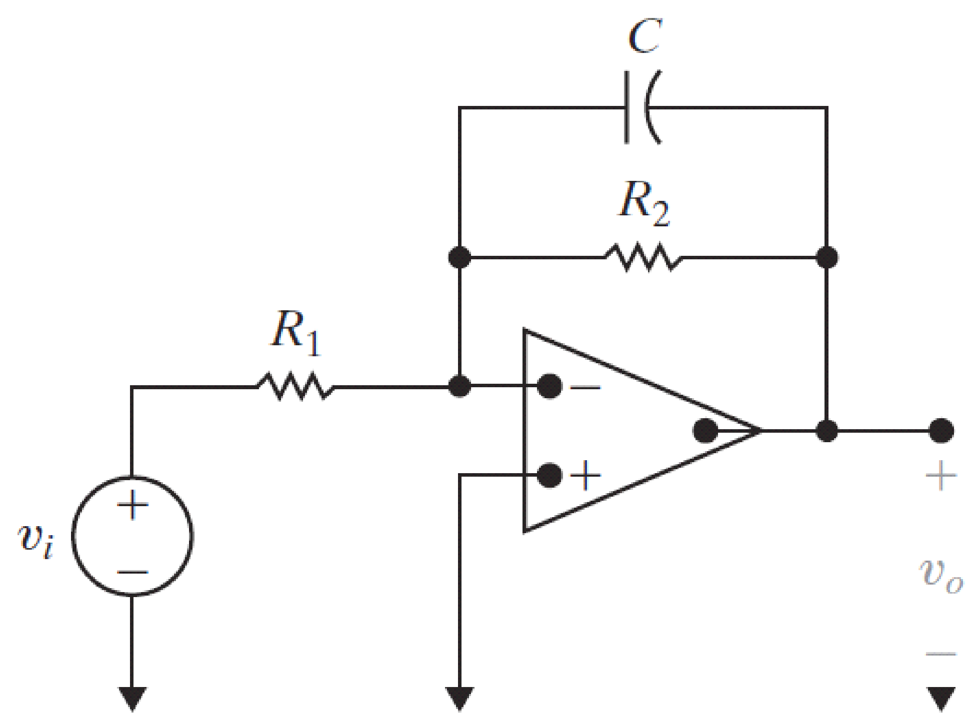
Função de transferência:

$$H(s) = -K\frac{\omega_c}{s+\omega_c} = \frac{-1}{s+1}$$

Projeto de um passa-baixas

Projetar um passa-baixas (calcular R_1 e R_2) com ganho K=5, freqüência de corte fc'=1000 Hz e C'=0,01μF. Basear-se no filtro protótipo.

Filtro protótipo



Projeto de um passa-baixas

Projetar um passa-baixas (calcular R_1 e R_2) com ganho K=5, freqüência de corte fc'=1000 Hz e C'=0,01µF. Basear-se no filtro protótipo.

Calculamos fator de escala de freqüência:

$$k_f = \omega_c' / \omega_c = 2\pi(1000)/1 = 6283{,}185$$

Calculamos fator de escala de amplitude:

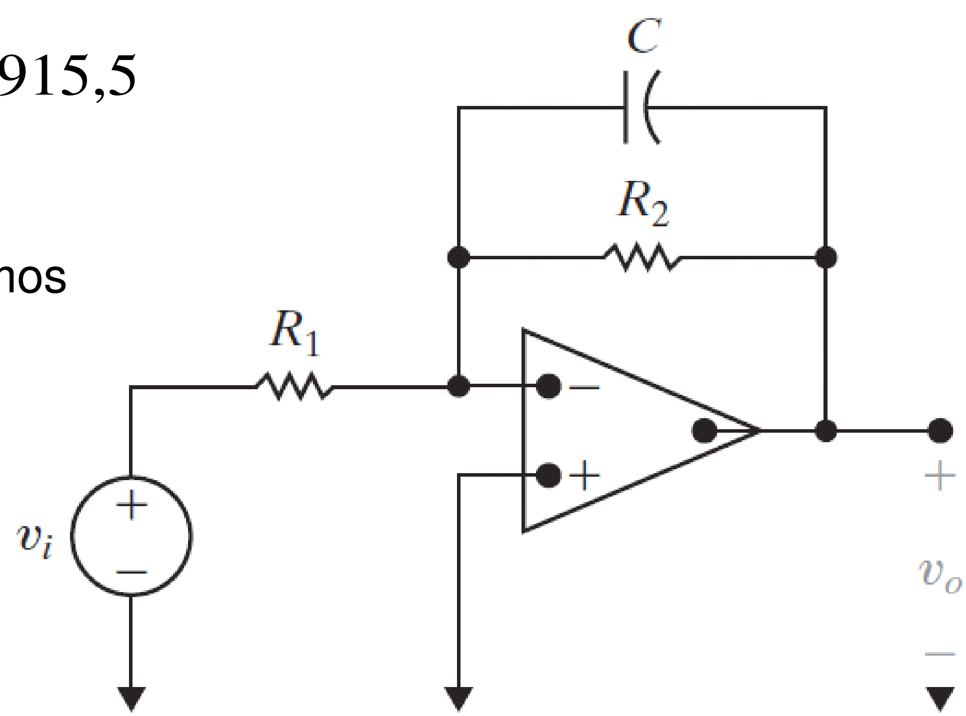
$$k_a = \frac{1}{k_f}\frac{C}{C'} = \frac{1}{(6283{,}185)(10^{-8})} = 15915{,}5$$

Com o fator de escala de amplitude, podemos calcular os resistores:

$$R_1' = k_a R = (15915{,}5)(1) = 15915{,}5\,\Omega$$

$$R_2' = R_1' = 15915{,}5\,\Omega$$

Filtro protótipo



Projeto de um passa-baixas

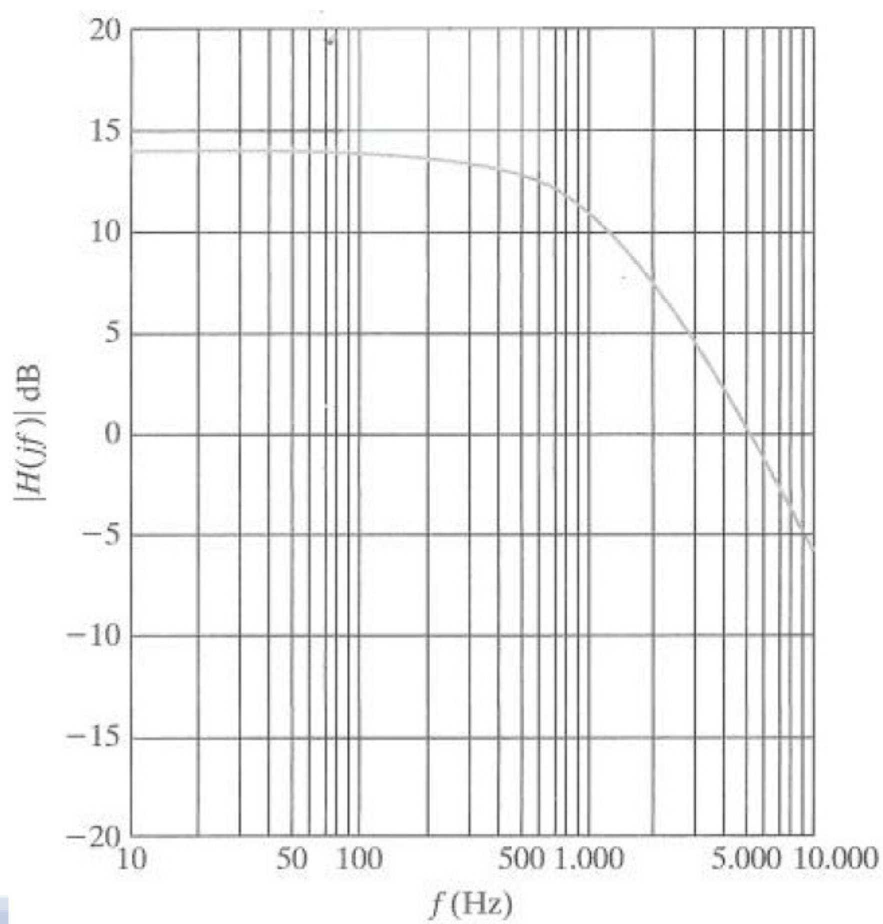
Projetar um passa-baixas (calcular R_1 e R_2) com ganho K=5, freqüência de corte fc'=1000 Hz e C'=0,01μF. Basear-se no filtro protótipo.

$$R_1^{'}=k_a R=(15915,5)(1)=15915,5\,\Omega$$

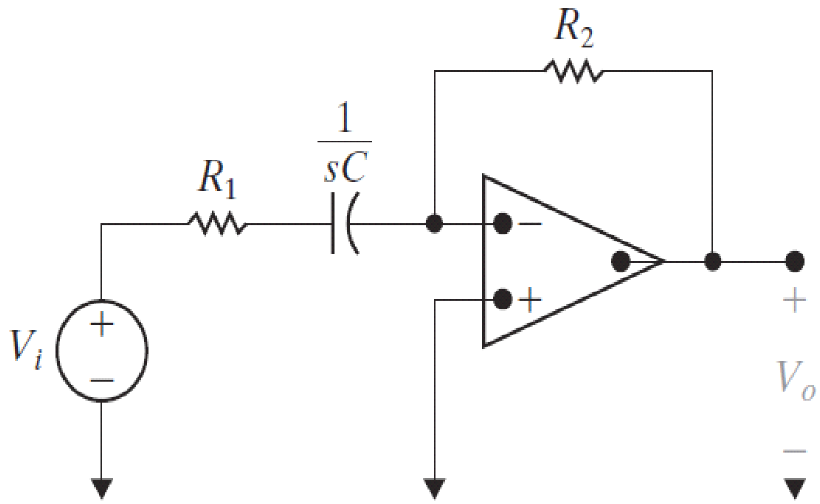
$$R_2^{'}=R_1^{'}=15915,5\,\Omega$$

Para ajustar o ganho, precisamos mexer em R_1 (mudar R_2 altera a freqüência de corte):

$$R_1^{'}=15915,5/5=3183,1\,\Omega$$

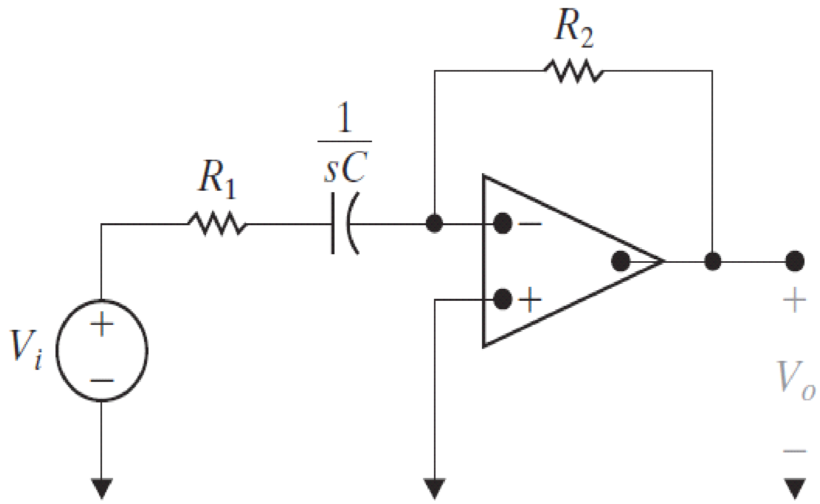


Filtro ativo passa-altas de 1a ordem



Analisando qualitativamente.

Filtro ativo passa-altas de 1a ordem



$$H(s) = \frac{-Z_f}{Z_i}$$

$$= \frac{-R_2}{R_1 + \dfrac{1}{sC}}$$

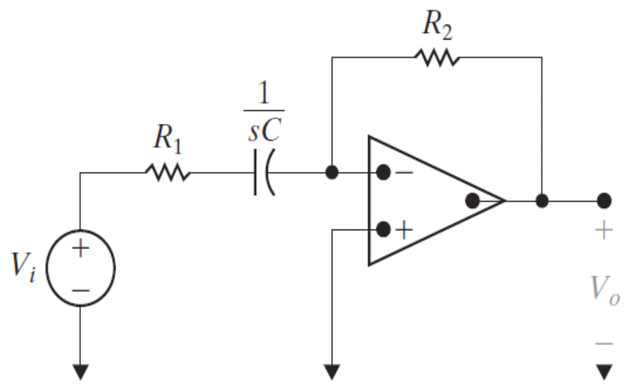
$$H(s) = \frac{-R_2}{R_1} \frac{s}{s + \dfrac{1}{R_1 C}} = -K \frac{s}{s + \omega_c},$$

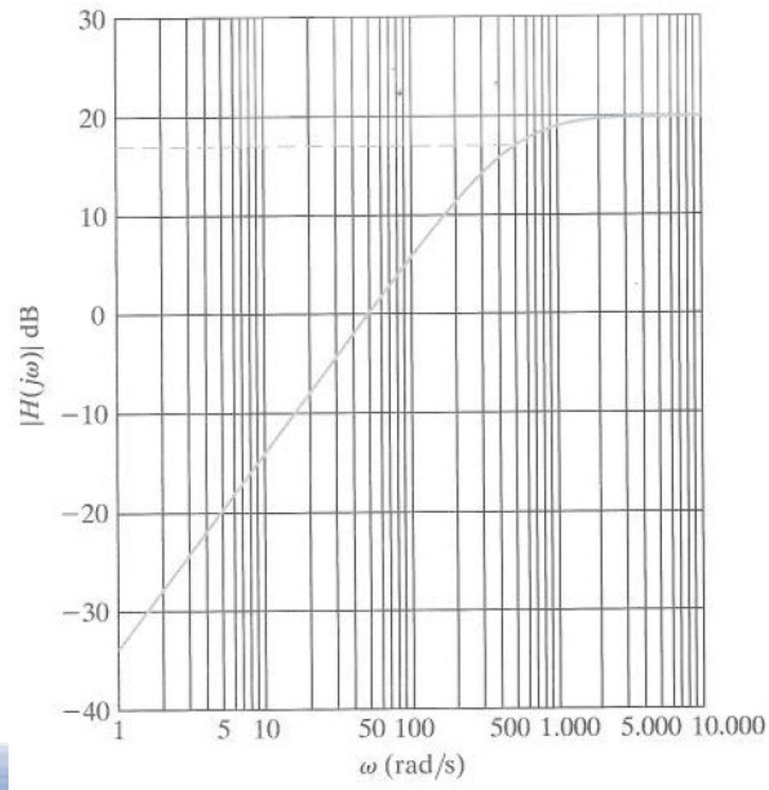
onde $K = \dfrac{R_2}{R_1},$ e $\omega_c = \dfrac{1}{R_1 C}.$

- H(s) tem a forma de um filtro passa-altas passivo.
- Ganho na banda passante: K.

Projeto de um passa-altas

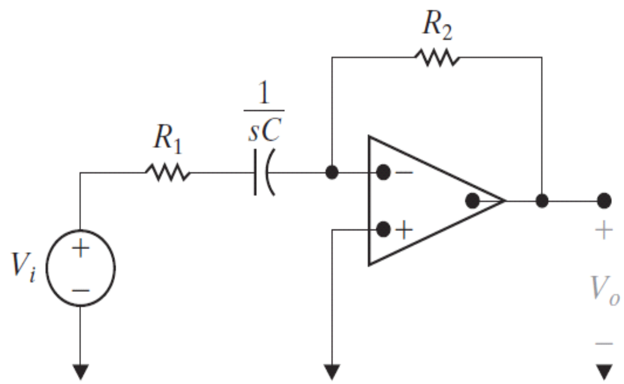
Calcular os resistores que produzem o diagrama de Bode a seguir, sabendo-se que C=0,1μF.





Projeto de um passa-altas

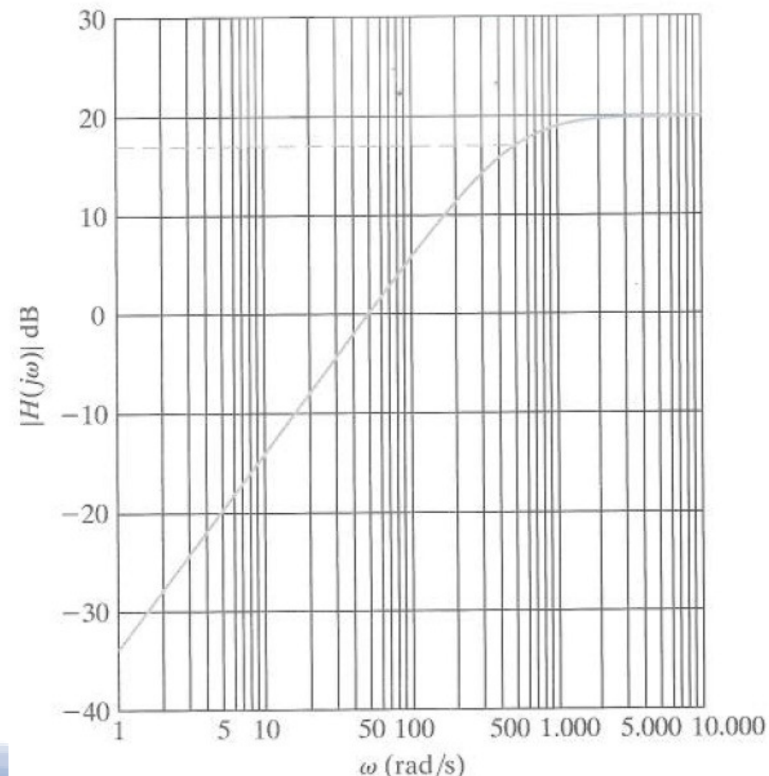
Calcular os resistores que produzem o diagrama de Bode a seguir, sabendo-se que C=0,1μF.



Do diagrama, K=10 e ω'_c=500.

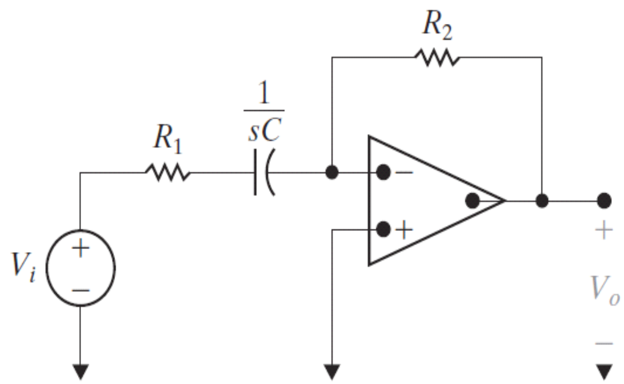
Função de transferência:

$$H(s) = -K\frac{s}{s+\omega_c} = -10\frac{s}{s+500}$$

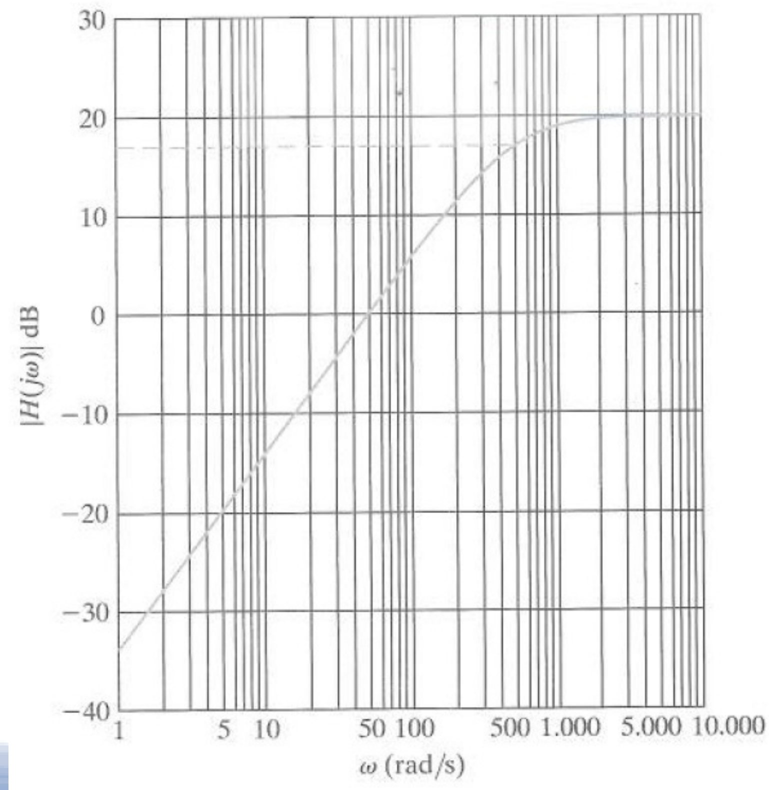


Projeto de um passa-altas

Calcular os resistores que produzem o diagrama de Bode a seguir, sabendo-se que C=0,1μF.



$$H(s) = -K \frac{s}{s+\omega_c} = -10 \frac{s}{s+500}$$



Temos, então:

$$K = \frac{R_2}{R_1} = 10 \qquad \frac{1}{R_1 C} = 500 \qquad C = 0{,}1\,\mu F$$

De onde obtemos:

$$R_1 = 20\text{k}\,\Omega \qquad R_2 = 200\text{k}\,\Omega$$

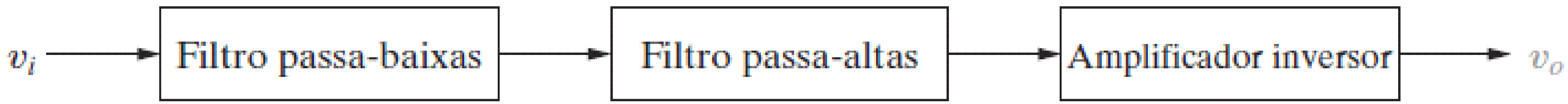
Filtros ativos passa-faixa

Como obter um filtro passa faixa ativo?

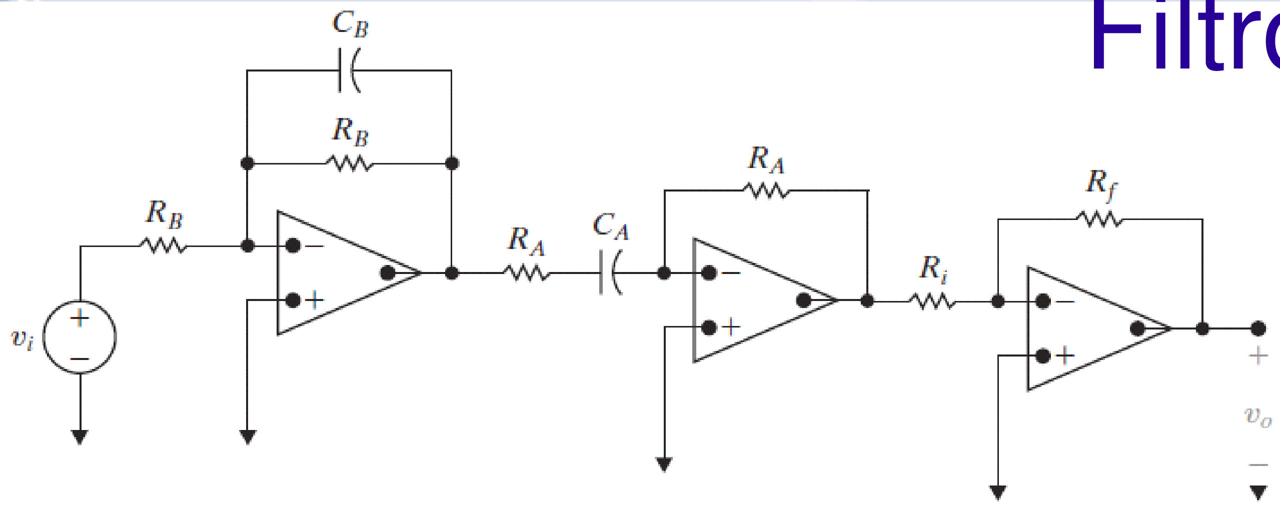
Filtros ativos passa-faixa

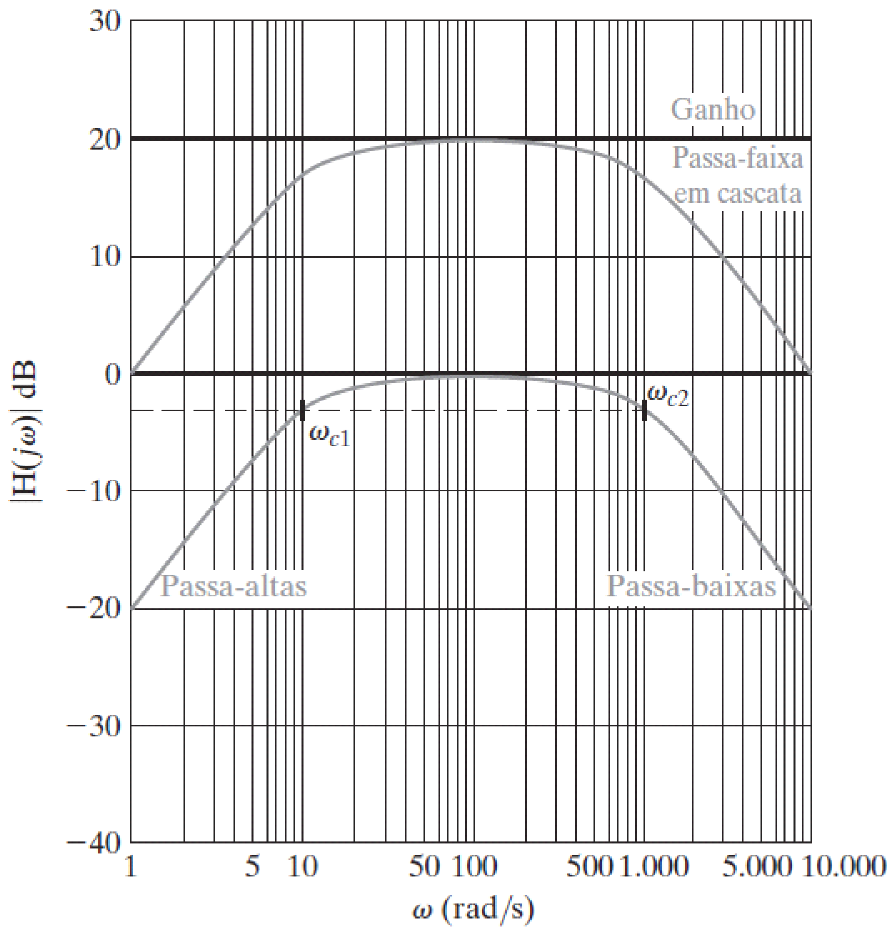
Ligação em cascata

1. Filtro passa-baixas de ganho unitário e freqüência de corte ω_{c2}.
2. Filtro passa-altas de ganho unitário e freqüência de corte ω_{c1}.
3. Um amplificador com ganho igual ao desejado na faixa de passagem.

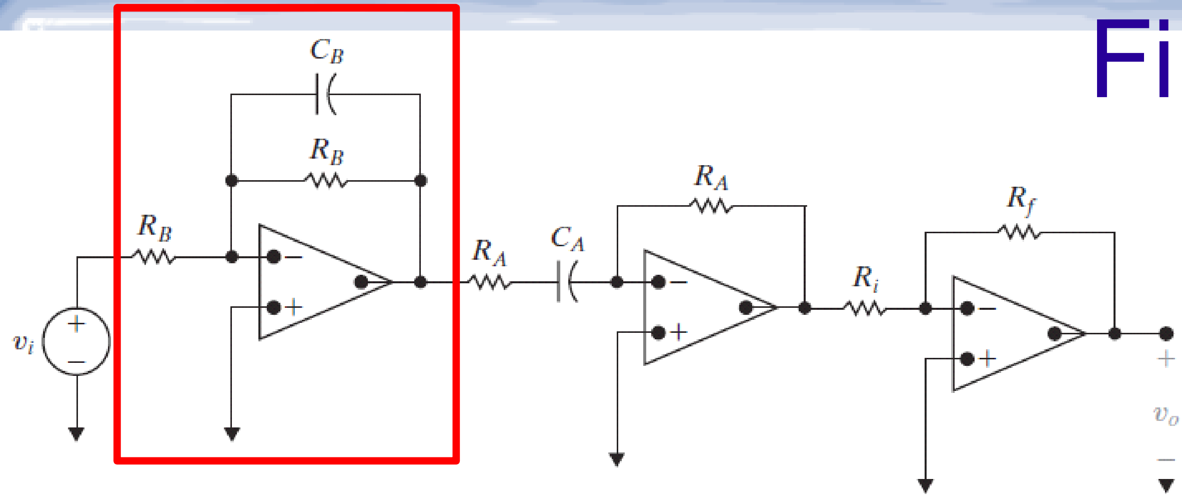


Filtros ativos passa-faixa





Filtros ativos passa-faixa



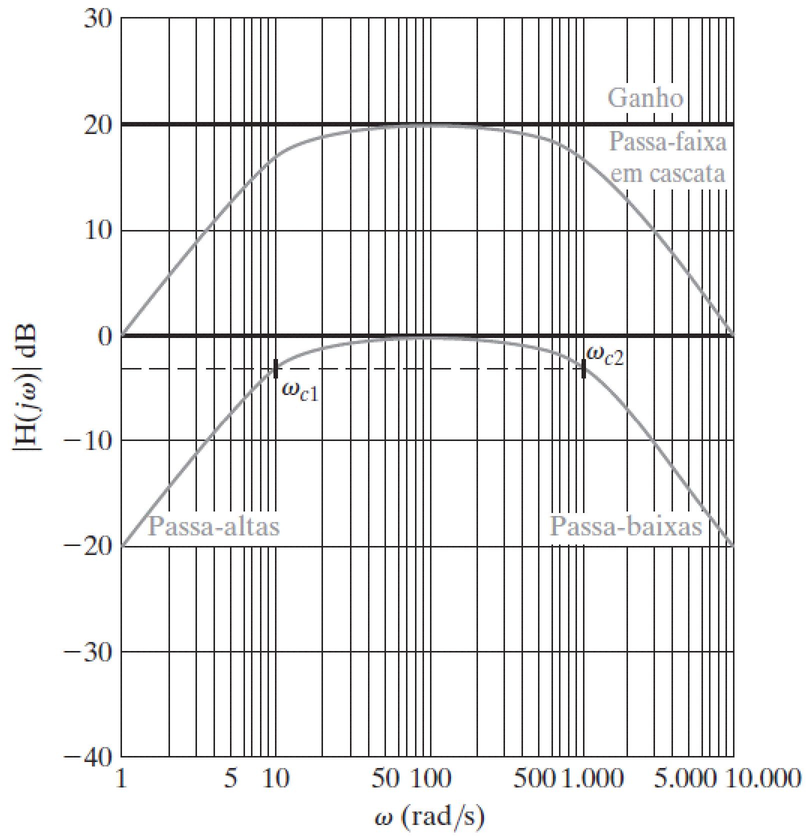
Qual a relação entre ω_{c2} e ω_{c1} que permite que cada subcircuito seja projetado individualmente?

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i}$$

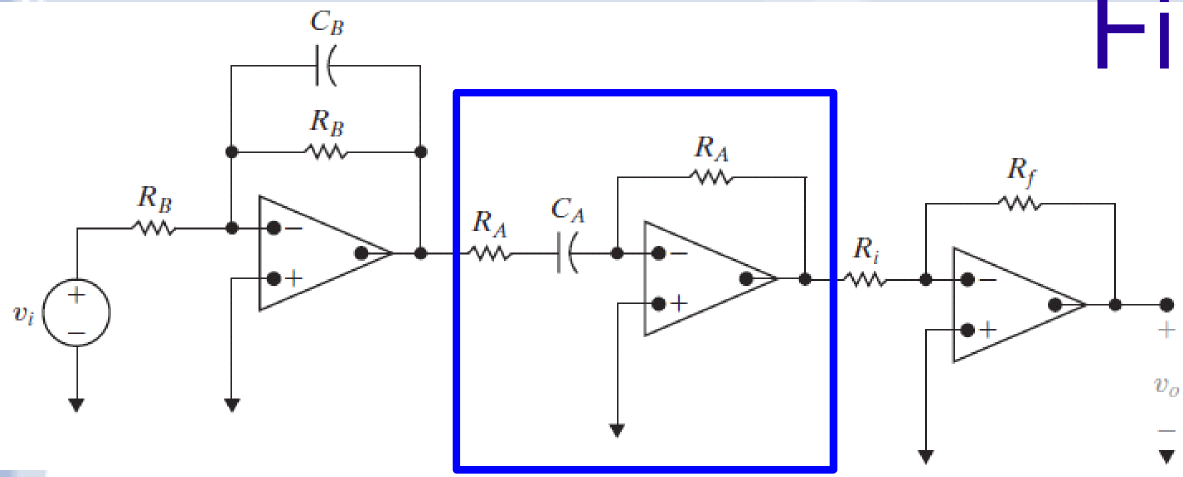
$$= \boxed{\left(\frac{-\omega_{c2}}{s+\omega_{c2}}\right)}\left(\frac{-s}{s+\omega_{c1}}\right)\left(\frac{-R_f}{R_i}\right)$$

$$= \frac{-K\omega_{c2}s}{(s+\omega_{c1})(s+\omega_{c2})}$$

$$= \frac{-K\omega_{c2}s}{s^2+(\omega_{c1}+\omega_{c2})s+\omega_{c1}\omega_{c2}}.$$



Filtros ativos passa-faixa



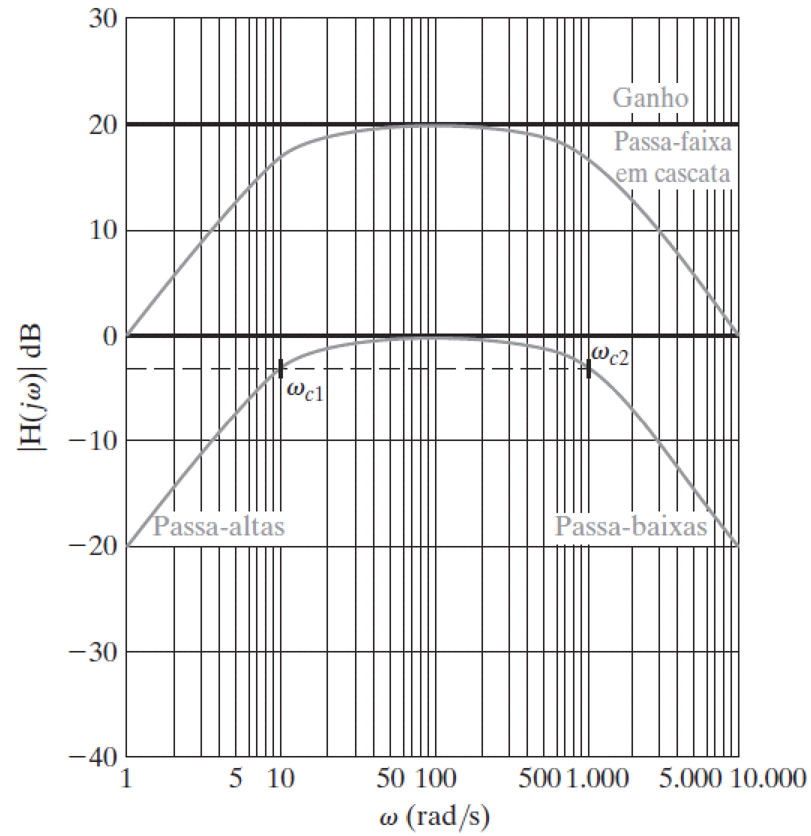
Qual a relação entre ω_{c2} e ω_{c1} que permite que cada subcircuito seja projetado individualmente?

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i}$$

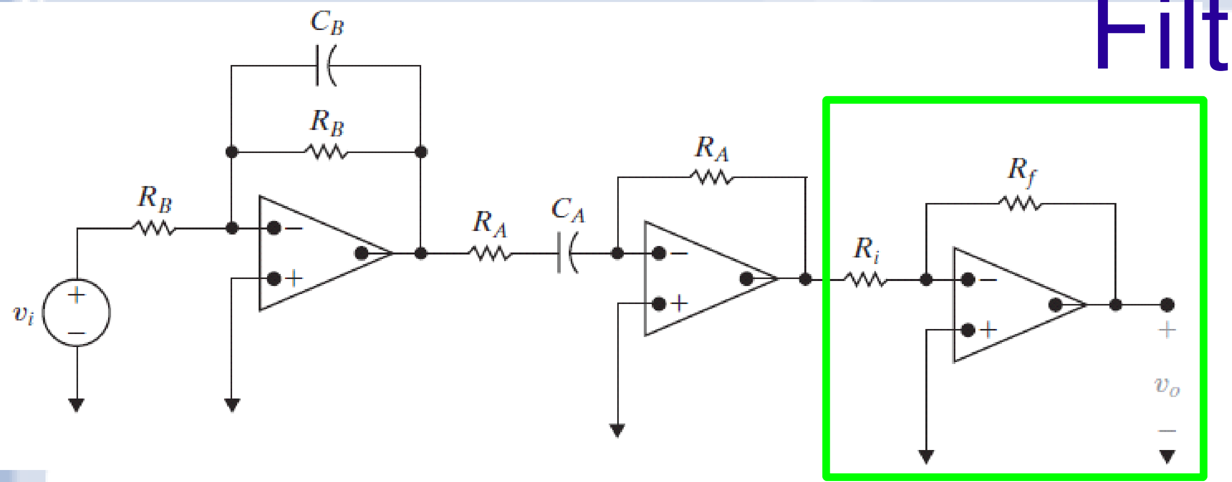
$$= \left(\frac{-\omega_{c2}}{s + \omega_{c2}}\right)\boxed{\left(\frac{-s}{s + \omega_{c1}}\right)}\left(\frac{-R_f}{R_i}\right)$$

$$= \frac{-K\omega_{c2}s}{(s + \omega_{c1})(s + \omega_{c2})}$$

$$= \frac{-K\omega_{c2}s}{s^2 + (\omega_{c1} + \omega_{c2})s + \omega_{c1}\omega_{c2}}.$$



Filtros ativos passa-faixa



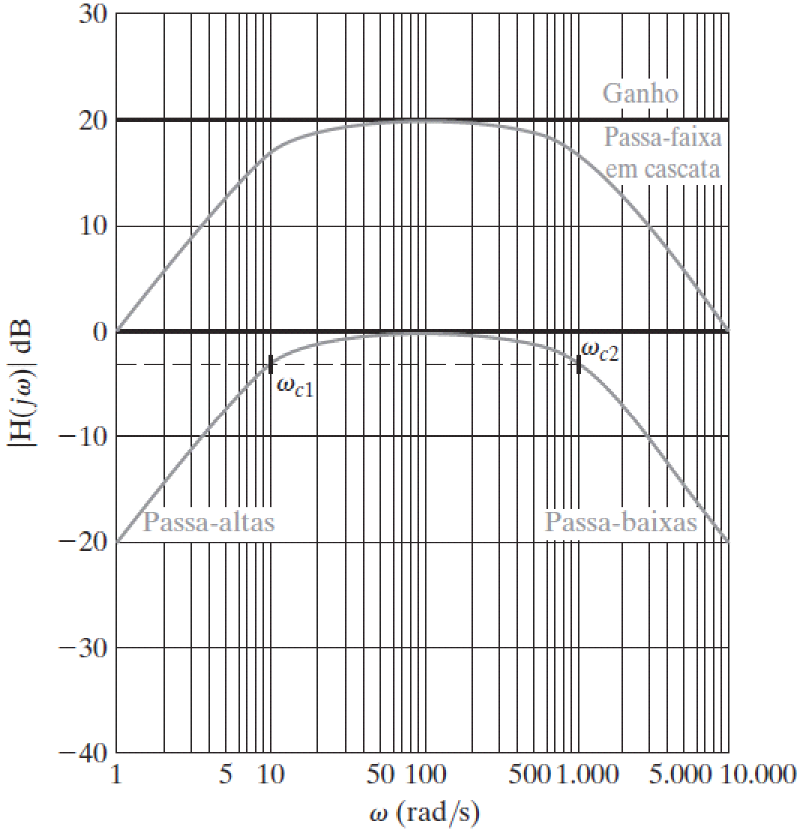
Qual a relação entre ω_{c2} e ω_{c1} que permite que cada subcircuito seja projetado individualmente?

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i}$$

$$= \left(\frac{-\omega_{c2}}{s + \omega_{c2}}\right)\left(\frac{-s}{s + \omega_{c1}}\right)\boxed{\left(\frac{-R_f}{R_i}\right)}$$

$$= \frac{-K\omega_{c2}s}{(s + \omega_{c1})(s + \omega_{c2})}$$

$$= \frac{-K\omega_{c2}s}{s^2 + (\omega_{c1} + \omega_{c2})s + \omega_{c1}\omega_{c2}}.$$



Filtros ativos passa-faixa

Nota-se que a função de transferência

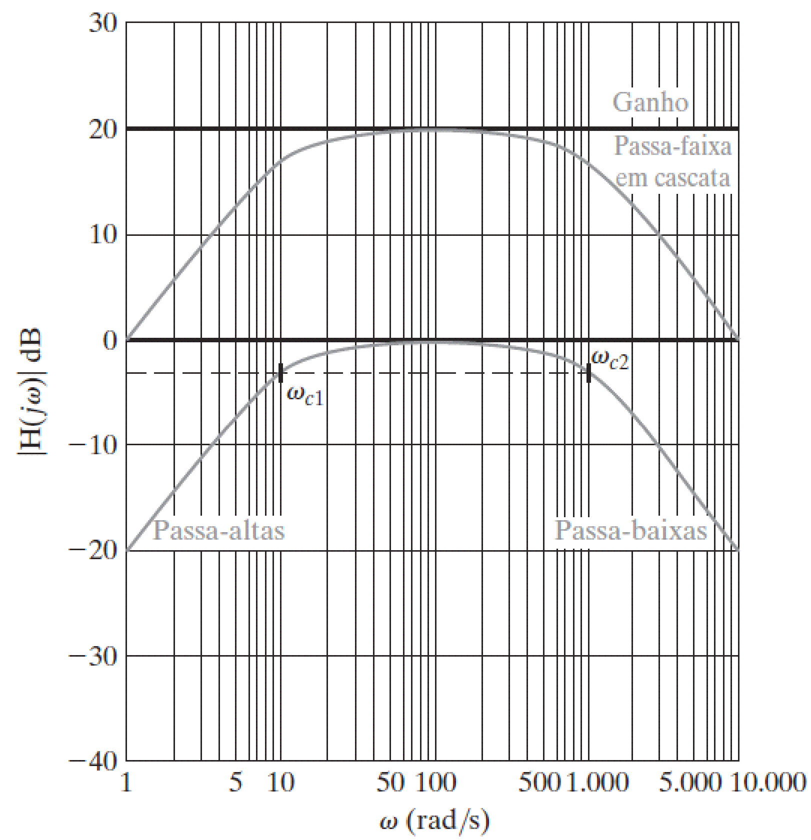
$$\frac{-K\omega_{c2}s}{s^2 + (\omega_{c1} + \omega_{c2})s + \omega_{c1}\omega_{c2}}.$$

Não obedece a forma padrão de um filtro passa-faixa:

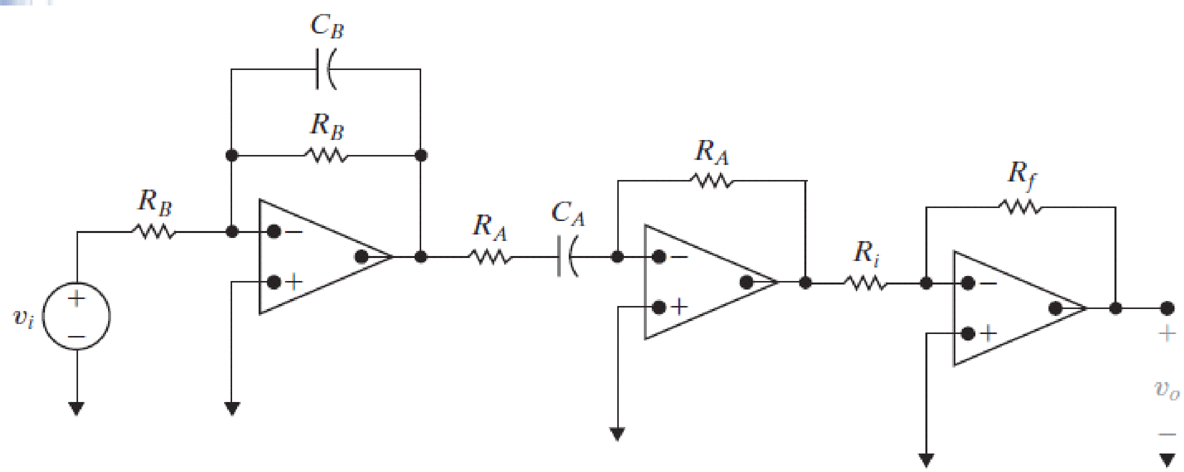
$$H_{PF} = \frac{\beta s}{s^2 + \beta s + \omega_o^2}$$

Assumindo que $\omega_{c2} >> \omega_{c1}$, podemos fazer as seguintes aproximações:
$\omega_{c2}+\omega_{c1} \approx \omega_{c2}$

$$H(s) = \frac{-K\omega_{c2}s}{s^2 + \omega_{c2}s + \omega_{c1}\omega_{c2}}$$



Filtros ativos passa-faixa

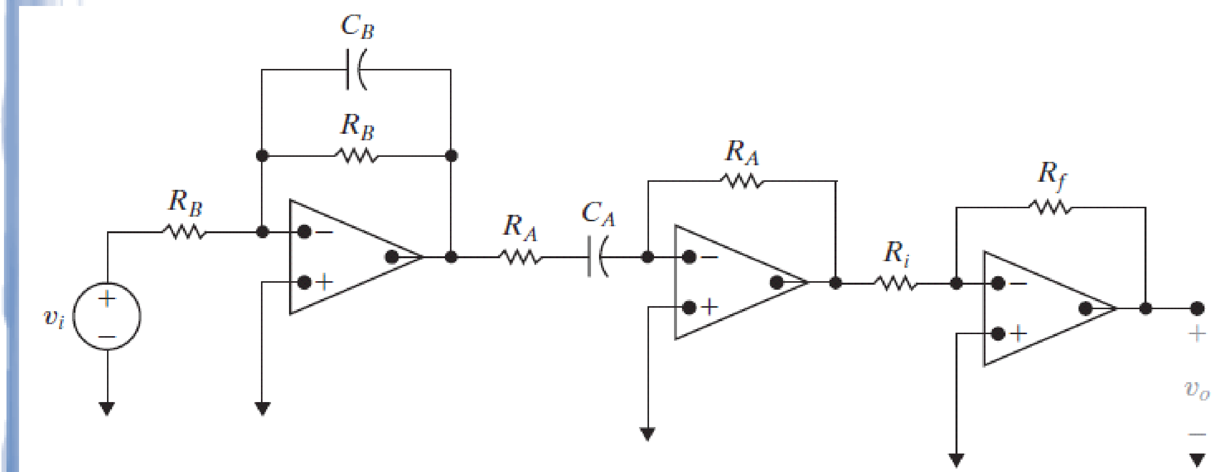


Calculamos, então, os valores de resistências e capacitâncias para obter:

$$\omega_{c2} = \frac{1}{R_B C_B}.$$

$$\omega_{c1} = \frac{1}{R_A C_A}.$$

Filtros ativos passa-faixa



E os valores de R_f e R_i para obter o ganho desejado na faixa de passagem ($\omega=\omega_o$):

$$K = \frac{R_f}{R_i}.$$

Projeto de um passa-faixa

Projetar um filtro passa-faixa em cascata com K=2, f_{c1}=100Hz e f_{c2}=10.000Hz, usando capacitores C=0,2μF.

Projeto de um passa-faixa

Projetar um filtro passa-faixa em cascata com K=2, f_{c1}=100Hz e f_{c2}=10.000Hz, usando capacitores C=0,2μF.

Como $\omega_{c2} >> \omega_{c1}$, podemos projetar o passa-faixa a partir de um PA e PB.

$$\omega_{c2} = \frac{1}{C_B R_B} = 2\pi(10.000)$$

$$R_B = \frac{1}{2\pi(10.000)C_B} = \frac{1}{2\pi(10.000)(0{,}2\,x10^{-6})}$$

$$R_B = 80\,\Omega$$

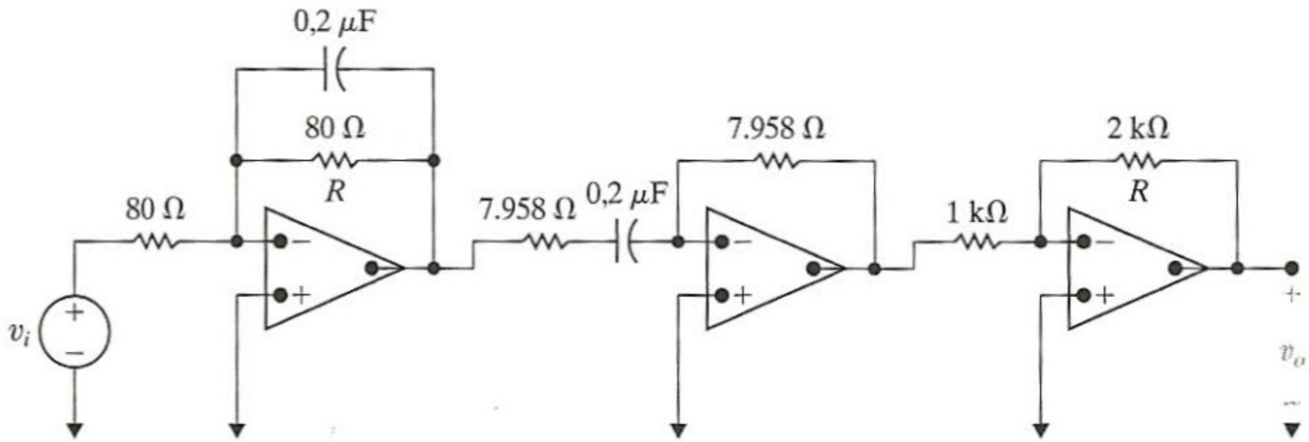
$$\omega_{c1} = \frac{1}{C_A R_A} = 2\pi(100)$$

$$R_A = \frac{1}{2\pi(100)C_A} = \frac{1}{2\pi(100)(0{,}2\,x10^{-6})} = 7.958\,\Omega$$

Projeto de um passa-faixa

Cálculo do ganho (arbitrando um dos resistores):

$$R_i = 1\,\text{k}\Omega \qquad\qquad K = \frac{R_f}{R_i} \rightarrow R_f = 2(1.000) = 2\,\text{k}\Omega$$



Verificar que:

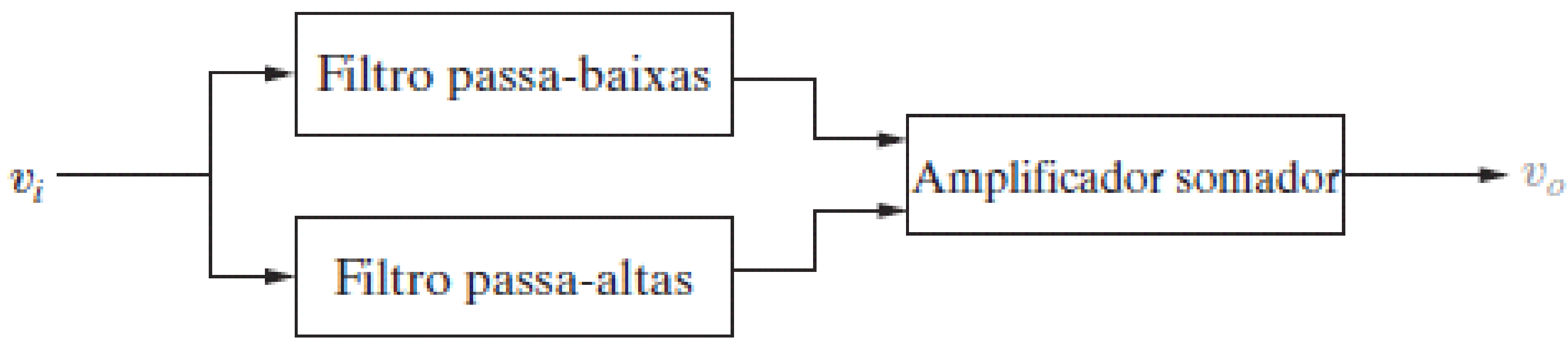
$$|H(j\omega_{c1})| = |H(j\omega_{c1})| = \frac{1}{\sqrt{2}}|H_{max}(j\omega)|$$

Filtros ativos rejeita-faixa

1. Filtro passa-baixas de ganho unitário e freqüência de corte ω_{c1}.

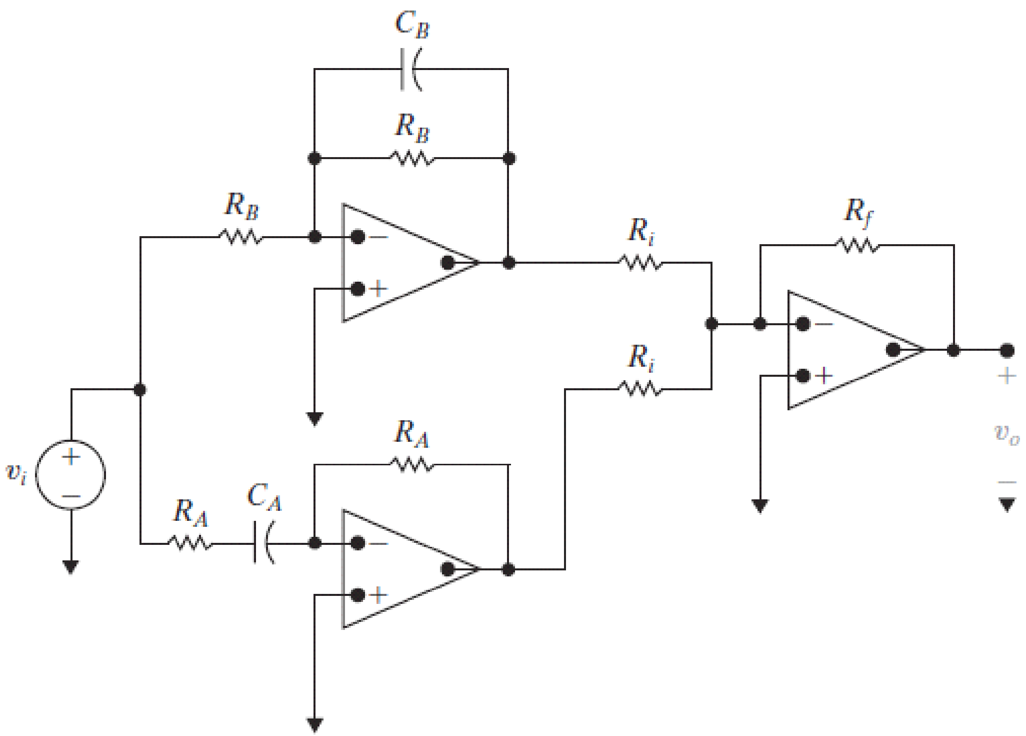
2. Filtro passa-altas de ganho unitário e freqüência de corte ω_{c2}.

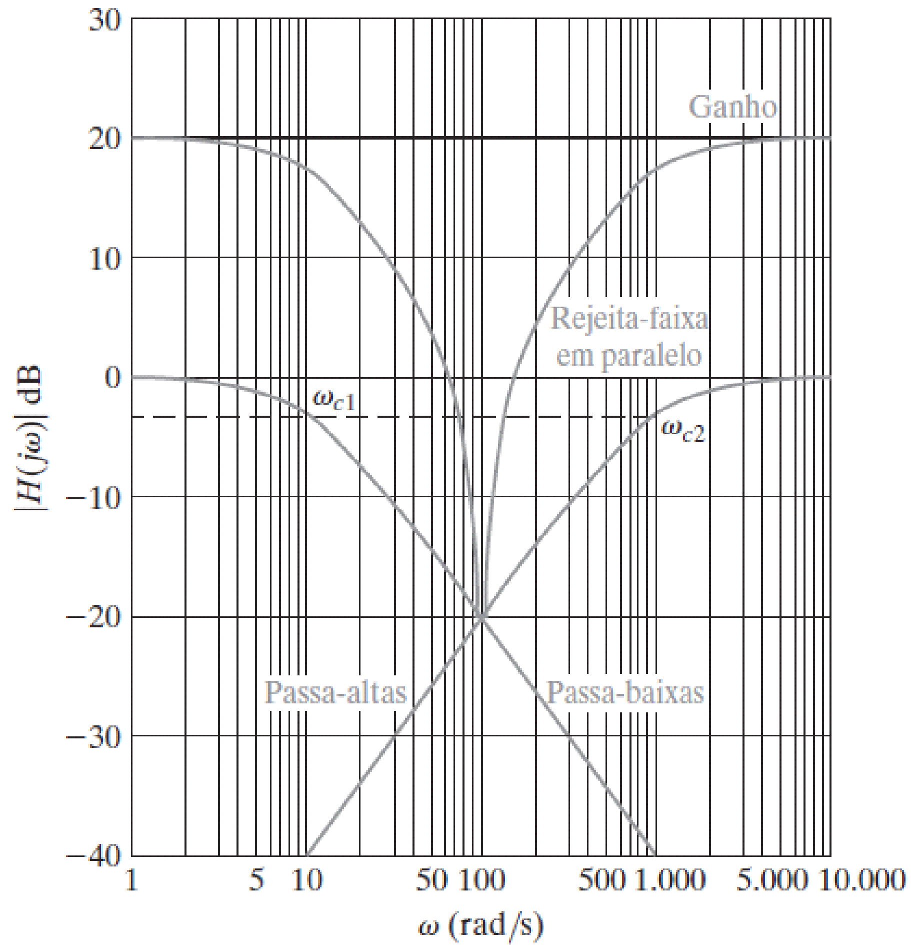
3. Um amplificador com ganho igual ao desejado na faixa de passagem.



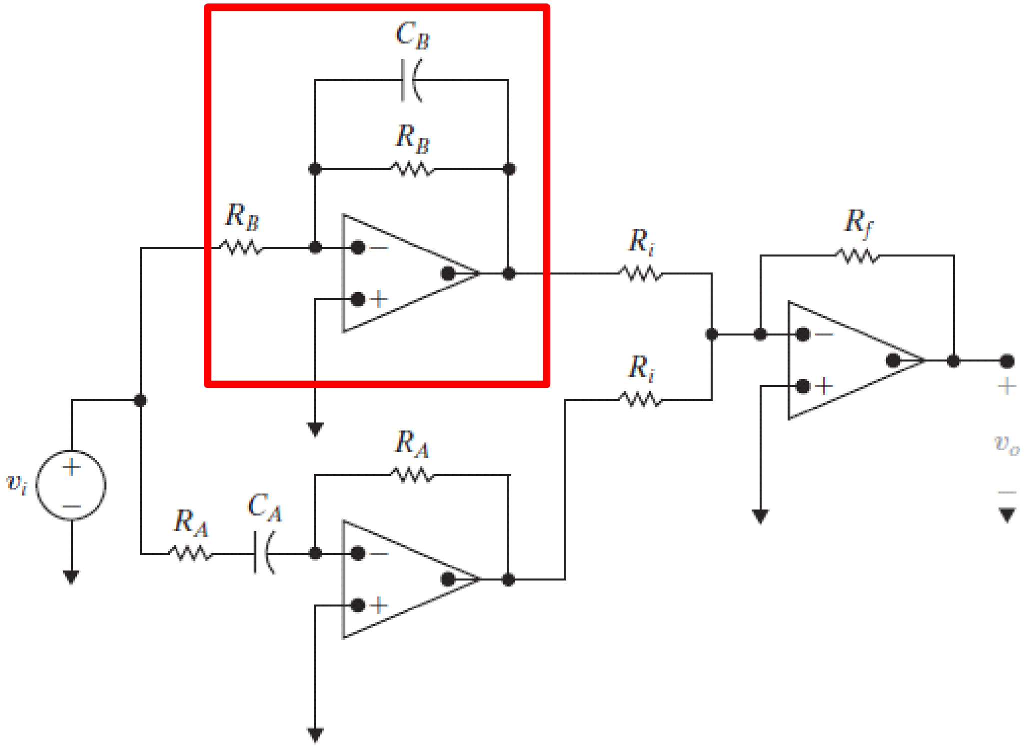
Assumindo que $\omega_{c2} >> \omega_{c1}$, ou seja, que se trata de um rejeita-faixa de banda larga.

Filtros ativos rejeita-faixa





Filtros ativos rejeita-faixa

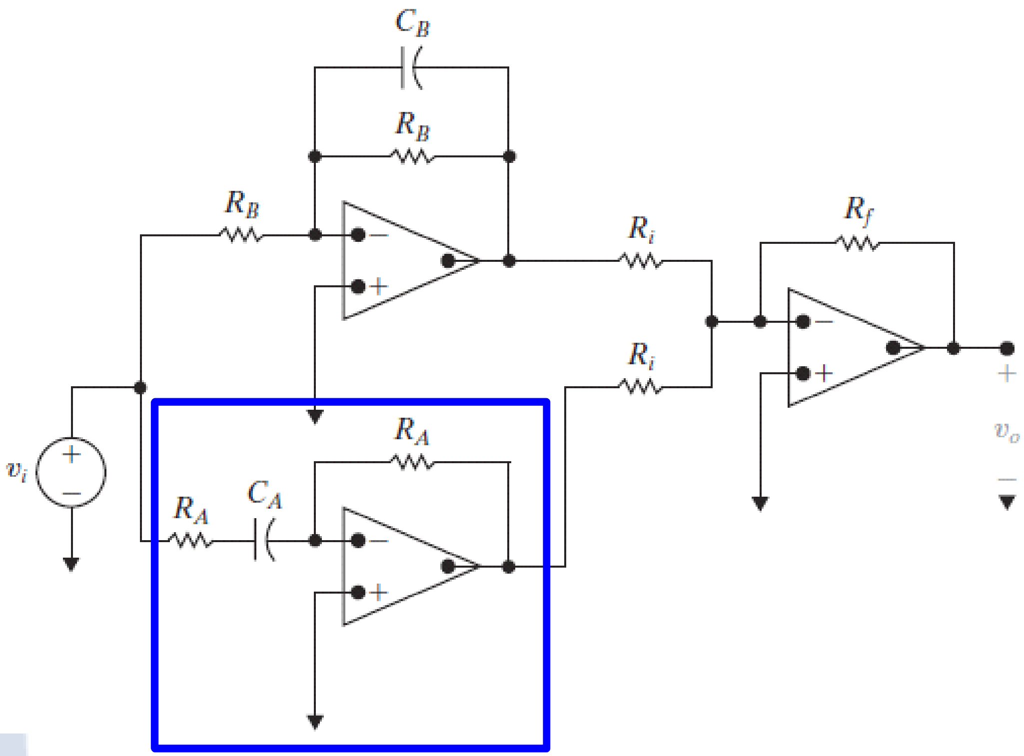


$$H(s) = \left(-\frac{R_f}{R_i}\right)\left[\boxed{\frac{-\omega_{c1}}{s+\omega_{c1}}} + \frac{-s}{s+\omega_{c2}}\right]$$

$$= \frac{R_f}{R_i}\left(\frac{\omega_{c1}(s+\omega_{c2}) + s(s+\omega_{c1})}{(s+\omega_{c1})(s+\omega_{c2})}\right)$$

$$= \frac{R_f}{R_i}\left(\frac{s^2 + 2\omega_{c1}s + \omega_{c1}\omega_{c2}}{(s+\omega_{c1})(s+\omega_{c2})}\right).$$

Filtros ativos rejeita-faixa

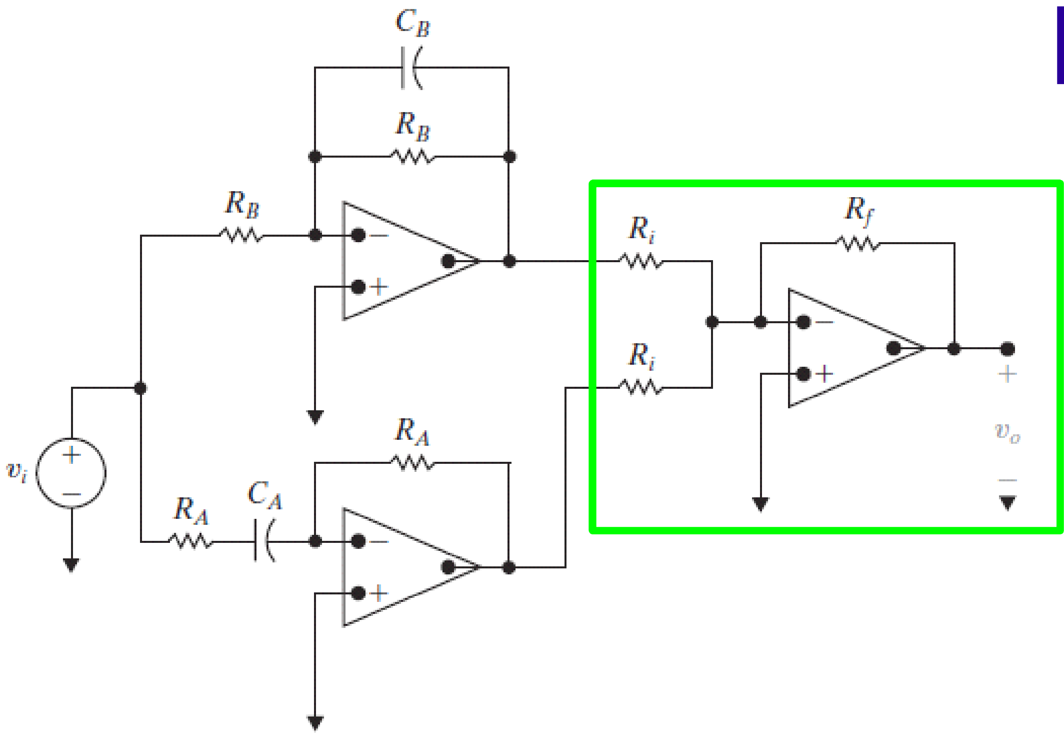


$$H(s) = \left(-\frac{R_f}{R_i}\right)\left[\frac{-\omega_{c1}}{s+\omega_{c1}} + \boxed{\frac{-s}{s+\omega_{c2}}}\right]$$

$$= \frac{R_f}{R_i}\left(\frac{\omega_{c1}(s+\omega_{c2}) + s(s+\omega_{c1})}{(s+\omega_{c1})(s+\omega_{c2})}\right)$$

$$= \frac{R_f}{R_i}\left(\frac{s^2 + 2\omega_{c1}s + \omega_{c1}\omega_{c2}}{(s+\omega_{c1})(s+\omega_{c2})}\right).$$

Filtros ativos rejeita-faixa

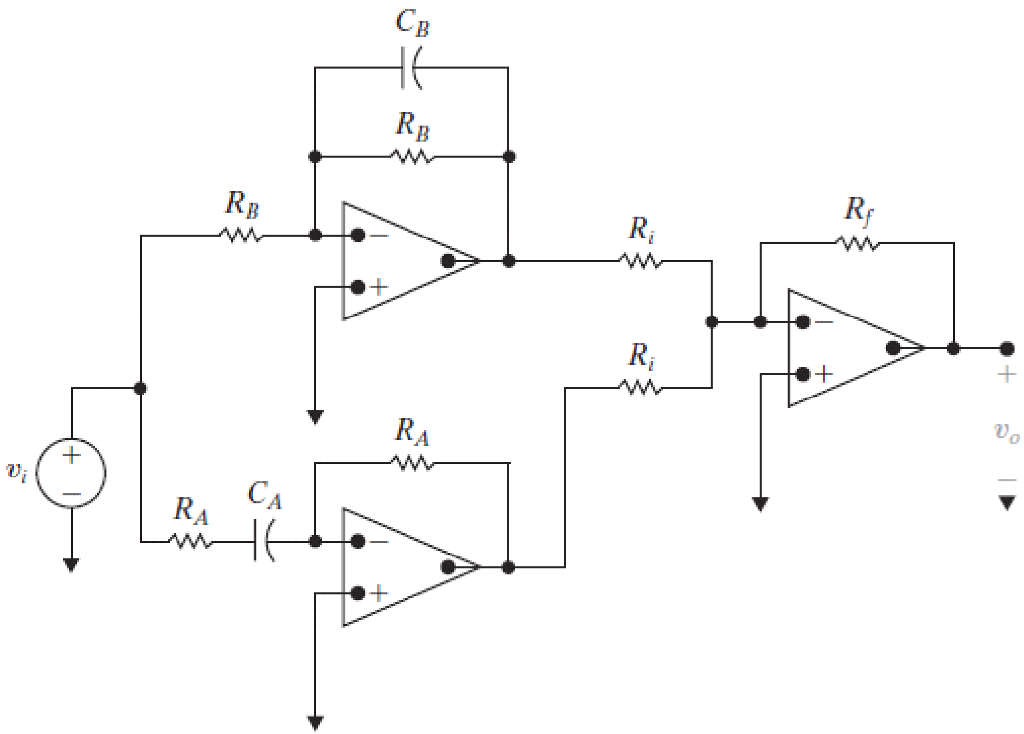


$$H(s) = \boxed{\left(-\frac{R_f}{R_i}\right)}\left[\frac{-\omega_{c1}}{s+\omega_{c1}} + \frac{-s}{s+\omega_{c2}}\right]$$

$$= \frac{R_f}{R_i}\left(\frac{\omega_{c1}(s+\omega_{c2}) + s(s+\omega_{c1})}{(s+\omega_{c1})(s+\omega_{c2})}\right)$$

$$= \frac{R_f}{R_i}\left(\frac{s^2 + 2\omega_{c1}s + \omega_{c1}\omega_{c2}}{(s+\omega_{c1})(s+\omega_{c2})}\right).$$

Filtros ativos rejeita-faixa



$$\omega_{c1} = \frac{1}{R_B C_B},$$

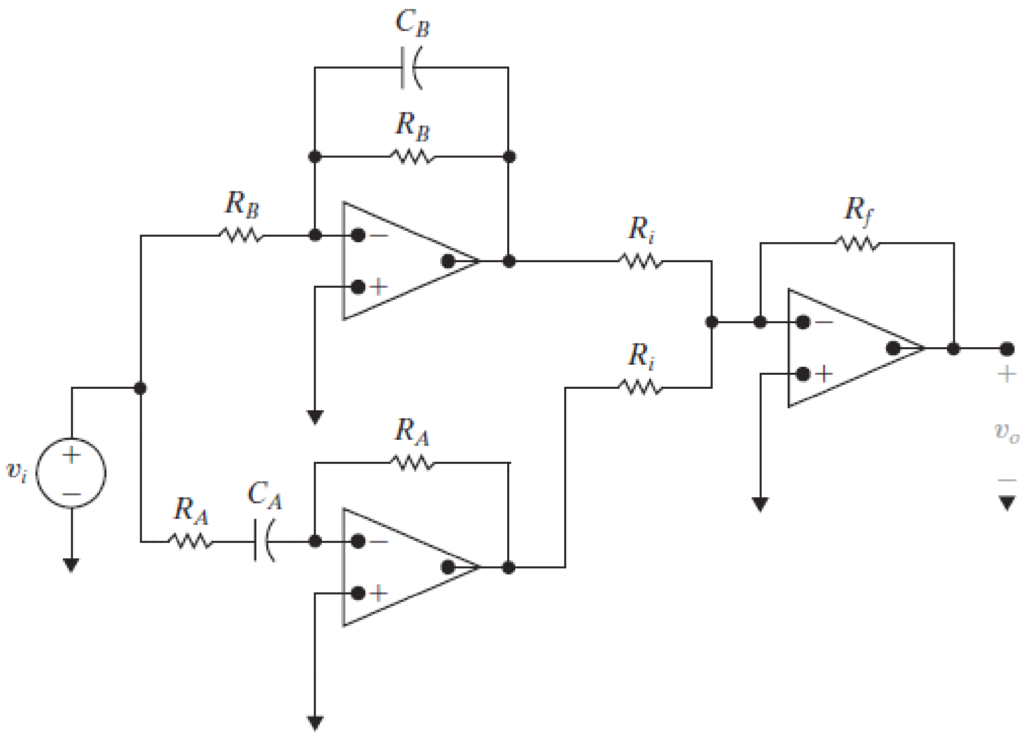
Calculamos, as resistências e capacitâncias para obter:

$$\omega_{c2} = \frac{1}{R_A C_A}.$$

E os valores de R_f e R_i para obter o ganho desejac na faixa de passagem:

$$K = \frac{R_f}{R_i}.$$

Filtros ativos rejeita-faixa



$$\omega_{c1} = \frac{1}{R_B C_B},$$

$$\omega_{c2} = \frac{1}{R_A C_A}.$$

$$K = \frac{R_f}{R_i}.$$

- Temos 6 valores para “escolher”.
- Normalmente, selecionamos valores comerciais para C_B e C_A e calculamos R_B e R_A.
- Por fim, selecionamos R_f ou R_i e calculamos a outra resistência.

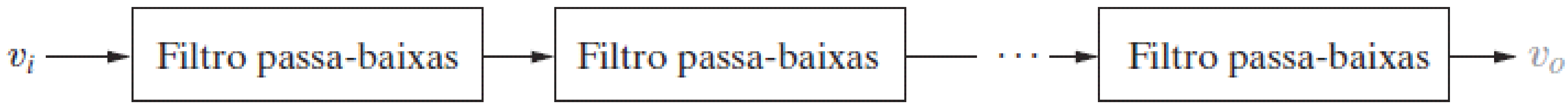
Filtros ativos de ordem superior

Como obter uma aproximação melhor do filtro ideal?

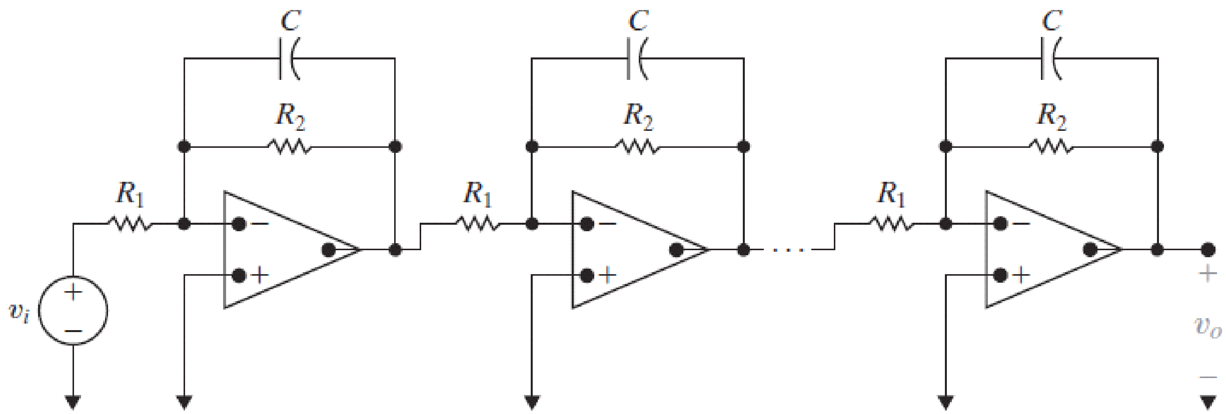
Filtros ativos de ordem superior

1. Melhor aproximação de um filtro ideal: necessidade de construir filtros com transição mais abrupta da freqüência de corte.

Filtros idênticos em cascata:



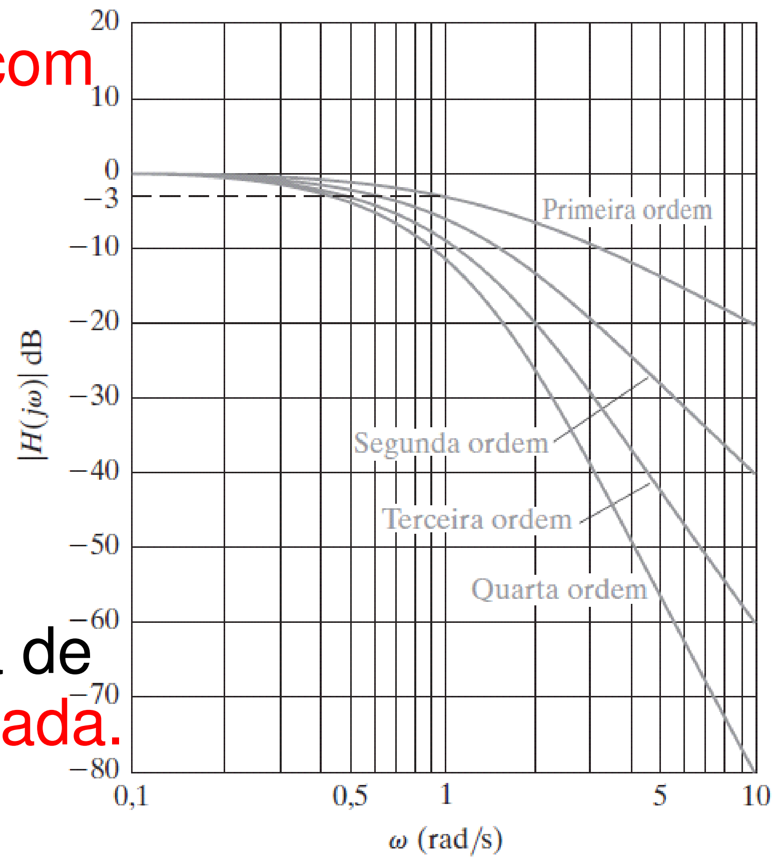
Filtros em cascata



- Função de transferência para cascata com n filtros PB:

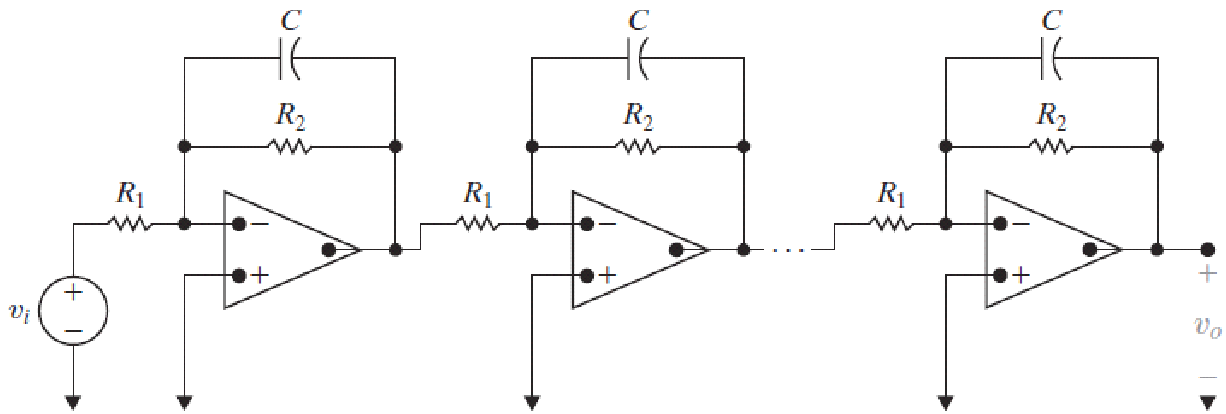
$$H(s) = \left(\frac{-1}{s+1}\right)\left(\frac{-1}{s+1}\right)\cdots\left(\frac{-1}{s+1}\right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{(s+1)^n}.$$



- Transição da faixa de passagem para a de rejeição com inclinação de -20n dB/década.

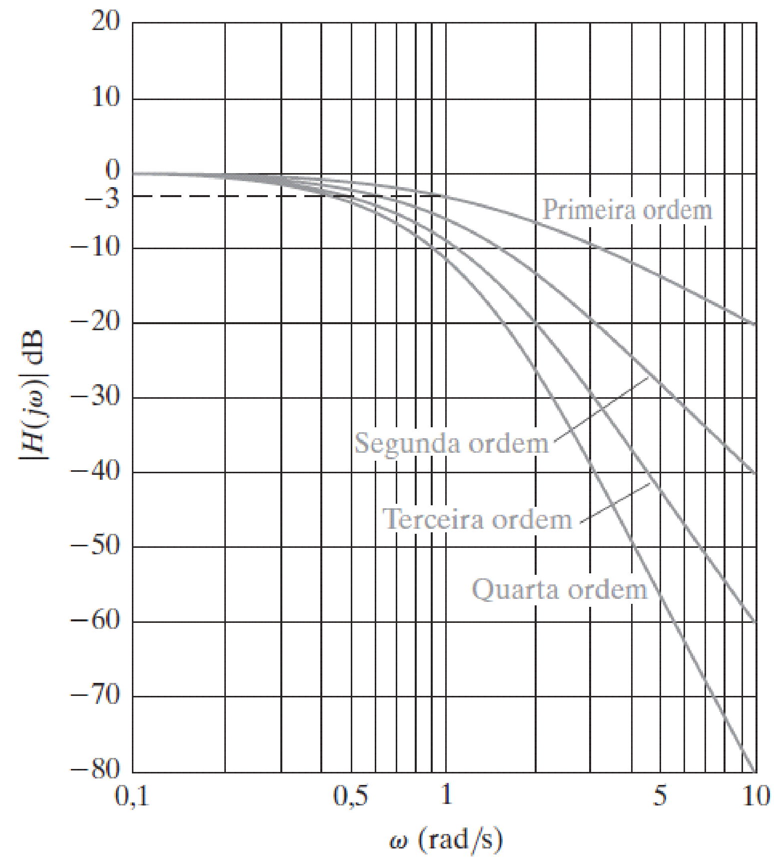
Filtros em cascata



- Ordem do filtro: dada pelo número de pólos.

- Cascata de n filtros de primeira ordem: filtro de ordem n.

- Como calcular a nova freqüência de corte?



Freqüência de corte de filtros em cascata

$$H(s) = \frac{(-1)^n}{(s + 1)^n},$$

$$|H(j\omega_{cn})| = \left|\frac{1}{(j\omega_{cn} + 1)^n}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\frac{1}{(\sqrt{\omega_{cn}^2 + 1})^n} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

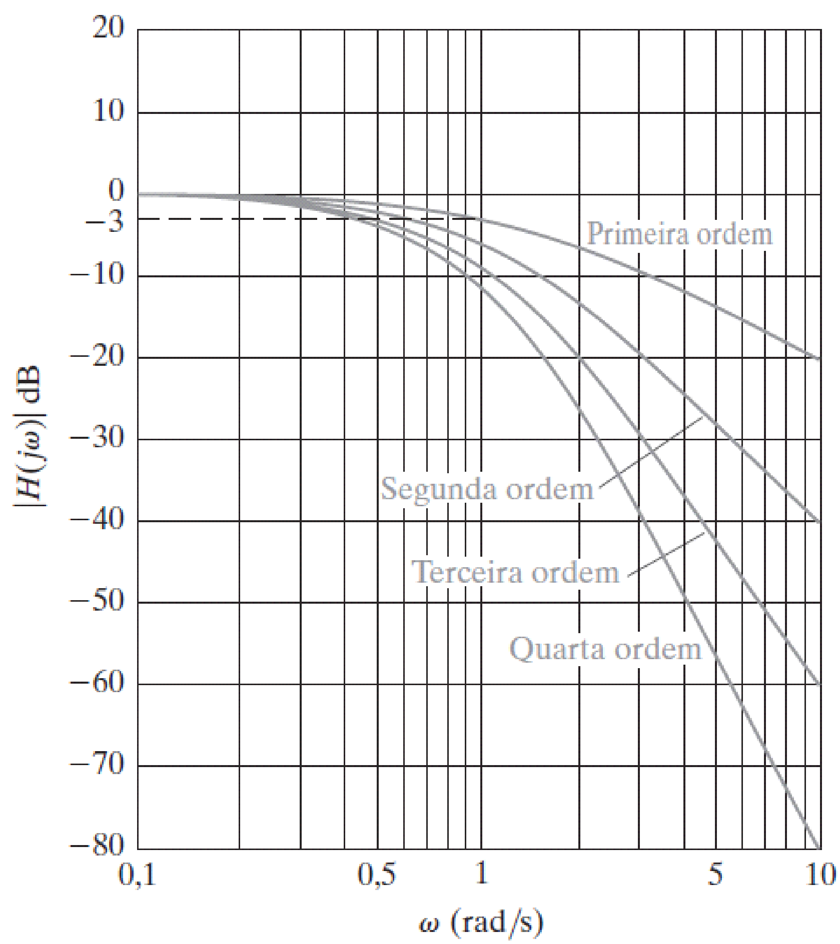
$$\frac{1}{\omega_{cn}^2 + 1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2/n},$$

$$\sqrt[n]{2} = \omega_{cn}^2 + 1,$$

$$\omega_{cn} = \sqrt{\sqrt[n]{2} - 1}.$$

Exemplo: Circuito de 4a ordem:

$$\omega_{c4} = \sqrt{\sqrt[4]{2} - 1} = 0{,}435\, rad/s$$



Freqüência de corte de filtros em cascata

$$H(s) = \frac{(-1)^n}{(s+1)^n},$$

$$|H(j\omega_{cn})| = \left|\frac{1}{(j\omega_{cn}+1)^n}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\frac{1}{(\sqrt{\omega_{cn}^2+1})^n} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\frac{1}{\omega_{cn}^2+1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2/n},$$

$$\sqrt[n]{2} = \omega_{cn}^2 + 1,$$

$$\omega_{cn} = \sqrt{\sqrt[n]{2}-1}.$$

Exemplo: Circuito de 4a ordem:

$$\omega_{c4} = \sqrt{\sqrt[4]{2}-1} = 0{,}435\, rad/s$$

Pode-se projetar um filtro protótipo e realizar a mudança de escala de freqüência.

P/ modificar o ganho, pode-se empregar um amplificador inversor.