Circuitos Elétricos III

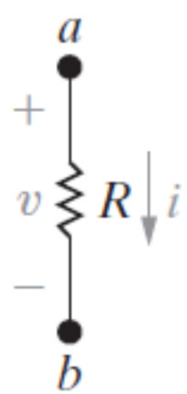
Prof. Danilo Melges
(danilomelges@cpdee.ufmg.br)

Depto. de Engenharia Elétrica
Universidade Federal de Minas Gerais

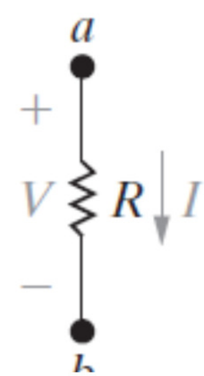
A Transformada de Laplace em análise de circuitos – parte 1

A resistência no domínio da frequência

- O valor de R não se altera ao passar do domínio do tempo para o da frequência.



$$v = Ri.$$



$$V = RI,$$

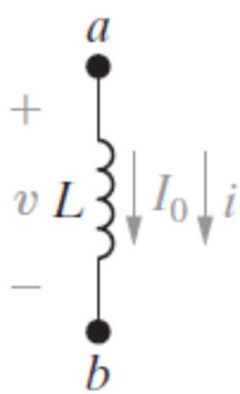
onde $V = \mathscr{L}\{v\}$ e $I = \mathscr{L}\{i\}$.

Tempo

Freqüência

O Indutor no domínio da freqüência

- Indutor conduzindo uma corrente inicial I_0



$$v = L\frac{di}{dt}.$$

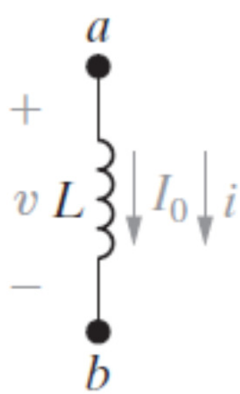
Tempo

- Qual a representação correspondente no domínio da frequência ?

Freqüência

O Indutor no domínio da freqüência

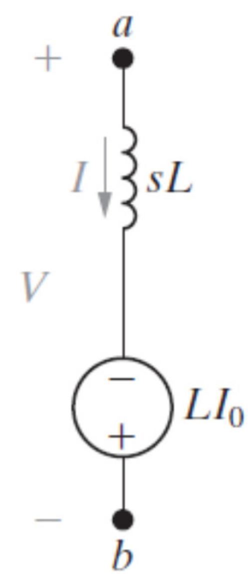
- Indutor conduzindo uma corrente inicial I_0



$$v = L\frac{di}{dt}.$$

Tempo

- Impedância de sL Ohms em série com uma fonte de tensão de LI_0 Volts-segundos.

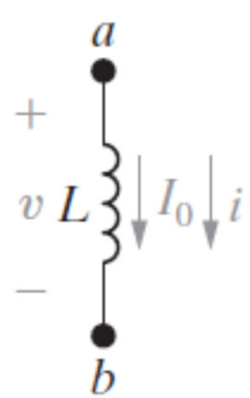


$$V = L[sI - i(0^-)] = sLI - LI_0$$

Freqüência

O Indutor no domínio da freqüência

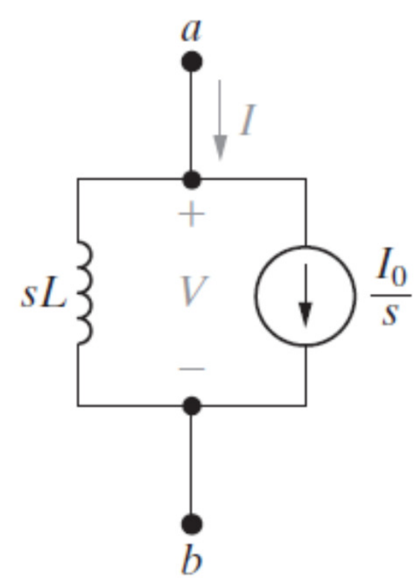
- Indutor conduzindo uma corrente inicial I_0



$$v = L\frac{di}{dt}.$$

Tempo

- Impedância de sL Ohms em paralelo com uma fonte de corrente de I_0/s ampères-segundos

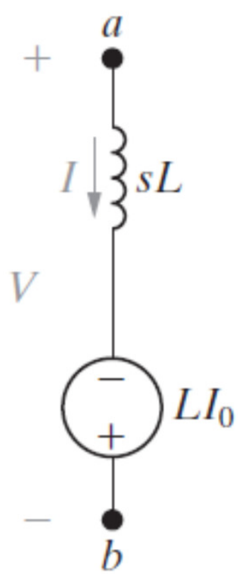


$$I = \frac{V + LI_0}{sL} = \frac{V}{sL} + \frac{I_0}{s}.$$

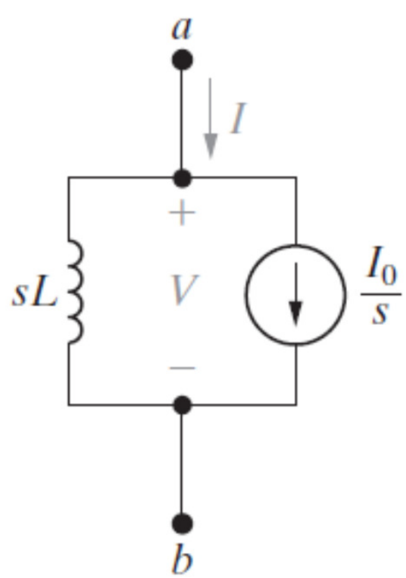
Freqüência

O Indutor no domínio da freqüência

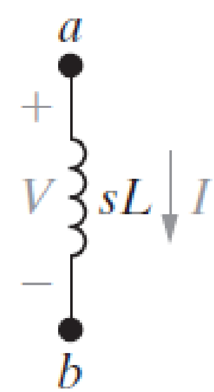
- **Se I_0=0**, então, ambos os circuitos equivalentes se reduzem a uma indutância com impedância sL.



≈

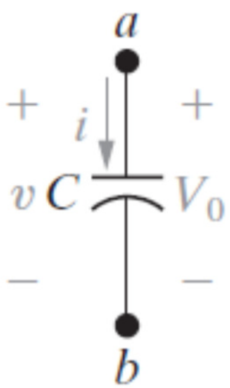


≈



O Capacitor no domínio da freqüência

- Capacitor com uma tensão inicial de V_0



$$i = C\frac{dv}{dt}.$$

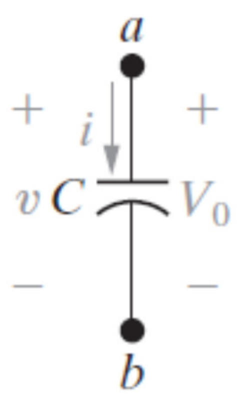
Tempo

- Qual a representação correspondente no domínio da frequência ?

Freqüência

O Capacitor no domínio da freqüência

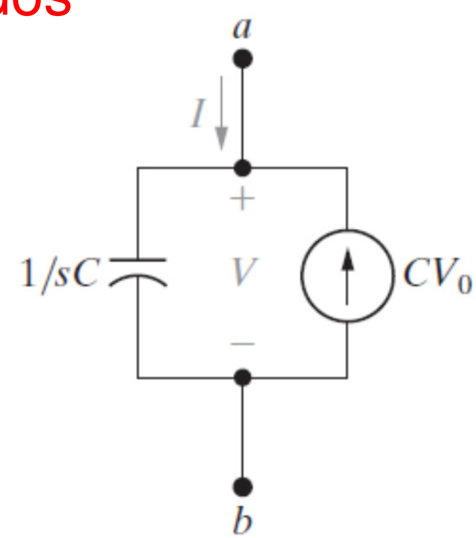
- Capacitor com uma tensão inicial de V_0



$$i = C\frac{dv}{dt}.$$

Tempo

- Admitância de sC Ohms em paralelo com uma fonte de corrente de $-CV_0$ ampères-segundos



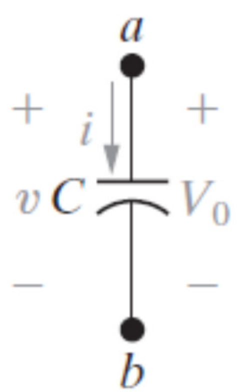
$$I = C[sV - v(0^-)] = sCV - CV_0$$

Freqüência

O Capacitor no domínio da freqüência

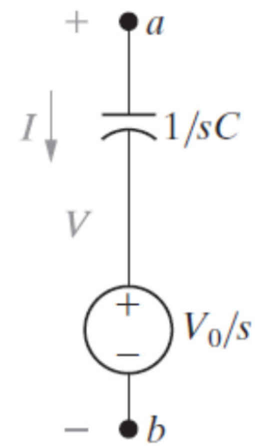
- Capacitor com uma tensão inicial de V_0

• Admitância de sC Ohms em série com uma fonte de tensão de $+V_0/s$ volts-segundos



$$i = C\frac{dv}{dt}.$$

Tempo

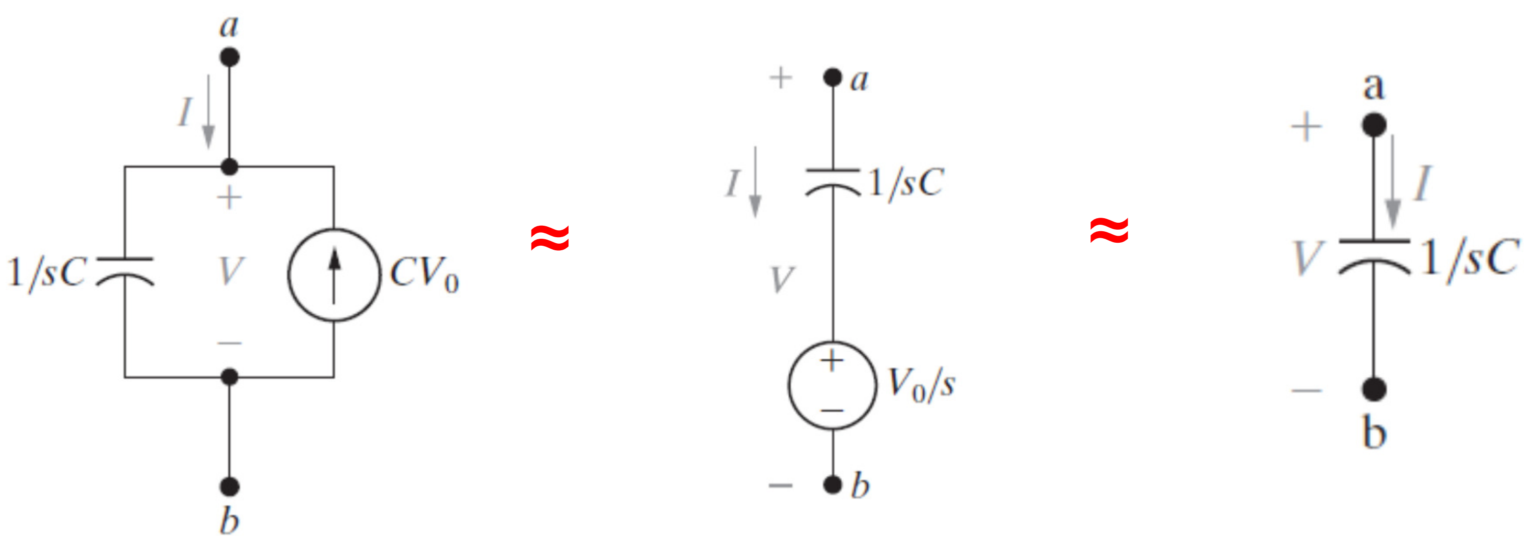


$$V = \left(\frac{1}{sC}\right)I + \frac{V_0}{s}$$

Freqüência

O Capacitor no domínio da freqüência

- **Se V_0=0**, então, ambos os circuitos equivalentes se reduzem a um capacitor com impedância 1/sC



Análise de circuitos no domínio da freqüência

- Lei de Ohm para o domínio da freqüência: V=ZI (p/ condições iniciais nulas).

- Também são válidas as Leis de Kirchhoff para correntes e tensões:

$$\sum I = 0$$

Soma das correntes em um nó é nula.

Soma das tensões ao longo do circuito fechado é nula.

$$\sum V = 0$$

Análise de circuitos no domínio da freqüência

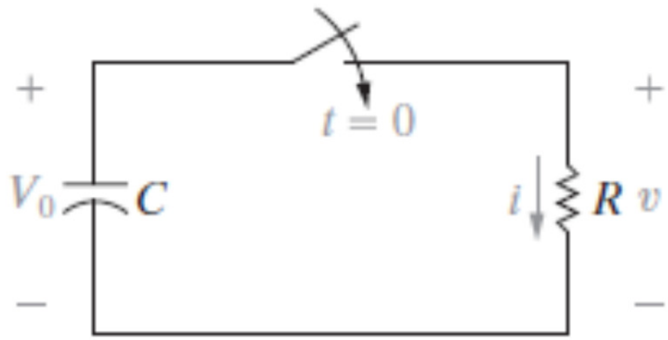
- Regras para associações de impedâncias e admitâncias no domínio da frequência são as mesmas do domínio do tempo.

- Simplificações em série e paralelo também são aplicáveis.

- Métodos de tensões de nós e correntes de malha também podem ser empregados no domínio da frequência.

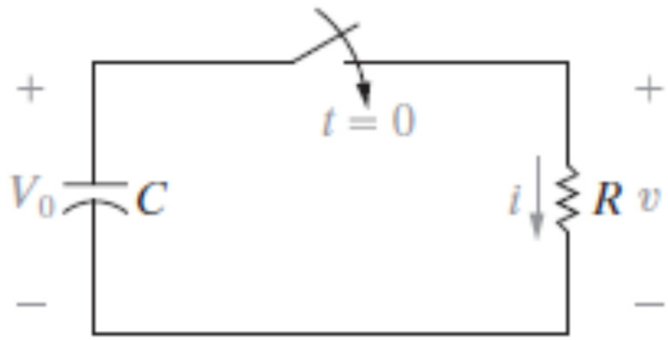
- Também são válidas as técnicas usadas para encontrar os circuitos equivalentes Norton e Thèvenin.

Resposta Natural de um circuito RC



- Encontrar as expressões para corrente i e tensão v.

Resposta Natural de um circuito RC



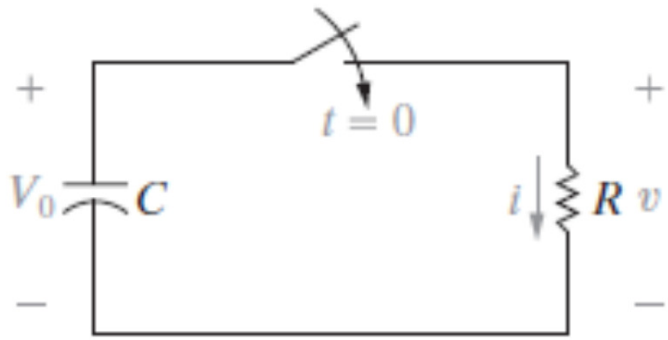
- Abordagem clássica:
  - Equações íntegro-diferenciais: $C\frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = 0.$
  - Resolução da eq.: $v(t) = v(0)e^{-t/RC},\ t \geq 0.$
  - Substituição de condições iniciais: $v(0)=V_0$

$$v(t) = V_0 e^{-t/\tau}, \quad t \geq 0.$$

Onde

$$\tau = RC.$$

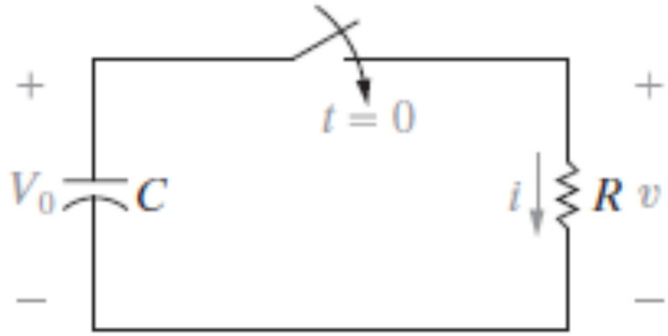
Resposta Natural de um circuito RC

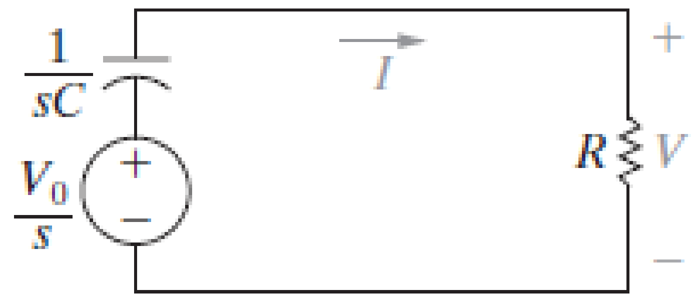


- Abordagem clássica:
  - Para encontrar a corrente

$$i(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{V_0}{R} e^{-t/\tau}, \quad t \geq 0^+$$

Resposta Natural de um circuito RC



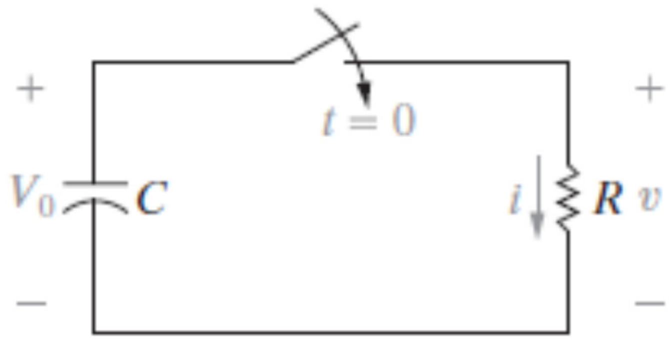


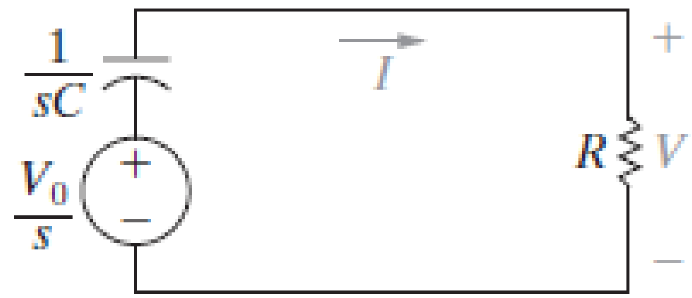
- Abordagem por Laplace:

1. Tomamos o circuito equivalente na frequência.
2. Soma das tensões na malha: $\frac{V_0}{s} = \frac{1}{sC}I + RI.$
3. Explicitamos I:

$$I = \frac{CV_0}{RCs + 1} = \frac{V_0/R}{s + (1/RC)}.$$

Resposta Natural de um circuito RC





- Abordagem por Laplace:

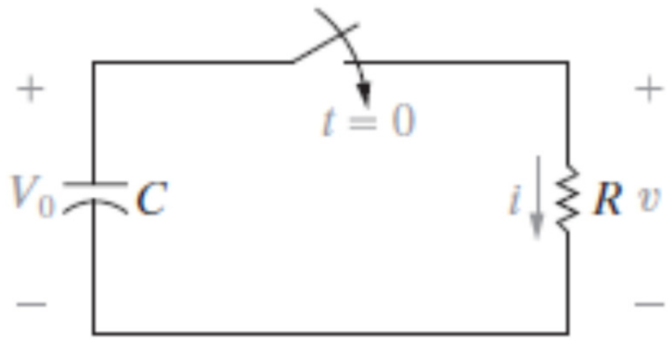
4. Determinamos a Transformada Inversa de I:

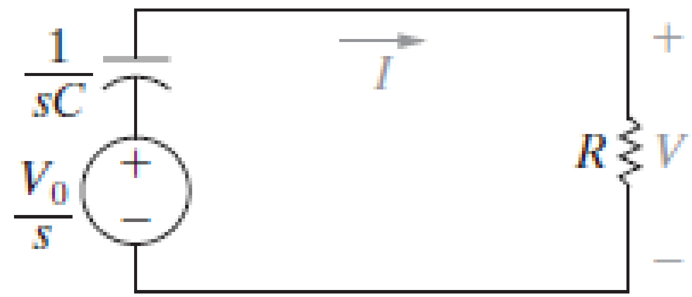
$$\boxed{i = \frac{V_0}{R}e^{-t/RC}u(t),}$$

que é equivalente à expressão anterior:

$$i(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{V_0}{R}e^{-t/\tau}, \quad t \geq 0^+$$

Resposta Natural de um circuito RC





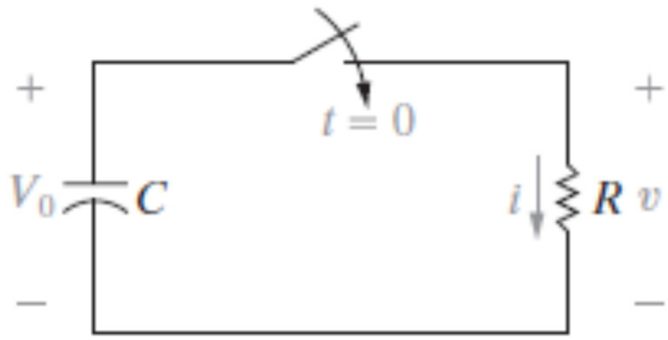
- Abordagem por Laplace:

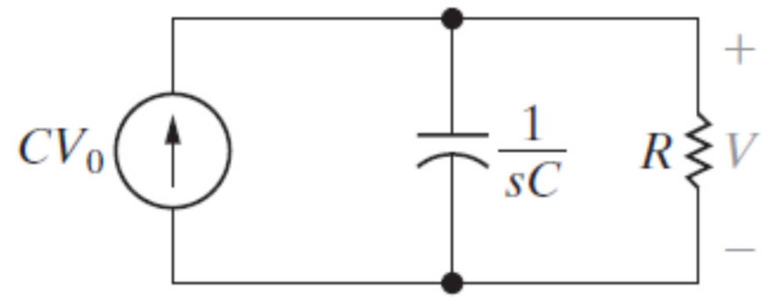
5. Calculamos a tensão:

$$i = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC} u(t),$$

$$\boxed{v = Ri = V_0 e^{-t/RC} u(t).}$$

Resposta Natural de um circuito RC



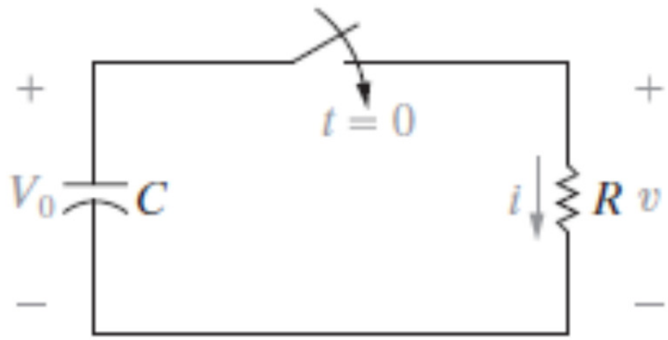


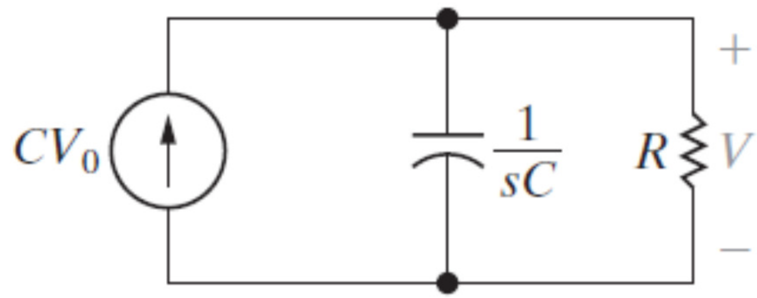
- Abordagem por Laplace: circuito alternativo paralelo

1. Tomamos o circuito equivalente na frequência.
2. Calculamos a Eq. de tensões de nó: $$\frac{V}{R} + sCV = CV_0.$$
3. Explicitamos V:

$$V = \frac{V_0}{s + (1/RC)}.$$

Resposta Natural de um circuito RC





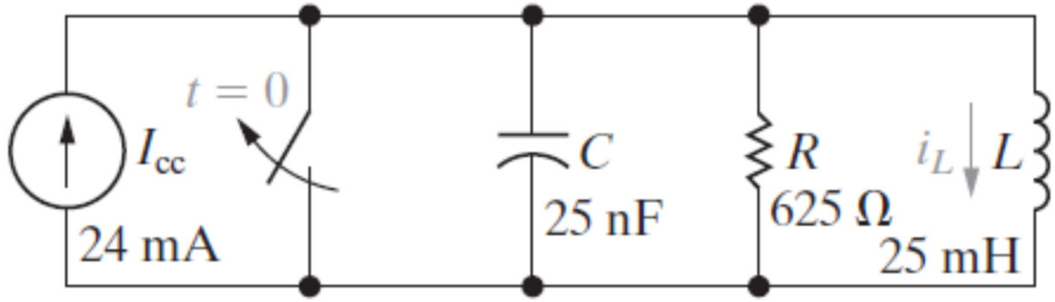
- Abordagem por Laplace:

4. Determinamos a Transformada Inversa de V:

$$v = V_0 e^{-t/RC} = V_0 e^{-t/\tau} u(t).$$

Resposta ao Degrau de um circuito RLC paralelo

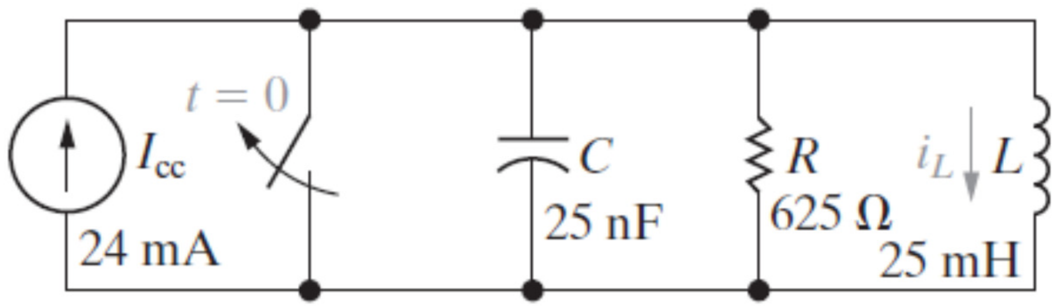
A energia inicial armazenada é nula.



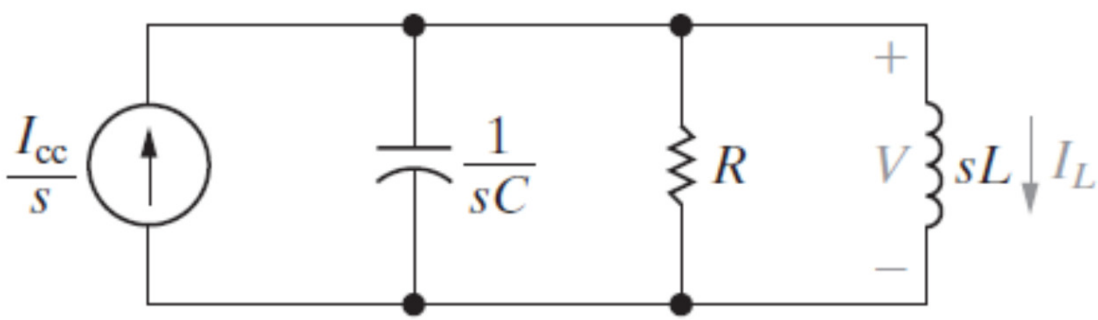
- Determinar i_L após a aplicação da fonte de corrente.

Resposta ao Degrau de um circuito RLC paralelo

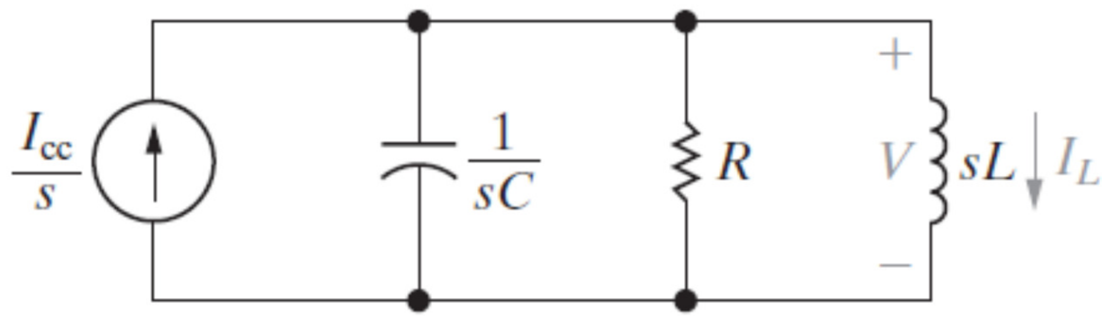
A energia inicial armazenada é nula.



1. Circuito equivalente na frequência.



Resposta ao Degrau de um circuito RLC paralelo



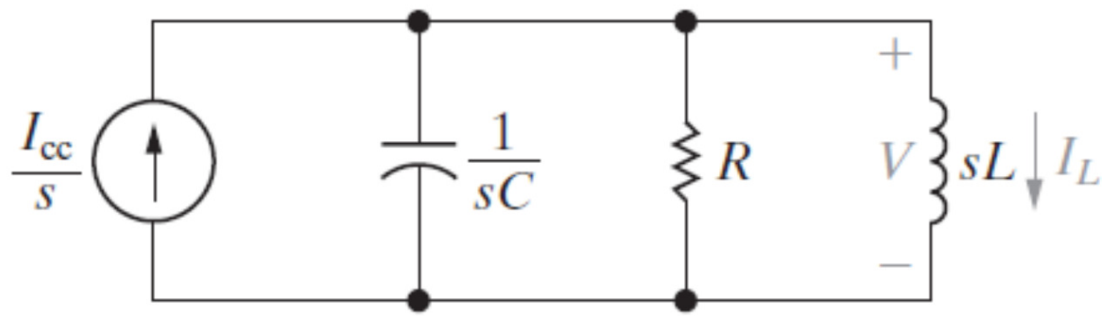
2. A corrente pode ser dada por:

$$I_L = \frac{V}{sL}$$

3. Utilizando a LKC, temos:

$$sCV + \frac{V}{R} + \frac{V}{sL} = \frac{I_{cc}}{s}.$$

Resposta ao Degrau de um circuito RLC paralelo



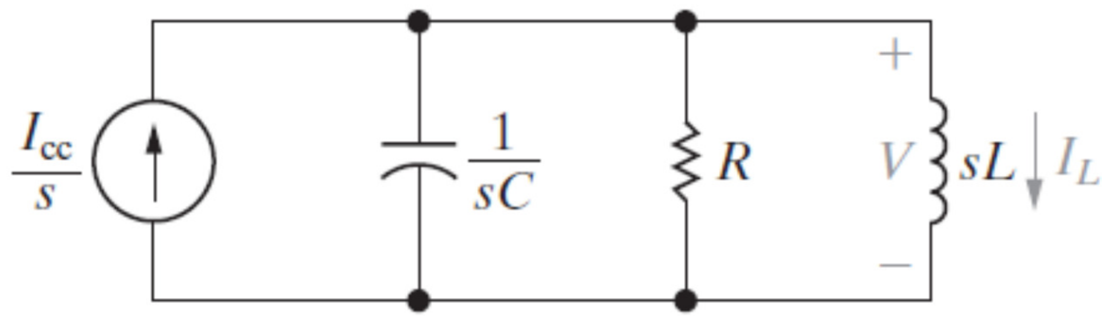
4. Explicitando V: $$V = \frac{I_{cc}/C}{s^2 + (1/RC)s + (1/LC)}.$$

5. Substituindo V em: $$I_L = \frac{V}{sL}$$

$$I_L = \frac{I_{cc}/LC}{s[s^2 + (1/RC)s + (1/LC)]}.$$

Corrigir as expressões no livro.

Resposta ao Degrau de um circuito RLC paralelo



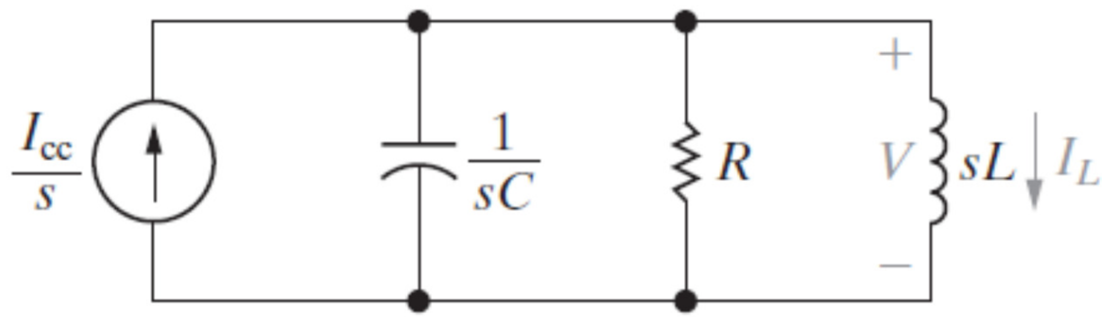
6. Substituindo os valores dos componentes: Icc=24mA, C=25nF, R=625Ω e L=25mH

$$I_L = \frac{384 \times 10^5}{s(s^2 + 64.000s + 16 \times 10^8)}.$$

7. Fatorando o denominador:

$$I_L = \frac{384 \times 10^5}{s(s + 32.000 - j24.000)(s + 32.000 + j24.000)}.$$

Resposta ao Degrau de um circuito RLC paralelo



8. Teste da expressão de i_L no domínio da frequência (Teorema do valor final - TVF): quando $t \to \infty$, $i_L \to I_{cc}$=24mA:

$$I_L = \frac{384 \times 10^5}{s(s^2 + 64.000s + 16 \times 10^8)}.$$

$$\lim_{s \to 0} sI_L = \frac{384 \times 10^5}{16 \times 10^8} = 24 \text{ mA}.$$

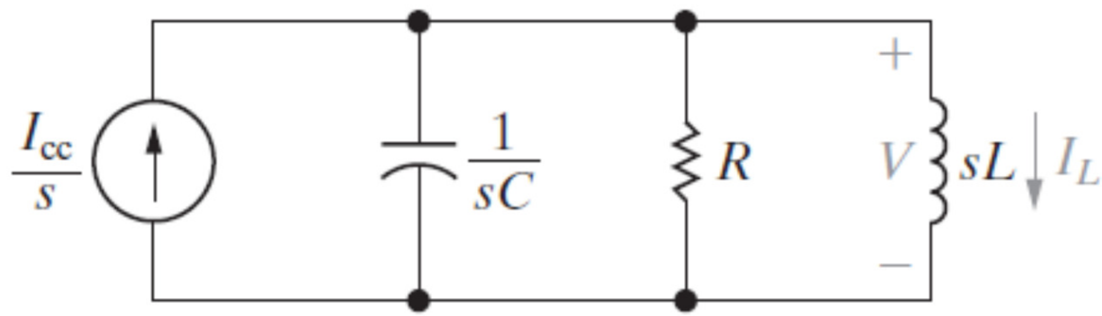
Logo, obedece ao TVF.

Relembrando: Teorema do Valor Final

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s).$$

- **Restrição:** somente é válido se os pólos de F(s), exceto um pólo de primeira ordem na origem (plano complexo), estiverem localizados no semi-plano lateral esquerdo s.
- f(∞) deve existir

Resposta ao Degrau de um circuito RLC paralelo



9. Expansão em frações parciais (EFP):

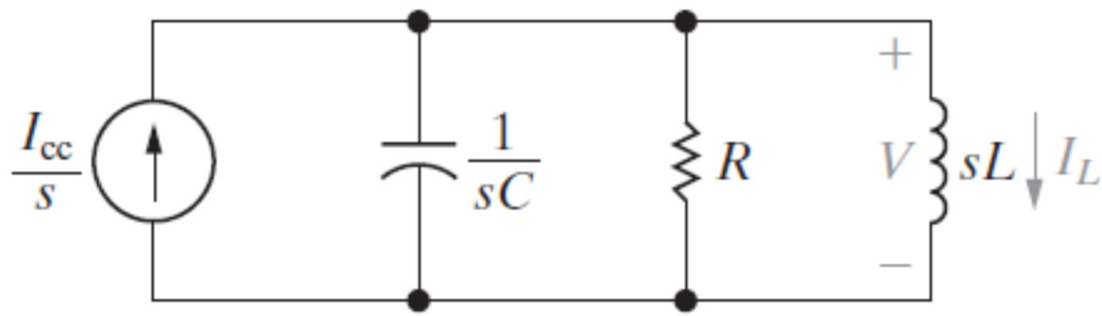
$$I_L = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s + 32.000 - j24.000} + \frac{K_2^*}{s + 32.000 + j24.000}.$$

onde

$$K_1 = \frac{384 \times 10^5}{16 \times 10^8} = 24 \times 10^{-3},$$

$$K_2 = \frac{384 \times 10^5}{(-32.000 + j24.000)(j48.000)} = 20 \times 10^{-3}\underline{/126{,}87^\circ}.$$

Resposta ao Degrau de um circuito RLC paralelo



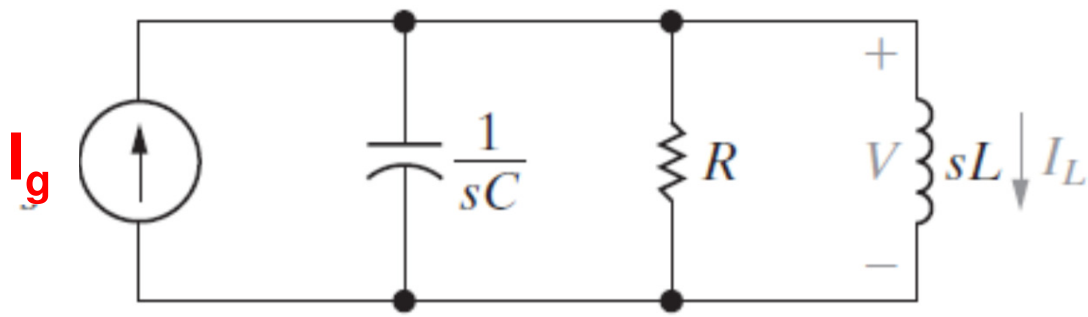
10. Transformada Inversa de Laplace:

$$I_L = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s + 32.000 - j24.000} + \frac{K_2^*}{s + 32.000 + j24.000}.$$

$$\boxed{i_L = [24 + 40e^{-32.000t}\cos(24.000t + 126{,}87^{o})]u(t)\text{mA}.}$$

Resposta transitória de um circuito RLC paralelo

A energia inicial armazenada é nula.



- Determinar i_L pela aplicação da fonte de corrente senoidal:

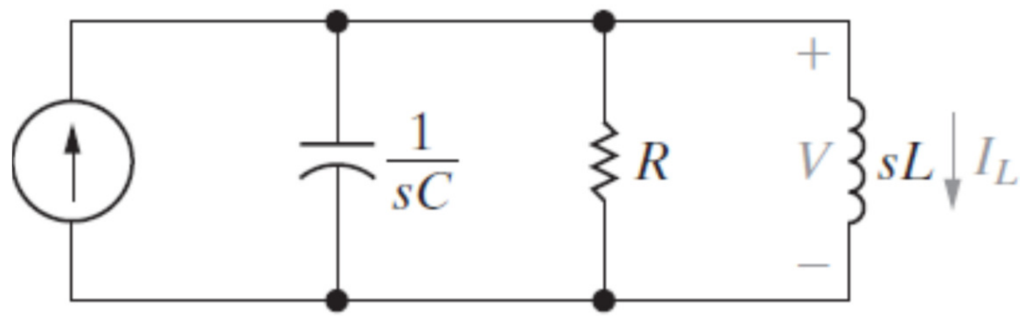
$$i_g = I_m \cos \omega t \text{ A}$$

Com ω=40000 rad/s; I_m=24 mA

Resposta transitória de um circuito RLC paralelo

A energia inicial armazenada é nula.

I_g



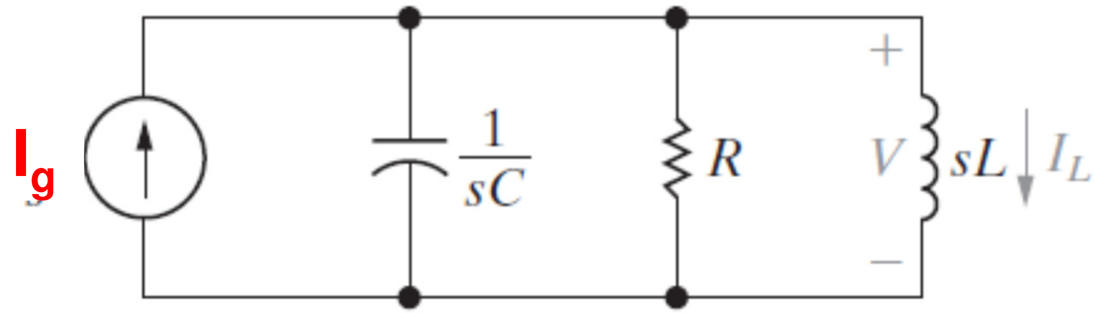
$$i_g = I_m \cos \omega t \text{ A}$$

Com ω=40000 rad/s; I_m=24 mA

1. A fonte de corrente no domínio s é dada por:

$$I_g = \frac{sI_m}{s^2 + \omega^2}.$$

Resposta transitória de um circuito RLC paralelo



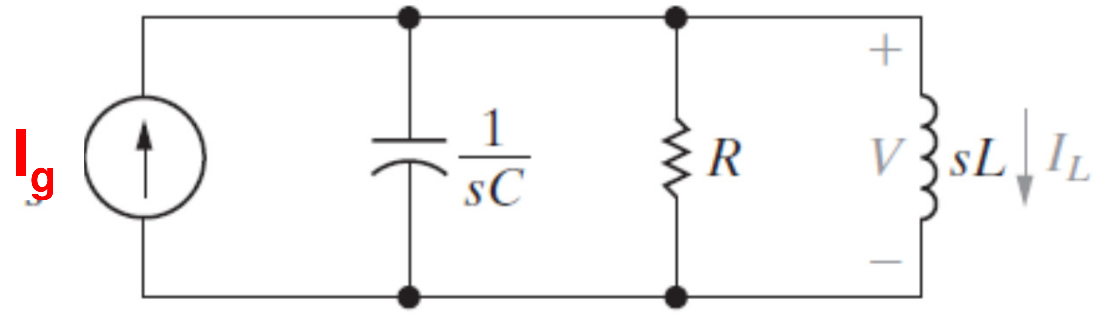
2. A tensão nos elementos em paralelo é:

$$V = \frac{(I_g/C)s}{s^2 + (1/RC)s + (1/LC)}.$$

3. Substituindo $I_g = \dfrac{sI_m}{s^2 + \omega^2}.$, temos:

$$V = \frac{(I_g/C)s}{s^2 + (1/RC)s + (1/LC)}. \Rightarrow V = \frac{(I_m/C)s^2}{(s^2 + \omega^2)[s^2 + (1/RC)s + (1/LC)]},$$

Resposta transitória de um circuito RLC paralelo



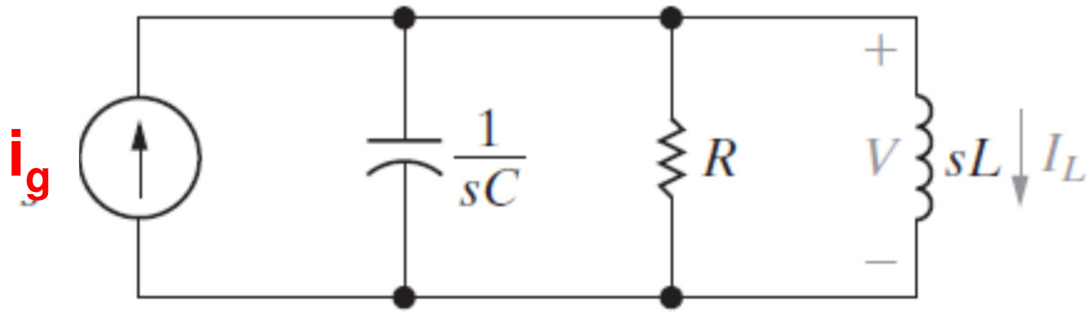
4. Calculamos a corrente no indutor:

$$I_L = \frac{V}{sL} = \frac{(I_m/LC)s}{(s^2 + \omega^2)[s^2 + (1/RC)s + (1/LC)]}.$$

5. Substituindo os valores (ig=24 cosωt, C=25nF, R=625Ω, L=25mH)

$$I_L = \frac{384 \times 10^5 s}{(s^2 + 16 \times 10^8)(s^2 + 64.000s + 16 \times 10^8)}.$$

Resposta transitória de um circuito RLC paralelo

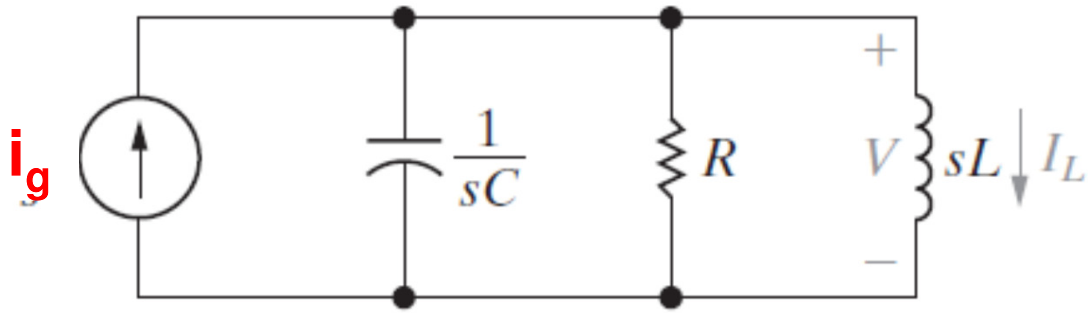


6. Fatoramos o denominador:

$$I_L = \frac{384 \times 10^5 s}{(s - j\omega)(s + j\omega)(s + \alpha - j\beta)(s + \alpha + j\beta)},$$

Com ω=40000, a=32000 e b=24000.

Resposta transitória de um circuito RLC paralelo



7. Expansão em frações parciais:

$$I_L = \frac{K_1}{s - j40.000} + \frac{K_1^*}{s + j40.000} + \frac{K_2}{s + 32.000 - j24.000} + \frac{K_2^*}{s + 32.000 + j24.000}.$$

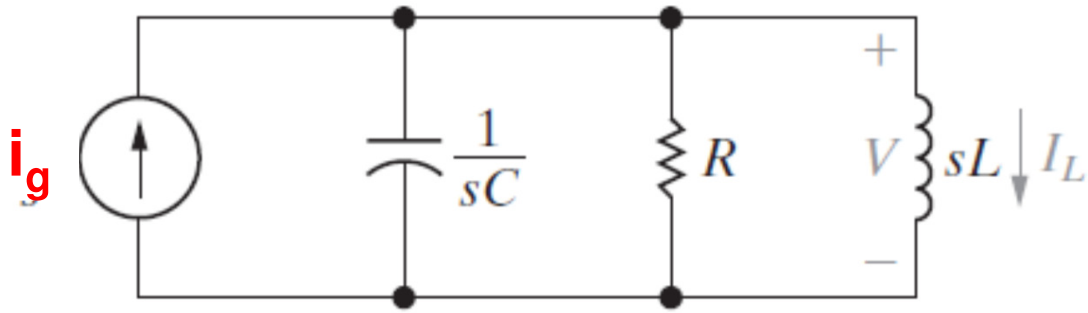
$$K_1 = \frac{384 \times 10^5 (j40.000)}{(j\,80.000)(32.000 + j\,16.000)(32.000\,j + 64.000)}$$

$$= 7{,}5 \times 10^{-3} \angle -90^\circ,$$

$$K_2 = \frac{384 \times 10^5 (-32.000 + j\,24.000)}{(-32.000 - j\,16.000)(-32.000 + j\,64.000)(j\,48.000)}$$

$$= 12{,}5 \times 10^{-3} \angle 90^\circ.$$

Resposta transitória de um circuito RLC paralelo

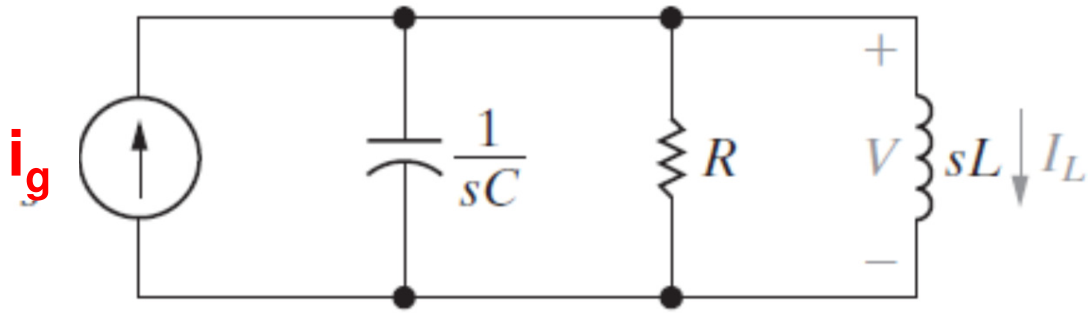


8. Transformada Inversa:

$$i_L = [15\cos(40.000t - 90°) + 25e^{-32.000t}\cos(24.000t + 90°)]\ \text{mA},$$

$$= (15\,\text{sen}\,40.000t - 25e^{-32.000t}\,\text{sen}\,24.000t)u(t)\ \text{mA}.$$

Resposta transitória de um circuito RLC paralelo



8. Transformada Inversa:

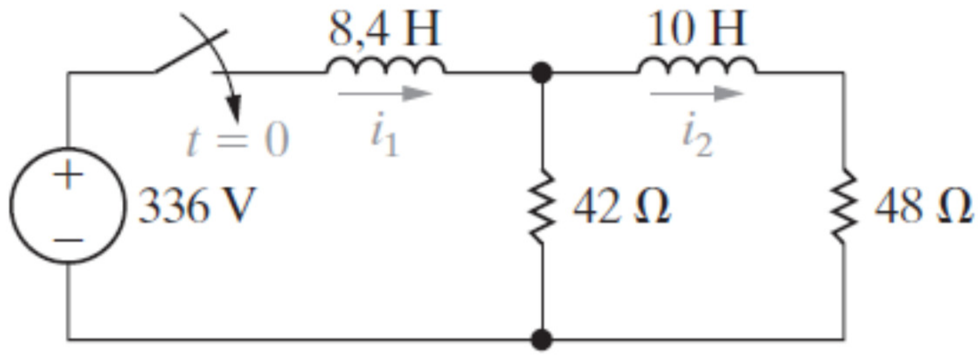
$$i_L = [15\cos(40.000t - 90°) + 25e^{-32.000t}\cos(24.000t + 90°)]\ \text{mA},$$
$$= (15\,\text{sen}\,40.000t - 25e^{-32.000t}\,\text{sen}\,24.000t)u(t)\ \text{mA}.$$

9. A corrente de regime permanente é dada por:

$$i_{L_{rp}} = 15\,\text{sen}\,40.000t\ \text{mA}$$

Resposta ao degrau de um circuito de múltiplas malhas

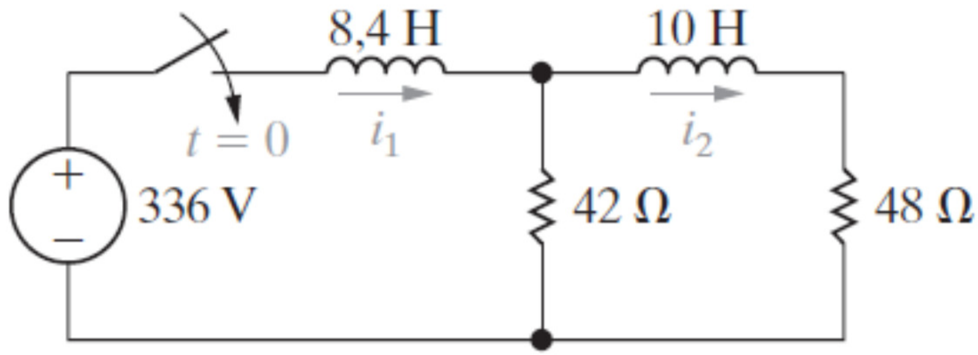
A energia armazenada no circuito é nula.



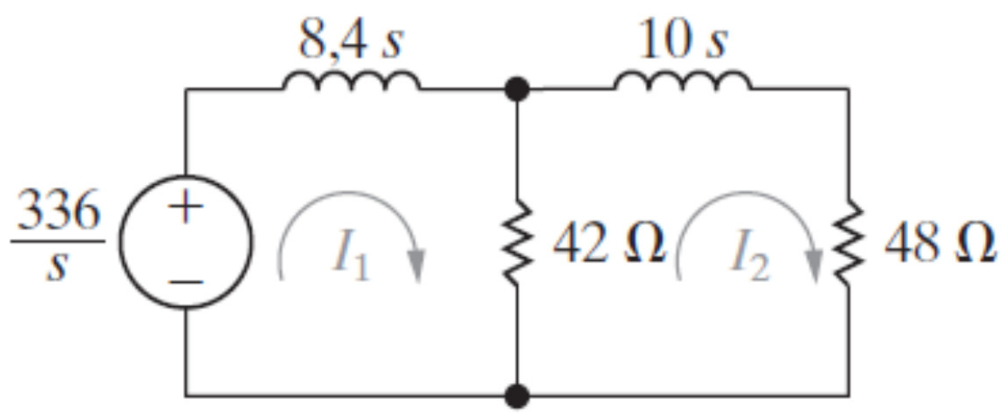
- Determinar as correntes de ramo i_1 e i_2.

Resposta ao degrau de um circuito de múltiplas malhas

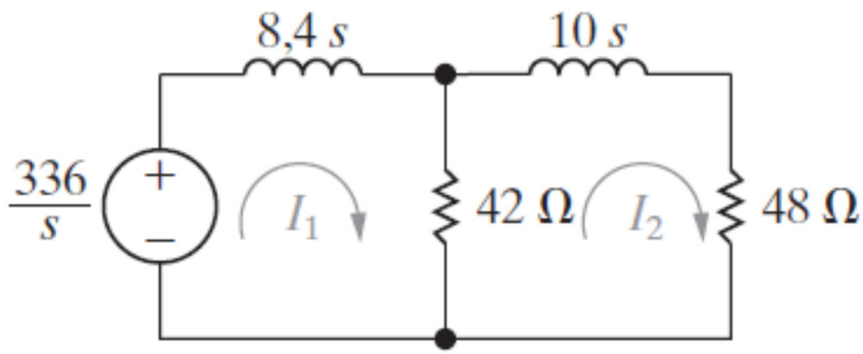
A energia armazenada no circuito é nula.



1. Circuito equivalente no domínio da frequência:



Resposta ao degrau de um circuito de múltiplas malhas



2. Equações de correntes de malha:

$$\frac{336}{s} = (42 + 8{,}4s)I_1 - 42I_2,$$

$$0 = -42I_1 + (90 + 10s)I_2.$$

Sistema de Equações Lineares

Resposta ao degrau de um circuito de múltiplas malhas

3. Usando o Método de Cramer para calcular I_1 e I_2:

$$I_1 = \frac{N_1}{\Delta} \qquad I_2 = \frac{N_2}{\Delta}$$

$$\frac{336}{s} = (42 + 8{,}4s)I_1 - 42I_2,$$

$$0 = -42I_1 + (90 + 10s)I_2.$$

$\rightarrow$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 42 + 8{,}4s & -42 \\ -42 & 90 + 10s \end{vmatrix}$$

$$= 84(s^2 + 14s + 24)$$

$$= 84(s + 2)(s + 12)$$

$$N_1 = \begin{vmatrix} 336/s & -42 \\ 0 & 90 + 10s \end{vmatrix}$$

$$= \frac{3.360(s + 9)}{s},$$

$$N_2 = \begin{vmatrix} 42 + 8{,}4s & 336/s \\ -42 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{14.112}{s}.$$

Resposta ao degrau de um circuito de múltiplas malhas

4. Usando o Método de Cramer para calcular I_1 e I_2:

$$I_1 = \frac{N_1}{\Delta} = \frac{40(s + 9)}{s(s + 2)(s + 12)},$$

$$I_2 = \frac{N_2}{\Delta} = \frac{168}{s(s + 2)(s + 12)}.$$

5. Expansão em frações parciais:

$$I_1 = \frac{15}{s} - \frac{14}{s + 2} - \frac{1}{s + 12},$$

$$I_2 = \frac{7}{s} - \frac{8{,}4}{s + 2} + \frac{1{,}4}{s + 12}.$$

Resposta ao degrau de um circuito de múltiplas malhas

$$I_1 = \frac{15}{s} - \frac{14}{s + 2} - \frac{1}{s + 12},$$

$$I_2 = \frac{7}{s} - \frac{8{,}4}{s + 2} + \frac{1{,}4}{s + 12}.$$

6. Tomando a Transformada Inversa de Laplace:

$$i_1 = (15 - 14e^{-2t} - e^{-12t})u(t) \text{ A},$$

$$i_2 = (7 - 8{,}4e^{-2t} + 1{,}4e^{-12t})u(t) \text{ A}.$$