# Circuitos Elétricos III

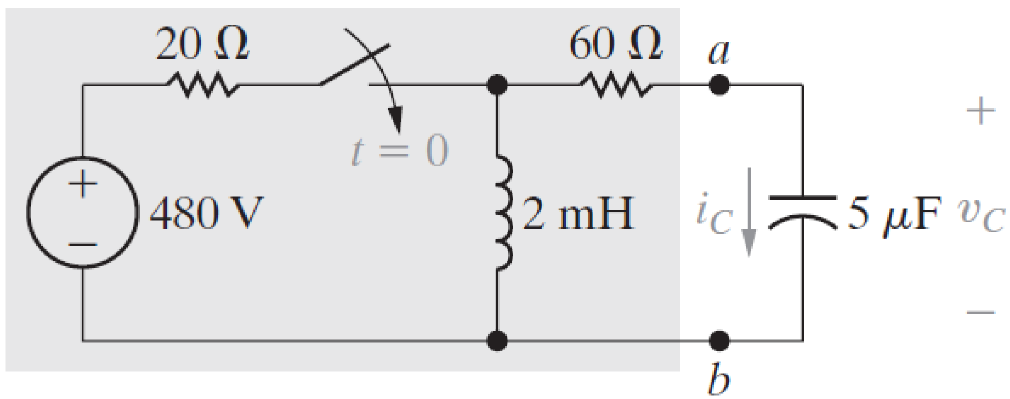
Prof. Danilo Melges
(danilomelges@cpdee.ufmg.br)

Depto. de Engenharia Elétrica
Universidade Federal de Minas Gerais

# A Transformada de Laplace em análise de circuitos – parte 2

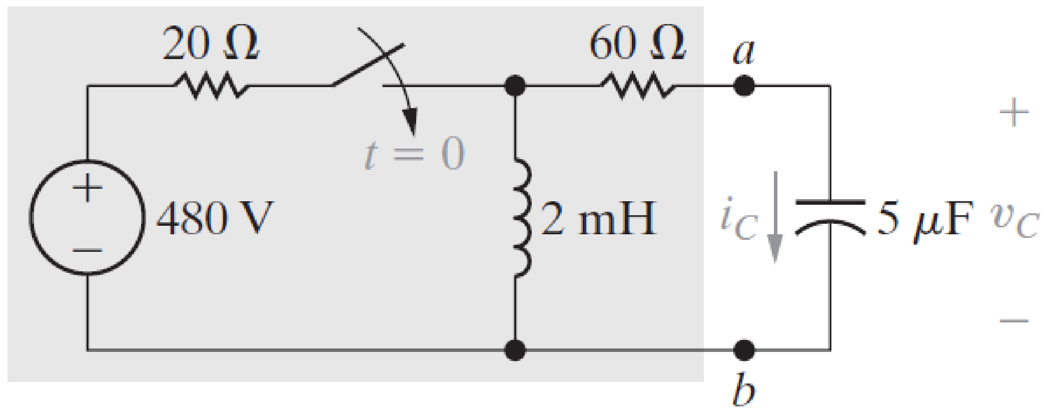
# Equivalente Thévenin no domínio da freqüência

- Problema: Qual o valor de ic quando a chave é fechada?
- Dado: a energia armazenada antes do fechamento é nula

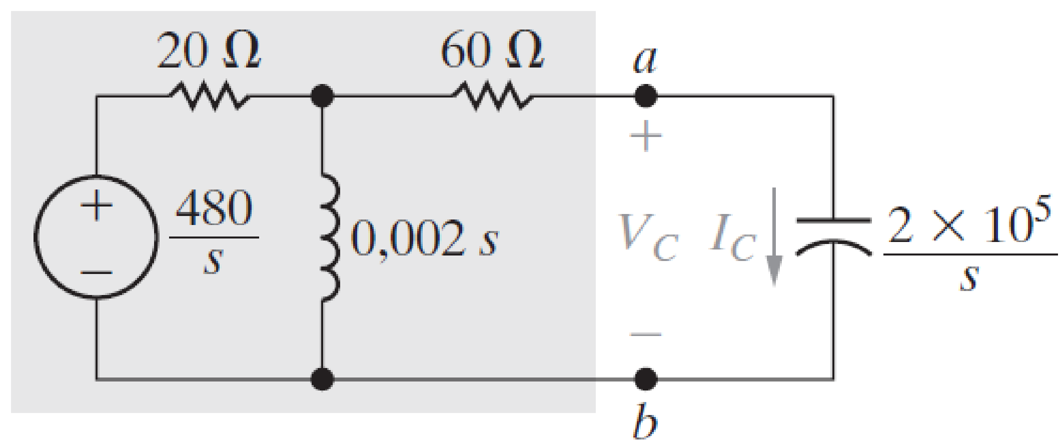


# Equivalente Thévenin no domínio da freqüência

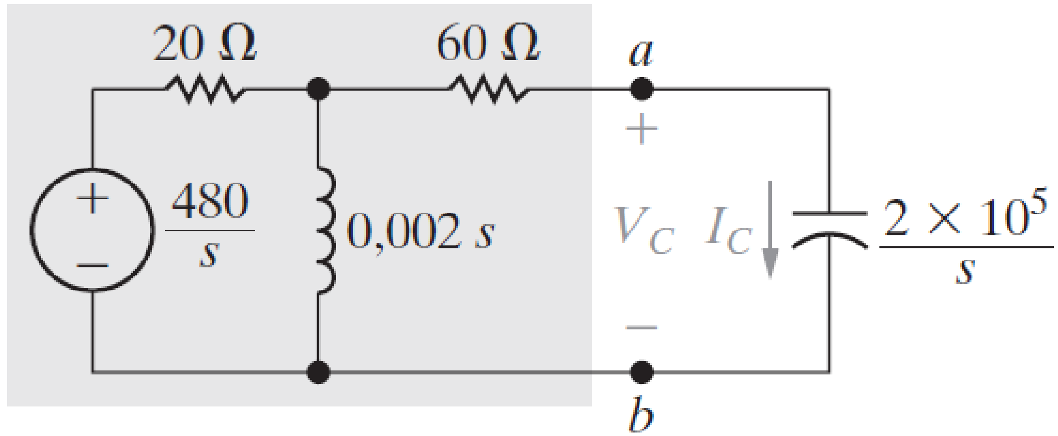
domínio do tempc




domínio da frequência



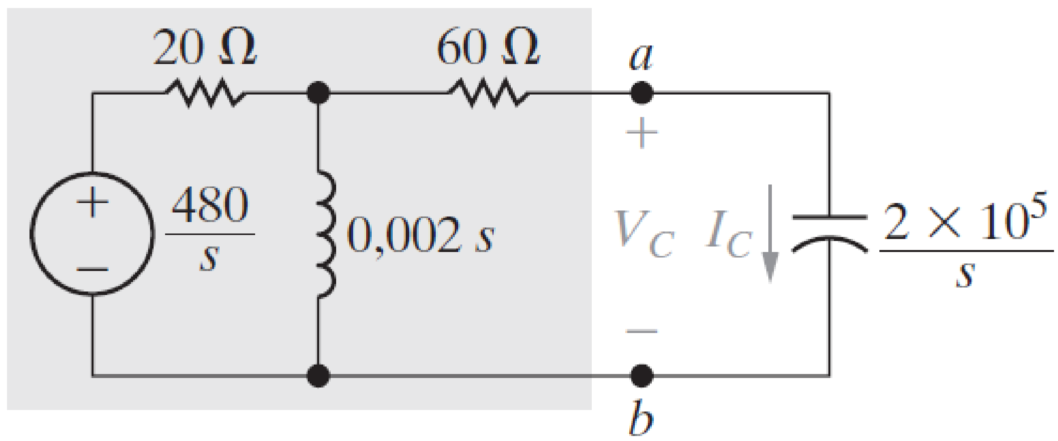
# Equivalente Thévenin no domínio da freqüência




- Tensão de Thévenin: tensão de circuito aberto nos terminais a e b.

$$V_{Th} = \frac{(480/s)(0{,}002s)}{20 + 0{,}002s} = \frac{480}{s + 10^4}$$

# Equivalente Thévenin no domínio da freqüência

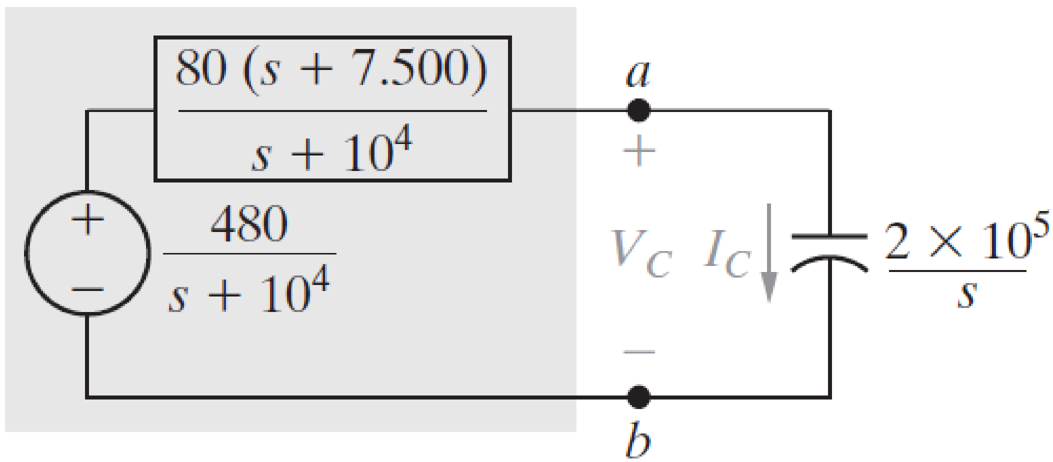



- Impedância de Thévenin: vista a partir dos terminais a e b (anulando as fontes independentes do circuito)

$$Z_{\mathrm{Th}} = 60 + \frac{0{,}002s(20)}{20 + 0{,}002s} = \frac{80(s + 7.500)}{s + 10^4}.$$

# Equivalente Thévenin no domínio da freqüência

- Circuito equivalente Thévenin




- Corrente Ic: tensão de Thévenin dividida pela impedância total.

$$I_C = \frac{480/(s+10^4)}{[80(s+7.500)/(s+10^4)] + [(2\times 10^5)/s]}.$$

# Equivalente Thévenin no domínio da freqüência

- Simplificando:

$$I_C = \frac{6s}{s^2 + 10.000s + 25 \times 10^6} = \frac{6s}{(s + 5.000)^2}.$$

- Expansão em Frações Parciais:

$$I_C = \frac{-30.000}{(s + 5.000)^2} + \frac{6}{s + 5.000},$$

# Equivalente Thévenin no domínio da freqüência

$$I_C = \frac{-30.000}{(s + 5.000)^2} + \frac{6}{s + 5.000},$$

- Aplicando a Transformada de Laplace Inversa:

$$i_C = (-30.000te^{-5.000t} + 6e^{-5.000t})u(t)\ \text{A}$$

# Equivalente Thévenin no domínio da freqüência

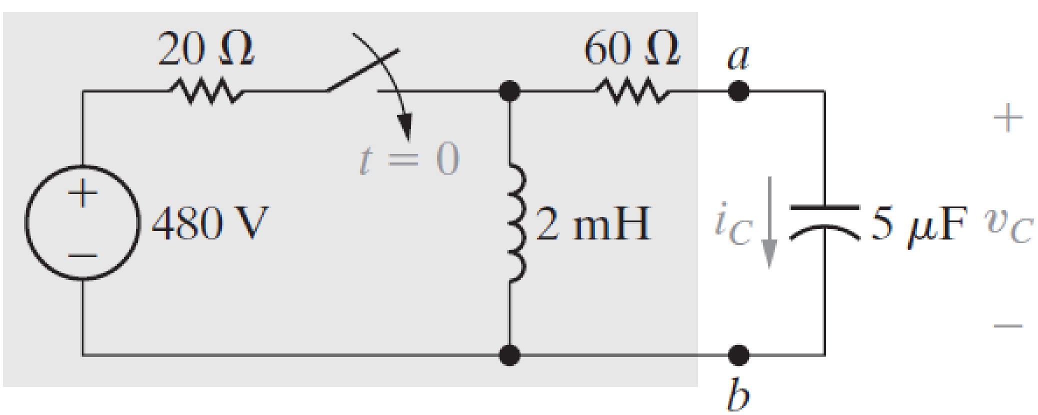
$$i_C = (-30.000te^{-5.000t} + 6e^{-5.000t})u(t)\ \text{A} \qquad \text{(Eq. 1)}$$

- Teste de consistência:

$$i_C(0) = 6\ \text{A}$$ => Pela Eq.1

- Dado: a energia armazenada antes do fechamento é nula

$v_C(0)=0$ e $i_L=0$ ➔ $i_C=480V/(20+60\Omega)=6A$



# Equivalente Thévenin no domínio da freqüência

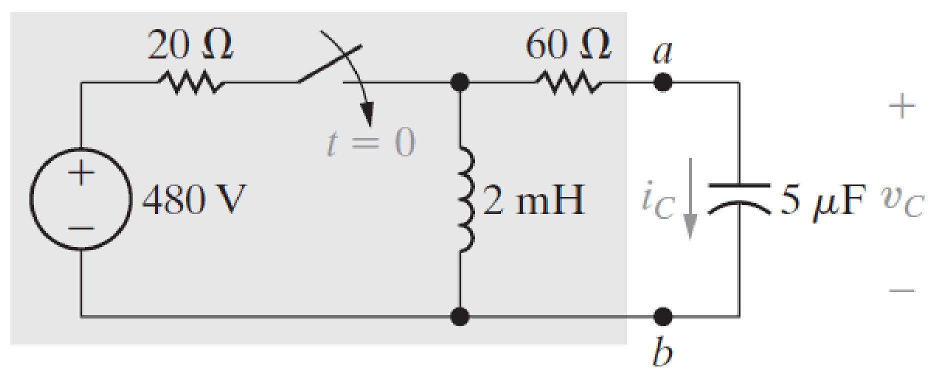
$$i_C = (-30.000te^{-5.000t} + 6e^{-5.000t})u(t) \text{ A} \qquad \text{(Eq. 1)}$$

- Teste de consistência 2:

  $i_C=0$ quando $t\rightarrow\infty$ => Pela Eq. 1

  Quando $t\rightarrow\infty$: $v_L=0$ (curto-circuito) logo $i_C=0$

- O que ocorre para t=6/30.000?



# Equivalente Thévenin no domínio da freqüência

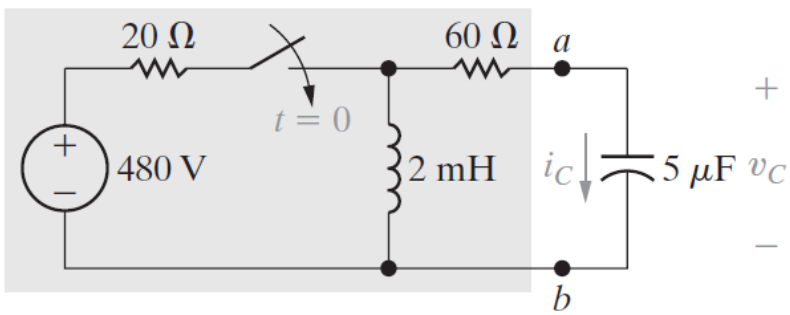
$$i_C = (-30.000te^{-5.000t} + 6e^{-5.000t})u(t)\ \text{A}$$

- Podemos obter $v_C$ por:
  - Integração no domínio do tempo:

$$v_C = 2 \times 10^5 \int_{0^-}^{t} (6 - 30.000x)e^{-5.000x}\,dx.$$

  - Ou a partir da $I_C$ no domínio da freqüência:

$$V_C = \frac{1}{sC} I_C = \frac{2 \times 10^5}{s} \frac{6s}{(s + 5.000)^2} = \frac{12 \times 10^5}{(s + 5.000)^2},$$



# Equivalente Thévenin no domínio da freqüência

$$V_C = \frac{1}{sC} I_C = \frac{2 \times 10^5}{s} \frac{6s}{(s + 5.000)^2} = \frac{12 \times 10^5}{(s + 5.000)^2},$$

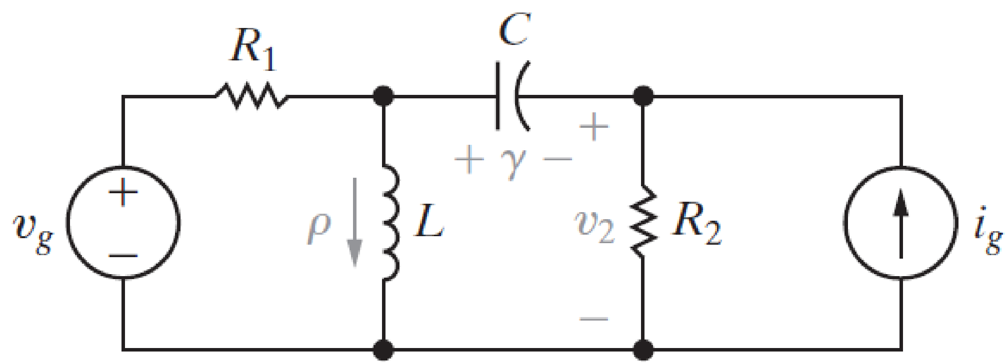
- Aplicando a Transformada Inversa de Laplace:

$$v_C = 12 \times 10^5 t e^{-5.000t} u(t)$$

- Teste de consistência: $v_C(0)=0$

# Teorema da Superposição (TS) no domínio da freqüência

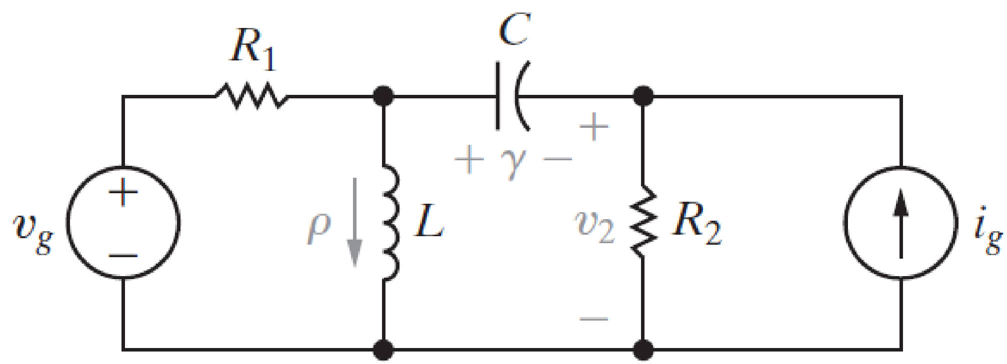
- Dividir a resposta em componentes obtidas a partir de determinadas fontes e condições iniciais.



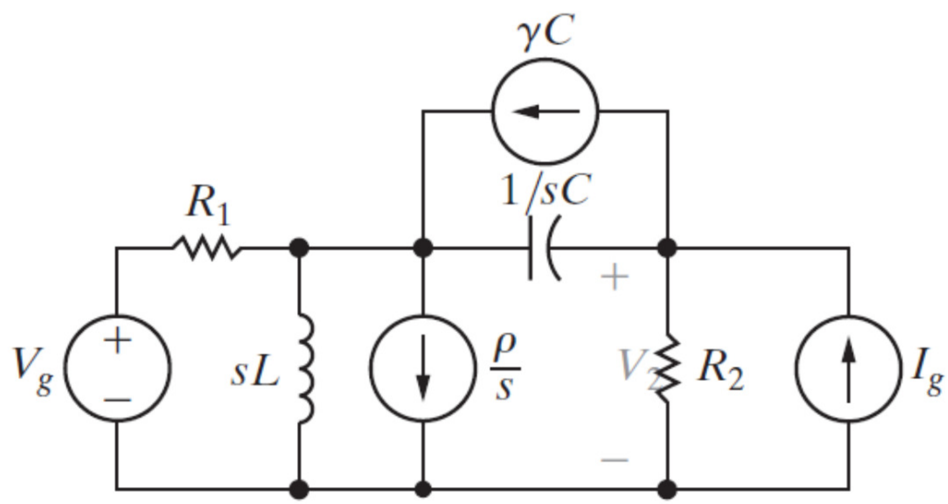

- Condições iniciais: $i_L(0)=\rho$ e $v_C(0)=\gamma$.

- Deseja-se saber a tensão sobre o resistor $v_2$.

# Teorema da Superposição no domínio da freqüência



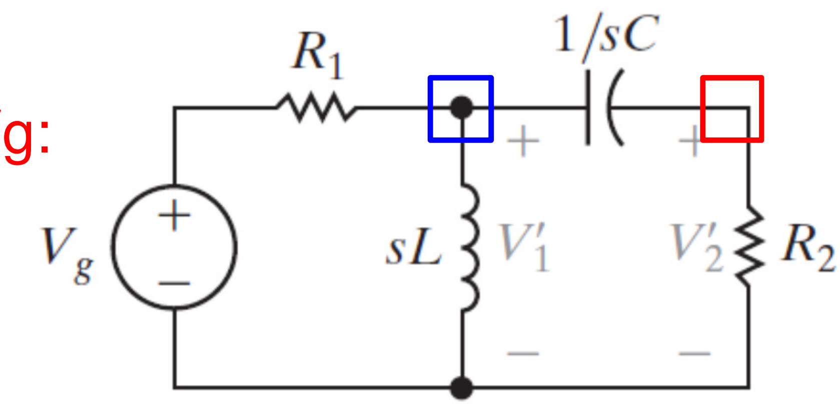

• Obtemos o circuito equivalente no domínio da freqüência ➔ neste caso, utilizamos equivalentes paralelos (método dos nós).



# Teorema da Superposição no domínio da freqüência

• Superposição: obter a resposta a cada fonte separadamente e somá-las

• Considerando somente a ação de Vg:




$$\frac{V_1' - V_g}{R_1} + \frac{V_1'}{sL} + \frac{V_1' - V_2'}{1/sC} = 0$$

$$\frac{V_1'}{R_1} + \frac{V_1'}{sL} + sCV_1' - sCV_2' = \frac{V_g}{R_1}$$

$$V_1'\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{sL} + sC\right) - sCV_2' = \frac{V_g}{R_1}$$

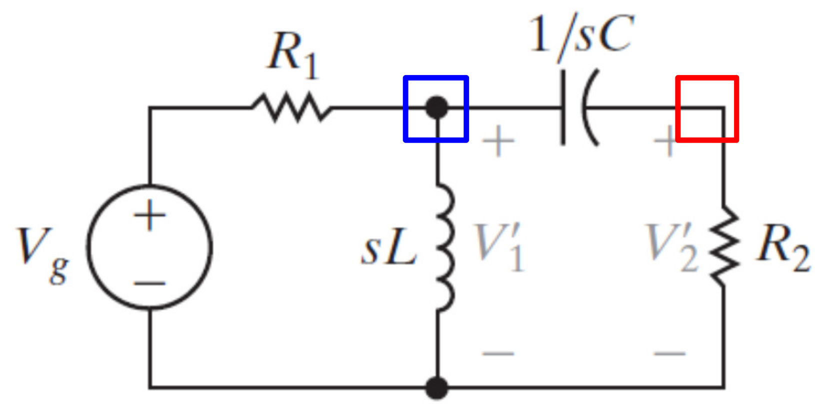
$$\frac{V_2' - V_1'}{1/sC} + \frac{V_2'}{R_2} = 0$$

$$-sCV_1' + sCV_2' + \frac{V_2'}{R_2} = 0$$

# Teorema da Superposição no domínio da freqüência

$$V_1'\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{sL}+sC\right)-sCV_2'=\frac{V_g}{R_1}$$

$$-sCV_1'+sCV_2'+\frac{V_2'}{R_2}=0$$




- Fazendo:

$$Y_{11}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{sL}+sC;$$

$$Y_{12}=-sC;$$

$$Y_{22}=\frac{1}{R_2}+sC.$$

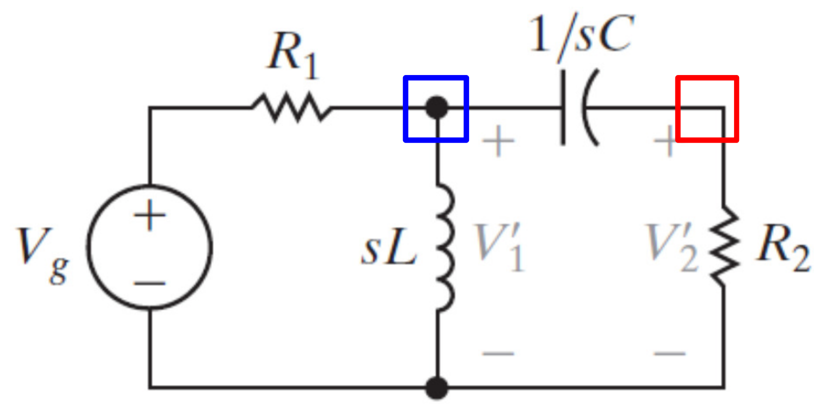
$$Y_{11}V_1'+Y_{12}V_2'=V_g/R_1$$

$$Y_{12}V_1'+Y_{22}V_2'=0.$$

# Teorema da Superposição no domínio da freqüência

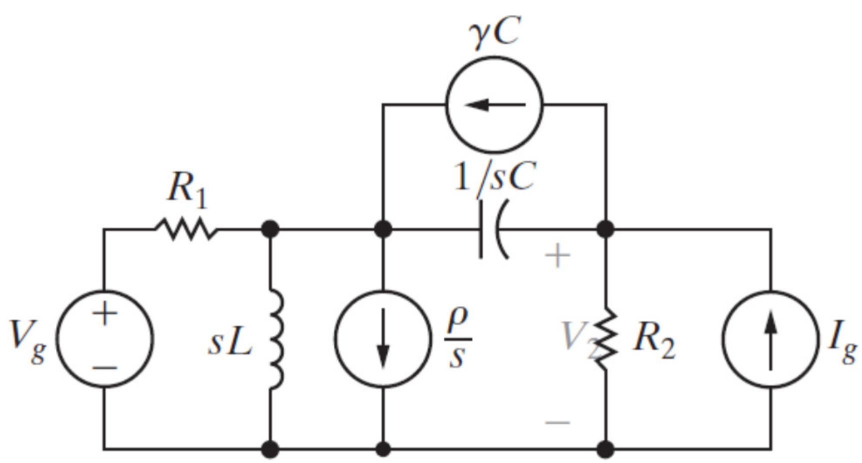
- Explicitando $V'_2$:

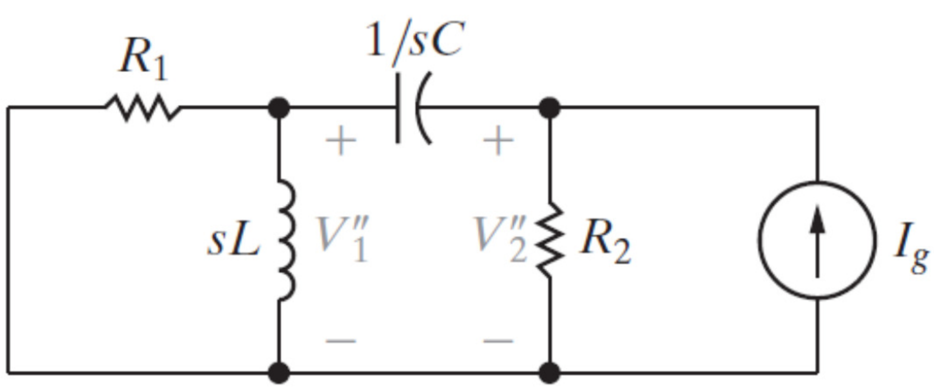
$$V_2' = \frac{-Y_{12}/R_1}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2} V_g.$$



# Teorema da Superposição no domínio da freqüência

- Considerando somente a ação de Ig:



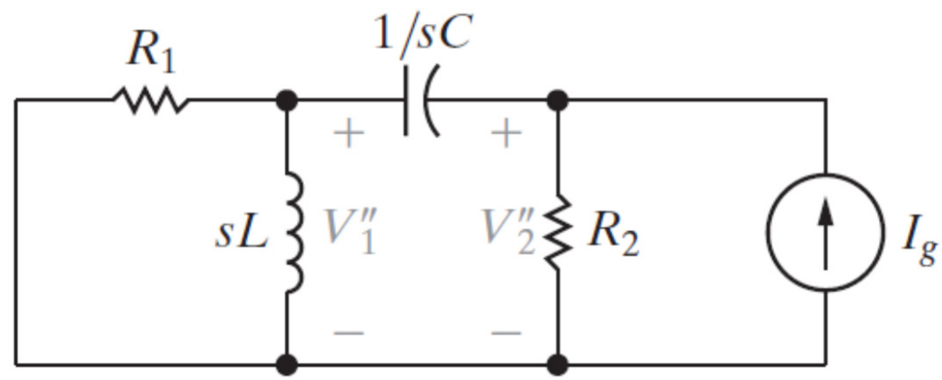

$$Y_{11}V_1'' + Y_{12}V_2'' = 0$$

$$Y_{12}V_1'' + Y_{22}V_2'' = I_g\,.$$

# Teorema da Superposição no domínio da freqüência

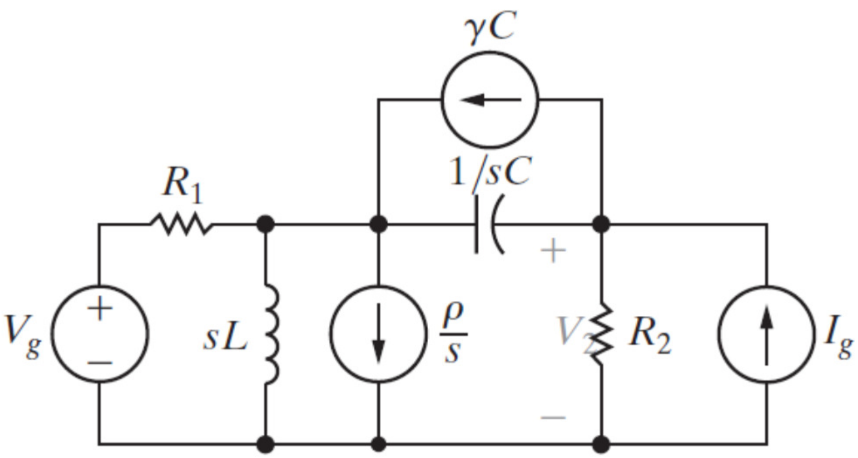
- Explicitando $V''_2$:

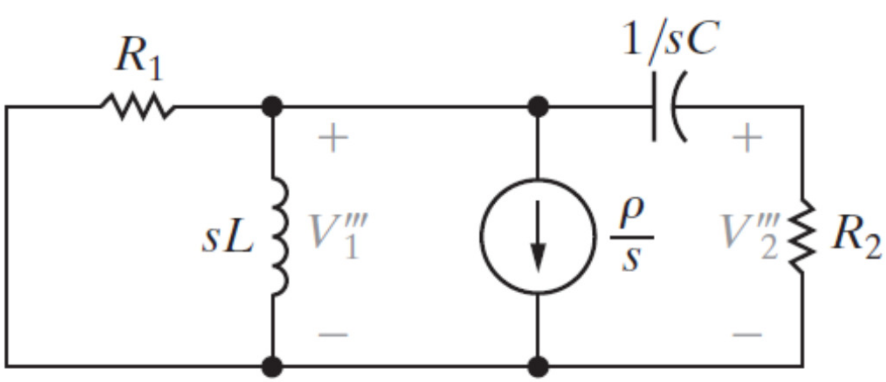
$$V_2'' = \frac{Y_{11}}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2} I_g.$$



# Teorema da Superposição no domínio da freqüência

- Calculando o componente devido à corrente inicial no indutor:



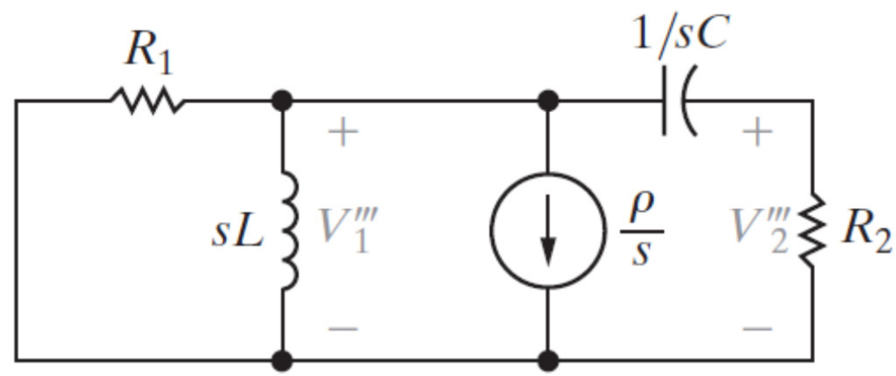

$$Y_{11}V_1''' + Y_{12}V_2''' = -\rho/s,$$

$$Y_{12}V_1''' + Y_{22}V_2''' = 0.$$

# Teorema da Superposição no domínio da freqüência

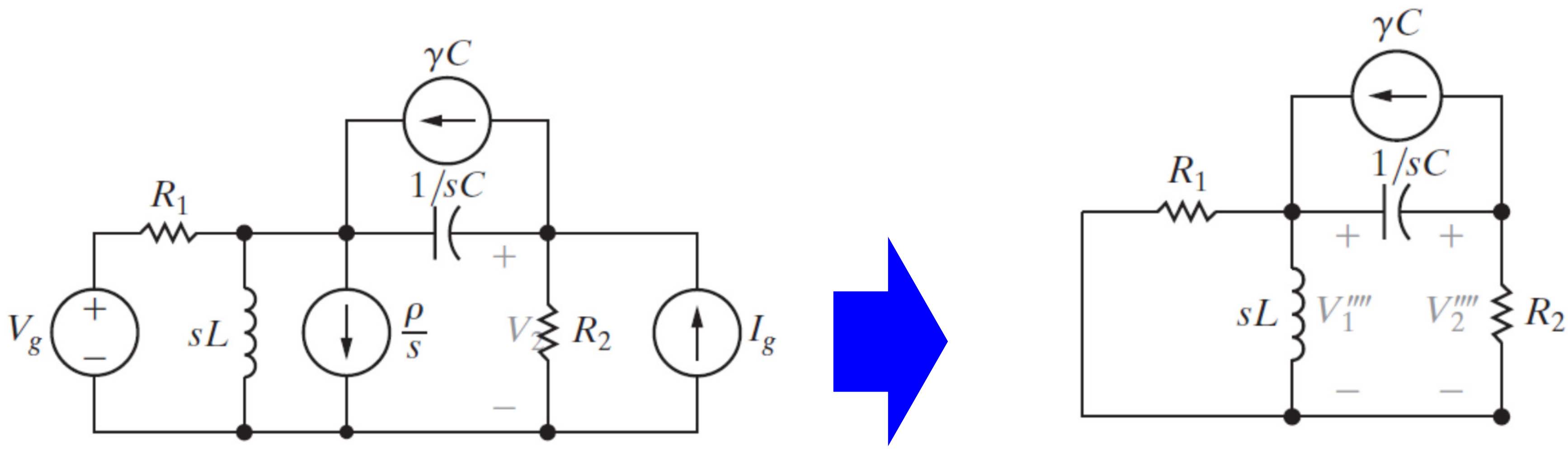
- Explicitando $V'''_2$:

$$V_2''' = \frac{Y_{12}/s}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2}\rho.$$



# Teorema da Superposição no domínio da freqüência

- Calculando o componente devido à tensão inicial no capacitor:



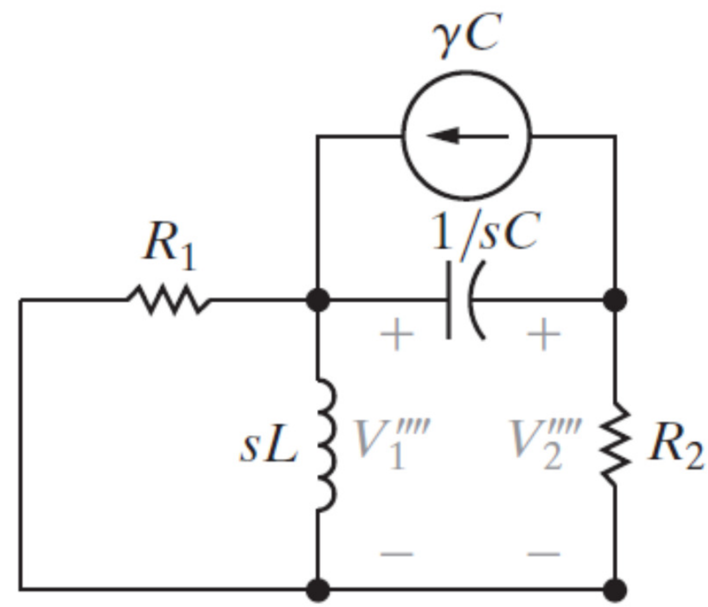

$$Y_{11}V_1'''' + Y_{12}V_2'''' = \gamma C,$$

$$Y_{12}V_1'''' + Y_{22}V_2'''' = -\gamma C.$$

# Teorema da Superposição no domínio da freqüência

- Explicitando $V''''_2$:

$$V_2'''' = \frac{-(Y_{11} + Y_{12})C}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2}\gamma.$$



# Teorema da Superposição no domínio da freqüência

- A resposta total é obtida somando-se as respostas individuais:

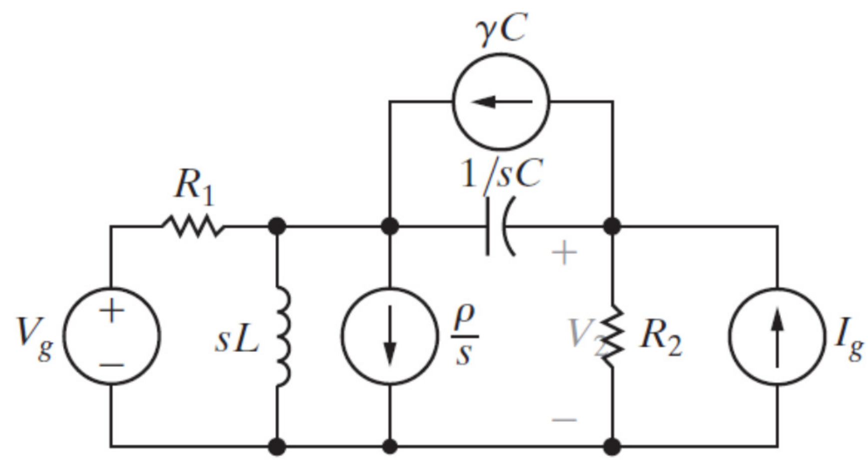
$$V_2 = V_2' + V_2'' + V_2''' + V_2''''$$

$$= \frac{-(Y_{12}/R_1)}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2}V_g + \frac{Y_{11}}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2}I_g$$

$$+ \frac{Y_{12}/s}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2}\rho + \frac{-C(Y_{11} + Y_{12})}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2}\gamma.$$

# Teorema da Superposição no domínio da freqüência

• Pode-se determinar V2, resolvendo as duas equações de tensões de nó (sem usar a superposição) :




$$Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 = \frac{V_g}{R_1} + \gamma C - \frac{\rho}{s},$$

$$Y_{12}V_1 + Y_{22}V_2 = I_g - \gamma C.$$

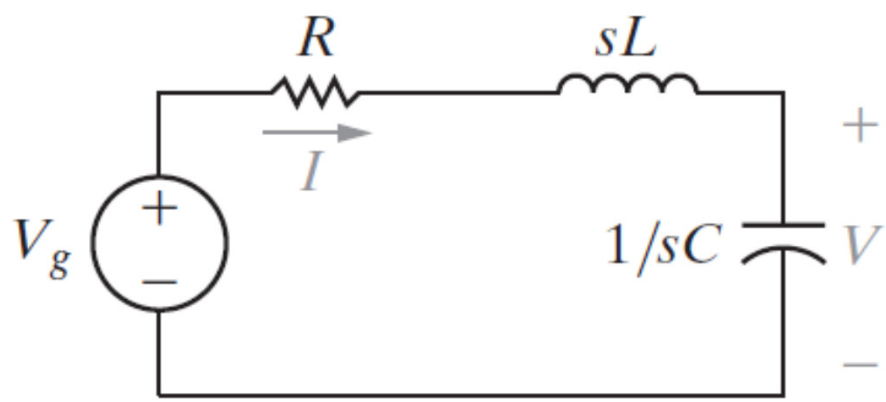
# Função de Transferência

- Função de transferência: é a razão entre a Transformada de Laplace da saída sobre a Transformada de Laplace da entrada:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)},$$

# Função de Transferência

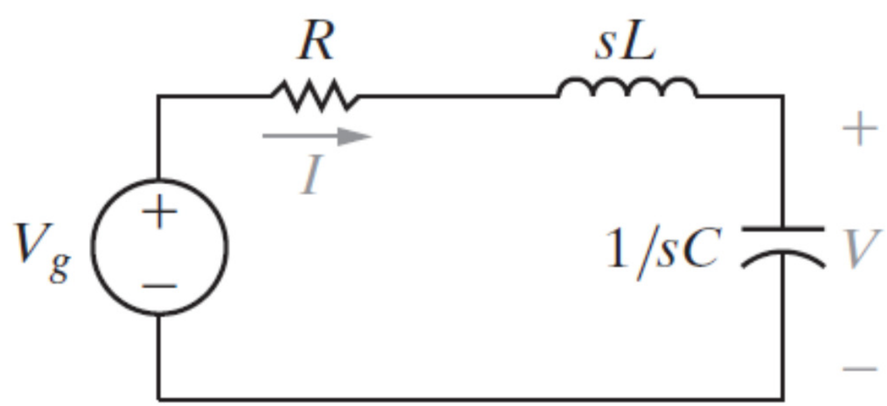
- Exemplo: a corrente I como a resposta do circuito (saída)




$$H(s) = \frac{I}{V_g} = \frac{1}{R + sL + 1/sC} = \frac{sC}{s^2LC + RCs + 1}.$$

# Função de Transferência

- Exemplo: tensão V como resposta do circuito (saída)




$$H(s) = \frac{V}{V_g} = \frac{1/sC}{R + sL + 1/sC} = \frac{1}{s^2LC + RCs + 1}.$$

# Função de Transferência

Para circuitos lineares de parâmetros concentrados:

- H(s) é sempre uma função racional de s.

- Pólos complexos de H(s) sempre aparecem em pares conjugados.

- Os pólos devem estar no semi-plano lateral esquerdo de s para que a resposta a um sinal limitado seja finita.

# Função de Transferência

A resposta de um circuito Y(s) pode ser obtida a partir da entrada X(s) e da função de transferência H(s):

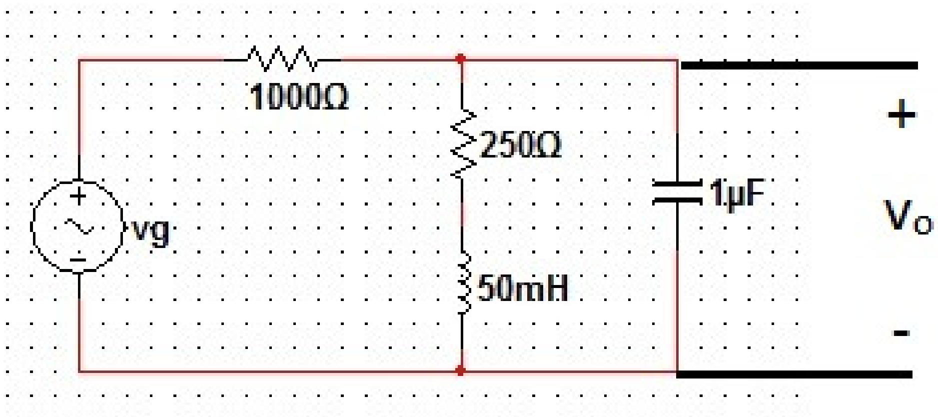
$$Y(s) = H(s)X(s).$$

- Os pólos de H(s) geram o componente transitório da resposta global

- Os pólos de X(s) geram o componente de regime permanente.

# Função de Transferência

1) Encontrar a função de Transferência Vo/Vg

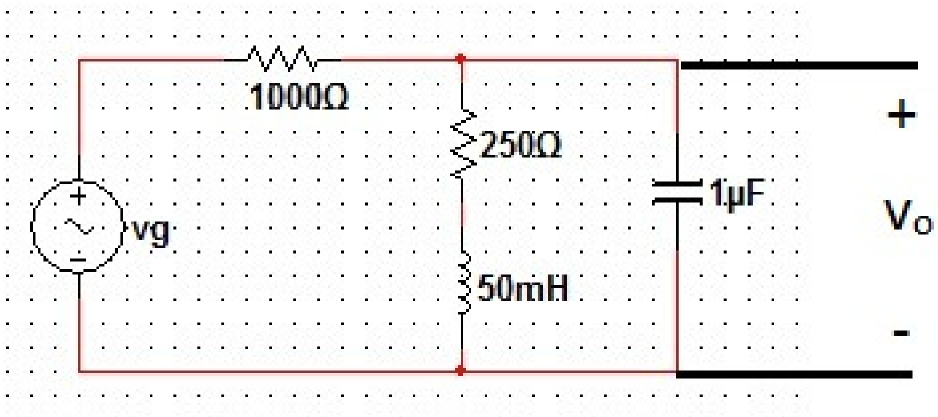



$$\frac{V_o - V_g}{1000} + \frac{V_o}{250 + 0{,}05s} + \frac{V_o}{1/s10^{-6}} = 0$$

$$H(s) = \frac{V_o}{V_g} = \frac{1000(s + 5000)}{s^2 + 6000s + 25 \times 10^6}$$

# Função de Transferência

2) Determinar $v_o$ no tempo, quando vg=50tu(t)




$$V_o = \frac{1000(s+5000)}{s^2 + 6000s + 25 \times 10^6} V_g$$

A Transformada de Laplace da excitação é: $V_g = \dfrac{50}{s^2}$

Logo, a saída é:

$$V_o = \frac{1000(s+5000)}{s^2 + 6000s + 25 \times 10^6} \times \frac{50}{s^2}$$

# Função de Transferência

Expandindo em frações parciais:

$$V_o = \frac{K_1}{s + 3000 - j4000} + \frac{K_1^*}{s + 3000 + j4000} + \frac{K_2}{s^2} + \frac{K_3}{s}$$

# Função de Transferência

Expandindo em frações parciais:

$$V_o = \frac{K_1}{s + 3000 - j4000} + \frac{K_1^*}{s + 3000 + j4000} + \frac{K_2}{s^2} + \frac{K_3}{s}$$

$$v_o = \left[10\sqrt{5} \times 10^{-4} e^{-3000t} \cos(4000t + 79{,}70^o) + 10t - 4 \times 10^{-4}\right] u(t)\ V$$

# Função de Transferência

3) Identificar a componente transitória da resposta:

$$V_o = \frac{1000(s + 5000)}{s^2 + 6000s + 25 \times 10^6} \times \frac{50}{s^2}$$

$$V_o = \frac{K_1}{s + 3000 - j4000} + \frac{K_1^*}{s + 3000 + j4000} + \frac{K_2}{s^2} + \frac{K_3}{s}$$

$$v_o = \left[10\sqrt{5} \times 10^{-4} e^{-3000t} \cos(4000t + 79{,}70^o) + 10t - 4 \times 10^{-4}\right] u(t)\ V$$

# Função de Transferência

3) Identificar a componente transitória da resposta:

$$V_o = \frac{1000(s + 5000)}{s^2 + 6000s + 25 \times 10^6} \times \frac{50}{s^2}$$

$$V_o = \boxed{\frac{K_1}{s + 3000 - j4000} + \frac{K_1^*}{s + 3000 + j4000}} + \frac{K_2}{s^2} + \frac{K_3}{s}$$

$$v_o = \left[\boxed{10\sqrt{5} \times 10^{-4} e^{-3000t} \cos(4000t + 79{,}70^o)} + 10t - 4 \times 10^{-4}\right] u(t)\ V$$

Parcela devido aos pólos complexos da função de transferência.

# Função de Transferência

4) Identificar a componente de regime permanente da resposta:

$$V_o = \frac{1000(s+5000)}{s^2 + 6000s + 25 \times 10^6} \times \frac{50}{s^2}$$

$$V_o = \frac{K_1}{s + 3000 - j4000} + \frac{K_1^*}{s + 3000 + j4000} + \frac{K_2}{s^2} + \frac{K_3}{s}$$

$$v_o = \left[10\sqrt{5} \times 10^{-4} e^{-3000t} \cos(4000t + 79{,}70^o) + 10t - 4 \times 10^{-4}\right] u(t)\ V$$

# Função de Transferência

4) Identificar a componente de regime permanente da resposta:

$$V_o = \frac{1000(s+5000)}{s^2+6000s+25\times10^6}\times\frac{50}{s^2}$$

$$V_o = \frac{K_1}{s+3000-j4000}+\frac{K_1^*}{s+3000+j4000}+\boxed{\frac{K_2}{s^2}+\frac{K_3}{s}}$$

$$v_o = \left[10\sqrt{5}\times10^{-4}e^{-3000t}\cos(4000t+79{,}70^o)+\boxed{10t-4\times10^{-4}}\right]u(t)\ V$$

Parcela devido ao pólo de segunda ordem da alimentação.

# Função de Transferência e Invariância no tempo

Y(s)=H(s)X(s) ↔ y(t)=h(t)*x(t)

E se a entrada X(s) fosse atrasada em a segundos?

$$\mathcal{L}\{x(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}X(s)$$

Saída no domínio s: $Y(s) = H(s)X(s)e^{-as}$

Saída no tempo: $y(t-a)u(t-a) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)X(s)e^{-as}\}$

# Função de transferência e resposta ao impulso

$Y(s)=H(s)X(s)$

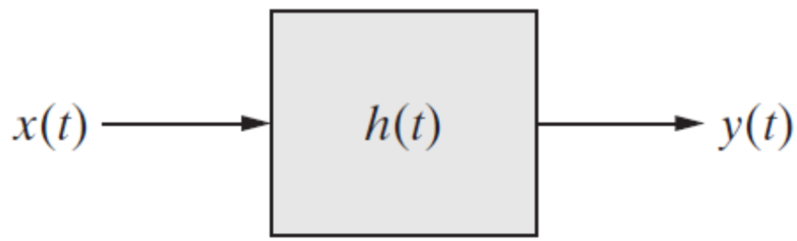
Se um impulso unitário fosse aplicado ao circuito? $X(s)=1$

A resposta do circuito seria a própria Transformada Inversa da função de transferência ($H(s)$).

Esta resposta é também a resposta natural do circuito.

# Função de transferência e integral de convolução

Integral de convolução: relaciona a saída y(t) de um circuito linear invariante no tempo com a entrada x(t) e a resposta ao impulso h(t).




$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)x(t-\lambda)\,d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\lambda)x(\lambda)\,d\lambda.$$

Por que trabalhar com a integral de convolução?

Ex.: x(t) e h(t) são dados experimentais.

# Função de transferência e integral de convolução

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t - \lambda)\, d\lambda,$$

Fazendo u=t-λ: a) du=-dλ; b) u=-∞ quando λ=+∞; c) u=+∞ quando λ=-∞;

$$y(t) = \int_{\infty}^{-\infty} x(t - u)h(u)(-du),$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - u)h(u)(du).$$

# Função de transferência e integral de convolução

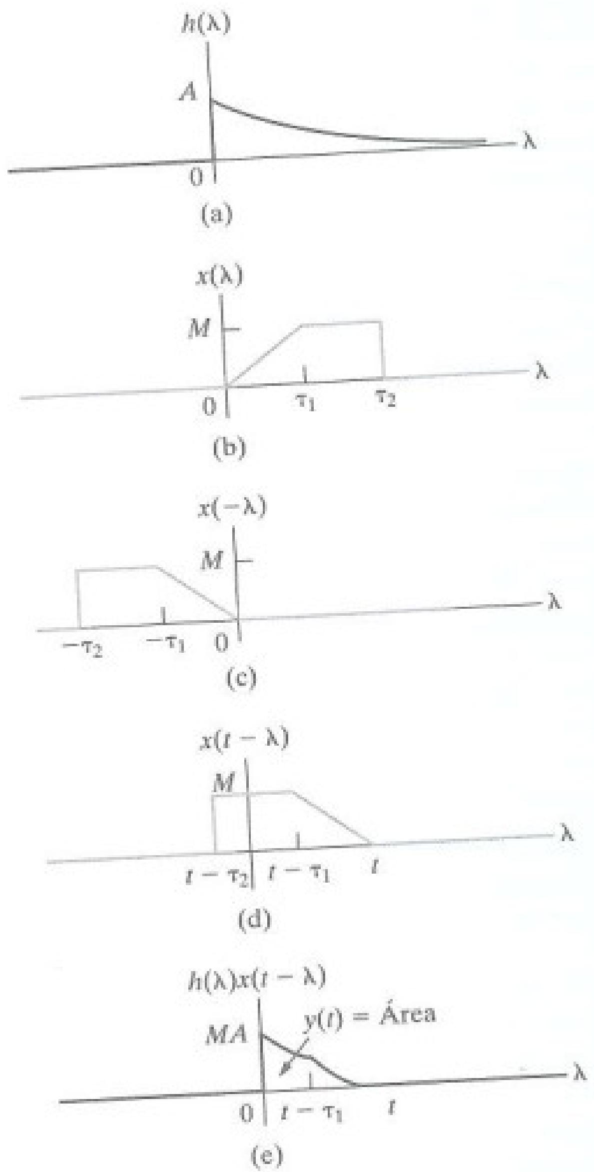
A Integral de Convolução é usualmente denotada por:

$$y(t) = h(t) * x(t) = x(t) * h(t),$$

Em casos práticos, substituímos os limites de integração:

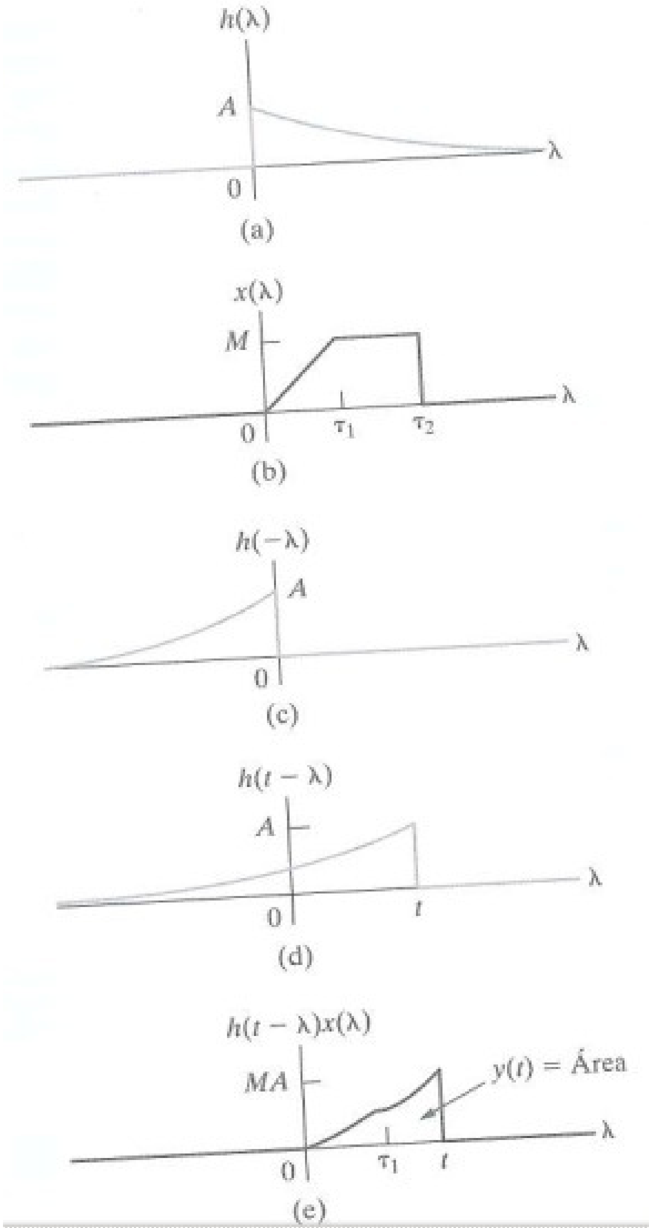
$$y(t) = \int_0^t h(\lambda)x(t - \lambda)\,d\lambda = \int_0^t x(\lambda)h(t - \lambda)\,d\lambda.$$

# Interpretação gráfica da Integral de Convolução




$$y(t) = \int_0^t h(\lambda)x(t - \lambda)\,d\lambda$$

# Interpretação gráfica da Integral de Convolução




$$y(t) = \int_0^t x(\lambda)h(t - \lambda)\,d\lambda.$$

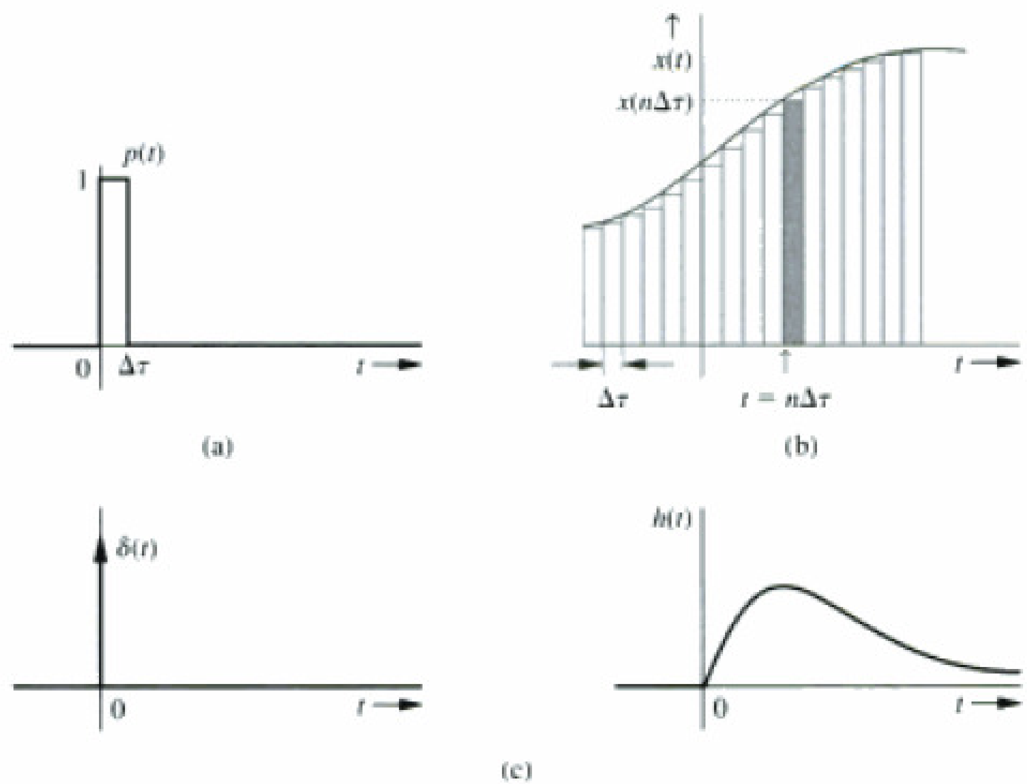
# Resposta ao impulso

- Não há energia armazenada no sistema

- A) Pulso p(t);

- B) Aproximamos a entrada x(t) por uma série de pulsos.

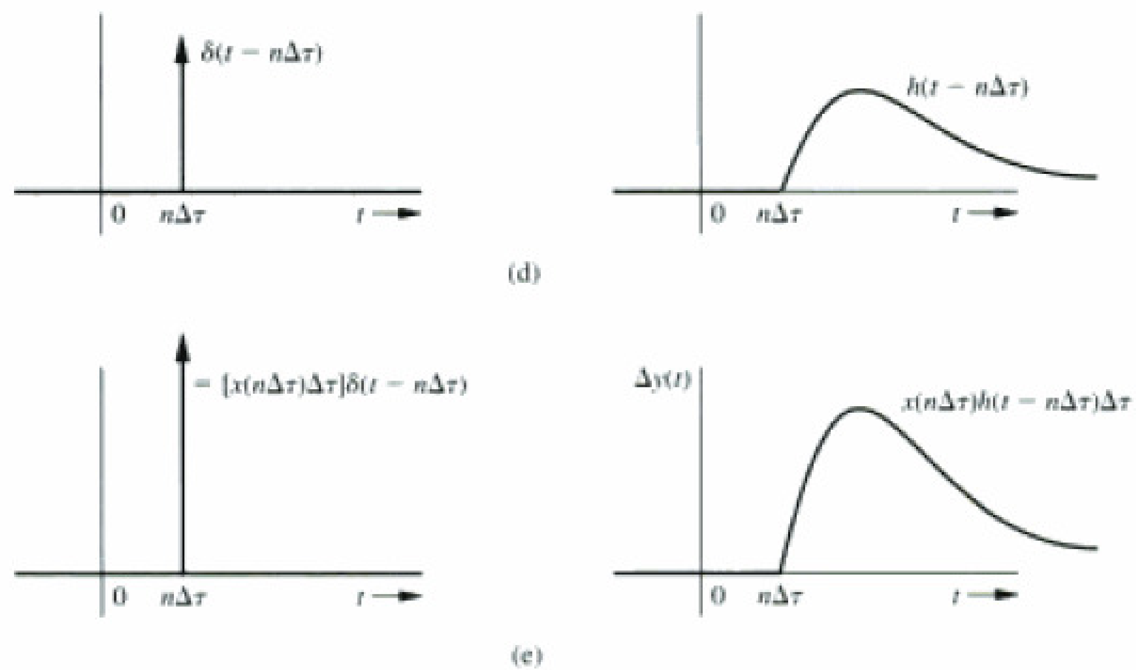
- C) fazemos o pulso tender a um impulso δ(t), cuja resposta é h(t).




$$x(t) = \lim_{\Delta\tau \to 0} \sum_{\tau} x(n\Delta\tau) p(t - n\Delta\tau) = \lim_{\Delta\tau \to 0} \sum_{\tau} \left[ \frac{x(n\Delta\tau)}{\Delta\tau} \right] p(t - n\Delta\tau)\Delta\tau$$

# Resposta ao impulso

- Não há energia armazenada no sistema
- D) Descolamos o impulso δ(t-nΔτ) e obtemos a resposta correspondente h(t-nΔτ);
- E) Modificamos a intensidade do impulso: [x(nΔτ) Δτ]δ(t-nΔτ) e obtemos a resposta correspondente h(t-nΔτ);




$$x(t) = \lim_{\Delta\tau \to 0} \sum_{\tau} x(n\Delta\tau)p(t - n\Delta\tau) = \lim_{\Delta\tau \to 0} \sum_{\tau} \left[\frac{x(n\Delta\tau)}{\Delta\tau}\right] p(t - n\Delta\tau)\Delta\tau$$

# Resposta ao impulso

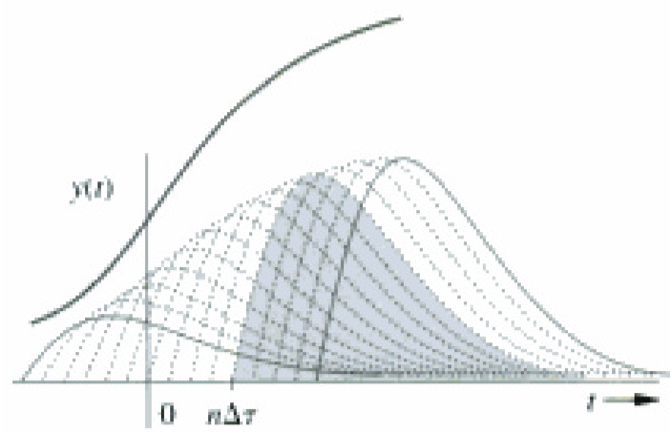
Logo, a resposta total à entrada x(t) corresponde a resposta à uma infinidade de impulsos deslocados e com diferentes intensidades:

$$x(t) = \lim_{\Delta\tau \to 0} \sum_{\tau} x(n\Delta\tau)\delta(t - n\Delta\tau)\,\Delta\tau$$

$$x(t) = \lim_{\Delta\tau \to 0} \sum_{\tau} x(n\Delta\tau)p(t - n\Delta\tau) = \lim_{\Delta\tau \to 0} \sum \left[\frac{x(n\Delta\tau)}{\Delta\tau}\right] p(t - n\Delta\tau)\Delta\tau$$

$$y(t) = \lim_{\Delta\tau \to 0} \sum_{\tau} x(n\Delta\tau)h(t - n\Delta\tau)\Delta\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)\,d\tau$$



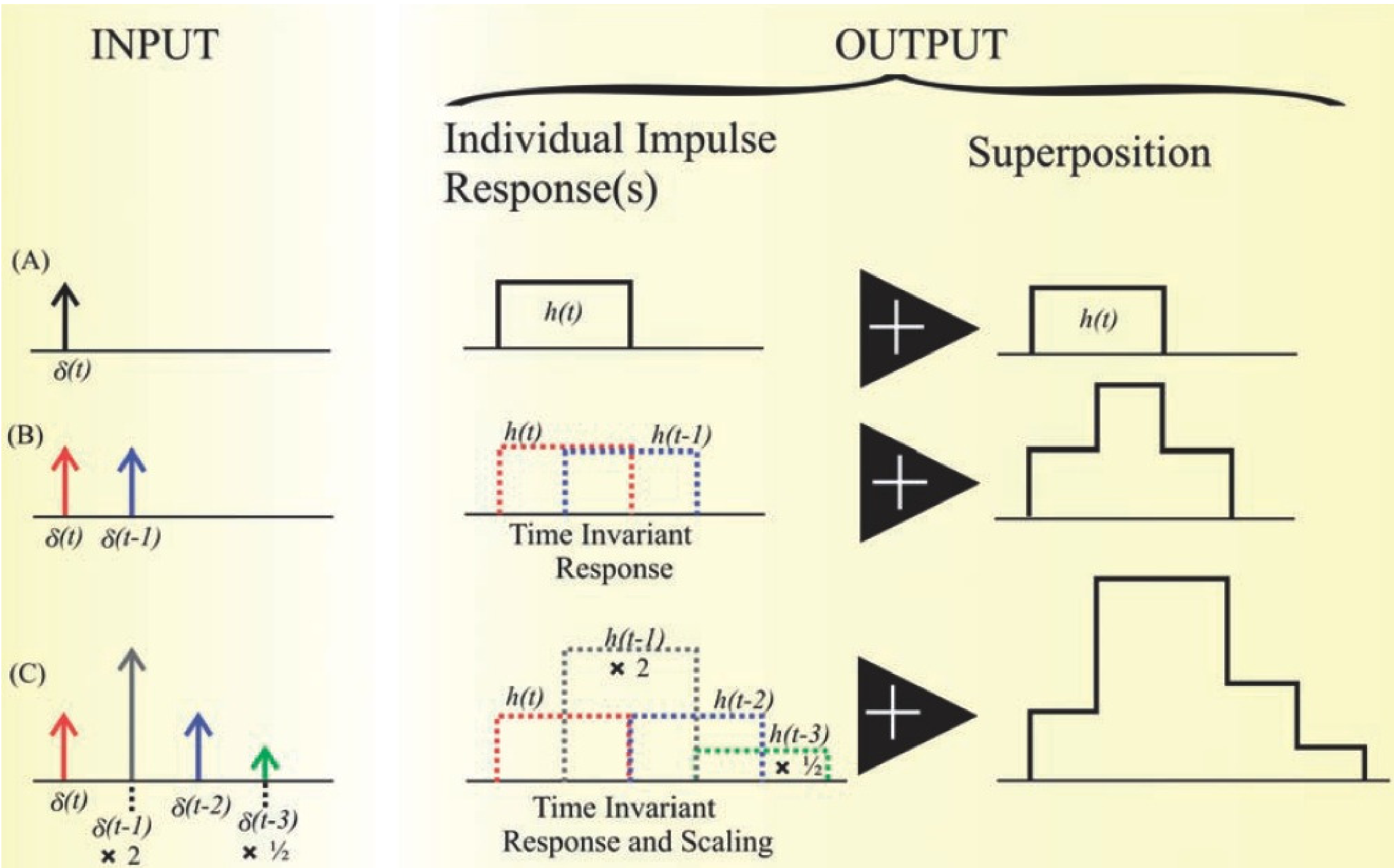
# Resposta ao impulso

$$
\begin{aligned}
\text{entrada} \quad &\Longrightarrow \quad \text{saída} \\
\delta(t) \quad &\Longrightarrow \quad h(t) \\
\delta(t - n\Delta\tau) \quad &\Longrightarrow \quad h(t - n\Delta\tau) \\
[x(n\Delta\tau)\Delta\tau]\delta(t - n\Delta\tau) \quad &\Longrightarrow \quad [x(n\Delta\tau)\Delta\tau]h(t - n\Delta\tau) \\
\lim_{\Delta\tau\to 0}\sum_{\tau} x(n\Delta\tau)\delta(t - n\Delta\tau)\,\Delta\tau \quad &\Longrightarrow \quad \lim_{\Delta\tau\to 0}\sum_{\tau} x(n\Delta\tau)h(t - n\Delta\tau)\Delta\tau
\end{aligned}
$$

$$
x(t) = \lim_{\Delta\tau\to 0}\sum_{\tau} x(n\Delta\tau)p(t - n\Delta\tau) = \lim_{\Delta\tau\to 0}\sum_{\tau}\left[\frac{x(n\Delta\tau)}{\Delta\tau}\right] p(t - n\Delta\tau)\Delta\tau
$$

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \lim_{\Delta\tau\to 0}\sum_{\tau} x(n\Delta\tau)h(t - n\Delta\tau)\Delta\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)\,d\tau
\end{aligned}
$$

# Convolução gráfica




Fonte: Van Drongelen