Circuitos Elétricos III

Prof. Danilo Melges
(danilomelges@cpdee.ufmg.br)

Depto. de Engenharia Elétrica
Universidade Federal de Minas Gerais

Transformadas Inversas

Transformada Inversa de Laplace

$$V(s) = \frac{I_{cc}/C}{s^2 + (1/RC)s + (1/LC)}$$

- V(s) é uma razão de polinômios em s.
- Como sistematizar o cálculo de transformadas inversas?

Transformada Inversa de Laplace

- As funções racionais podem ser representadas por:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}.$$

Onde a e b são constantes reais e os expoentes m e n são inteiros positivos.

- N(s)/D(s) é
  - Função racional própria (FRP): quando m>n
  - Função racional imprópria: quando m≤n

- Somente uma FRP pode ser expandida em soma de frações parciais.

Expansão em frações parciais: funções racionais próprias

- D(s) deve estar na forma fatorada
- Raiz de multiplicidade 1: único termo na expansão (s=0 e s=-3)
- Raiz de multiplicidade r: há r termos na expansão (s=-1)

$$\frac{s+6}{s(s+3)(s+1)^2} \equiv \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+3} + \frac{K_3}{(s+1)^2} + \frac{K_4}{s+1}$$

Expansão em frações parciais: funções racionais próprias

$$\frac{s+6}{s(s+3)(s+1)^2} \equiv \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+3} + \frac{K_3}{(s+1)^2} + \frac{K_4}{s+1}$$

- Pela tabela de Transformadas:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+6}{s(s+3)(s+1)^2}\right\}$$

$$= (K_1 + K_2 e^{-3t} + K_3 t e^{-t} + K_4 e^{-t})u(t)$$

Tabela de Transformadas

Tipo	$f(t)\ (t > 0^-)$	$F(s)$
(impulso)	$\delta(t)$	1
(degrau)	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
(rampa)	t	$\frac{1}{s^2}$
(exponencial)	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
(seno)	$\text{sen}\ \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
(co–seno)	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
(rampa amortecida)	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
(seno amortecido)	$e^{-at}\ \text{sen}\ \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
(co–seno amortecido)	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

Expansão em frações parciais: funções racionais próprias

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+6}{s(s+3)(s+1)^2}\right\}$$

$$= (K_1 + K_2e^{-3t} + K_3te^{-t} + K_4e^{-t})u(t)$$

- Como encontrar os coeficientes K_1, K_2, K_3 e K_4?

Expansão em frações parciais (EFP)

- 4 possíveis situações, dependendo das raízes de D(s):

1. Raízes reais e distintas
2. Raízes complexas e distintas
3. Raízes reais e repetidas
4. Raízes complexas e repetidas

1. EFP: raízes reais distintas de D(s)

$$F(s) = \frac{96(s+5)(s+12)}{s(s+8)(s+6)} \equiv \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+8} + \frac{K_3}{s+6}$$

- Raízes: s=0, s=-8 e s=-6

- Cálculo de K_1: multiplicamos por s ambos os lados e calculamos para s=0:

$$\left.\frac{96(s+5)(s+12)}{(s+8)(s+6)}\right|_{s=0} = K_1 + \left.\frac{sK_2}{s+8}\right|_{s=0} + \left.\frac{sK_3}{s+6}\right|_{s=0}$$

$$\frac{96(5)(12)}{8(6)} \equiv K_1 = 120$$

1. EFP: raízes reais distintas de D(s)

$$F(s) = \frac{96(s+5)(s+12)}{s(s+8)(s+6)} \equiv \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+8} + \frac{K_3}{s+6}$$

- Raízes: s=0, s=-8 e s=-6
- Cálculo de K_3: multiplicamos por (s+6) ambos os lados e calculamos para s=-6:

$$\left.\frac{96(s+5)(s+12)}{s(s+8)}\right|_{s=-6} = \left.\frac{(s+6)K_1}{s}\right|_{s=-6} + \left.\frac{(s+6)K_2}{s+8}\right|_{s=-6} + K_3$$

$$\left.\frac{96(s+5)(s+12)}{s(s+8)}\right|_{s=-6} = K_3 = 48$$

1. EFP: raízes reais distintas de D(s)

$$F(s) = \frac{96(s+5)(s+12)}{s(s+8)(s+6)} \equiv \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+8} + \frac{K_3}{s+6}$$

- Logo: $$\boxed{\frac{96(s+5)(s+12)}{s(s+8)(s+6)} \equiv \frac{120}{s} + \frac{48}{s+6} - \frac{72}{s+8}.}$$

Verificar, atribuindo valores a s.

1. EFP: raízes reais distintas de D(s)

$$\frac{96(s+5)(s+12)}{s(s+8)(s+6)} \equiv \frac{120}{s} + \frac{48}{s+6} - \frac{72}{s+8}.$$

- Obtém-se a Transformada Inversa:

$$\boxed{\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{96(s+5)(s+12)}{s(s+8)(s+6)}\right\} = (120 + 48e^{-6t} - 72e^{-8t})u(t)}$$

2. EFP: raízes complexas distintas de D(s)

$$\frac{100(s+3)}{(s+6)(s^2+6s+25)} \equiv$$

$$\frac{K_1}{s+6} + \frac{K_2}{s+3-j4} + \frac{K_3}{s+3+j4}$$

- Cálculo de K_1, K_2, K_3: usamos o mesmo procedimento descrito anteriormente:

$$K_1 = \left.\frac{100(s+3)}{s^2+6s+25}\right|_{s=-6} = \frac{100(-3)}{25} = -12$$

2. EFP: raízes complexas distintas de D(s)

$$\frac{100(s+3)}{(s+6)(s^2+6s+25)} \equiv$$

$$\frac{K_1}{s+6} + \frac{K_2}{s+3-j4} + \frac{K_3}{s+3+j4}$$

- Cálculo de K_1, K_2, K_3: usamos o mesmo procedimento descrito anteriormente:

$$K_2 = \left.\frac{100(s+3)}{(s+6)(s+3+j4)}\right|_{s=-3+j4} = \frac{100(j4)}{(3+j4)(j8)}$$

$$= 6 - j8 = 10e^{j53,13^\circ},$$

2. EFP: raízes complexas distintas de D(s)

$$\frac{100(s+3)}{(s+6)(s^2+6s+25)} \equiv$$

$$\frac{K_1}{s+6} + \frac{K_2}{s+3-j4} + \frac{K_3}{s+3+j4}$$

- Cálculo de K_1, K_2, K_3: usamos o mesmo procedimento descrito anteriormente:

$$K_3 = \left.\frac{100(s+3)}{(s+6)(s+3-j4)}\right|_{s=-3-j4} = \frac{100(-j4)}{(3-j4)(-j8)}$$

$$= 6 + j8 = 10e^{j53,13^{\circ}}.$$

2. EFP: raízes complexas distintas de D(s)

$$\frac{100(s+3)}{(s+6)(s^2+6s+25)} = \frac{-12}{s+6} + \frac{10\underline{/-53{,}13^\circ}}{s+3-j4} + \frac{10\underline{/53{,}13^\circ}}{s+3+j4}.$$

- E a Transformada Inversa é:

$$\boxed{\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{100(s+3)}{(s+6)(s^2+6s+25)}\right\} = (-12e^{-6t} + 10e^{-j53{,}13^\circ}e^{-(3-j4)t} + 10e^{j53{,}13^\circ}e^{-(3+j4)t})u(t).}$$

2. EFP: raízes complexas distintas de D(s)

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{100(s+3)}{(s+6)(s^2+6s+25)}\right\} = (-12e^{-6t} + 10e^{-j53,13^\circ}e^{-(3-j4)t} + 10e^{j53,13^\circ}e^{-(3+j4)t})u(t).$$

$$10e^{-j53,13^\circ}e^{-(3-j4)t} + 10e^{j53,13^\circ}e^{-(3-j4)t}$$

$$= 10e^{-3t}(e^{j(4t-53,13^\circ)} + e^{-j(4t-53,13^\circ)})$$

$$= 20e^{-3t}\cos(4t - 53,13^\circ),$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{100(s+3)}{(s+6)(s^2+6s+25)}\right\}$$

$$= [-12e^{-6t} + 20e^{-3t}\cos(4t - 53,13^\circ)]u(t).$$

2. EFP: raízes complexas distintas de D(s)

Observações:

- Em circuitos fisicamente realizáveis, raízes complexas SEMPRE aparecem em pares conjugados.
- Os coeficientes associados a estes pares também são conjugados.

Exemplo anterior: $$\frac{10\angle{-53{,}13^\circ}}{s+3-j4}+\frac{10\angle{53{,}13^\circ}}{s+3+j4}.$$

2. EFP: raízes complexas distintas de D(s)

Generalizando o resultado anterior:

- Quando D(s) contem raízes complexas distintas, há um par de termos da seguinte forma:

$$\frac{K}{s+\alpha-j\beta}+\frac{K^*}{s+\alpha+j\beta}$$

Onde os coeficientes são normalmente números complexos, representados, na forma polar:

$$K = |K|e^{j\theta} = |K|\underline{/\theta^\circ}, \qquad K^* = |K|e^{-j\theta} = |K|\underline{/-\theta^\circ}.$$

2. EFP: raízes complexas distintas de D(s)

- A Transformada Inversa dos pares conjugados complexos é:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{K}{s+\alpha-j\beta}+\frac{K^*}{s+\alpha+j\beta}\right\}$$

$$= 2|K|e^{-\alpha t}\cos(\beta t+\theta).$$

3. EFP: raízes reais e repetidas de D(s)

$$\frac{100(s+25)}{s(s+5)^3} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{(s+5)^3} + \frac{K_3}{(s+5)^2} + \frac{K_4}{s+5}.$$

- K_1 calculado como descrito anteriormente:

$$K_1 = \left.\frac{100(s+25)}{(s+5)^3}\right|_{s=0} = \frac{100(25)}{125} = 20.$$

3. EFP: raízes reais e repetidas de D(s)

$$\frac{100(s+25)}{s(s+5)^3} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{(s+5)^3} + \frac{K_3}{(s+5)^2} + \frac{K_4}{s+5}.$$

- Cálculo de K_2: multiplicamos ambos os lados por $(s+5)^3$ e calculamos para s=-5

$$\left.\frac{100(s+25)}{s}\right|_{s=-5} = \left.\frac{K_1(s+5)^3}{s}\right|_{s=-5} + K_2 + K_3(s+5)|_{s=-5}$$

$$+ K_4(s+5)^2\Big|_{s=-5} = -400.$$

3. EFP: raízes reais e repetidas de D(s)

$$\frac{100(s+25)}{s(s+5)^3} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{(s+5)^3} + \frac{K_3}{(s+5)^2} + \frac{K_4}{s+5}.$$

- Cálculo de K_3: multiplicamos ambos os lados por $(s+5)^3$, diferenciamos em relação a s e calculamos para s=-5:

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{100(s+25)}{s}\right]_{s=-5} = \frac{d}{ds}\left[\frac{K_1(s+5)^3}{s}\right]_{s=-5} + \frac{d}{ds}[K_2]_{s=-5}$$

$$+ \frac{d}{ds}[K_3(s+5)]_{s=-5} + \frac{d}{ds}[K_4(s+5)^2]_{s=-5},$$

3. EFP: raízes reais e repetidas de D(s)

$$\frac{100(s+25)}{s(s+5)^3} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{(s+5)^3} + \frac{K_3}{(s+5)^2} + \frac{K_4}{s+5}.$$

- Cálculo de K_3: multiplicamos ambos os lados por $(s+5)^3$, diferenciamos em relação a s e calculamos para s=-5:

$$100\left[\frac{s-(s+25)}{s^2}\right]_{s=-5} = K_3 = -100.$$

3. EFP: raízes reais e repetidas de D(s)

$$\frac{100(s+25)}{s(s+5)^3} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{(s+5)^3} + \frac{K_3}{(s+5)^2} + \frac{K_4}{s+5}.$$

- Cálculo de K_4: multiplicamos ambos os lados por $(s+5)^3$, diferenciamos duas vezes em relação a s e calculamos para s=-5

$$100\frac{d}{ds}\left[-\frac{25}{s^2}\right]_{s=-5} = K_1\frac{d}{ds}\left[\frac{(s+5)^2(2s-5)}{s^2}\right]_{s=-5}$$

$$+\ 0 + \frac{d}{ds}[K_3]_{s=-5} + \frac{d}{ds}[2K_4(s+5)]_{s=-5},$$

$$K_4 = -20.$$

3. EFP: raízes reais e repetidas de D(s)

$$\frac{100(s+25)}{s(s+5)^3} = \frac{20}{s} - \frac{400}{(s+5)^3} - \frac{100}{(s+5)^2} - \frac{20}{s+5}.$$

- Transformada Inversa:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{100(s+25)}{s(s+5)^3}\right\}$$

$$= [20 - 400t^2e^{-5t} - 100te^{-5t} - 20e^{-5t}]u(t).$$

Raízes repetidas de D(s)

- Se F(s) tiver uma raiz real a de multiplicidade r:

$$\frac{K}{(s+a)^r}$$

cuja Transformada Inversa é:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{K}{(s+a)^r}\right\} = \frac{Kt^{r-1}e^{-at}}{(r-1)!}u(t).$$

4. EFP: raízes complexas e repetidas de D(s)

- Tratamos do mesmo modo que as raízes reais repetidas.
- Como as raízes complexas e os coeficientes associados aparecem em pares, calculamos somente metade deles.

Raízes repetidas de D(s)

- Se F(s) tiver uma raiz complexa a+jb de multiplicidade r:

$$\frac{K}{(s+\alpha-j\beta)^r}+\frac{K^*}{(s+\alpha+j\beta)^r}$$

cuja Transformada Inversa é:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{K}{(s+\alpha-j\beta)^r}+\frac{K^*}{(s+\alpha+j\beta)^r}\right\}$$

$$=\left[\frac{2|K|t^{r-1}}{(r-1)!}e^{-\alpha t}\cos(\beta t+\theta)\right]u(t).$$

Tabela de Transformadas (cont.)

Número do par	Natureza das raízes	$F(s)$	$f(t)$
1	Reais e distintas	$\dfrac{K}{s+a}$	$Ke^{-at}\,u(t)$
2	Reais e repetidas	$\dfrac{K}{(s+a)^2}$	$Kte^{-at}\,u(t)$
3	Complexas e distintas	$\dfrac{K}{s+\alpha-j\beta}+\dfrac{K^*}{s+\alpha+j\beta}$	$2\lvert K\rvert e^{-at}\cos(\beta t+\theta)u(t)$
4	Complexas e repetidas	$\dfrac{K}{(s+\alpha-j\beta)^2}+\dfrac{K^*}{(s+\alpha+j\beta)^2}$	$2t\lvert K\rvert e^{-at}\cos(\beta t+\theta)u(t)$

EFP: funções racionais impróprias

- Função racional imprópria: pode ser expressa como a soma de uma função racional própria e um polinômio.

$$F(s) = \frac{s^4 + 13s^3 + 66s^2 + 200s + 300}{s^2 + 9s + 20}$$

$$F(s) = s^2 + 4s + 10 + \boxed{\frac{30s + 100}{s^2 + 9s + 20}}$$

Métodos já vistos

$$F(s) = s^2 + 4s + 10 - \frac{20}{s + 4} + \frac{50}{s + 5}$$

EFP: funções racionais impróprias

- Tomando a Transformada Inversa:

$$F(s) = s^2 + 4s + 10 - \frac{20}{s + 4} + \frac{50}{s + 5}$$

EFP: funções racionais impróprias

- Tomando a Transformada Inversa:

$$F(s) = s^2 + 4s + 10 - \frac{20}{s+4} + \frac{50}{s+5}$$

$$\boxed{\begin{aligned} f(t) = \frac{d^2\delta(t)}{dt^2} + 4\frac{d\delta(t)}{dt} + 10\delta(t) \\ - (20e^{-4t} - 50e^{-5t})u(t). \end{aligned}}$$

Pólos e zeros de F(s)

- Função racional: razão de polinômios fatorados:

$$F(s) = \frac{K(s + z_1)(s + z_2)\cdots(s + z_n)}{(s + p_1)(s + p_2)\cdots(s + p_m)},$$

- Pólos:

- Zeros:

Pólos e zeros de F(s)

- Função racional: razão de polinômios fatorados:

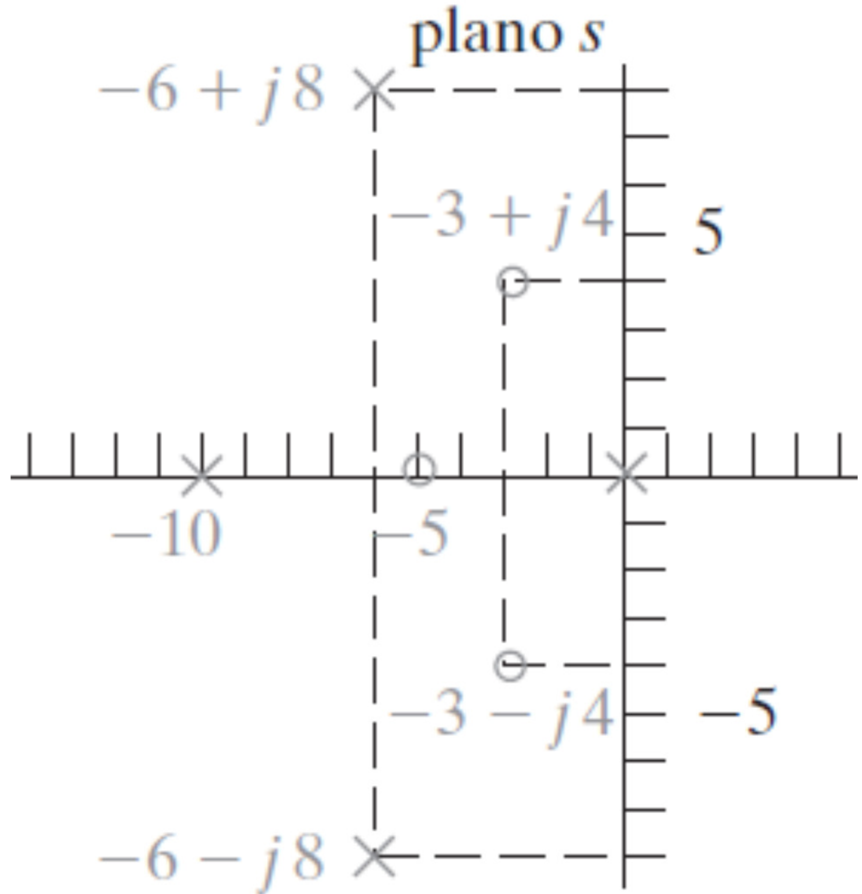
$$F(s) = \frac{K(s + z_1)(s + z_2)\cdots(s + z_n)}{(s + p_1)(s + p_2)\cdots(s + p_m)},$$

- Pólos: raízes do denominador (p_1, p_2, ... p_n) ➔ levam F(s) a ∞
- Zeros: raízes do numerador (z_1, z_2, ... z_n) ➔ levam F(s) a 0

Pólos e zeros de F(s):Representação no plano complexo

$$F(s) = \frac{10(s+5)(s+3-j4)(s+3+j4)}{s(s+10)(s+6-j8)(s+6+j8)}.$$

- Pólos (X): 0, -10, -6+j8, -6-j8
- Zeros (O): -5, -3+j4, -3-j4



Teorema do Valor Inicial

$$\lim_{t \to 0^+} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s),$$

∞ Expressão com erro na pág. 340

- Permite determinar o comportamento de f(t) em t=0.
- **Restrição:** somente é válido se os pólos de F(s), exceto um pólo de primeira ordem na origem (plano complexo), estiverem localizados no semi-plano lateral esquerdo s.

Teorema do Valor Final

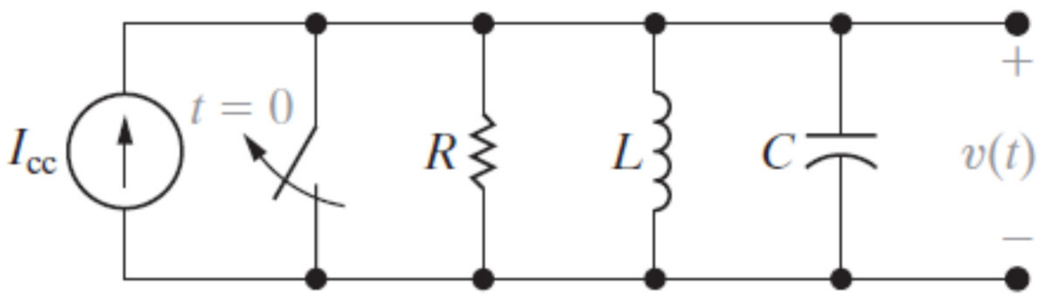
$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s).$$

Teorema do Valor Final

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s).$$

- **Restrição:** somente é válido se os pólos de F(s), exceto um pólo de primeira ordem na origem (plano complexo), estiverem localizados no semi-plano lateral esquerdo s.
- $f(\infty)$ deve existir.

Aplicação dos Teoremas dos Valores Inicial e Final

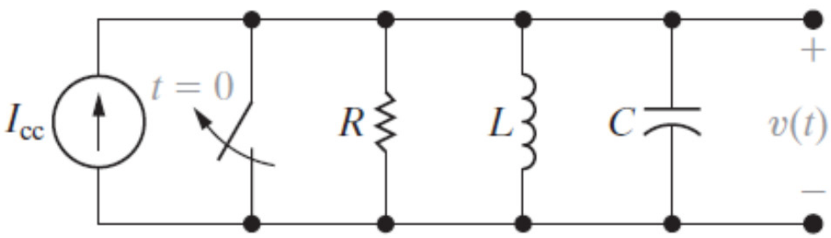


Não há energia inicial armazenada no circuito

$$V(s) = \frac{I_{cc}/C}{s^2 + (1/RC)s + (1/LC)}$$

- Podemos verificar se a expressão fornece os valores corretos de v(0+) e v(∞).

Teorema do Valor Inicial



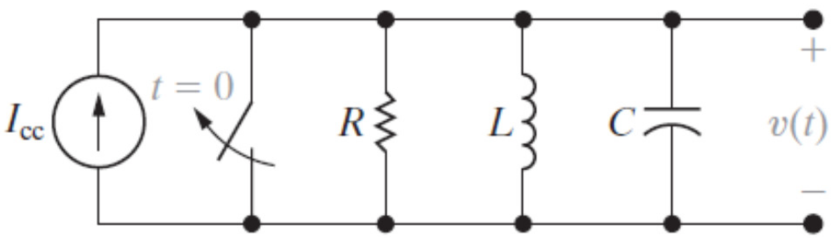
$$\lim_{t \to 0^+} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s),$$

∞

$$V(s) = \frac{I_{cc}/C}{s^2 + (1/RC)s + (1/LC)}$$

- v(0+)=0: dado do problema => $\boxed{\lim_{t \to 0^+} f(t)}$
- E: $\lim_{s \to \infty} sV(s) = \lim_{s \to \infty} \frac{s(I_{CC}/C)}{s^2[1 + 1/(RCs) + 1/(LCs^2)]} = 0$

Teorema do Valor Final



$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s).$$

$$V(s) = \frac{I_{cc}/C}{s^2 + (1/RC)s + (1/LC)}$$

- v(∞)=0: o indutor funciona como um curto-circuito em regime permanente contínuo. => $\boxed{\lim_{t\to\infty} f(t)}$

- E: $\lim_{s\to 0} sV(s) = \lim_{s\to 0} \dfrac{s(I_{CC}/C)}{s^2 + (s/RC\ ) + (1/LC\ )} = 0$