Circuitos Elétricos III

Prof. Danilo Melges

Depto. de Eng. Elétrica

Universidade Federal de Minas Gerais

Introdução aos circuitos de seleção de freqüência – parte 2

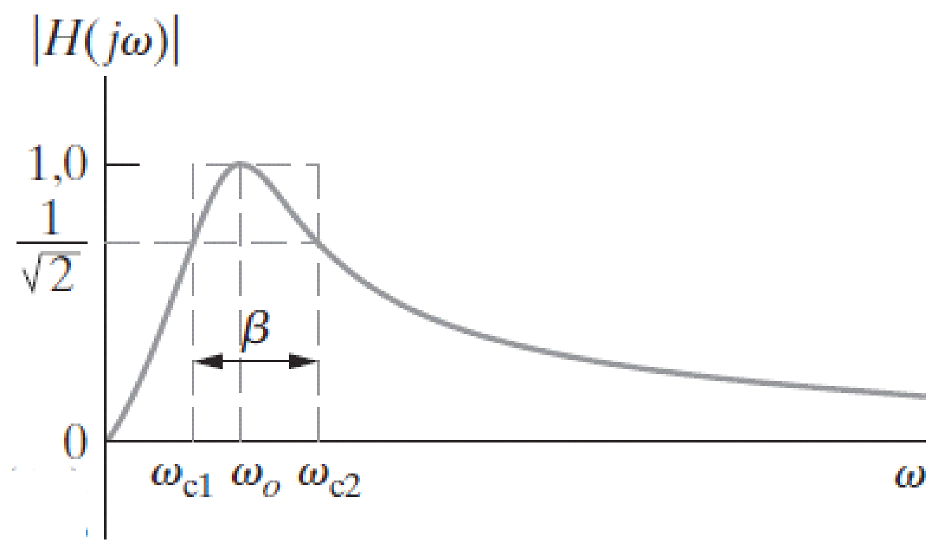
Filtros passa-faixa: parâmetros

- 2 freqüências de corte: ω_{c1} e ω_{c2}
- Freqüência central ou freqüência de ressonância: é o centro geométrico da faixa de passagem.

$$\omega_o = \sqrt{\omega_{c1}\,\omega_{c2}}$$

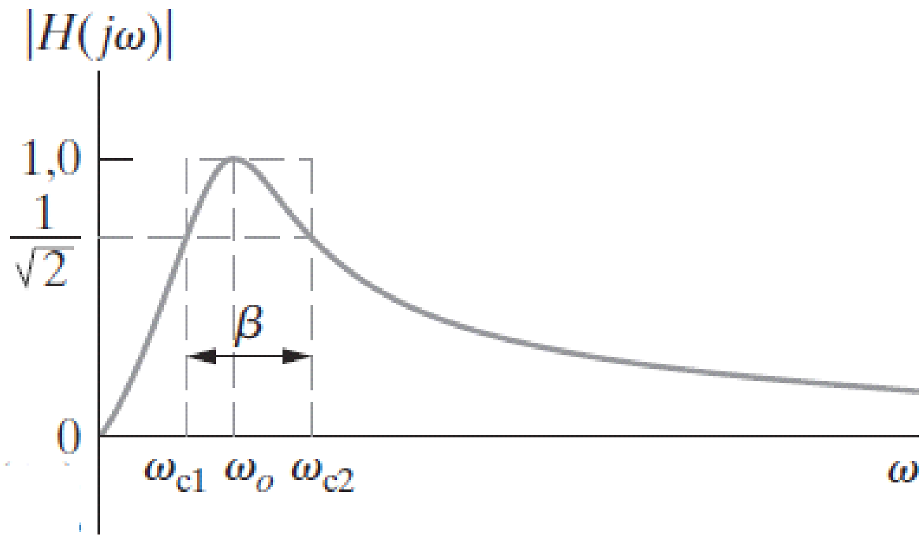
- Máximo da função de transferência é na freqüência central

$$H_{max} = |H(j\omega_o)|$$

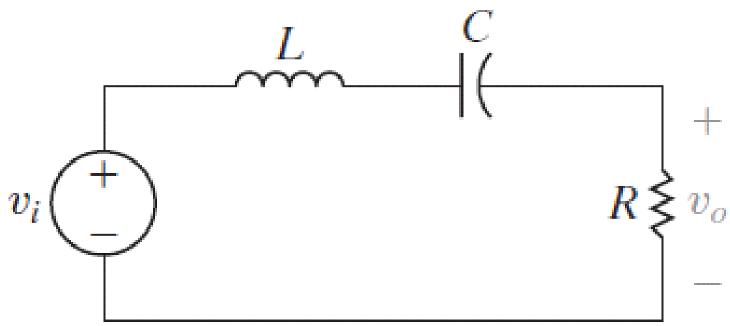


Filtros passa-faixas: parâmetros

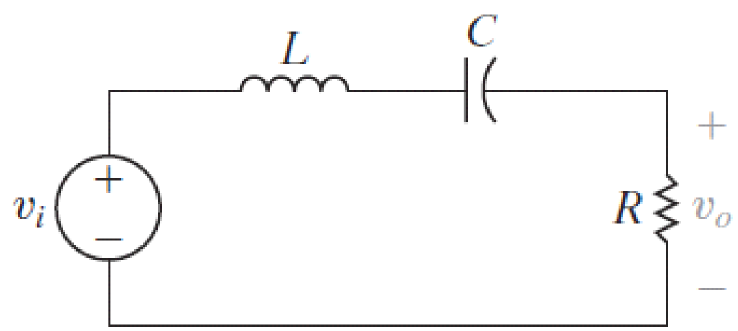
- Largura de faixa (β): banda de passagem
- Fator de qualidade: ω_0/β

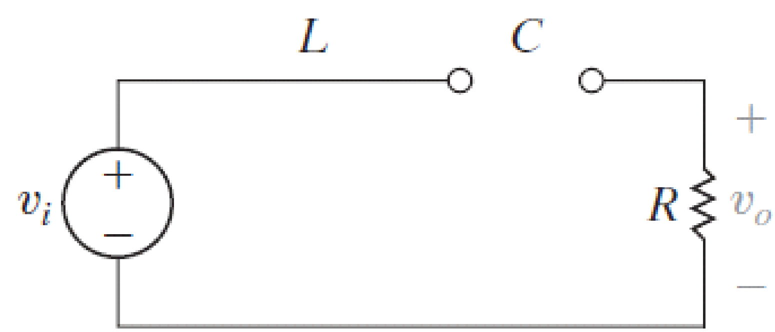


Filtros passa-faixa: RLC série

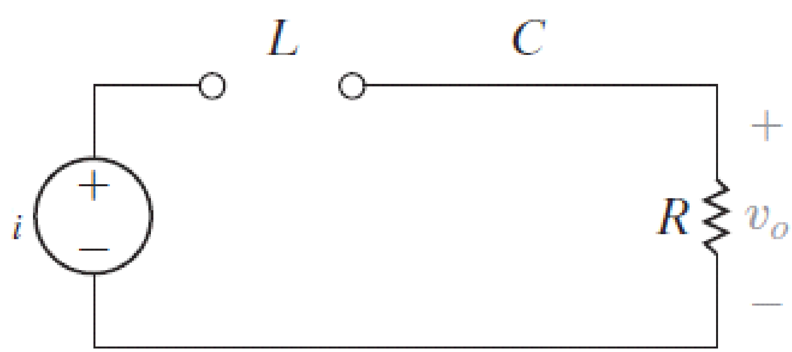


Filtros passa-faixa: RLC série





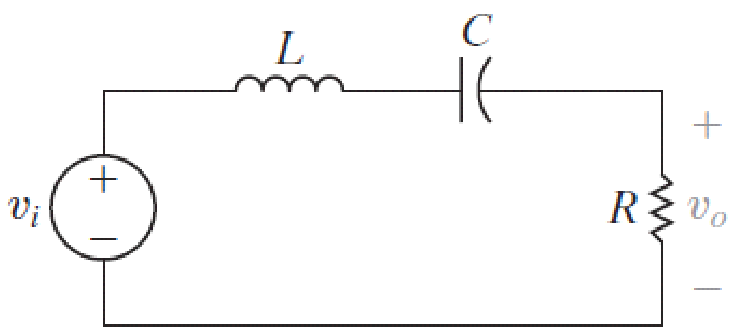
ω=0

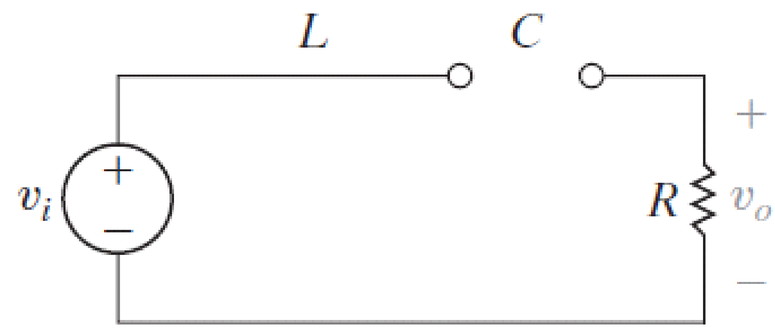


ω=∞

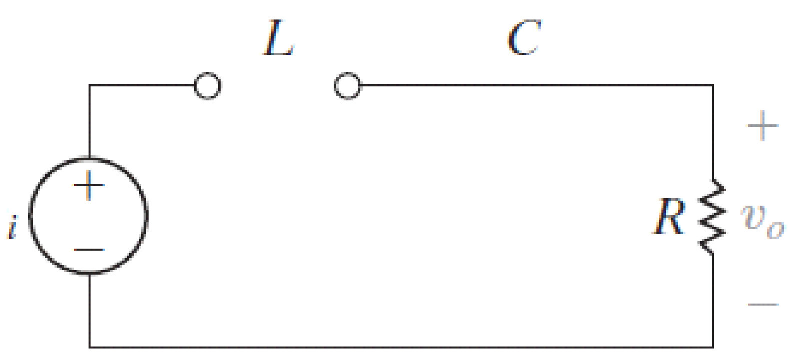
- O que ocorre para 0<ω<∞ ?

Filtros passa-faixa: RLC série





ω=0



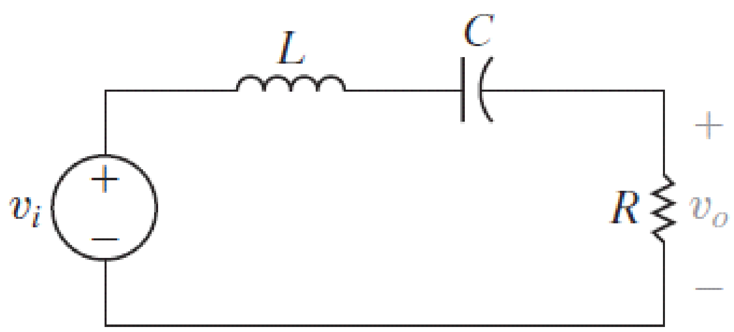
ω=∞

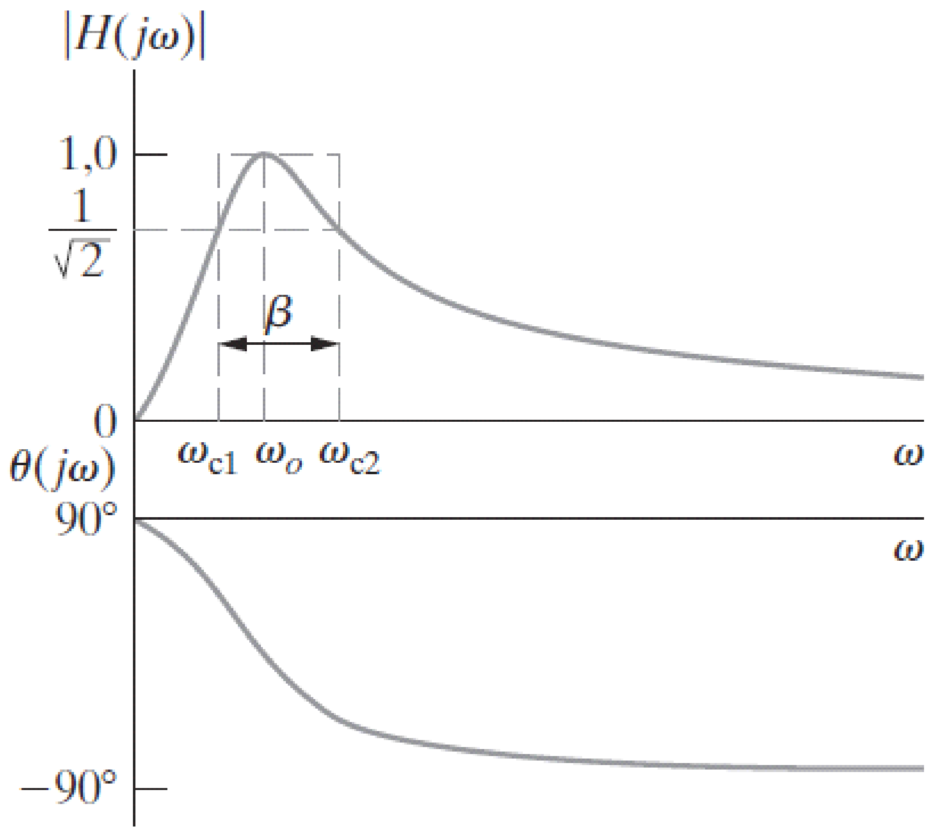
- O que ocorre para 0<ω<∞ ?

Tanto o capacitor quanto o indutor tem impedâncias finitas.

Filtros passa-faixa: RLC série

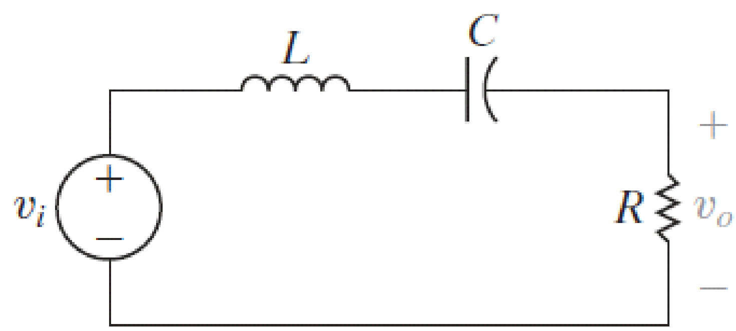
- Em $\omega=\omega_0$, as impedâncias de C e de L tem valores iguais e sinais opostos: a tensão de saída é igual à tensão de entrada.



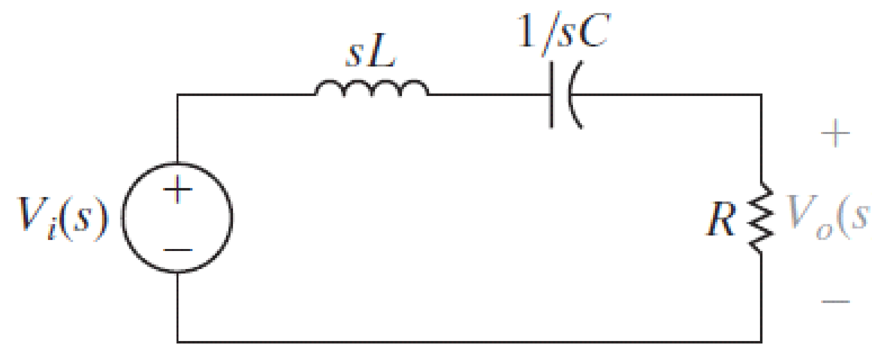


Filtros passa-faixa: RLC série

tempo



freqüência



Função de Transferência:

$$H(s) = \frac{(R/L)s}{s^2 + (R/L)s + (1/LC)}.$$

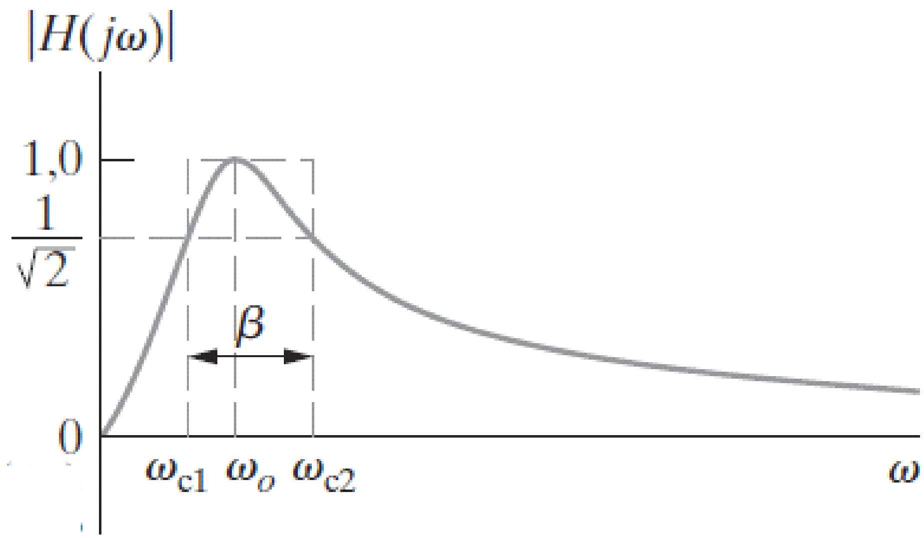
Módulo:

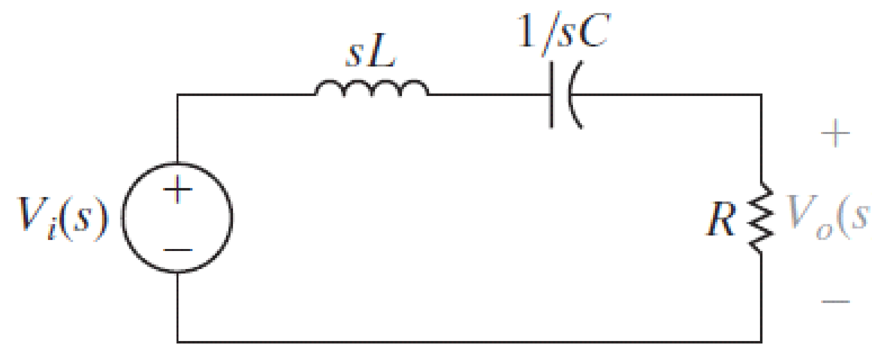
$$|H(j\omega)| = \frac{\omega(R/L)}{\sqrt{[(1/LC) - \omega^2]^2 + [\omega(R/L)]^2}}$$

Ângulo de fase:

$$\theta(j\omega) = 90° - \operatorname{tg}^{-1}\left[\frac{\omega(R/L)}{(1/LC) - \omega^2}\right].$$

Filtros passa-faixa: RLC série

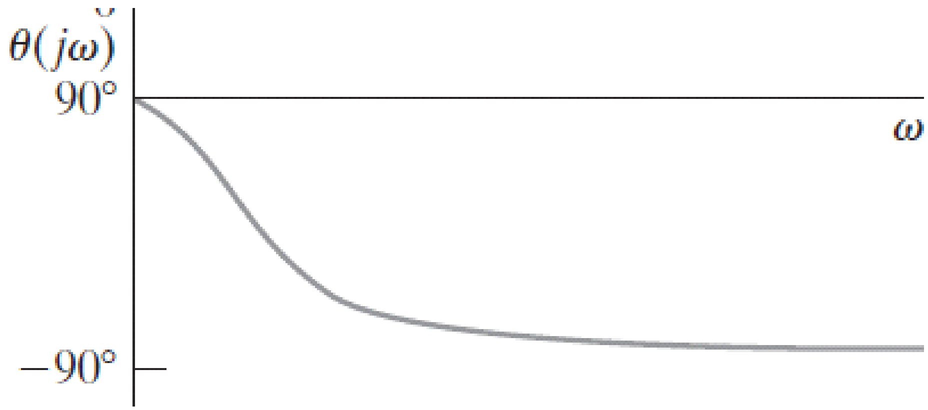


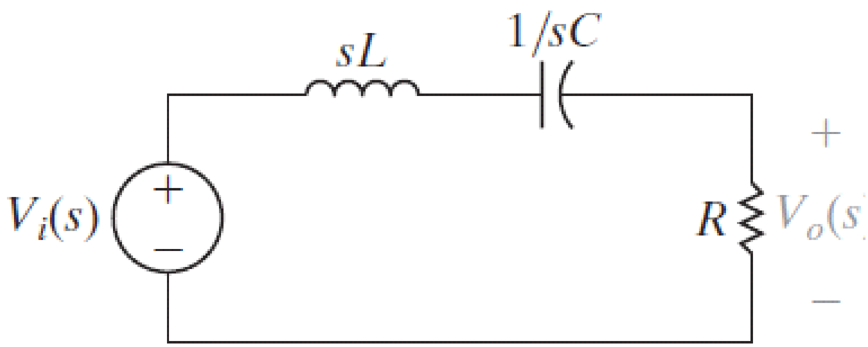


Módulo: $$|H(j\omega)| = \frac{\omega(R/L)}{\sqrt{[(1/LC) - \omega^2]^2 + [\omega(R/L)]^2}}$$

Ângulo de fase: $$\theta(j\omega) = 90° - \operatorname{tg}^{-1}\left[\frac{\omega(R/L)}{(1/LC) - \omega^2}\right].$$

Filtros passa-faixa: RLC série





Módulo:

$$|H(j\omega)| = \frac{\omega(R/L)}{\sqrt{[(1/LC) - \omega^2]^2 + [\omega(R/L)]^2}}$$

Ângulo de fase:

$$\theta(j\omega) = 90^\circ - \operatorname{tg}^{-1}\left[\frac{\omega(R/L)}{(1/LC) - \omega^2}\right].$$

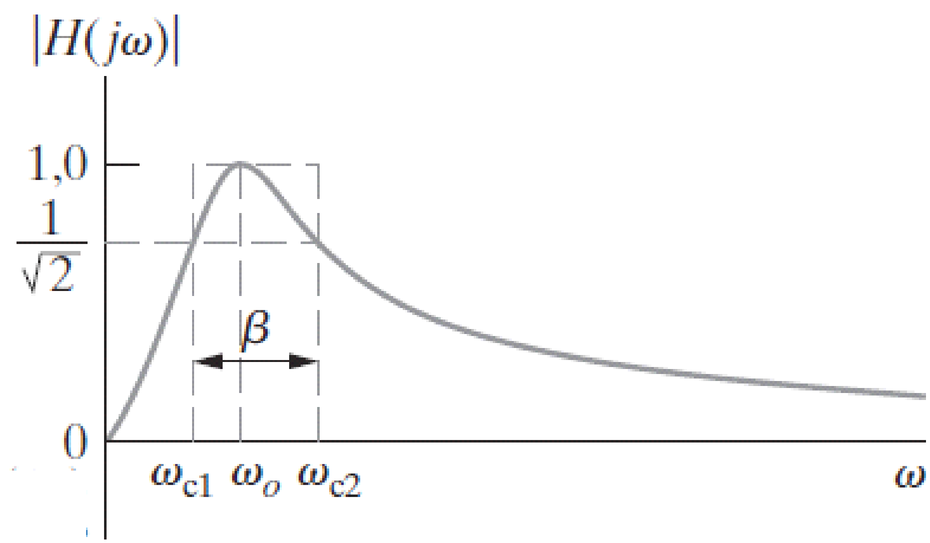
Freqüência central

- Freqüência para a qual a função de transferência é um número real: nesta freqüência a soma das impedâncias é nula

$$j\omega_0 L + \frac{1}{j\omega_0 C} = 0$$

- Logo:

$$\omega_o = \sqrt{\frac{1}{LC}}.$$



Freqüências de corte

Como calcular as frequências de corte?

Freqüências de corte

- Encontramos o máximo da função de transferência:

$$H_{max} = |H(j\omega_o)| = 1$$

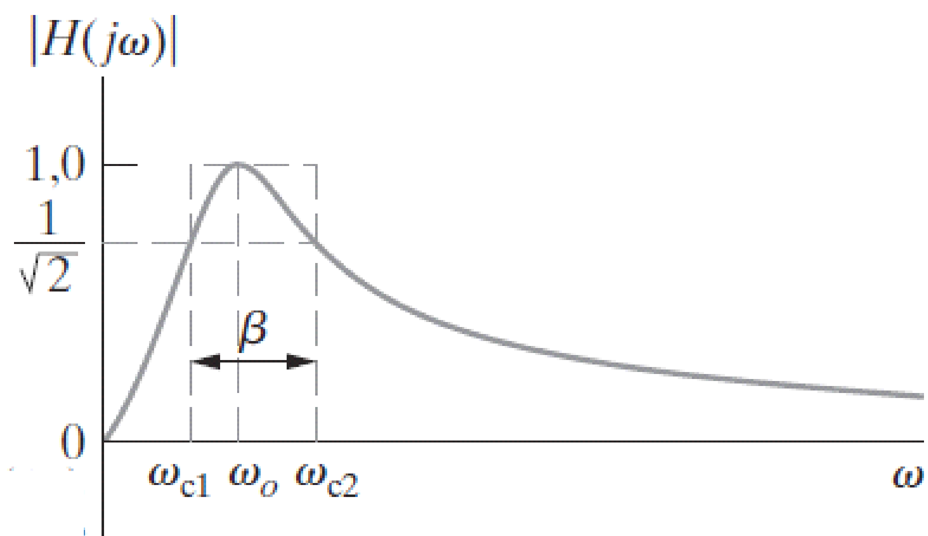
- E calculamos as freqüências de corte conforme a definição:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\omega_c (R/L)}{\sqrt{[(1/LC) - \omega_c^2]^2 + (\omega_c R/L)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{[(\omega_c L/R) - (1/\omega_c RC)]^2 + 1}}.$$

$$\pm 1 = \omega_c \frac{L}{R} - \frac{1}{\omega_c RC}.$$

$$\omega_c^2 L \pm \omega_c R - 1/C = 0$$



Freqüências de corte

$$\omega_c^2 L \pm \omega_c R - 1/C = 0$$

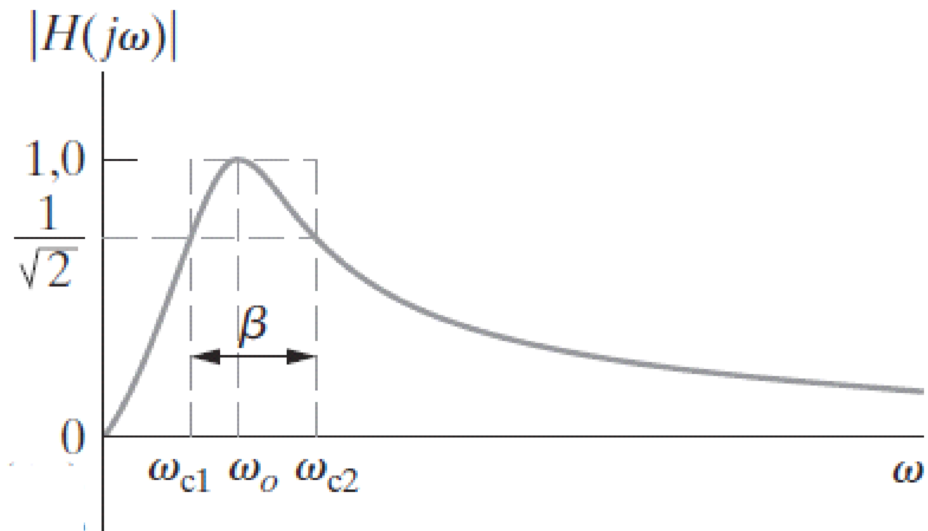
- A solução resulta em 4 valores (somente dois são positivos e fazem sentido físico):

$$\omega_{c1} = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC}\right)},$$

$$\omega_{c2} = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC}\right)}.$$

- Verificar que:

$$\omega_o = \sqrt{\omega_{c1}\,\omega_{c2}}$$



Freqüências de corte

$$\omega_{c1} = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC}\right)},$$

$$\omega_{c2} = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC}\right)}.$$

- De onde podemos verificar qu

$$\omega_o = \sqrt{\omega_{c1} \cdot \omega_{c2}}$$

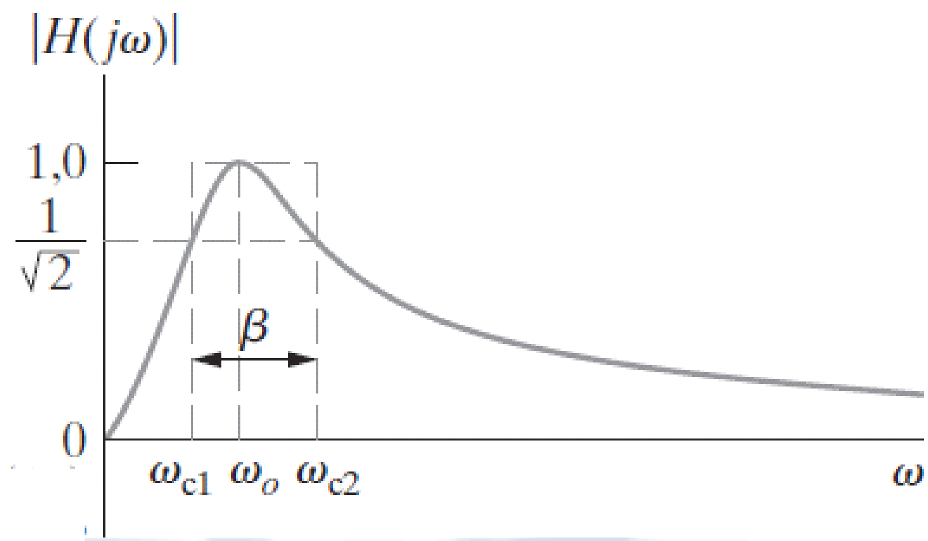
$$= \sqrt{\left[-\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC}\right)}\right]\left[\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC}\right)}\right]} = \sqrt{\frac{1}{LC}}.$$

Largura de faixa

- Largura de faixa (β): banda de passagem

$$\beta = \omega_{c2} - \omega_{c1}$$

$$= \left[\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC}\right)}\right] - \left[-\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC}\right)}\right] = \frac{R}{L}.$$

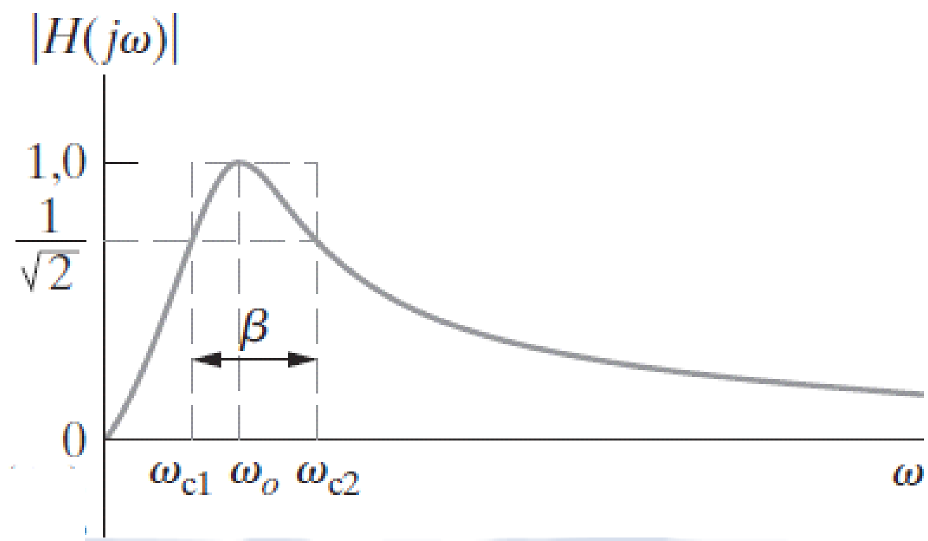


Fator de Qualidade

- Fator de qualidade: $Q = \omega_o/\beta$

Corrigir no livro

$$= \frac{\sqrt{(1/LC)}}{(R/L)} = \sqrt{\frac{L}{CR^2}}.$$



Freqüências de corte

- As freqüências de corte podem ser re-escritas em função da freqüência central e largura de faixa:

$$\omega_{c1} = -\frac{\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \omega_o^2},$$

$$\omega_{c2} = \frac{\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \omega_o^2}.$$

Freqüências de corte

- As freqüências de corte podem ser re-escritas em função da freqüência central e do fator de qualidade:

$$\omega_{c1} = \omega_o \cdot \left[-\frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q}\right)^2} \right],$$

$$\omega_{c2} = \omega_o \cdot \left[\frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q}\right)^2} \right].$$

Projeto de Filtro passa-faixa RLC série

Projetar um filtro RLC série com banda de 1 a 10kHz:

- Cálculo da freqüência central:

$$f_o = \sqrt{f_{c1}f_{c2}} = \sqrt{(1.000)(10.000)} = 3.162{,}28 \text{ Hz}.$$

- Seleção de um dos componentes (C=1uF) e cálculo do outro:

$$L = \frac{1}{\omega_o^2 C} = \frac{1}{[2\pi(3.162{,}28)]^2(10^{-6})} = 2{,}533 \text{ mH}.$$

- Cálculo do fator de qualidade:

$$Q = \frac{f_o}{f_{c2} - f_{c1}} = \frac{3162{,}28}{10.000 - 1.000} = 0{,}3514.$$

Projeto de Filtro passa-faixa RLC série

- Cálculo do valor do resistor:

$$Q = \omega_o/\beta = \frac{(1/LC)}{(R/L)} = \sqrt{\frac{L}{CR^2}}.$$

$$R = \sqrt{\frac{L}{CQ^2}} = \sqrt{\frac{0{,}0025}{(10^{-6})(0{,}3514)^2}} = 143{,}24\ \Omega.$$

- Podemos verificar os resultados calculando as freqüências de corte:

$$\omega_{c1} = 6283{,}19 \text{ rad/s } (1.000 \text{ Hz})$$

$$\omega_{c2} = 62.831{,}85 \text{ rad/s } (10.000 \text{ Hz})$$

Projeto de Filtro passa-faixa RLC série

- Verificação dos resultados, calculando as freqüências de corte:

R=143 ohms, L=2,5mH, C=1uF

$$\omega_{c1} = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC}\right)},$$

$$\omega_{c2} = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC}\right)}.$$

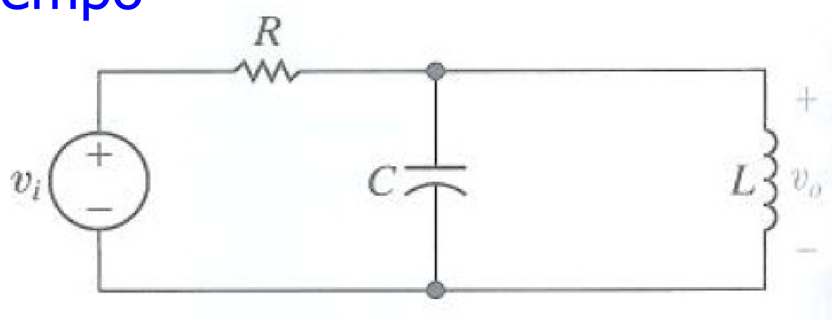
$\omega_{c1} = 6283{,}19$ rad/s (1.000 Hz)

$\omega_{c2} = 62.831{,}85$ rad/s (10.000 Hz)

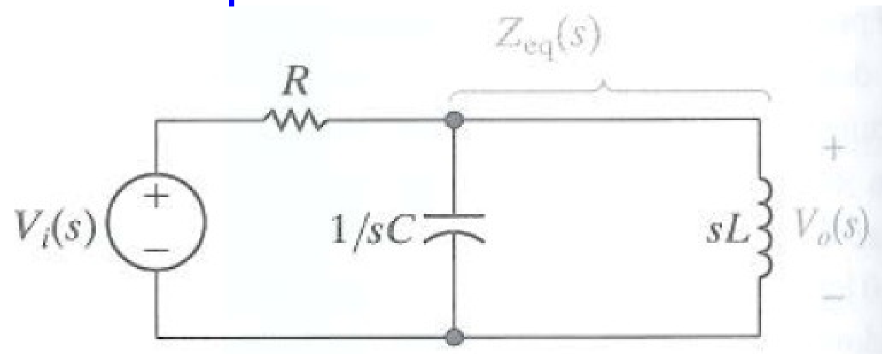
Filtro passa-faixa RLC paralelo

Projetar um filtro RLC paralelo:

tempo



freqüência



Função de transferência:

$$H(s) = \frac{\frac{s}{RC}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}}.$$

Resposta em freqüência:

$$|H(j\omega)| = \frac{\frac{\omega}{RC}}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{RC}\right)^2}}$$

Filtro passa-faixa RLC paralelo

$$|H(j\omega)| = \frac{\dfrac{\omega}{RC}}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \left(\dfrac{\omega}{RC}\right)^2}}$$

O módulo da função de transferência é máximo quando $\left(\dfrac{1}{LC} - \omega^2\right)^2$ for nulo.

$$\omega_o = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$$H_{\max} = |H(j\omega_o)| = 1$$

Freqüências de corte:

$$|H(j\omega)| = \frac{\dfrac{\omega}{RC}}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \left(\dfrac{\omega}{RC}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad \left[\omega_c RC - \frac{1}{\omega_c \dfrac{L}{R}}\right] = \pm 1.$$

Filtro passa-faixa RLC paralelo

Freqüências de corte:

$$\omega_{c1} = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{LC}},$$

$$\omega_{c2} = \frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{LC}}.$$

Largura de faixa:

$$\beta = \omega_{c2} - \omega_{c1}$$

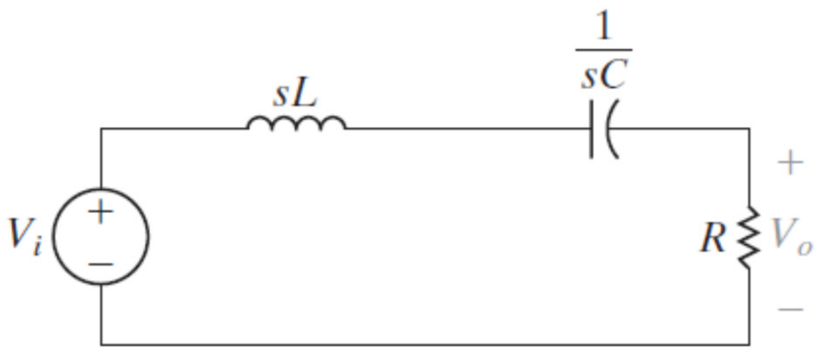
$$= \frac{1}{RC}.$$

Fator de qualidade:

$$Q = \omega_o/\beta$$

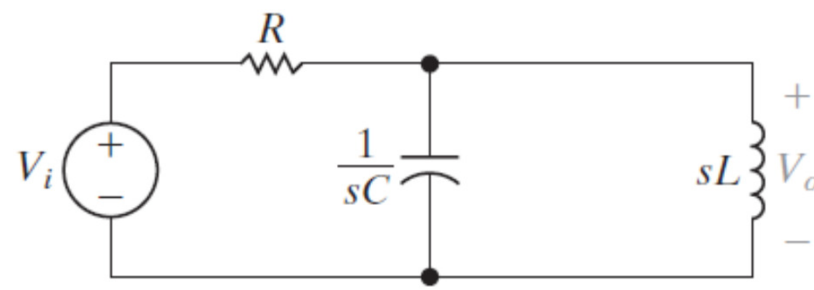
$$= \sqrt{\frac{R^2C}{L}}.$$

Filtros passa-faixa RLC série e paralelo



$$H(s) = \frac{(R/L)s}{s^2 + (R/L)s + 1/LC}$$

$$\omega_o = \sqrt{1/LC} \qquad \beta = R/L$$



$$H(s) = \frac{s/RC}{s^2 + s/RC + 1/LC}$$

$$\omega_o = \sqrt{1/LC} \qquad \beta = 1/RC$$

Expressão geral para função de transferência de filtros passa-faixa:

$$H(s) = \frac{\beta s}{s^2 + \beta s + \omega_o^2}.$$

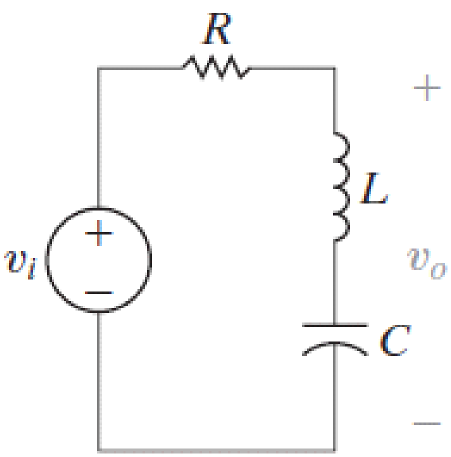
Qualquer circuito que tenha a função de transferência dada pela expressão anterior é um passa-faixa com freqüência central em ω_0 e largura de faixa β.

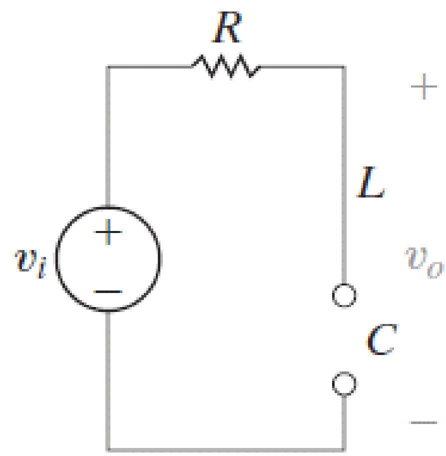
Filtro rejeita-faixa

- Executam função complementar à dos filtros passa-faixa.

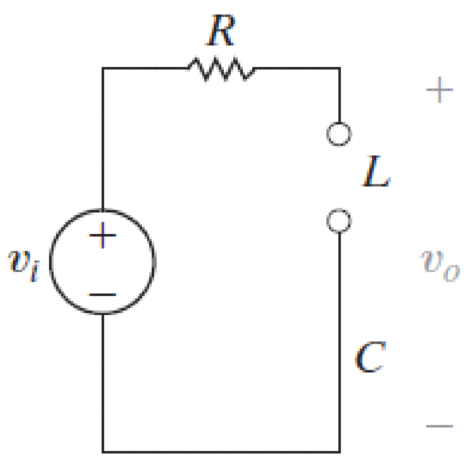
- Caracterizados pelos mesmos parâmetros: freqüências de corte, freqüência central, largura de faixa, fator de qualidade.

Filtros rejeita-faixa: RLC série



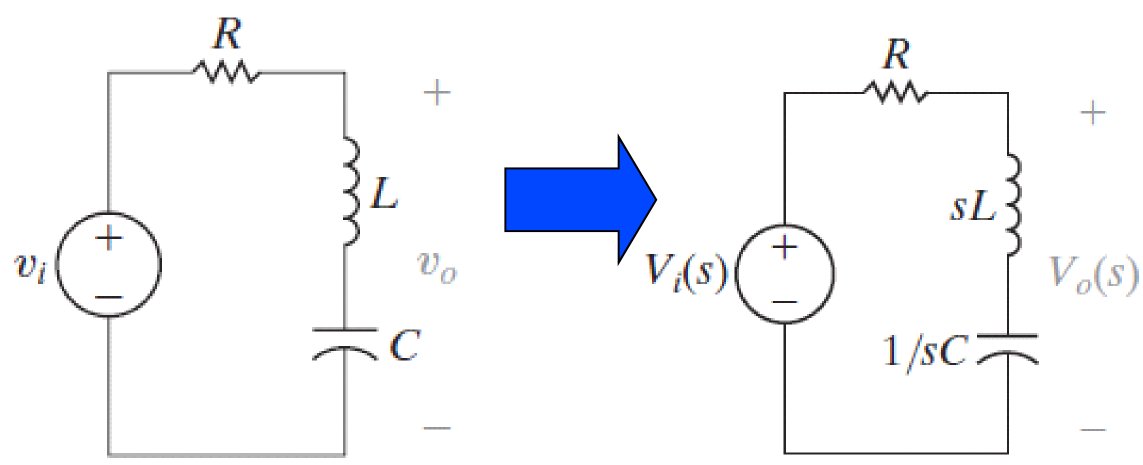


$\omega = 0$



$\omega = \infty$

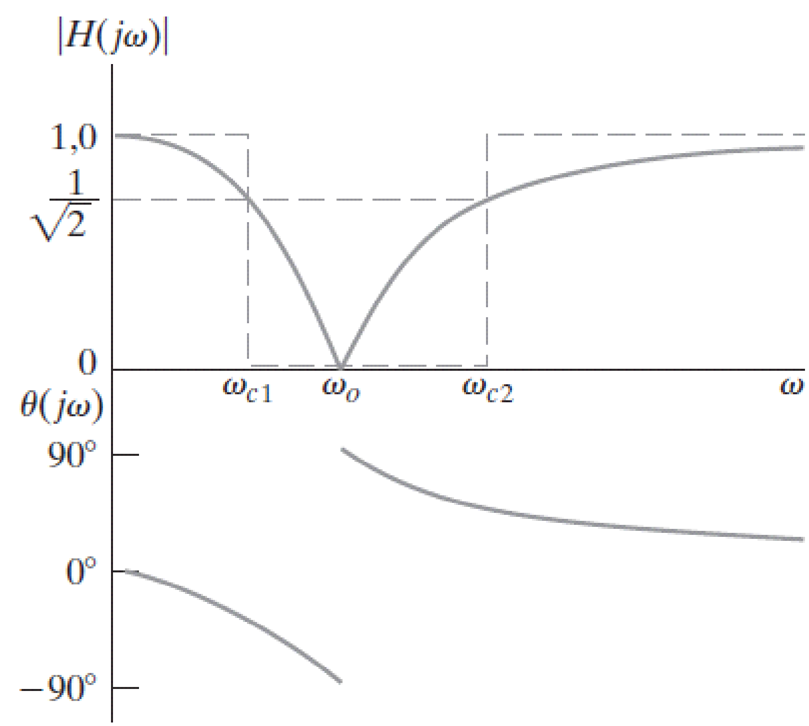
Filtros rejeita-faixa: RLC série



$$H(s) = \frac{sL + \frac{1}{sC}}{R + sL + \frac{1}{sC}} = \frac{s^2 + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}.$$

Módulo: $$|H(j\omega)| = \frac{\left|\frac{1}{LC} - \omega^2\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{\omega R}{L}\right)^2}},$$

Fase: $$\theta(j\omega) = -\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\frac{\omega R}{L}}{\frac{1}{LC} - \omega^2}\right).$$



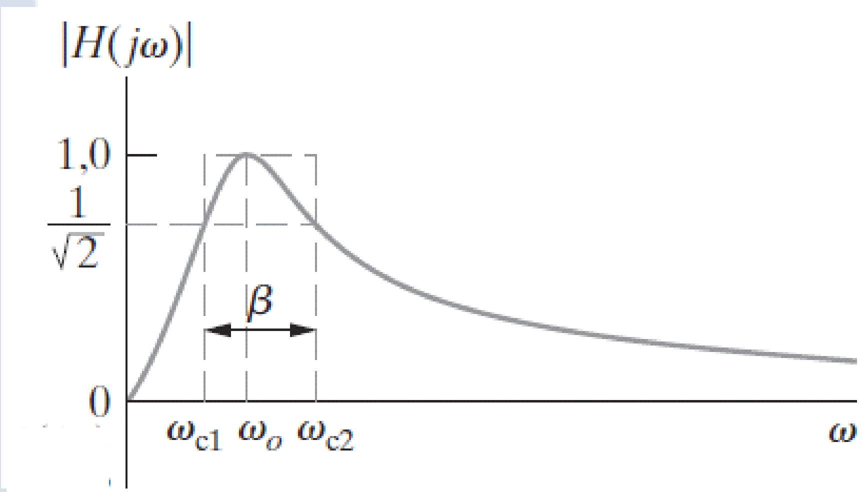
Freqüência central

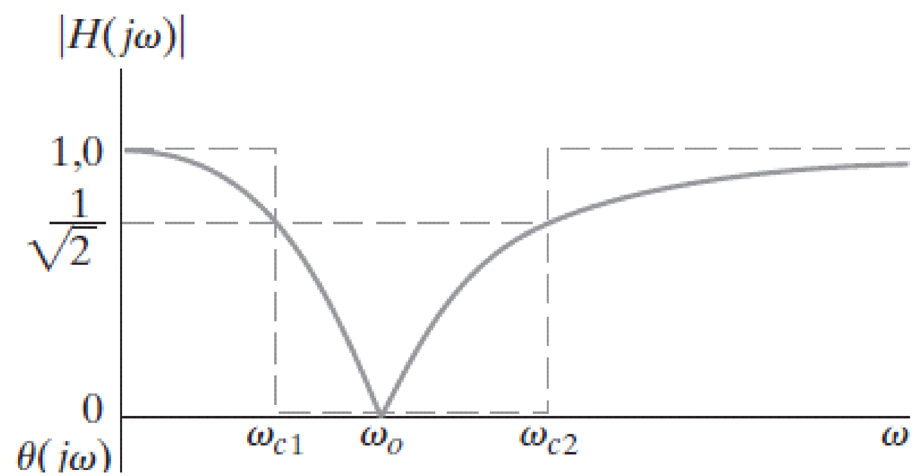
- ω_o: soma das impedâncias de indutor e capacitor é nula:

$$j\,\omega_0 L + \frac{1}{j\,\omega_0 C} = 0$$

- Logo: $$\omega_o = \sqrt{\frac{1}{LC}}.$$

- No filtro rejeita-faixa, o módulo da função de transferência é NULO na freqüência central: $|H(j\omega_0)|=0$.

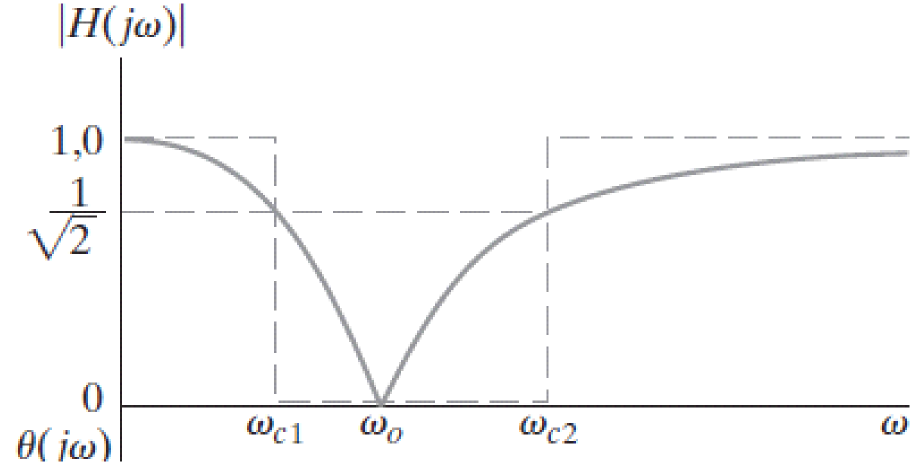




Freqüências de corte

- Máximo da função de transferência: $H_{max} = |H(j\omega_o)| = 1$
- Freqüências de corte:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = |H(j\omega)| = \frac{\left|\frac{1}{LC} - \omega^2\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{\omega R}{L}\right)^2}},$$



Freqüências de corte

- Resolvendo a equação, temos:

$$\omega_{c1} = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}},$$

$$\omega_{c2} = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}.$$

Largura de faixa

- A partir das freqüências de corte

$$\omega_{c1} = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}},$$

$$\omega_{c2} = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}.$$

- Podemos calcular a largura de faixa: $\beta = \omega_{c2} - \omega_{c1}$

$$\beta = R/L.$$

Fator de Qualidade

- Cálculo do fator de qualidade:

$$\omega_o = \sqrt{\frac{1}{LC}}.$$

$$\beta = R/L.$$

$$Q = \omega_o/\beta \longrightarrow Q = \sqrt{\frac{L}{R^2 C}}.$$

Freqüências de corte

- Freqüências de corte em função da largura de banda e da freqüência central:

$$\omega_{c1} = -\frac{\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \omega_o^2},$$

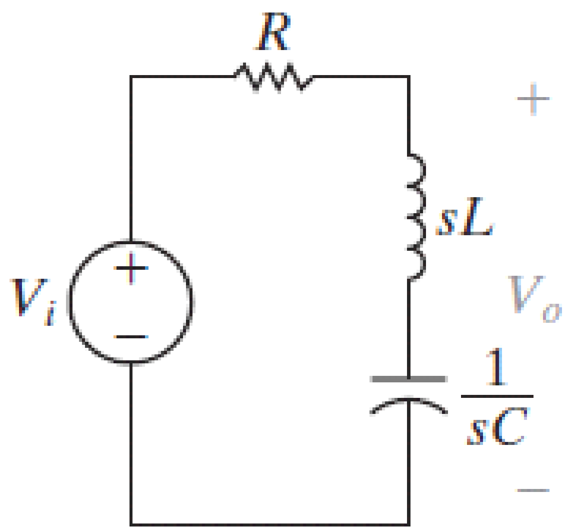
$$\omega_{c2} = \frac{\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \omega_o^2}.$$

- Freqüências de corte em função do fator de qualidade e da freqüência central:

$$\omega_{c1} = \omega_o \cdot \left[-\frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q}\right)^2}\right],$$

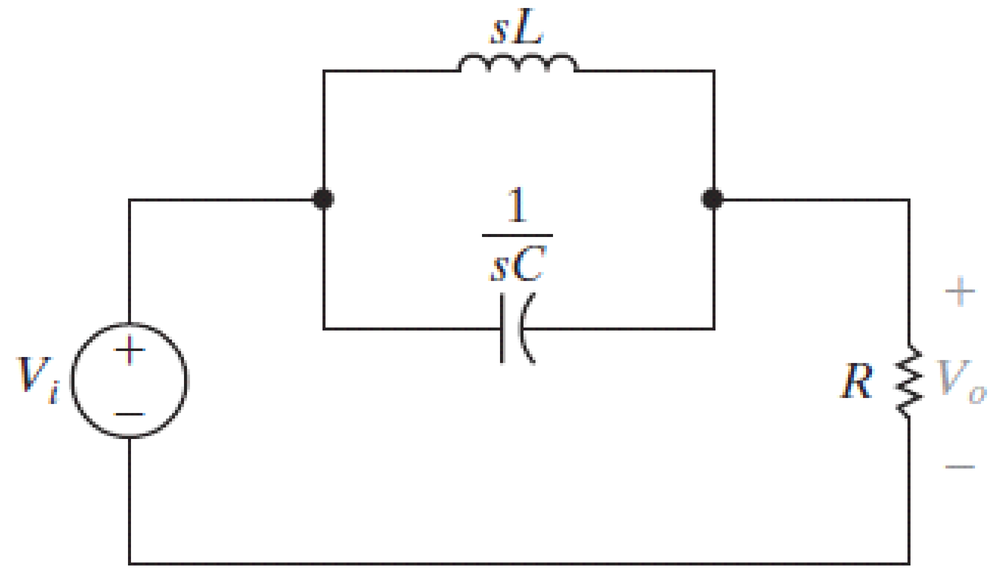
$$\omega_{c2} = \omega_o \cdot \left[\frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q}\right)^2}\right].$$

Circuitos RLC rejeita-faixa



$$H(s) = \frac{s^2 + 1/LC}{s^2 + (R/L)s + 1/LC}$$

$$\omega_o = \sqrt{1/LC} \qquad \beta = R/L$$



$$H(s) = \frac{s^2 + 1/LC}{s^2 + s/RC + 1/LC}$$

$$\omega_o = \sqrt{1/LC} \qquad \beta = 1/RC$$

- Forma geral para a função de transferência de filtros rejeita-faixa:

$$H(s) = \frac{s^2 + \omega_o^2}{s^2 + \beta s + \omega_o^2}.$$