Circuitos Elétricos III

Prof. Danilo Melges
(danilomelges@cpdee.ufmg.br)

Depto. de Engenharia Elétrica
Universidade Federal de Minas Gerais

A Transformada de Laplace na análise de circuitos – Parte 3

Função de transferência e resposta de regime permanente senoidal

- Função de transferência: usada para calcular a resposta em regime permanente a uma entrada senoidal.

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi),$$

- Re-escrevendo: $x(t) = A\cos\omega t\cos\phi - A\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\mathrm{sen}\,\phi$

- Transf. Laplace:

$$X(s) = \frac{(A\cos\phi)s}{s^2+\omega^2} - \frac{(A\,\mathrm{sen}\phi)\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$= \frac{A(s\cos\phi - \omega\,\mathrm{sen}\phi)}{s^2+\omega^2}.$$

Função de transferência e resposta de regime permanente senoidal

$$Y(s) = H(s)X(s)$$

$$Y(s) = H(s)\frac{A(s\cos\phi - \omega\,\mathrm{sen}\,\phi)}{s^2 + \omega^2}$$

- EFP: $$Y(s) = \frac{K_1}{s - j\omega} + \frac{K_1^*}{s + j\omega}$$

$$+ \sum \text{dos termos gerados pelos pólos de } \mathrm{H}(s)$$

Função de transferência e resposta de regime permanente senoidal

$$Y(s) = H(s)X(s)$$

$$Y(s) = H(s)\frac{A(s\cos\phi - \omega\,\mathrm{sen}\phi)}{s^2 + \omega^2}$$

- EFP: $$Y(s) = \frac{K_1}{s - j\omega} + \frac{K_1^*}{s + j\omega}$$

$$+ \sum \text{dos termos gerados pelos pólos de H}(s)$$

Os termos gerados pelos pólos de H(s) não contribuem para a resposta de regime permanente.

Função de transferência e resposta de regime permanente senoidal

$$Y(s) = \frac{K_1}{s - j\omega} + \frac{K_1^*}{s + j\omega}$$

$$+ \boxed{\sum \text{dos termos gerados pelos pólos de H}(s)}$$

Determinam a resposta de regime permanente (RRP).

$$Y(s) = H(s)\frac{A(s\cos\phi - \omega\,\text{sen}\phi)}{s^2 + \omega^2}$$

$$K_1 = \left.\frac{H(s)A(s\cos\phi - \omega\,\text{sen}\,\phi)}{s + j\omega}\right|_{s=j\omega}$$

$$= \frac{H(j\omega)A(j\omega\cos\phi - \omega\,\text{sen}\,\phi)}{2j\omega}$$

$$= \frac{H(j\omega)A(\cos\phi + j\,\text{sen}\,\phi)}{2} = \frac{1}{2}H(j\omega)Ae^{j\phi}.$$

Função de transferência e resposta de regime permanente senoidal

$$K_1 = \left.\frac{H(s)A(s\cos\phi - \omega\,\mathrm{sen}\,\phi)}{s + j\omega}\right|_{s=j\omega}$$

$$= \frac{H(j\omega)A(j\omega\cos\phi - \omega\,\mathrm{sen}\,\phi)}{2j\omega}$$

$$= \frac{H(j\omega)A(\cos\phi + j\,\mathrm{sen}\,\phi)}{2} = \frac{1}{2}H(j\omega)Ae^{j\phi}.$$

Escrevendo H(jω) na forma polar: $H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\theta(\omega)}$

(tanto o módulo quanto o ângulo de fase variam com ω.)

Obtemos: $K_1 = \frac{A}{2}|H(j\omega)|e^{j[\theta(\omega)+\phi]}.$

Função de transferência e resposta de regime permanente senoidal

$$Y(s) = \frac{K_1}{s - j\omega} + \frac{K_1^*}{s + j\omega}$$

com $K_1 = \frac{A}{2}|H(j\omega)|e^{j[\theta(\omega)+\phi]}$.

Transf.
Inversa
Laplace

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K}{s + \alpha - j\beta} + \frac{K^*}{s + \alpha + j\beta}\right\}$$

$$= 2|K|e^{-\alpha t}\cos(\beta t + \theta).$$

$$y_{rp}(t) = A|H(j\omega)|\cos\left[\omega t + \phi + \theta(\omega)\right]$$

Função de transferência e resposta de regime permanente senoidal

$$y_{rp}(t) = \boxed{A\left|H(j\omega)\right|} \cos\left[\omega t + \boxed{\phi + \theta(\omega)}\right]$$

- Amplitude RRP: Amplitude da fonte x módulo da função de transf.

- Ângulo de fase da RRP: ângulo de fase da fonte + ângulo de fase da função de transf

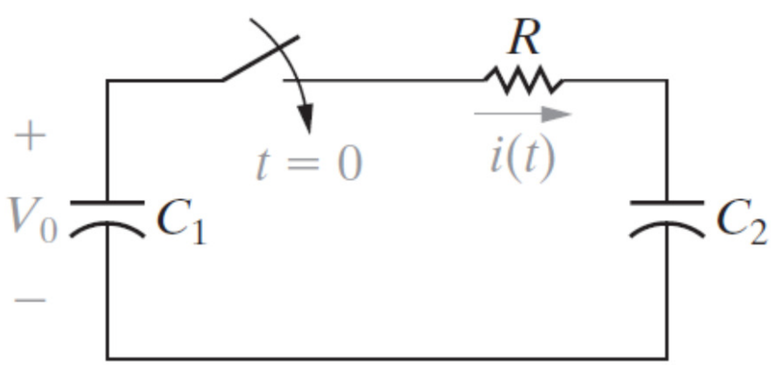
Função impulso em análise de circuitos

- Função impulso:
  - chaveamento
  - excitação por fonte impulsiva

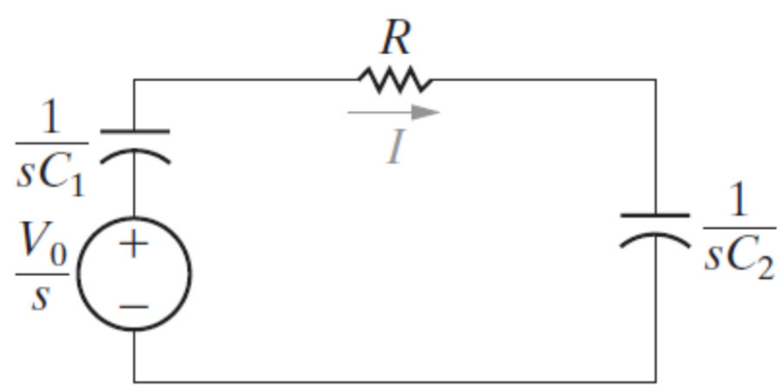
Função impulso em análise de circuitos

- Exemplo 1: chaveamento
- Problema: determinar i(t) quando R->0. Carga inicial de C_2 é nula.

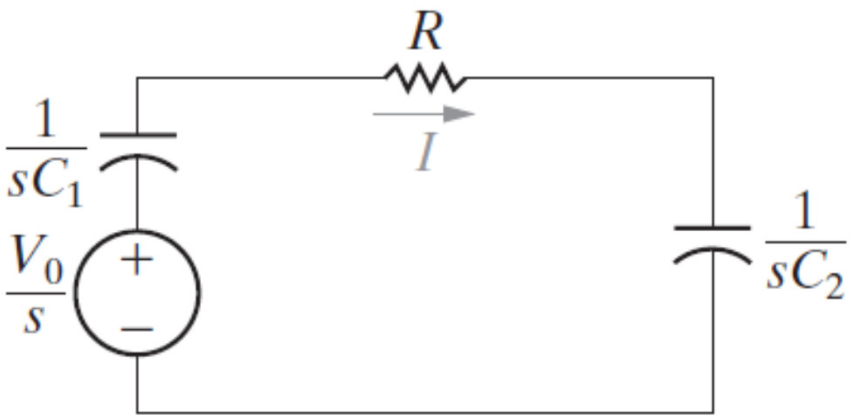
Circuito no tempo



Circuito na frequência



Função impulso em análise de circuitos



$$I = \frac{V_0/s}{R + (1/sC_1) + (1/sC_2)}$$

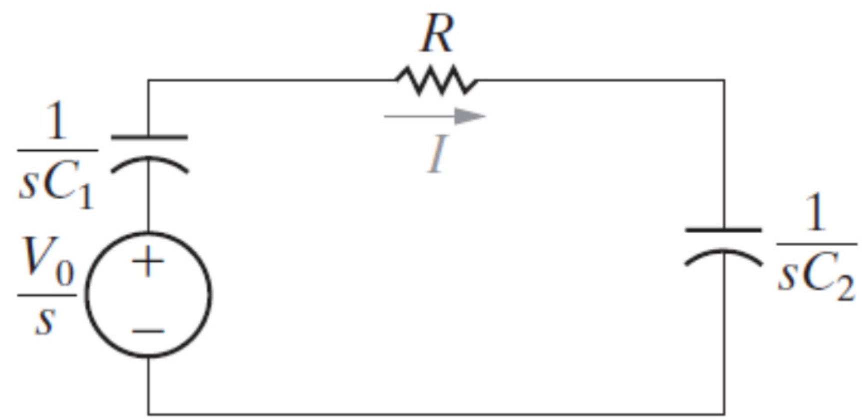
$$= \frac{V_0/R}{s + (1/RC_e)},$$

$$i = \left(\frac{V_0}{R}e^{-t/RC_e}\right)u(t),$$

Transf.
Inversa
Laplace

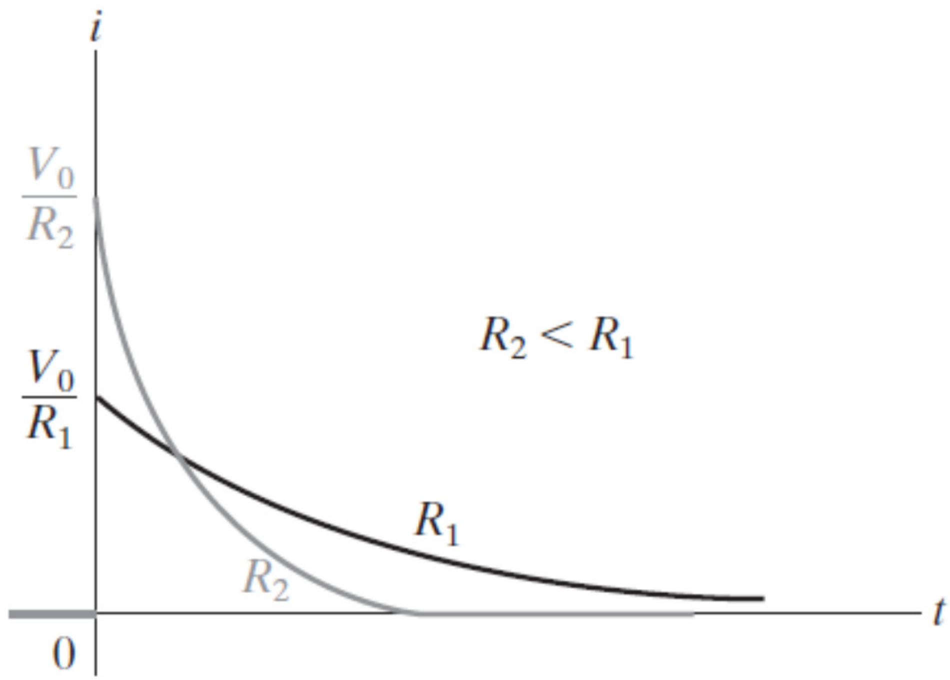
Função impulso em análise de circuitos

$$i = \left(\frac{V_0}{R} e^{-t/RC_e}\right) u(t),$$



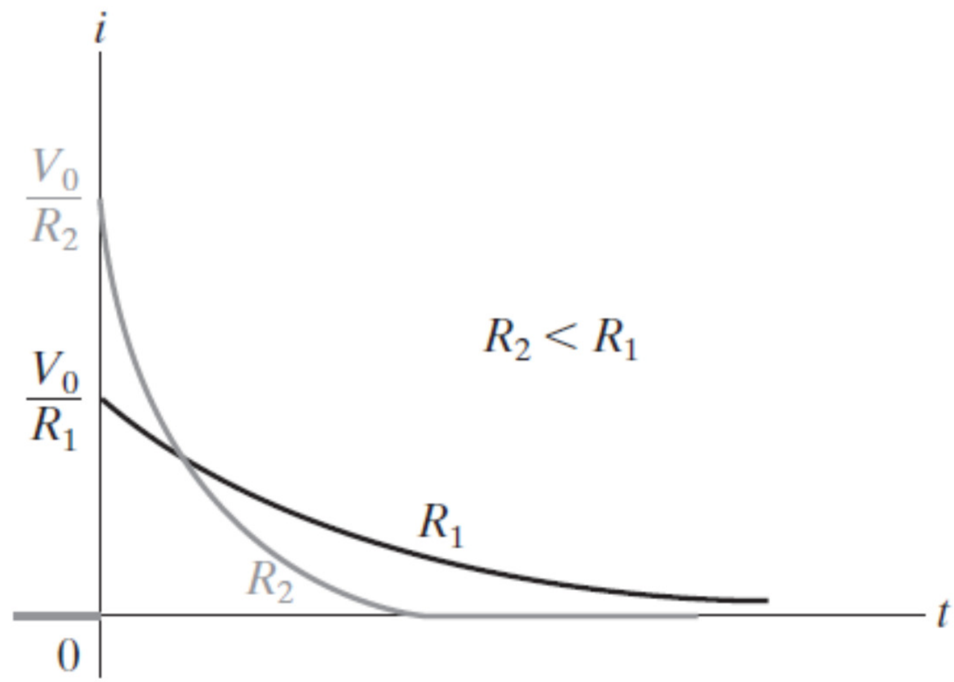
- Qdo R decresce, a corrente inicial cresce (V_0/R) e a constante de tempo decresce (RC_e).

- Qdo R->0, i → a função impulso.



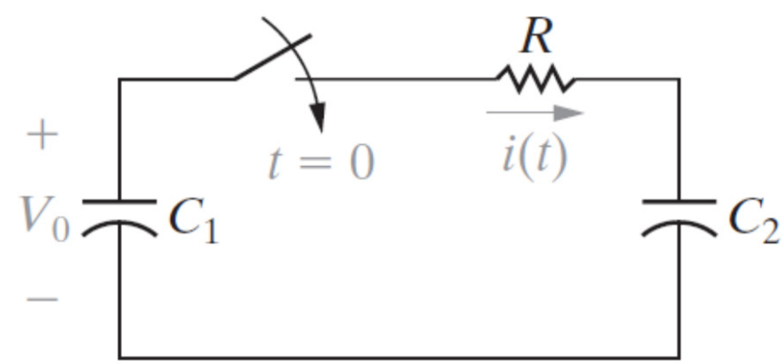
Função impulso em análise de circuitos

$$i = \left(\frac{V_0}{R}e^{-t/RC_e}\right)u(t),$$



• **Área sob a i(t):** carga total transferida para C_2 depois que a chave fechou.

$$\text{Área} = q = \int_{0^-}^{\infty} \frac{V_0}{R} e^{-t/RC_e} dt = V_0 C_e$$

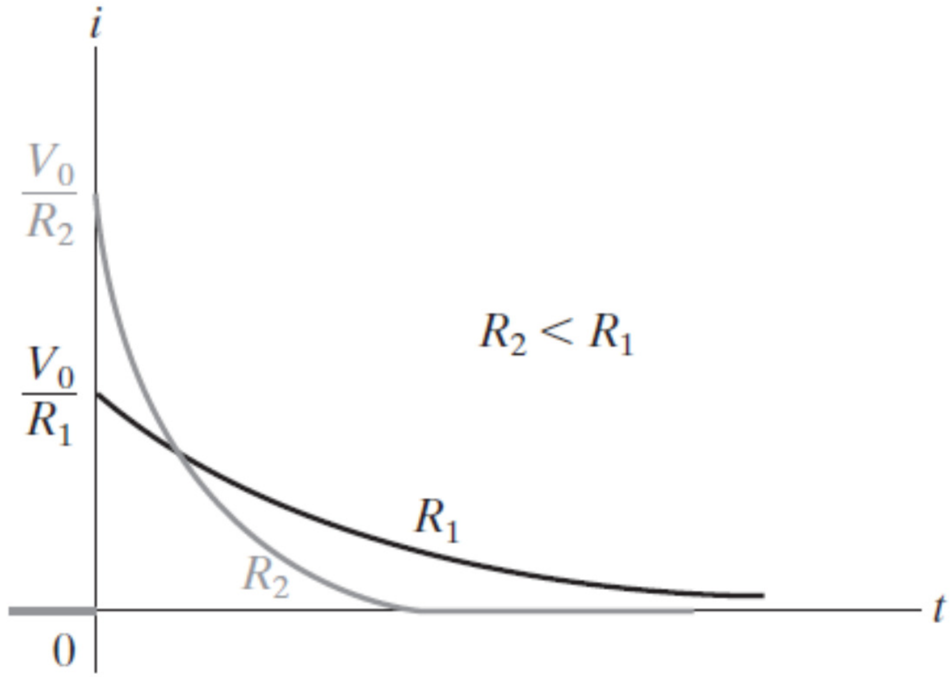


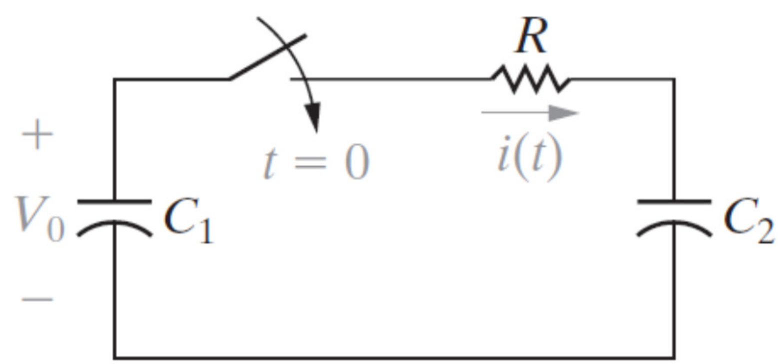
A carga transferida de C_1 para C_2 independe de R.

Função impulso em análise de circuitos

- Qdo R → 0, a corrente aproxima-se de um impulso de intensidade V_0C_e.

$$i \rightarrow V_0 C_e \delta(t)$$





Função impulso em análise de circuitos

- A resposta impulsiva de corrente pode ser obtida diretamente da transformada de Laplace, fazendo R=0:

$$I = \frac{V_0/s}{R + (1/sC_1) + (1/sC_2)}$$

$$I = \frac{V_0/s}{(1/sC_1) + (1/sC_2)} = \frac{C_1C_2V_0}{C_1 + C_2} = C_eV_0.$$

Transf.
Inversa
Laplace

$$\Big\downarrow$$

$$i \rightarrow V_0C_e\delta(t)$$

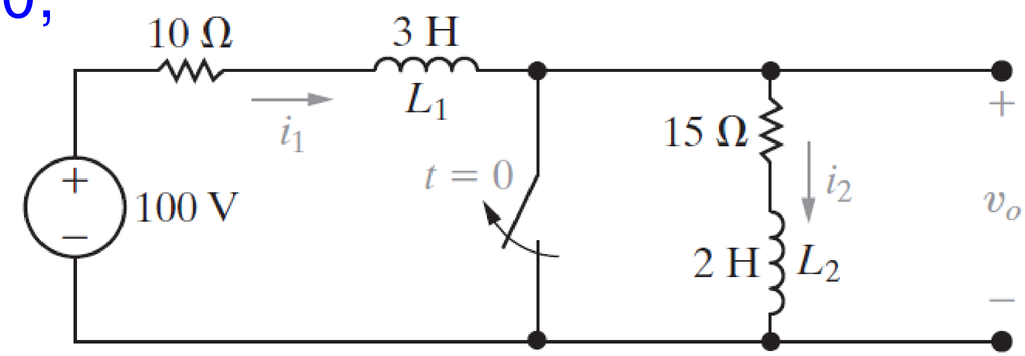
Função impulso em análise de circuitos

- Exemplo 2: chaveamento

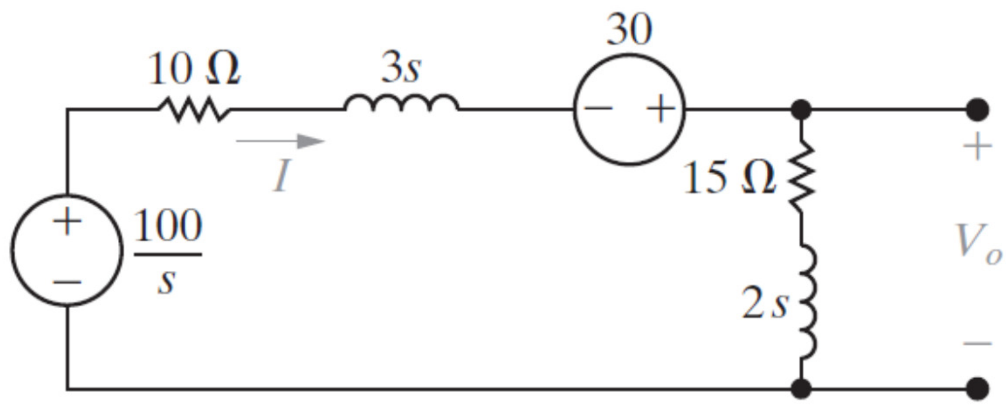
Problema: determinar $v_o(t)$ após abertura da chave.

Dado: $i_1(0_-)=10A$ e $i_2(0_-)=0$;

Circuito no tempo

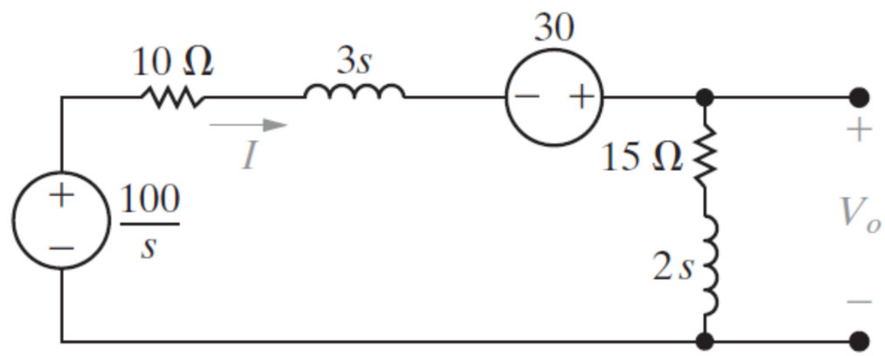


Circuito na frequência



Função impulso em análise de circuitos

- Equacionando:



$$\frac{V_o}{2s + 15} + \frac{V_o - [(100/s) + 30]}{3s + 10} = 0.$$

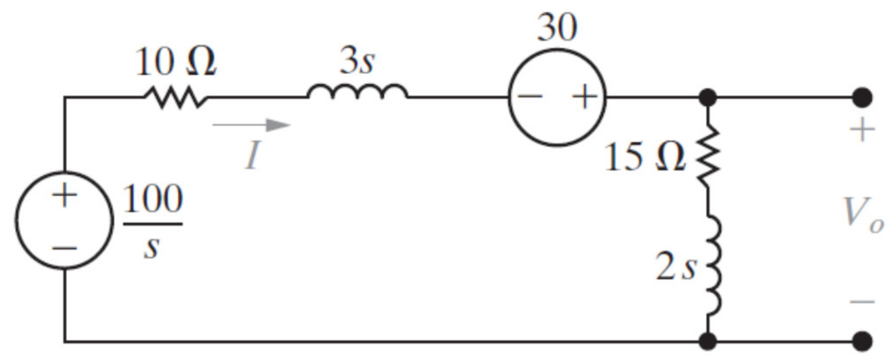
$$V_o = \frac{40(s + 7{,}5)}{s(s + 5)} + \frac{12(s + 7{,}5)}{s + 5}.$$

$$V_o = \frac{60}{s} - \frac{20}{s + 5} + 12 + \frac{30}{s + 5}$$

$$= 12 + \frac{60}{s} + \frac{10}{s + 5},$$

Função impulso em análise de circuitos

- Equacionando:



$$\frac{V_o}{2s + 15} + \frac{V_o - [(100/s) + 30]}{3s + 10} = 0.$$

$$V_o = \frac{40(s + 7{,}5)}{s(s + 5)} + \frac{12(s + 7{,}5)}{s + 5}.$$

$$V_o = \frac{60}{s} - \frac{20}{s + 5} + 12 + \frac{30}{s + 5}$$

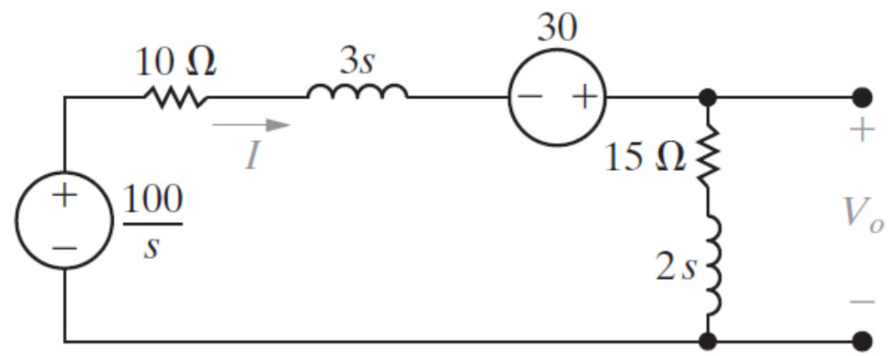
$$= 12 + \frac{60}{s} + \frac{10}{s + 5},$$

Transf.
Inversa
Laplace

$$v_o = 12\delta(t) + (60 + 10^{e-5t})u(t)\ \mathrm{V}.$$

Função impulso em análise de circuitos

• Deduzindo a expressão para corrente:



$$I = \frac{(100/s) + 30}{5s + 25} = \frac{20}{s(s + 5)} + \frac{6}{s + 5}$$

$$= \frac{4}{s} - \frac{4}{s + 5} + \frac{6}{s + 5}$$

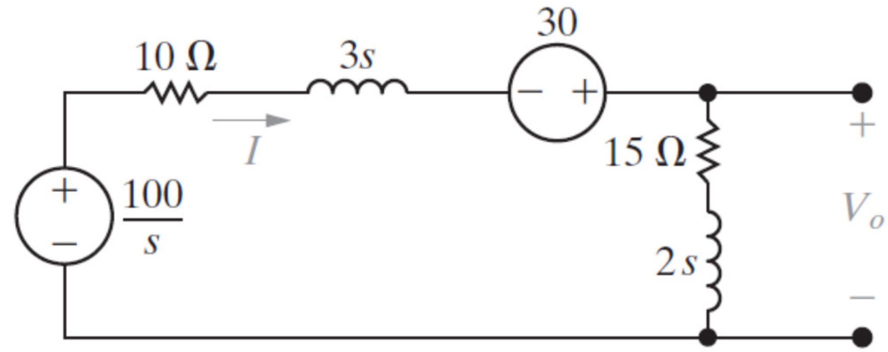
$$= \frac{4}{s} + \frac{2}{s + 5}.$$

Transf. Inversa Laplace

$$i = (4 + 2e^{-5t})u(t) \text{ A}$$

Função impulso em análise de circuitos

$$i = (4 + 2e^{-5t})u(t)\ \mathrm{A}$$

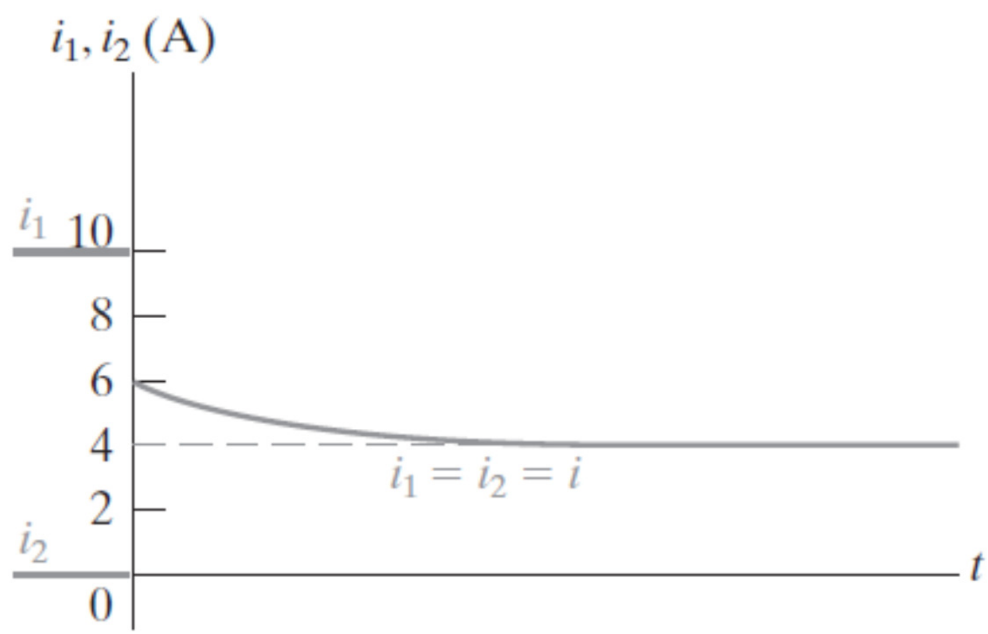


- Teste de consistência:

$t=0_- \Rightarrow i_{L1}=10A$ e $i_{L2}=0A$

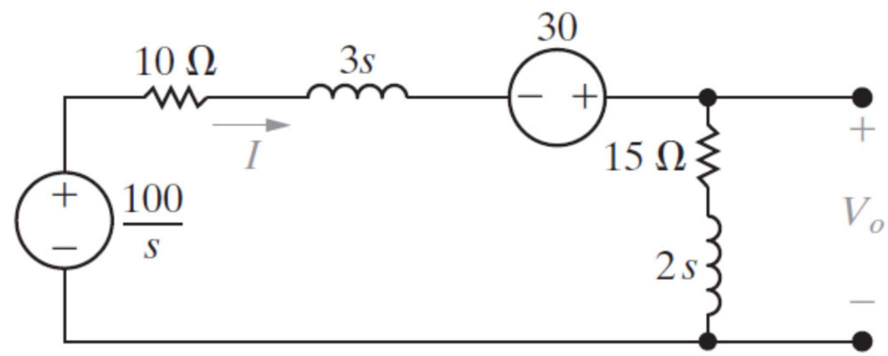
$t=0_+ \Rightarrow i_{L1}=6A$ e $i_{L2}=6A$

- Pela equação, a corrente decresce exponencialmente até 4A, o que pode ser verificado no circuito.



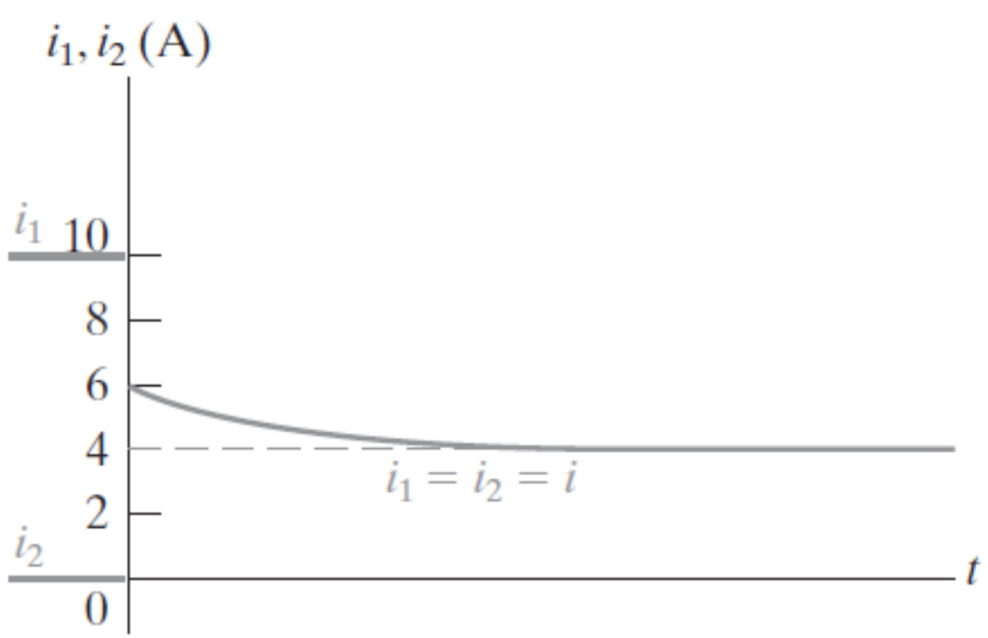
Função impulso em análise de circuitos

$$i = (4 + 2e^{-5t})u(t)\ \text{A}$$



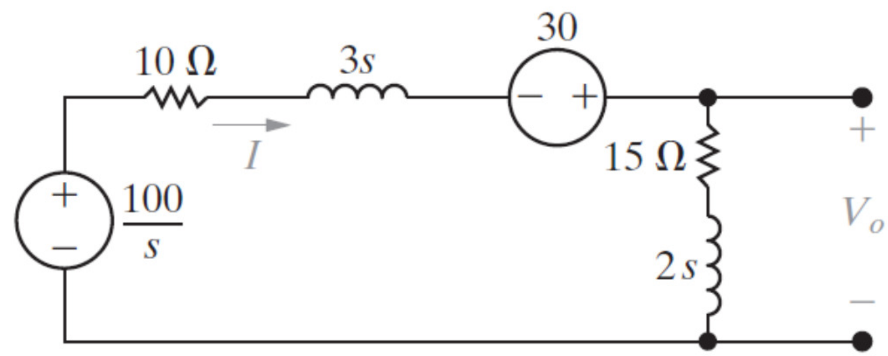
•A variação instantânea de i2 de 0 para 6A, dá origem a um impulso de 6δ em di_2/dt.

•Este impulso equivale a um impulso de tensão de 12δ no indutor de 2H.



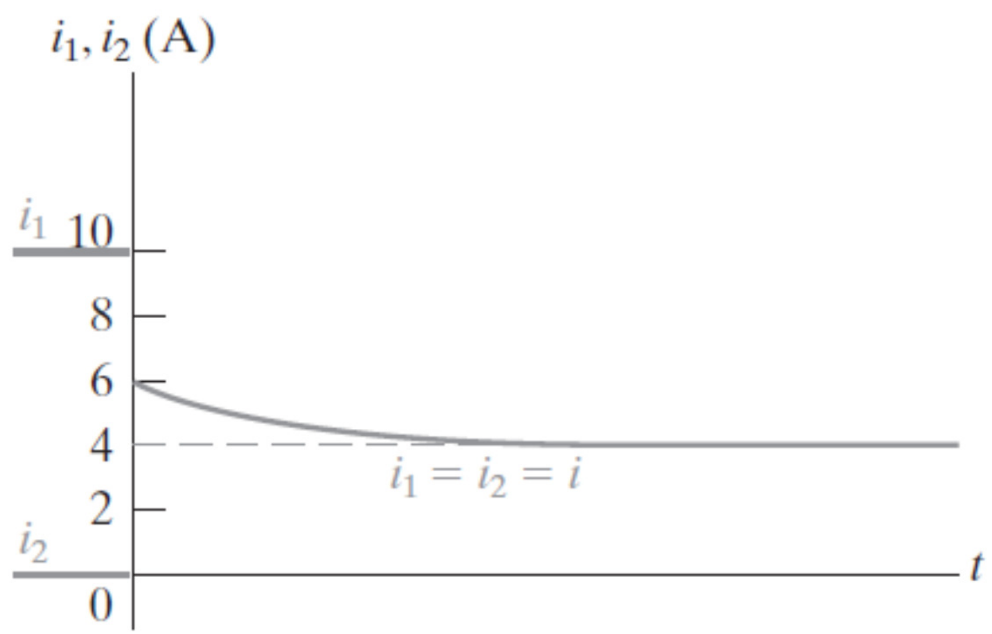
Função impulso em análise de circuitos

$$i = (4 + 2e^{-5t})u(t)\ \text{A}$$



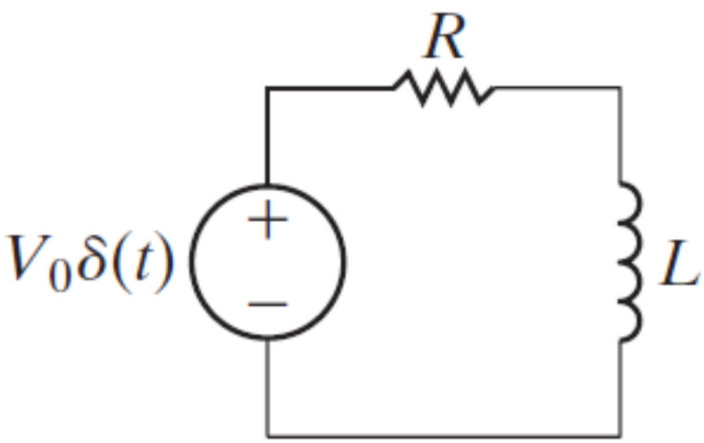
- A variação instantânea de i_1 de 10 para 6A, dá origem a um impulso de -4δ em di_1/dt.

- Este impulso equivale a um impulso de tensão de -12δ no indutor de 3H.



Fontes impulsivas

- Exemplo 2: Fonte de tensão impulsiva.
- Dado: Condições iniciais nulas.



Uma tensão impulsiva estabelece uma corrente instantânea:

$$i = \frac{1}{L}\int_{0^-}^{t} V_0\delta(x)\,dx.$$

$$i(0^+) = \frac{V_0}{L} \text{ A}$$

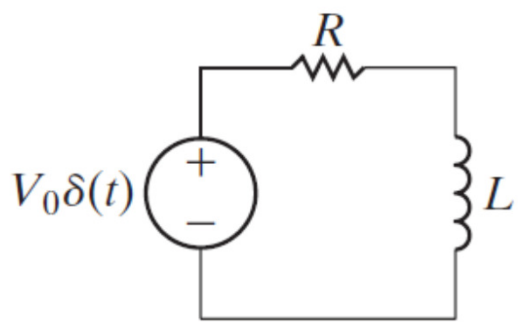
Fontes impulsivas

- A corrente cai a zero de acordo com a resposta natural do circuito:

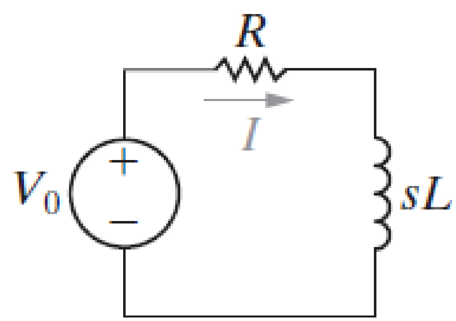
$$I = \frac{V_0}{R + sL} = \frac{V_0/L}{s + (R/L)},$$

$$i = \frac{V_0}{L} e^{-(R/L)t} = \frac{V_0}{L} e^{-t/\tau} u(t).$$

Onde τ=L/R.



Tempo



Freq.

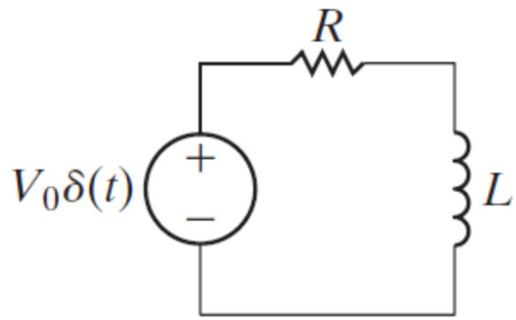
Fontes impulsivas

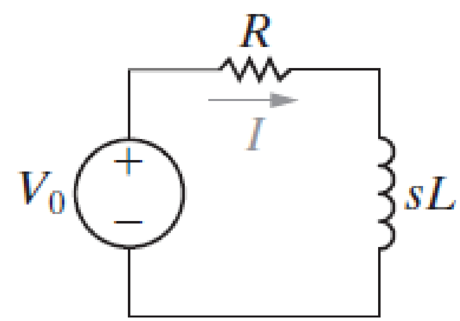
- A corrente cai a zero de acordo com a resposta natural do circuito:

$$I = \frac{V_0}{R + sL} = \frac{V_0/L}{s + (R/L)},$$

$$i = \frac{V_0}{L} e^{-(R/L)t} = \frac{V_0}{L} e^{-t/\tau} u(t).$$

Onde τ=L/R.



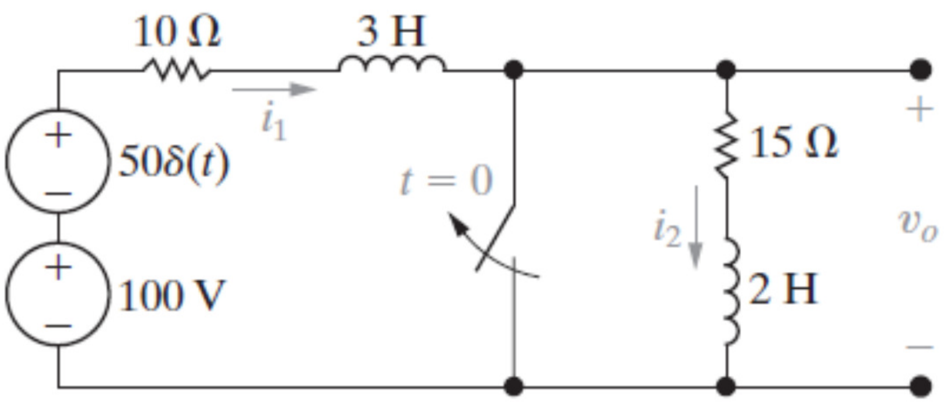


Quando um circuito é excitado por uma fonte impulsiva, sua duração infinitesimal não é capaz de gerar resposta forçada, logo, a resposta é determinada somente pela resposta natural.

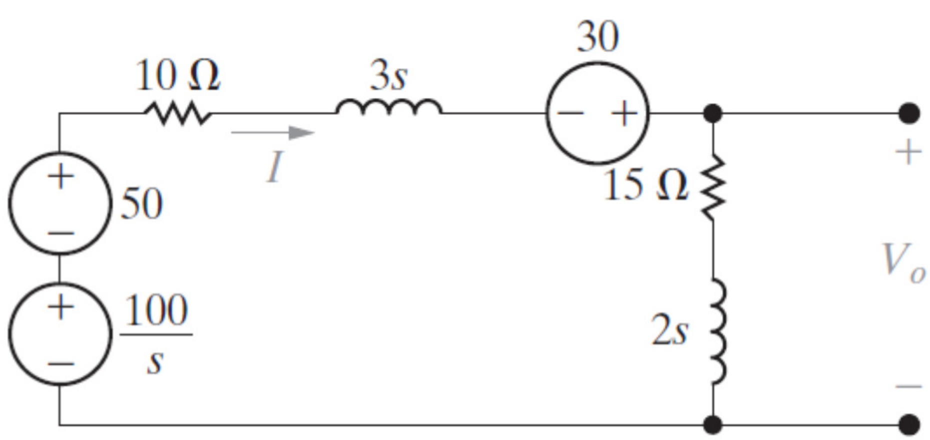
Fontes impulsivas

- Exemplo 3: associação de fontes impulsivas internas e externas.

$i_1(0_-)=10A$ e $i_2(0_-)=0A$

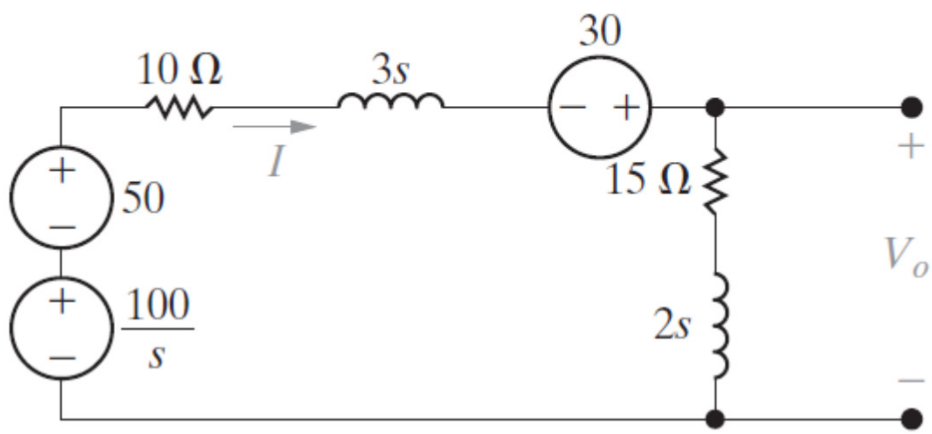


Tempo



Freq.

Fontes impulsivas



Expressão para a corrente:

$$I = \frac{50 + (100/s) + 30}{25 + 5s}$$

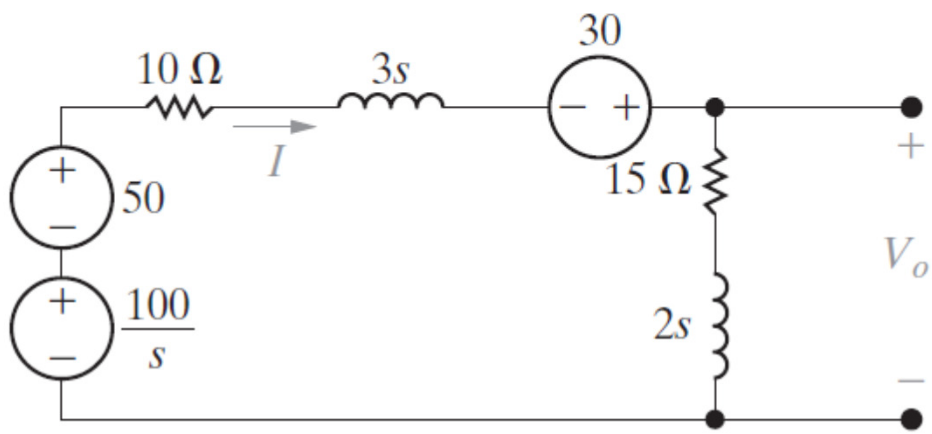
$$= \frac{16}{s+5} + \frac{20}{s(s+5)} = \frac{16}{s+5} + \frac{4}{s} - \frac{4}{s+5}$$

$$= \frac{12}{s+5} + \frac{4}{s},$$

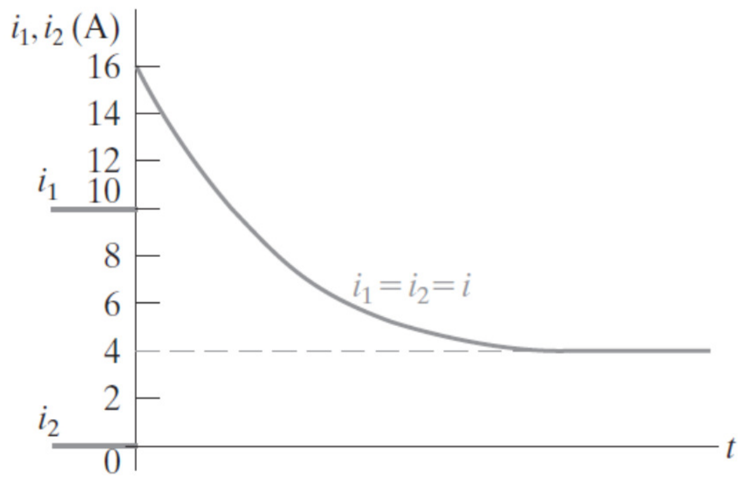
$$i(t) = (12e^{-5t} + 4)u(t)\ \mathrm{A}$$

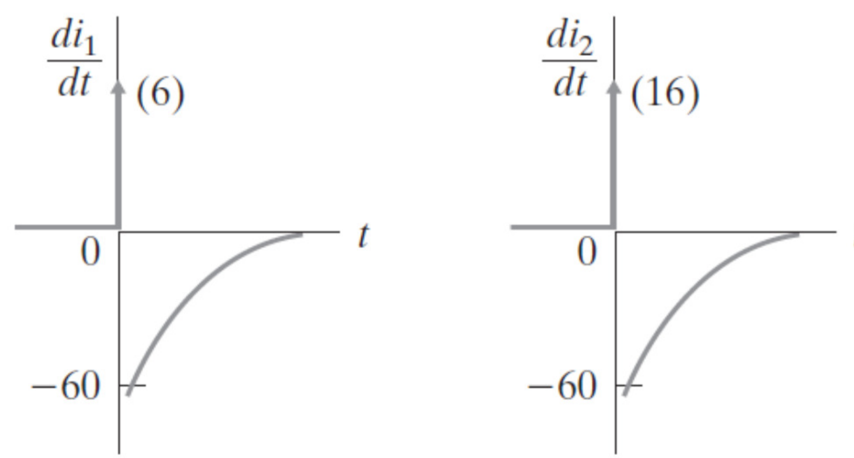
Transf. Inversa Laplace

Fontes impulsivas

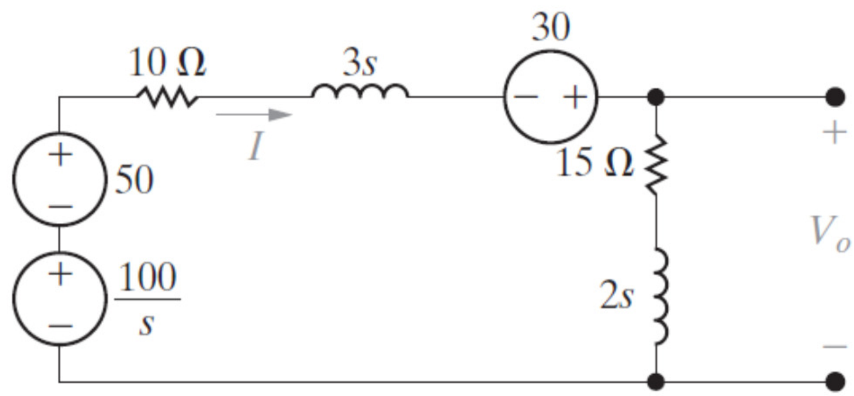


$$i(t) = (12e^{-5t} + 4)u(t) \text{ A}$$





Fontes impulsivas



Expressão para a tensão:

$$V_o = (15 + 2s)I = \frac{32(s + 7{,}5)}{s + 5} + \frac{40(s + 7{,}5)}{s(s + 5)}$$

$$= 32\left(1 + \frac{2{,}5}{s + 5}\right) + \frac{60}{s} - \frac{20}{s + 5}$$

$$= 32 + \frac{60}{s + 5} + \frac{60}{s},$$

Transf.
Inversa
Laplace

$$v_o = 32\delta(t) + (60e^{-5t} + 60)u(t)\ \mathrm{V}.$$