

# **Circuitos Elétricos III**

Prof. Danilo Melges

Depto. de Eng. Elétrica

Universidade Federal de Minas Gerais

# A Transformada de Fourier

# Série de Fourier e Transformada de Fourier

- Partindo da Série de Fourier e fazendo  $T \rightarrow \infty$ :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t},$$

onde

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt.$$

- Passamos de uma função periódica para uma função aperiódica.
- A separação entre frequências harmônicas diminui:

$$\Delta\omega = (n + 1)\omega_0 - n\omega_0 = \omega_0 = \frac{2\pi}{T},$$

$$\frac{1}{T} \rightarrow \frac{d\omega}{2\pi} \quad \text{quando } T \rightarrow \infty.$$

# Série de Fourier e Transformada de Fourier

- Quando  $T \rightarrow \infty$ :
  - a frequência deixa de ser discreta e passa a ser contínua:  $n\omega_0 \rightarrow \omega$  quando  $T \rightarrow \infty$ .
  - Os Coeficientes de Fourier diminuem:  $C_n \rightarrow 0$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt.$$

- Entretanto, o limite do produto  $C_n T$  é:

$$C_n T \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad \text{quando } T \rightarrow \infty.$$

# A Transformada de Fourier

$$C_n T \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad \text{quando } T \rightarrow \infty.$$

Que nos leva à **Transformada de Fourier**:

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt.$$

# A Transformada Inversa de Fourier

- Fazendo  $T \rightarrow \infty$  em:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t},$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (C_n T) e^{jn\omega_0 t} \left( \frac{1}{T} \right)$$

- O somatório  $\rightarrow$  integral,  $C_n T \rightarrow F(\omega)$ ,  $n\omega_0 \rightarrow \omega$  e  $1/T \rightarrow d\omega/2\pi$
- E chegamos à forma da Transformada Inversa de Fourier:

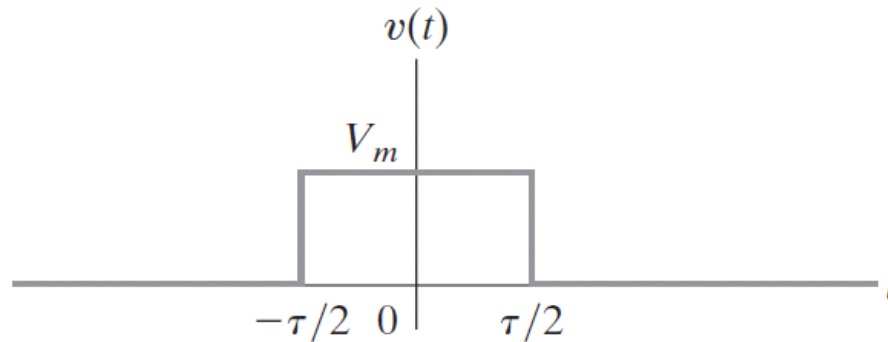
$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

# Par de Transformadas de Fourier

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt.$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega.$$

# A Transformada do pulso de tensão

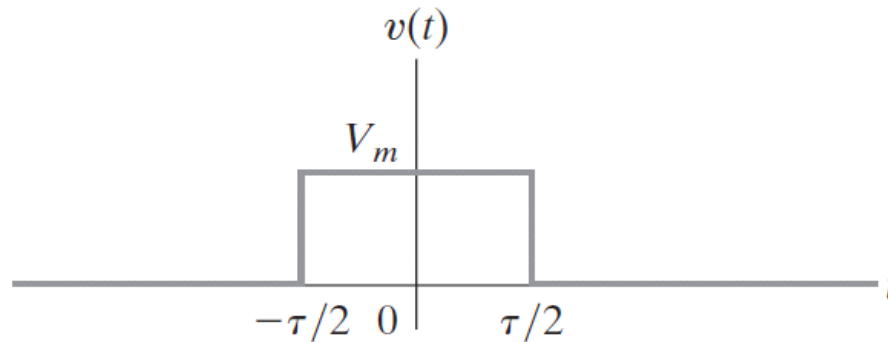


- Tomando a Transformada de Fourier:

$$V(\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_m e^{-j\omega t} dt = V_m \frac{e^{-j\omega t}}{(-j\omega)} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{V_m}{-j\omega} \left( -2j \operatorname{sen} \frac{\omega\tau}{2} \right)$$

$$V(\omega) = V_m \tau \frac{\operatorname{sen} \omega\tau/2}{\omega\tau/2}.$$

# A Transformada do pulso de tensão



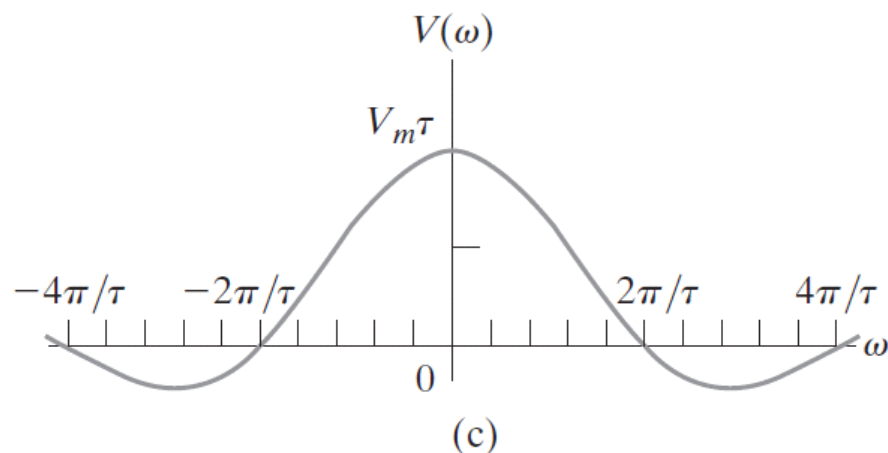
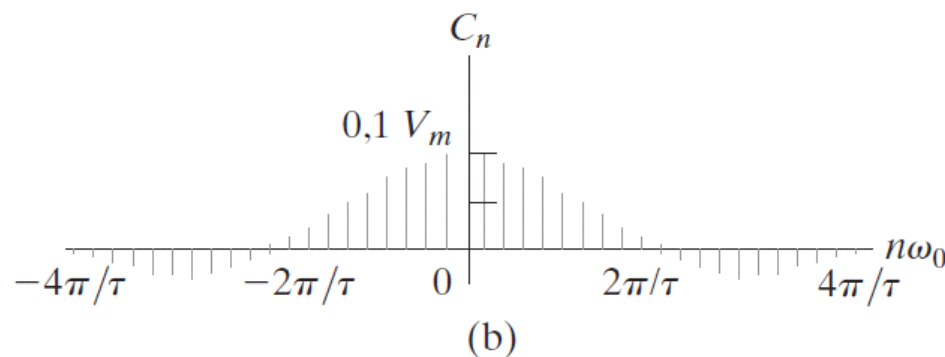
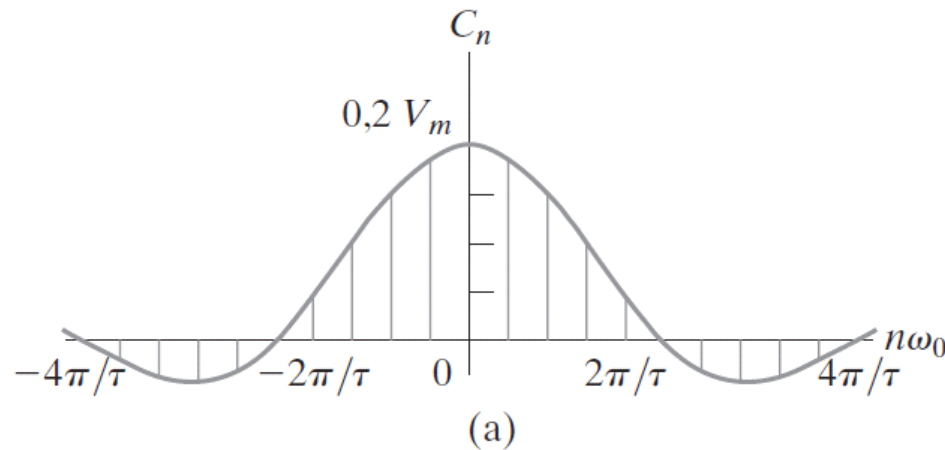
- Transformada de Fourier de um pulso de largura  $\tau$  e amplitude  $V_m$ :

$$V(\omega) = V_m \tau \frac{\text{sen } \omega\tau/2}{\omega\tau/2}.$$

- Coeficientes de Fourier de um trem infinito de pulsos:

$$C_n = \frac{V_m \tau}{T} \frac{\text{sen } n\omega_0\tau/2}{n\omega_0\tau/2}.$$

# A Transformada do pulso de tensão



- Coeficientes de Fourier para  $T/\tau = 5$ .

$$C_n = \frac{V_m \tau}{T} \frac{\text{sen } n\omega_0 \tau / 2}{n\omega_0 \tau / 2}.$$

- Coeficientes de Fourier para  $T/\tau = 10$ .

- Transformada de Fourier  $V(\omega)$ .

$$V(\omega) = V_m \tau \frac{\text{sen } \omega \tau / 2}{\omega \tau / 2}.$$

# Série vs Transformada de Fourier

| <b>Série</b>       | <b>Transformada</b> |
|--------------------|---------------------|
| Funções periódicas | Funções aperiódicas |
| Espectro discreto  | Espectro contínuo   |
|                    |                     |

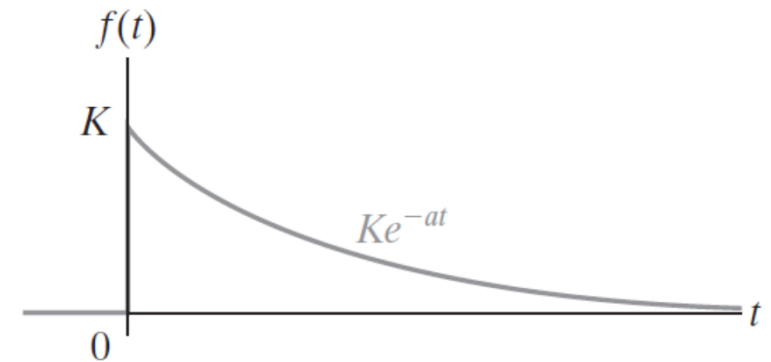
# Condições de existência da Integral de Fourier

- $f(t)$  deve ser absolutamente integrável:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty$$

- $f(t)$  deve possuir um **número finito de descontinuidades** dentro de qualquer intervalo finito;
- $f(t)$  deve possuir um **número finito de máximos ou mínimos** dentro de qualquer intervalo finito.

# Exemplo de Transformada de Fourier



$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} Ke^{-at}e^{-j\omega t} dt$$

$$= \left. \frac{Ke^{-(a+j\omega)t}}{-(a+j\omega)} \right|_0^{\infty} = \frac{K}{-(a+j\omega)}(0-1)$$

$$= \frac{K}{a+j\omega}, \quad a > 0.$$

# Condições de existência da Integral de Fourier

- Há diversas funções importantes que não possuem Transformada de Fourier.
- Funções constantes e senoidais, não obedecem o critério de convergência:  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty$
- Utilizamos alguns artifícios para calcular a Transformada de Fourier destas funções.

# Transformada de Fourier de funções que não são absolutamente integráveis

- Tomamos uma função  $f_{\text{aux}}(t)$  que possua Transformada de Fourier e se aproxime da função de interesse ( $f(t)$ )
- Calculamos TF da função auxiliar:  $F_{\text{aux}}(\omega)$
- Avaliamos  $F_{\text{aux}}(\omega)$ , quando  $f_{\text{aux}}(t)$  tende a  $f(t)$  para obtermos  $F(\omega)$

# Transformada de Fourier de uma constante

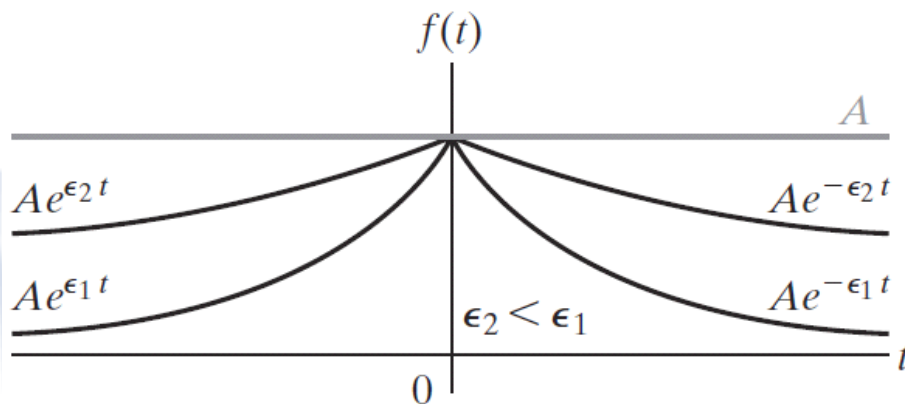
- Aproximamos a função constante por uma exponencial e fazemos  $\epsilon \rightarrow 0$ :

$$f(t) = Ae^{-\epsilon|t|}, \epsilon > 0.$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^0 Ae^{\epsilon t} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} Ae^{-\epsilon t} e^{-j\omega t} dt.$$

$$F(\omega) = \frac{A}{\epsilon - j\omega} + \frac{A}{\epsilon + j\omega} = \frac{2\epsilon A}{\epsilon^2 + \omega^2}$$

que **tende a um impulso** em  $\omega=0$ , quando  $\epsilon \rightarrow 0$ :



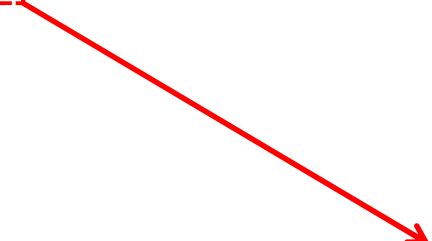
# Transformada de Fourier de uma constante

$$F(\omega) = \frac{A}{\epsilon - j\omega} + \frac{A}{\epsilon + j\omega} = \frac{2\epsilon A}{\epsilon^2 + \omega^2}$$

- (1)  $F(\omega) \rightarrow \infty$  em  $\omega=0$ , quando  $\epsilon \rightarrow 0$ ;
- (2) a duração de  $F(\omega) \rightarrow 0$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$ ;
- (3) a área sob a curva de  $F(\omega)$  independe de  $\epsilon$ , sendo dada por:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\epsilon A}{\epsilon^2 + \omega^2} d\omega = 4\epsilon A \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\epsilon^2 + \omega^2} = 2\pi A.$$

$$\mathcal{F}\{A\} = 2\pi A\delta(\omega).$$


$$\int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\epsilon^2 + \omega^2} = (1/\epsilon) \operatorname{tg}^{-1} (\omega/\epsilon) = \frac{\pi}{2\epsilon}$$

# Obtendo a Transformada de Fourier por meio da Transformada de Laplace

- Pode-se obter a TF por meio da TL para funções cuja integral de Fourier converge;
- A Integral de Fourier converge para funções que apresentam pólos apenas no semi-plano lateral esquerdo.

# Obtendo a Transformada de Fourier por meio da Transformada de Laplace

- Para os **casos em que a Integral de Fourier converge**, o cálculo por meio da TL pode ser realizado da seguinte forma:
- **Caso 1:** Se  $f(t)=0$  para  $t \leq 0^-$ , simplesmente substituímos  $s$  por  $j\omega$ :

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}_{s=j\omega}.$$

**Exemplo:**

$$\begin{aligned} f(t) &= 0, \quad t \leq 0 \\ f(t) &= e^{-at} \cos \omega_o t, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

$$F\{f(t)\} = \left[ \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_o^2} \right]_{s=j\omega} = \frac{j\omega + a}{(j\omega + a)^2 + \omega_o^2}$$

# Obtendo a Transformada de Fourier por meio da Transformada de Laplace

- **Caso 2:** Se  $f(t)=0$  para  $t \geq 0^+$ , refletimos a função em torno do eixo  $y$ , calculamos a Transformada de Laplace e substituímos  $s$  por  $-j\omega$ :

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{f(-t)\}_{s=-j\omega}.$$

**Exemplo:**

$$\begin{aligned} f(t) &= 0, \quad t \geq 0 \\ f(t) &= e^{at} \cos \omega_o t, \quad t \leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(-t) &= 0, \quad t \leq 0 \\ f(-t) &= e^{-at} \cos \omega_o t, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

$$F\{f(t)\} = L\{f(-t)\}_{s=-j\omega} = \left[ \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_o^2} \right]_{s=-j\omega} = \frac{-j\omega + a}{(-j\omega + a)^2 + \omega_o^2}$$

# Obtendo a Transformada de Fourier por meio da Transformada de Laplace

- **Caso 3:** Se  $f(t)$  é não-nula para todo o intervalo de tempo, calculamos por uma combinação dos casos 1 e 2:

$$\begin{aligned} f^+(t) &= f(t) \quad (\text{para } t > 0), \\ f^-(t) &= f(t) \quad (\text{para } t < 0), \end{aligned}$$

então

$$f(t) = f^+(t) + f^-(t)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(t)\} &= \mathcal{F}\{f^+(t)\} + \mathcal{F}\{f^-(t)\} \\ &= \mathcal{L}\{f^+(t)\}_{s=j\omega} + \mathcal{L}\{f^-(-t)\}_{s=-j\omega}. \end{aligned}$$

- Se  $f(t)$  for par:  $\mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}_{s=j\omega} + \mathcal{L}\{f(t)\}_{s=-j\omega}$
- Se  $f(t)$  for ímpar:  $\mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}_{s=j\omega} - \mathcal{L}\{f(t)\}_{s=-j\omega}$

# Propriedades da Transformada de Fourier (Transformadas Operacionais)

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt.$$

- Multiplicação por uma constante

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega),$$

então

$$\mathcal{F}\{Kf(t)\} = KF(\omega).$$

# Propriedades da Transformada de Fourier (Transformadas Operacionais)

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt.$$

- Adição:

$$\mathcal{F}\{f_1(t)\} = F_1(\omega),$$

$$\mathcal{F}\{f_2(t)\} = F_2(\omega),$$

$$\mathcal{F}\{f_3(t)\} = F_3(\omega),$$

então

$$\mathcal{F}\{f_1(t) - f_2(t) + f_3(t)\} = F_1(\omega) - F_2(\omega) + F_3(\omega),$$

# Propriedades da Transformada de Fourier (Transformadas Operacionais)

- Diferenciação:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = j\omega F(\omega).$$

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = (j\omega)^n F(\omega).$$

- Válidas somente se  $f(t)=0$  para  $t \rightarrow \pm\infty$ .

# Propriedades da Transformada de Fourier (Transformadas Operacionais)

- Integração:

Se

$$g(t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx,$$

então

$$\mathcal{F}\{g(t)\} = \frac{F(\omega)}{j\omega}.$$

# Propriedades da Transformada de Fourier (Transformadas Operacionais)

- Mudança de escala:

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right), \quad a > 0.$$

- Ou seja, quando o tempo é dilatado, a frequência é comprimida (e vice-versa).
- Quando  $0 < a < 1$ , o tempo é dilatado.
- Quando  $a > 1$ , o tempo é comprimido.

# Propriedades da Transformada de Fourier (Transformadas Operacionais)

- Deslocamento no domínio do tempo:

$$\mathcal{F}\{f(t - a)\} = e^{-j\omega a} F(\omega).$$

- O deslocamento altera apenas o espectro de fase, não modificando o espectro de amplitude.
- Se  $a > 0$ ,  $f(t)$  é atrasada. Se  $a < 0$ ,  $f(t)$  é adiantada.

# Propriedades da Transformada de Fourier (Transformadas Operacionais)

- Deslocamento no domínio da frequência:

$$\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t} f(t)\} = F(\omega - \omega_0).$$

- O deslocamento na frequência corresponde a uma multiplicação por exponencial complexa no tempo.

# Propriedades da Transformada de Fourier (Transformadas Operacionais)

- Modulação:

$$\mathcal{F}\{f(t) \cos \omega_0 t\} = \frac{1}{2} F(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} F(\omega + \omega_0).$$

# Propriedades da Transformada de Fourier (Transformadas Operacionais)

- Modulação:

$$\mathcal{F}\{f(t) \cos \omega_0 t\} = \frac{1}{2} F(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} F(\omega + \omega_0).$$

- Substituindo o cosseno por sua forma exponencial, obtemos a prova da propriedade acima.
- A modulação consiste em alterar a amplitude da portadora (cosseno) em função da moduladora ( $f(t)$ ).

# Propriedades da Transformada de Fourier (Transformadas Operacionais)

- Convolução no domínio do tempo:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t - \lambda) d\lambda$$

torna-se

$$\mathcal{F}\{y(t)\} = Y(\omega) = X(\omega)H(\omega).$$

- A convolução no domínio do tempo corresponde a uma multiplicação na frequência.

# Propriedades da Transformada de Fourier (Transformadas Operacionais)

- Convolução no domínio da frequência:

$$f(t) = f_1(t) f_2(t),$$

então

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(u) F_2(\omega - u) du.$$

- A convolução no domínio da frequência corresponde a uma multiplicação no domínio do tempo.

# Tabela de Propriedades da Transformada de Fourier

| $f(t)$                                                      | $F(\omega)$                                                         |
|-------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|
| $Kf(t)$                                                     | $KF(\omega)$                                                        |
| $f_1(t) - f_2(t) + f_3(t)$                                  | $F_1(\omega) - F_2(\omega) + F_3(\omega)$                           |
| $d^n f(t)/dt^n$                                             | $(j\omega)^n F(\omega)$                                             |
| $\int_{-\infty}^t f(x) dx$                                  | $F(\omega)/j\omega$                                                 |
| $f(at)$                                                     | $\frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right), a > 0$                  |
| $f(t - a)$                                                  | $e^{-j\omega a}F(\omega)$                                           |
| $e^{j\omega_0 t}f(t)$                                       | $F(\omega - \omega_0)$                                              |
| $f(t) \cos \omega_0 t$                                      | $\frac{1}{2}F(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}F(\omega + \omega_0)$ |
| $\int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t - \lambda) d\lambda$ | $X(\omega)H(\omega)$                                                |
| $f_1(t)f_2(t)$                                              | $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(u)F_2(\omega - u) du$   |
| $t^n f(t)$                                                  | $(j)^n \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$                             |

# Propriedades Matemáticas da Transformada de Fourier

- $F(\omega)$  é complexa e pode ser representada na **forma retangular ou polar**:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (\cos \omega t - j \sin \omega t) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt.$$

- Onde:  $A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt$

$$B(\omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt.$$

$$F(\omega) = A(\omega) + jB(\omega) = |F(\omega)| e^{j\theta(\omega)}$$

# Propriedades Matemáticas da Transformada de Fourier

- $A(\omega)$  é uma função par em  $\omega$ :  $A(\omega) = A(-\omega)$
- $B(\omega)$  é uma função ímpar de  $\omega$ :  $B(\omega) = -B(-\omega)$
- $|F(\omega)|$  é uma função par de  $\omega$
- $\theta(\omega)$  é uma função ímpar de  $\omega$
- $F^*(\omega) = F(-\omega)$

# Teorema de Parseval (TP)

- TP: relaciona a **energia** de  $f(t)$  **no domínio tempo** com a **energia** da Transformada de Fourier de  $f(t)$  (**domínio da frequência**).
- Considerando  $f(t)$  como a corrente ou **tensão em um resistor de  $1\Omega$** , a energia é dada por:

$$\begin{aligned} W_{1\Omega} &= \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] dt. \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) f(t) e^{j\omega t} d\omega \right] dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega t} dt \right] d\omega. \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) F(-\omega) d\omega. \end{aligned}$$

- Como  $F(-\omega) = F^*(\omega)$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega.$$

# Teorema de Parseval (TP)

- Pelo Teorema de Parseval, a energia de  $f(t)$  pode ser calculada tanto no domínio do tempo quanto no da frequência, como segue:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega.$$

que é válida somente se ambas as integrais existirem.

- Como  $|F(\omega)|$  é uma função par de  $\omega$ , podemos simplificar por:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega.$$

# Exemplo de aplicação do Teorema de Parseval (TP)

- Supondo que:  $f(t) = e^{-a|t|}$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2a|t|} dt &= \int_{-\infty}^0 e^{2at} dt + \int_0^{\infty} e^{-2at} dt = \left. \frac{e^{2at}}{2a} \right|_{-\infty}^0 + \left. \frac{e^{-2at}}{-2a} \right|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a} = \frac{1}{a}.\end{aligned}$$

- A Transformada de Fourier de  $f(t)$  é:  $F(\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$

- Logo: 
$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{4a^2}{(a^2 + \omega^2)^2} d\omega &= \frac{4a^2}{\pi} \frac{1}{2a^2} \left( \frac{\omega}{\omega^2 + a^2} + \frac{1}{a} \operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega}{a} \right) \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{2}{\pi} \left( 0 + \frac{\pi}{2a} - 0 - 0 \right) = \frac{1}{a}.\end{aligned}$$

## Interpretação do Teorema de Parseval (TP)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega.$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |F(2\pi f)|^2 2\pi df = 2 \int_0^{\infty} |F(2\pi f)|^2 df,$$

- $|F(\omega)|^2$  representa uma densidade de energia em J/Hz e  $|F(2\pi f)|^2 df$  é a energia de uma faixa infinitesimal de frequência  $df$ .

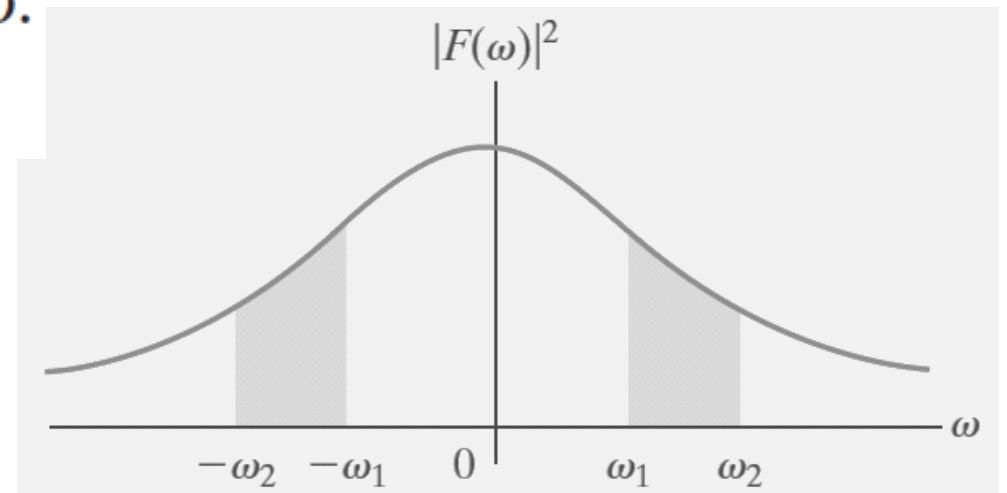
# Interpretação do Teorema de Parseval (TP)

- Qual a energia na faixa de frequências entre  $\omega_1$  e  $\omega_2$ ?

$$W_{1\Omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_2}^{-\omega_1} |F(\omega)|^2 d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} |F(\omega)|^2 d\omega.$$

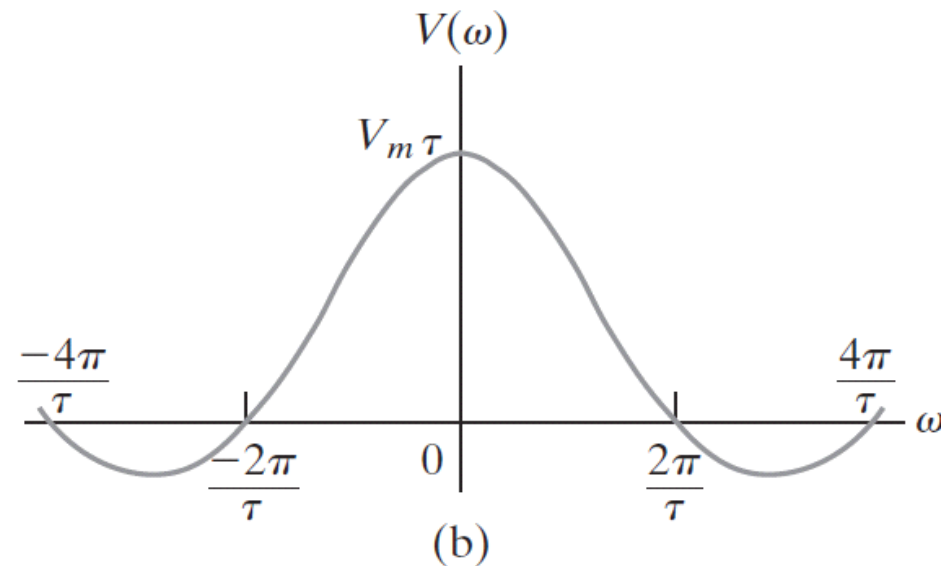
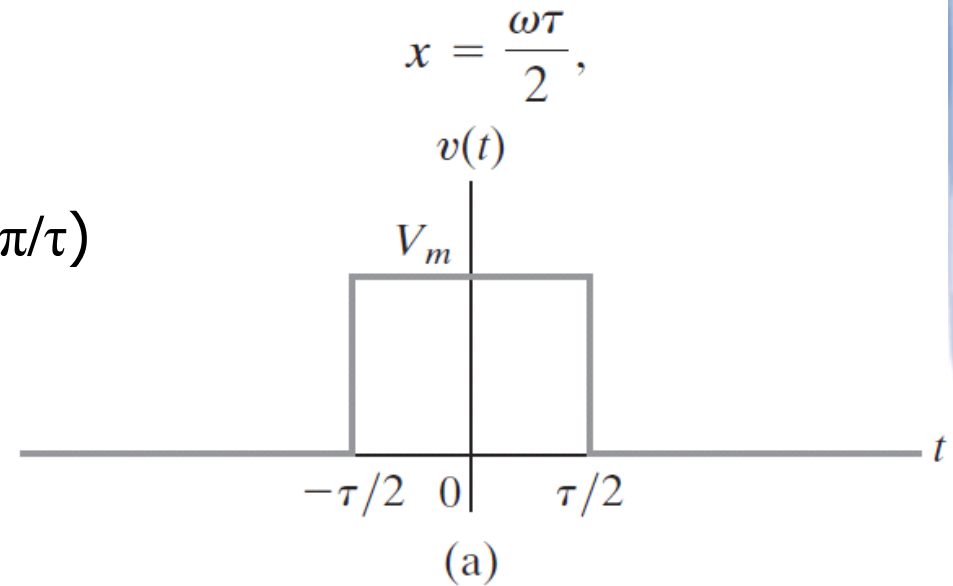
- Ou, devido à simetria par em  $\omega$ :

$$W_{1\Omega} = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} |F(\omega)|^2 d\omega.$$



# Energia contida em um pulso retangular

- Quanto **menor o tamanho do pulso**, **maior a banda necessária** para “transmitir” a parte dominante do espectro de amplitude (de  $-2\pi/\tau$  a  $+2\pi/\tau$ )
- Pode-se utilizar Teorema de Parseval para calcular a parcela da energia na faixa de 0 a  $+2\pi/\tau$ .



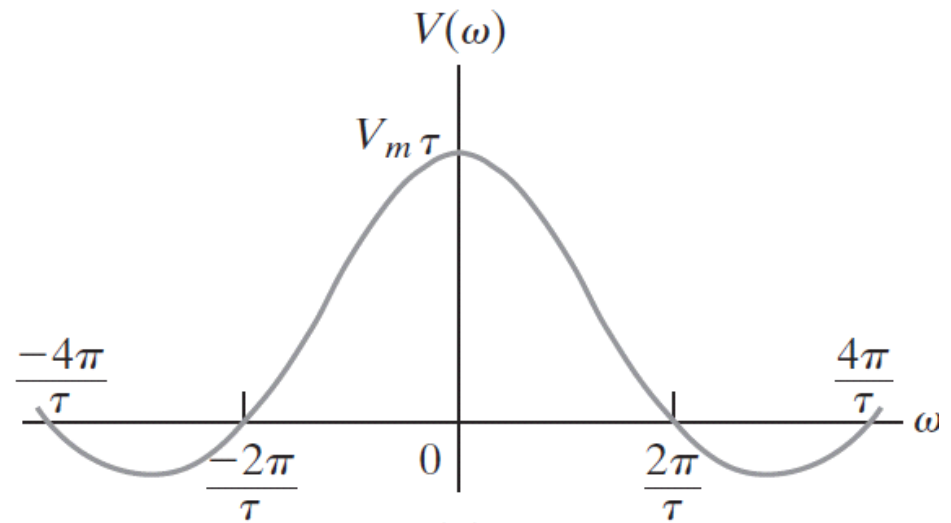
# Energia contida em um pulso retangular

- Transformada de Fourier do pulso:  $V(\omega) = V_m \tau \frac{\text{sen } \omega\tau/2}{\omega\tau/2}$
- Energia do pulso na faixa de 0 a  $+2\pi/\tau$ :  $W = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi/\tau} V_m^2 \tau^2 \frac{\text{sen}^2 \omega\tau/2}{(\omega\tau/2)^2} d\omega$

Fazendo  $x = \omega\tau/2$ :  $dx = \frac{\tau}{2} d\omega$

Logo:

$$W = \frac{2V_m^2 \tau}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\text{sen}^2 x}{x^2} dx.$$



# Energia contida em um pulso retangular

- Logo:  $W = \frac{2V_m^2 \tau}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin^2 x}{x^2} dx. \quad (1)$
- Fazendo  $u = \sin^2 x$  então  $du = 2\sin x \cos x dx = \sin 2x dx$ ,  
 $dv = \frac{dx}{x^2},$   $v = -\frac{1}{x}.$
- Logo: 
$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\sin^2 x}{x^2} dx &= -\frac{\sin^2 x}{x} \Big|_0^\pi - \int_0^\pi -\frac{1}{x} \sin 2x dx \\ &= 0 + \int_0^\pi \frac{\sin 2x}{x} dx. \end{aligned}$$
- Substituindo em (1):  $W = \frac{4V_m^2 \tau}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin 2x}{2x} dx.$

## Energia contida em um pulso retangular

$$W = \frac{4V_m^2\tau}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin 2x}{2x} dx.$$

- Fazendo  $y=2x$  e  $dy=2dx$ , temos:

$$W = \frac{2V_m^2\tau}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin y}{y} dy.$$

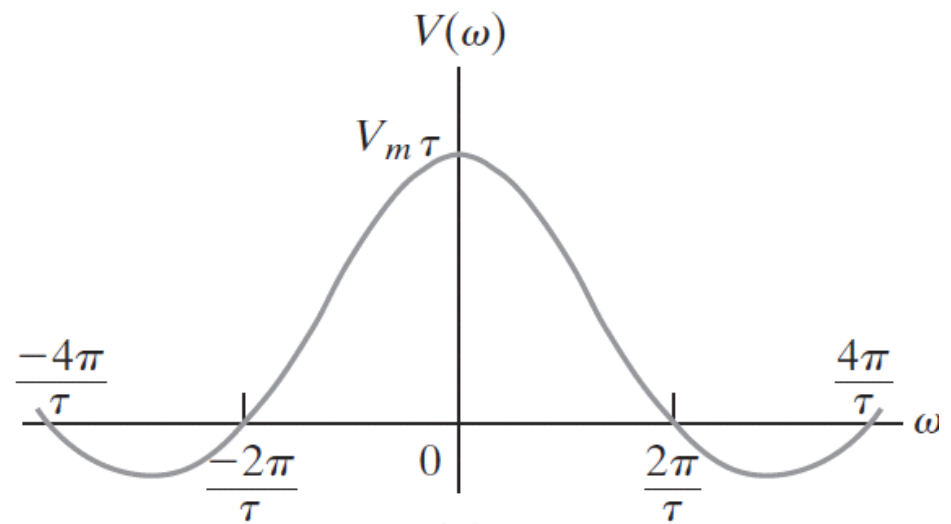
- Tomamos, então o valor da integral de uma Tabela de integrais de funções trigonométricas:

$$W = \frac{2V_m^2\tau}{\pi} (1,41815).$$

# Energia contida em um pulso retangular

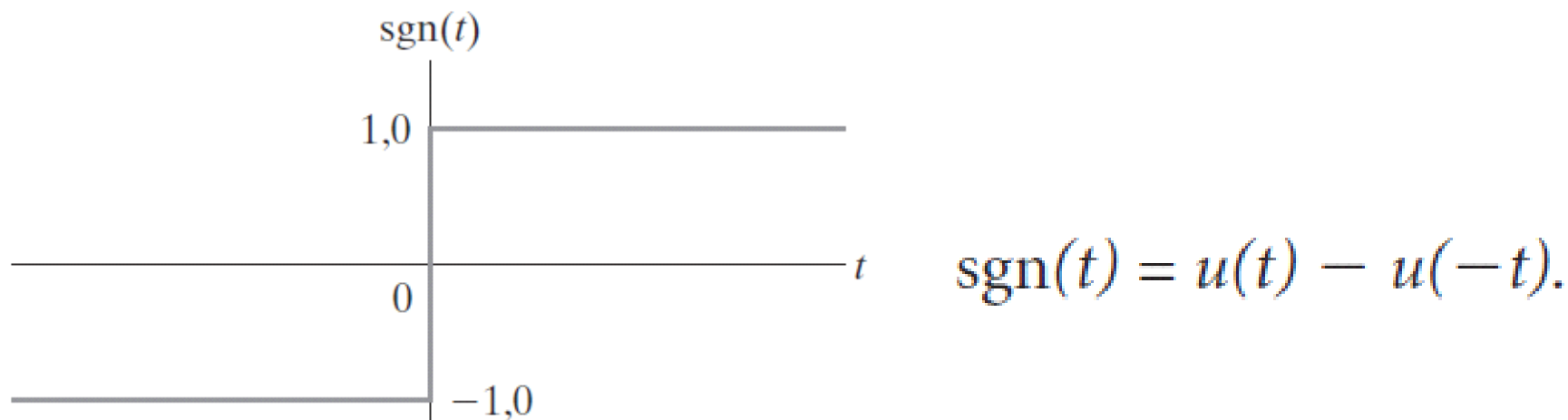
- A energia na banda de  $-2\pi/\tau$  a  $+2\pi/\tau$  corresponde a 90% da energia total do pulso:

$$W = \frac{2V_m^2\tau}{\pi} (1,41815).$$



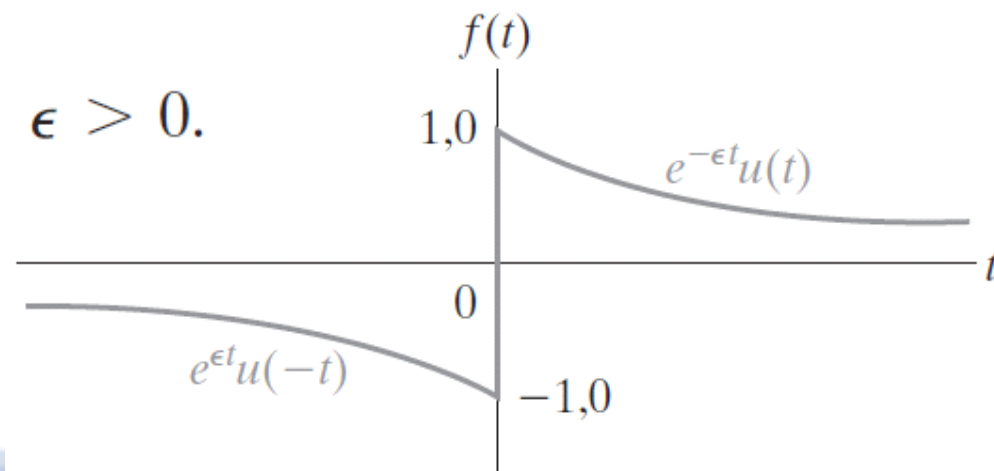
# Usando limites para calcular a Transformada de Fourier

- Calcular a Transformada de Fourier da Função Sinal:



- Aproximamos por funções exponenciais:

$$\text{sgn}(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [e^{-\epsilon t} u(t) - e^{\epsilon t} u(-t)], \quad \epsilon > 0.$$



# Usando limites para calcular a Transformada de Fourier

- Aproximamos por funções exponenciais:

$$\text{sgn}(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [e^{-\epsilon t} u(t) - e^{\epsilon t} u(-t)], \quad \epsilon > 0.$$

- Como obter a Transformada de Fourier?

$$\begin{aligned} f^+(t) &= f(t) \quad (\text{para } t > 0), \\ f^-(t) &= f(t) \quad (\text{para } t < 0), \end{aligned}$$

então

$$f(t) = f^+(t) + f^-(t)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(t)\} &= \mathcal{F}\{f^+(t)\} + \mathcal{F}\{f^-(t)\} \\ &= \mathcal{L}\{f^+(t)\}_{s=j\omega} + \mathcal{L}\{f^-(-t)\}_{s=-j\omega}. \end{aligned}$$

# Usando limites para calcular a Transformada de Fourier

- Aproximamos por funções exponenciais:

$$\text{sgn}(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [e^{-\epsilon t} u(t) - e^{\epsilon t} u(-t)], \quad \epsilon > 0.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(t)\} &= \frac{1}{s + \epsilon} \Big|_{s=j\omega} - \frac{1}{s + \epsilon} \Big|_{s=-j\omega} \\ &= \frac{1}{j\omega + \epsilon} - \frac{1}{-j\omega + \epsilon} \\ &= \frac{-2j\omega}{\omega^2 + \epsilon^2}. \end{aligned}$$

- Quando  $\epsilon \rightarrow 0$ :  $\mathcal{F}\{\text{sgn}(t)\} = \frac{2}{j\omega}.$

# Usando limites para calcular a Transformada de Fourier

- Calcular a Transformada de Fourier da Função Degrau Unitário:

- Esta função pode ser expressa por:

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t).$$

- Logo:  $\mathcal{F}\{u(t)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}\right\} + \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t)\right\}$

- Sabendo que  $\mathcal{F}\{A\} = 2\pi A\delta(\omega)$ . e  $\mathcal{F}\{\operatorname{sgn}(t)\} = \frac{2}{j\omega}$  :

$$\mathcal{F}\{u(t)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}\right\} + \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t)\right\} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}.$$

# Tabela de Transformadas de Fourier

**TABELA 17.1** Transformadas de Fourier de funções elementares

| Tipo                                     | $f(t)$            | $F(\omega)$                                                   |
|------------------------------------------|-------------------|---------------------------------------------------------------|
| impulso                                  | $\delta(t)$       | 1                                                             |
| constante                                | $A$               | $2\pi A\delta(\omega)$                                        |
| sinal                                    | $\text{sgn}(t)$   | $2/j\omega$                                                   |
| degrau                                   | $u(t)$            | $\pi\delta(\omega) + 1/j\omega$                               |
| exponencial de tempo positivo            | $e^{-at}u(t)$     | $1/(a + j\omega), \quad a > 0$                                |
| exponencial de tempo negativo            | $e^{-at}u(-t)$    | $1/(a - j\omega), \quad a > 0$                                |
| exponencial de tempo positivo e negativo | $e^{-a t }$       | $2a/(a^2 - \omega^2), \quad a > 0$                            |
| exponencial complexa                     | $e^{j\omega_0 t}$ | $2\pi\delta(\omega - \omega_0)$                               |
| co-seno                                  | $\cos \omega_0 t$ | $\pi[(\omega - \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$        |
| seno                                     | $\sin \omega_0 t$ | $j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$ |