Circuitos Elétricos III

Prof. Danilo Melges

Depto. de Eng. Elétrica

Universidade Federal de Minas Gerais

Séries de Fourier

Série de Fourier

- Qualquer função periódica *f*(*t*) pode ser representada por uma soma infinita de senos e cossenos:

$$f(t) = a_v + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t,$$

- a_v, a_n, b_n são os coeficientes de Fourier
- ω_o=2*pi/T é a freqüência fundamental da função.
- $2\omega_o$ é o segundo harmônico, $3\omega_o$ é o terceiro, etc...
- O período de qualquer termo da série é um múltiplo inteiro de T.

Condições de Dirichlet

Condições que *f*(*t*) deve satisfazer para que possa ser expressa por meio da série de Fourier:

- f(t) deve ser unívoca (p/ cada elemento do domínio corresponde um único elemento do contra-domínio);
- Deve ter número de descontinuidades finito no intervalo T;
- Deve ter número de máximos e mínimos finito no intervalo T;
- A integral $\int_{t_o}^{t_o+T} |f(t)|\,dt$ deve existir

Condições de Dirichlet

- Funções periódicas geradas por fontes fisicamente realizáveis satisfazem estas condições.

- Estas condições são suficientes, mas não necessárias: mesmo que uma função não as satisfaça, ainda pode ser possível expressá-la por Série de Fourier.

- Aplicação a circuitos → calcula-se a resposta a cada sinal senoidal e soma-se as respostas (superposição).

Coeficientes de Fourier

- Podemos calcular os coeficientes da Série de Fourier por:

$$a_v = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\, dt,$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos k\omega_0 t\, dt,$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,\mathrm{sen}\, k\omega_0 t\, dt.$$

Coeficientes de Fourier

- a_v corresponde ao valor médio de f(t):

$$a_v = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,dt,$$

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)dt &= \int_{t_0}^{t_0+T}\left(a_v + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t\right) dt \\
&= \int_{t_0}^{t_0+T} a_v dt + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{t_0}^{t_0+T} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t)\,dt \\
&= a_v T + 0.
\end{aligned}$$

Coeficientes de Fourier

- Demonstração: $$a_k = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos k\omega_0 t\, dt,$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos k\omega_0 t\, dt = \int_{t_0}^{t_0+T} \boxed{a_v \cos k\omega_0 t\, dt}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\int_{t_0}^{t_0+T} (a_n \cos n\omega_0 t \cos k\omega_0 t + b_n \,\mathrm{sen}\, n\omega_0 t \cos k\omega_0 t)\, dt$$

Mas:

$$\boxed{\int_{t_0}^{t_0+T} \cos m\omega_0 t\, dt = 0, \quad \text{para todo } m,}$$

Coeficientes de Fourier

- Demonstração: $a_k = \dfrac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos k\omega_0 t\,dt,$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos k\omega_0 t\,dt = \int_{t_0}^{t_0+T} a_v \cos k\omega_0 t\,dt$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{t_0}^{t_0+T} \left(\boxed{a_n \cos n\omega_0 t \cos k\omega_0 t} + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t \cos k\omega_0 t\right) dt$$

Mas:

$$\boxed{\int_{t_0}^{t_0+T} \cos m\omega_0 t \cos n\omega_0 t\,dt} = 0, \quad \boxed{\text{para todo } m \neq n,}$$
$$= \frac{T}{2}, \quad \text{para } m = n.$$

$$\boxed{\int_{t_o}^{t_o+T} cos m\,\omega_o t \cos n\,\omega_o t\,dt = \int_{t_o}^{t_o+T} \frac{1}{2}\left[\cos(m+n)\omega_o t + \cos(m-n)\omega_o t\right] dt = 0}$$

Coeficientes de Fourier

- Demonstração: $a_k = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos k\omega_0 t\, dt,$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos k\omega_0 t\, dt = \int_{t_0}^{t_0+T} a_v \cos k\omega_0 t\, dt$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\int_{t_0}^{t_0+T} \boxed{(a_n \cos n\omega_0 t \cos k\omega_0 t} + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t \cos k\omega_0 t)\, dt$$

Mas:

$$\boxed{\int_{t_0}^{t_0+T} \cos m\omega_0 t \cos n\omega_0 t\, dt} = 0, \quad \text{para todo } m \neq n,$$
$$= \frac{T}{2}, \quad \boxed{\text{para } m = n.}$$

$$\boxed{\int_{t_o}^{t_o+T} \cos^2 m\,\omega_o t\, dt = \int_{t_o}^{t_o+T} \frac{(1+cos2m\,\omega_o t)}{2} dt = \frac{1}{2}(t_o+T-t_o)}$$

Coeficientes de Fourier

- Demonstração: $$a_k = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos k\omega_0 t\,dt,$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos k\omega_0 t\,dt = \int_{t_0}^{t_0+T} a_v \cos k\omega_0 t\,dt$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{t_0}^{t_0+T}(a_n \cos n\omega_0 t \cos k\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t \cos k\omega_0 t)\,dt$$

Mas:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \cos m\omega_0 t \operatorname{sen} n\omega_0 t\,dt = 0, \quad \text{para todo } m \text{ e } n,$$

$$\int_{t_o}^{t_o+T} \cos m\,\omega_o t\, \operatorname{sen} n\,\omega_o t\,dt = \int_{t_o}^{t_o+T} \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(m+n)\omega_o t - \operatorname{sen}(m-n)\omega_o t\right]dt = 0$$

Coeficientes de Fourier

- Demonstração: $a_k = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos k\omega_0 t\; dt,$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos k\omega_0 t\; dt = \int_{t_0}^{t_0+T} \cancelto{0}{a_v \cos k\omega_0 t\; dt}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\int_{t_0}^{t_0+T} \left(a_n \cos n\omega_0 t \cos k\omega_0 t + \cancelto{0}{b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t \cos k\omega_0 t}\right) dt$$

$$= 0 + a_k\left(\frac{T}{2}\right) + 0.$$

Coeficientes de Fourier

- Demonstração: $b_k = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,\mathrm{sen}\,k\omega_0 t\,dt.$

$$\int_{t_o}^{t_o+T} f(t)\,sen\,k\,\omega_o t\,dt = \int_{t_o}^{t_o+T} \boxed{a_v\,sen\,k\,\omega_o t\,dt} +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{t_o}^{t_o+T} (a_n \cos n\,\omega_o t\,sen\,k\,\omega_o t + b_n\,sen\,n\,\omega_o t\,sen\,k\,\omega_o t)\,dt$$

Mas:

$$\boxed{\int_{t_0}^{t_0+T} \mathrm{sen}\,m\omega_0 t\,dt = 0, \quad \text{para todo}\,m,}$$

Coeficientes de Fourier

- Demonstração: $$b_k = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,\mathrm{sen}\,k\omega_0 t\,dt.$$

$$\int_{t_o}^{t_o+T} f(t)\,sen\,k\,\omega_o t\,dt = \int_{t_o}^{t_o+T} a_v\,sen\,k\,\omega_o t\,dt \;+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{t_o}^{t_o+T}\left(\boxed{a_n\cos n\,\omega_o t\;sen\,k\,\omega_o t} + b_n\,sen\,n\,\omega_o t\;sen\,k\,\omega_o t\right)dt$$

Mas:

$$\boxed{\int_{t_0}^{t_0+T}\cos m\omega_0 t\,\mathrm{sen}\,n\omega_0 t\,dt = 0,\quad \text{para todo } m \text{ e } n,}$$

$$\int_{t_o}^{t_o+T}\cos m\,\omega_o t\;sen\,n\,\omega_o t\,dt = \int_{t_o}^{t_o+T}\frac{1}{2}\left[sen(m+n)\omega_o t - sen(m-n)\omega_o t\right]dt = 0$$

Coeficientes de Fourier

- Demonstração: $$b_k = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,\operatorname{sen} k\omega_0 t\, dt.$$

$$\int_{t_o}^{t_o+T} f(t)\, sen\, k\,\omega_o t\, dt = \int_{t_o}^{t_o+T} a_v\, sen\, k\,\omega_o t\, dt \quad +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{t_o}^{t_o+T}\left(a_n cos n\,\omega_o t\, sen\, k\,\omega_o t + \boxed{b_n\, sen\, n\,\omega_o t\, sen\, k\,\omega_o t)}\right.dt$$

Mas:

$$\boxed{\int_{t_0}^{t_0+T} \operatorname{sen} m\omega_0 t\, \operatorname{sen} n\omega_0 t\, dt} = 0, \quad \text{para todo } m \neq n,$$

$$= \frac{T}{2}, \quad \boxed{\text{para } m = n,}$$

$$\boxed{\int_{t_o}^{t_o+T} sen^2 m\,\omega_o t\, dt = \int_{t_o}^{t_o+T} \frac{(1-cos 2m\,\omega_o t)}{2} dt = \frac{1}{2}(t_o + T - t_o)}$$

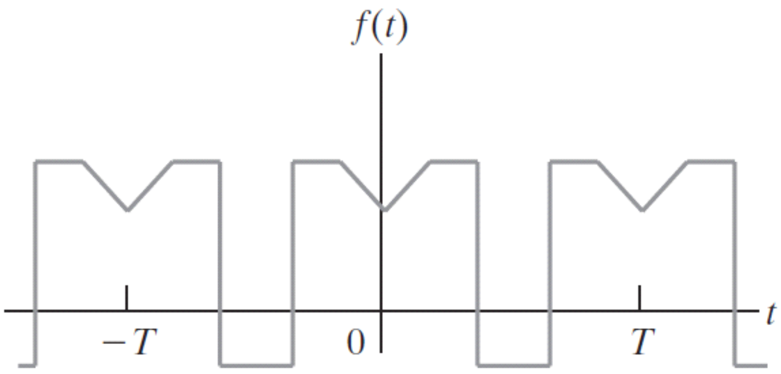
Simplificação dos cálculos dos Coeficientes de Fourier

O cálculo dos coeficientes de Fourier (CF) pode ser simplificado pelas seguintes simetria:

- Simetria das funções pares;
- Simetria das funções ímpares;
- Simetria de meia-onda;
- Simetria de quarto de onda;

Simetria das funções pares

- Definição de função par: $f(t) = f(-t).$



- Para funções pares, as equações para os CF reduz-se a:

$$a_v = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)\,dt,$$

$$a_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos k\omega_0 t\,dt,$$

$$b_k = 0 \qquad \text{para todo } k.$$

Série de Fourier p/ f(t) qualquer:

$$a_v = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,dt,$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos k\omega_0 t\,dt,$$

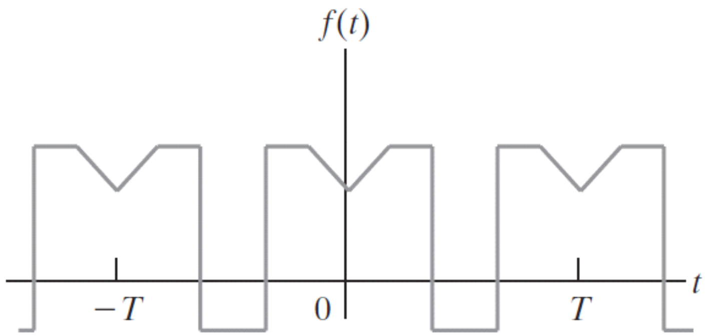
$$b_k = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,\mathrm{sen}\,k\omega_0 t\,dt.$$

Simetria das funções pares

- Demonstração:

$$a_v = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{0} f(t)\,dt + \frac{1}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\,dt.$$



- Mas:

$$\int_{-T/2}^{0} f(t)\,dt = \int_{T/2}^{0} f(x)(-dx) = \int_{0}^{T/2} f(x)\,dx,$$

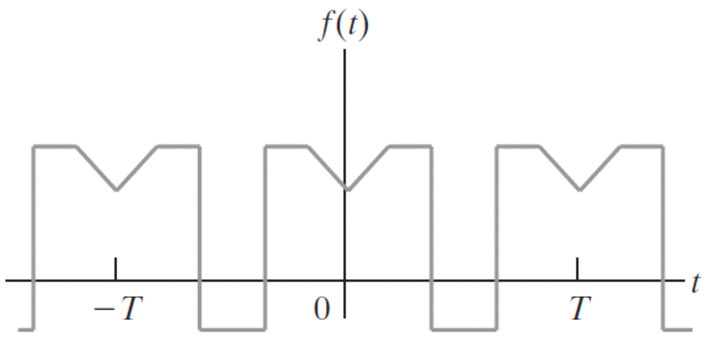
$$\boxed{a_v = \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\,dt,}$$

Simetria das funções pares

- Demonstração: $$a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{0} f(t)\cos k\omega_0 t\, dt + \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\cos k\omega_0 t\, dt,$$

- Mas: $$\int_{-T/2}^{0} f(t)\cos k\omega_0 t\, dt = \int_{T/2}^{0} f(x)\cos(-k\omega_0 x)(-dx) = \int_{0}^{T/2} f(x)\cos k\omega_0 x\, dx.$$

$$\boxed{a_k = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\cos k\omega_0 t\, dt,}$$



Simetria das funções pares

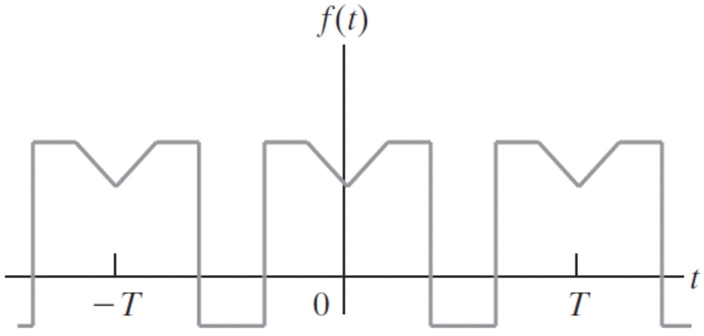
- Demonstração:

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{0} f(t)\, sen\, k\,\omega_o t\, dt + \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\, sen\, k\,\omega_o t\, dt$$

- Mas:

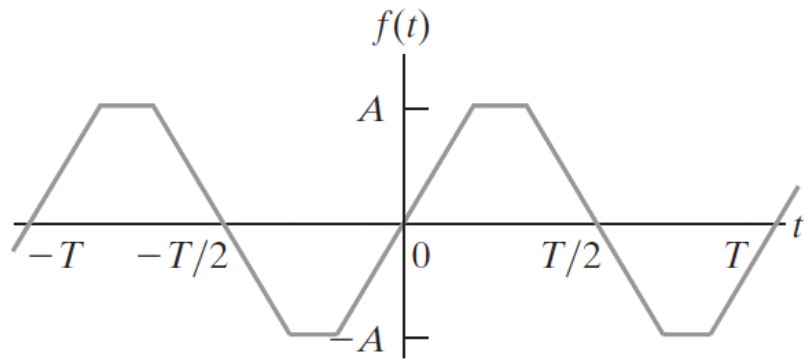
$$\int_{-T/2}^{0} f(t)\,\mathrm{sen}\,k\omega_0 t\,dt = \int_{T/2}^{0} f(x)\,\mathrm{sen}\,(-k\omega_0 x)(-dx)$$
$$= -\int_{0}^{T/2} f(x)\,\mathrm{sen}\,k\omega_0 x\,dx.$$

$$\boxed{b_k = 0 \quad \text{para todo } k.}$$



Simetria das funções ímpares

- Demonstração: $f(t) = -f(-t).$



- Para funções ímpares, as equações para os CF reduz-se a:

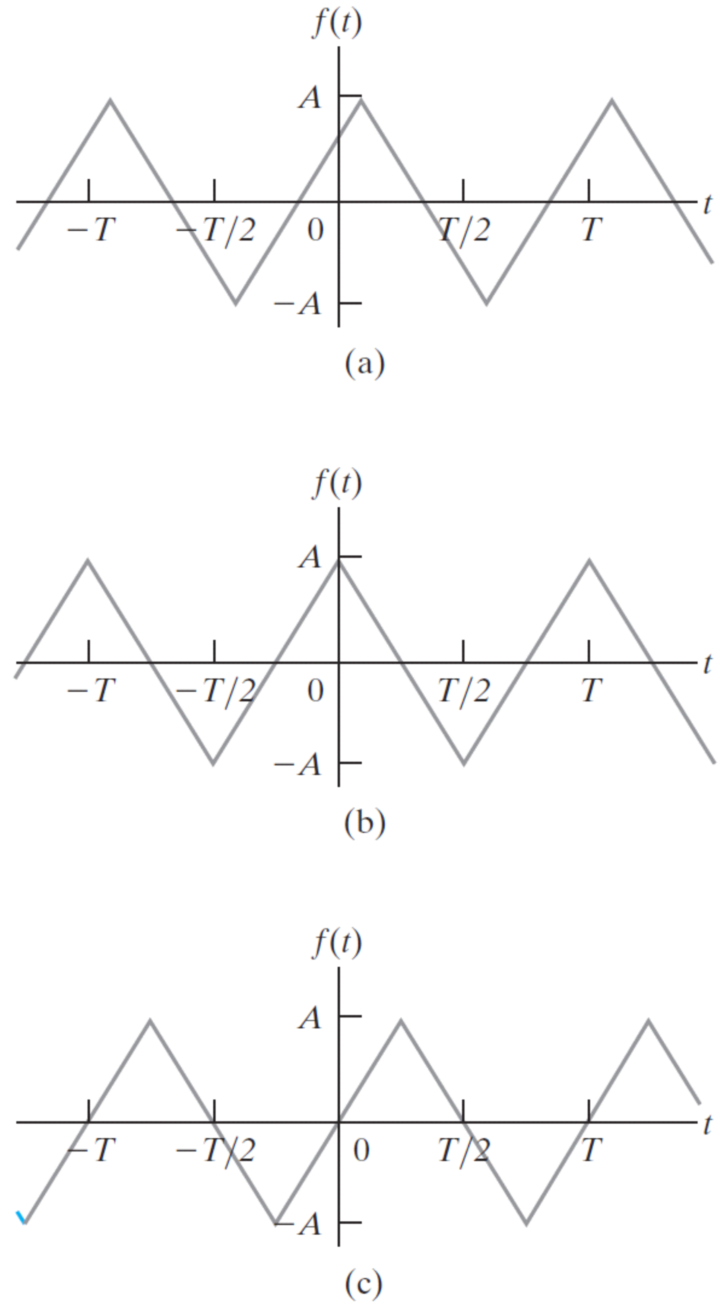
$$a_v = 0;$$

$$a_k = 0, \text{ para todo } k;$$

$$b_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t) \operatorname{sen} k\omega_0 t \, dt.$$

Simetria das funções ímpares

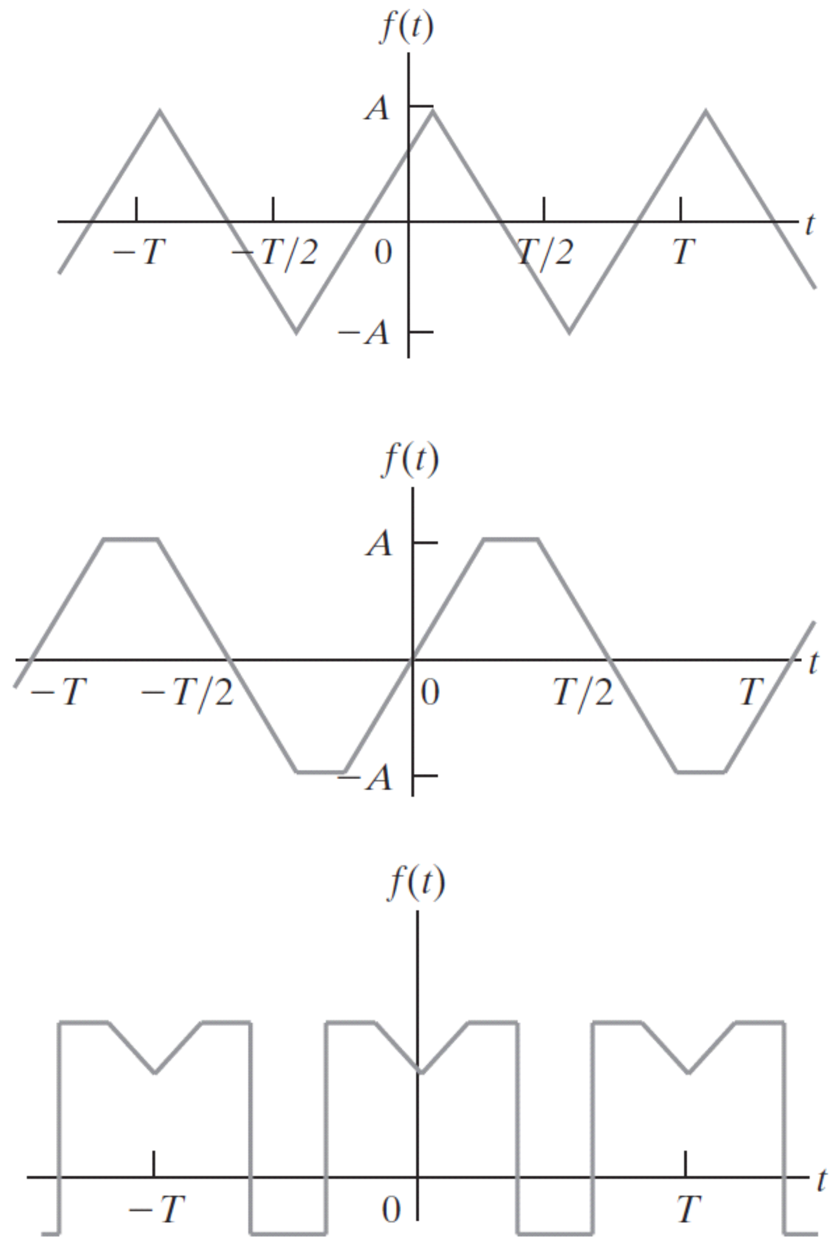
- Pode-se aplicar um deslocamento para obter simetria par ou ímpar:



Simetria de meia onda

- Definição: uma função periódica possui simetria de meia onda se

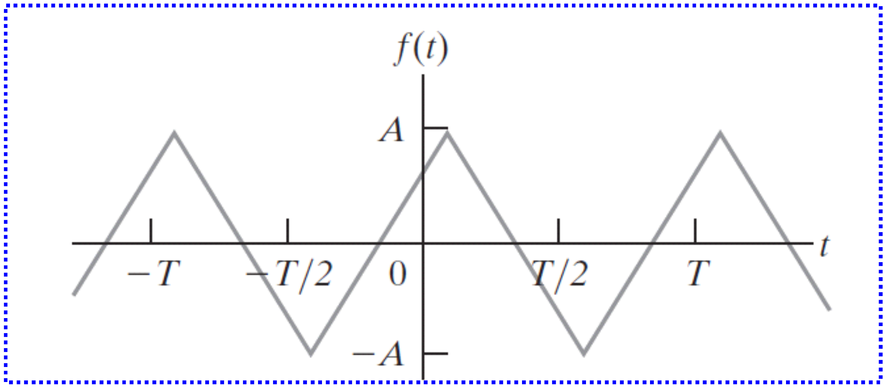
$$f(t) = -f(t - T/2).$$



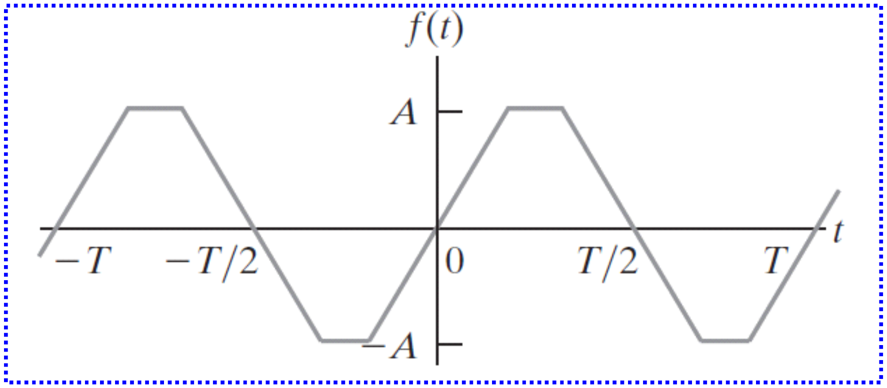
Simetria de meia onda

- Definição: uma função periódica possui simetria de meia onda se:

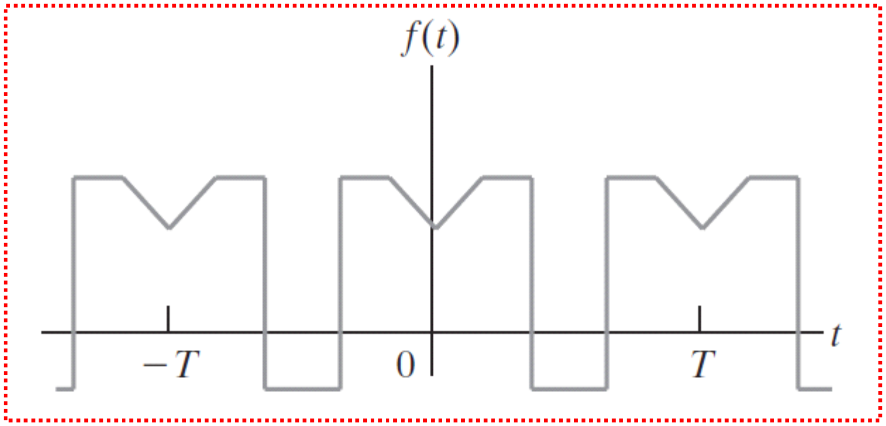
$$f(t) = -f(t - T/2).$$



Com simetria de meia-onda

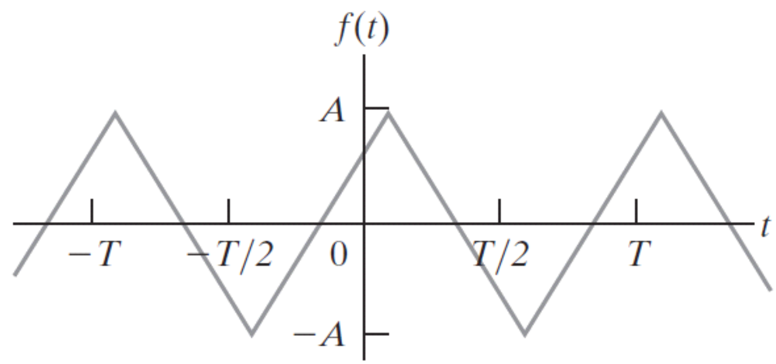


Sem simetria de meia-onda



Simetria de meia onda

$$f(t) = -f(t - T/2).$$



Para funções com simetria de meia-onda, os CF podem ser dados por:

$$a_v = 0,$$

$$a_k = 0, \qquad \text{para } k \text{ par;}$$

$$a_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos k\omega_0 t\, dt, \qquad \text{para } k \text{ ímpar;}$$

$$b_k = 0, \qquad \text{para } k \text{ par;}$$

$$b_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\,\text{sen} k\omega_0 t\, dt, \qquad \text{para } k \text{ ímpar.}$$

Simetria de meia onda

- Demonstração:

$$a_k = 0, \qquad \text{para } k \text{ par;}$$

$$a_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos k\omega_0 t\, dt, \qquad \text{para } k \text{ ímpar;}$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos k\omega_0 t\, dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos k\omega_0 t\, dt$$

$$= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{0} f(t)\cos k\omega_0 t\, dt + \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\cos k\omega_0 t\, dt \qquad (1)$$

- Mas: $\displaystyle\int_{-T/2}^{0} f(t)\cos k\omega_0 t\, dt = \int_0^{T/2} f(x - T/2)\cos k\omega_0 (x - T/2)\, dx.$

Simetria de meia onda

- Demonstração:

$$a_k = 0, \quad \text{para } k \text{ par;}$$

$$a_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos k\omega_0 t\, dt, \quad \text{para } k \text{ ímpar;}$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos k\omega_0 t\, dt \;=\; \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos k\omega_0 t\, dt$$

$$= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{0} f(t)\cos k\omega_0 t\, dt \;+\; \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos k\omega_0 t\, dt \qquad (1)$$

- Mas: $$\int_{-T/2}^{0} f(t)\cos k\omega_0 t\, dt = \int_0^{T/2} f(x - T/2)\boxed{\cos k\omega_0(x - T/2)}\,dx.$$

$$\boxed{\cos k\,\omega_o(x - T/2)} = \cos(k\,\omega_o x - k\,\pi) = \cos k\,\pi \cos k\,\omega_o x - \cancelto{0}{sen\,k\,\pi}\; sen\,k\,\omega_o$$

$$\int_{-T/2}^{0} f(t)\cos k\omega_0 t\, dt = \int_0^{T/2} [-f(x)]\cos k\pi \cos k\omega_0 x\, dx. \qquad (2)$$

Simetria de meia onda

- Demonstração:

$$a_k = 0, \quad \text{para } k \text{ par;}$$

$$a_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos k\omega_0 t\, dt, \quad \text{para } k \text{ ímpar;}$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos k\omega_0 t\, dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos k\omega_0 t\, dt$$

$$= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{0} f(t)\cos k\omega_0 t\, dt + \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\cos k\omega_0 t\, dt \qquad (1)$$

$$\int_{-T/2}^{0} f(t)\cos k\omega_0 t\, dt = \int_0^{T/2}[-f(x)]\cos k\pi \cos k\omega_0 x\, dx. \qquad (2)$$

- Substituindo (2) em (1): $a_k = \frac{2}{T}(1 - \cos k\pi)\int_0^{T/2} f(t)\cos k\omega_0 t\, dt.$

Simetria de meia onda

- Demonstração:

$$a_k = 0, \qquad \text{para } k \text{ par};$$

$$a_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos k\omega_0 t\, dt, \qquad \text{para } k \text{ ímpar};$$

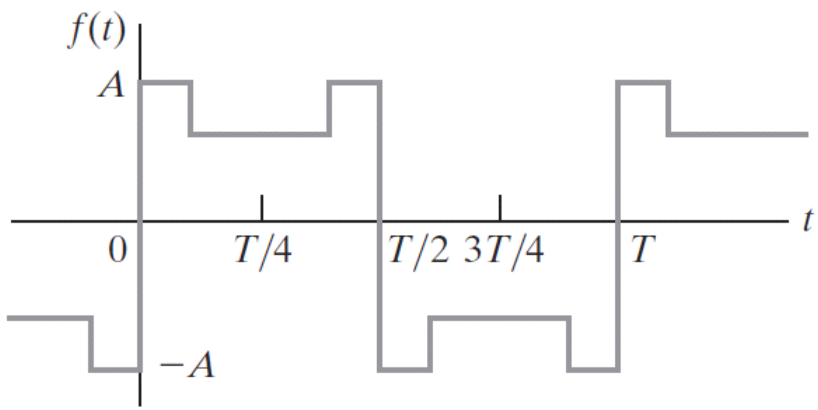
$$a_k = \frac{2}{T}(1 - \cos k\pi)\int_0^{T/2} f(t)\cos k\omega_0 t\, dt.$$

Mas $\cos k\pi=1$, para k par

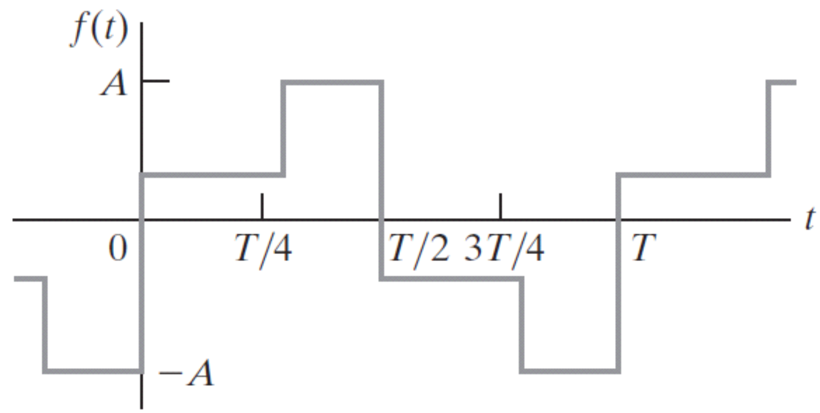
$\cos k\pi=-1$, para k ímpar

Simetria de quarto de onda

- Simetria de quarto de onda: funções com simetria de meia onda e também simetria em relação aos pontos médios dos semi-ciclos positivos e negativos:



Com simetria de quarto de onda

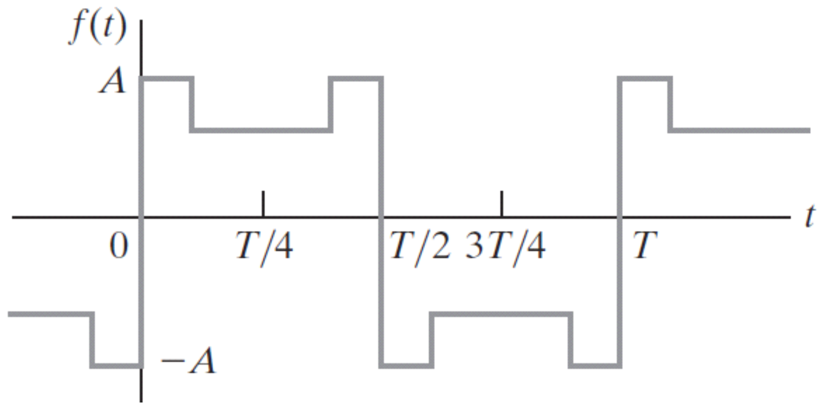


Simetria de meia onda, sem simetria de quarto de onda

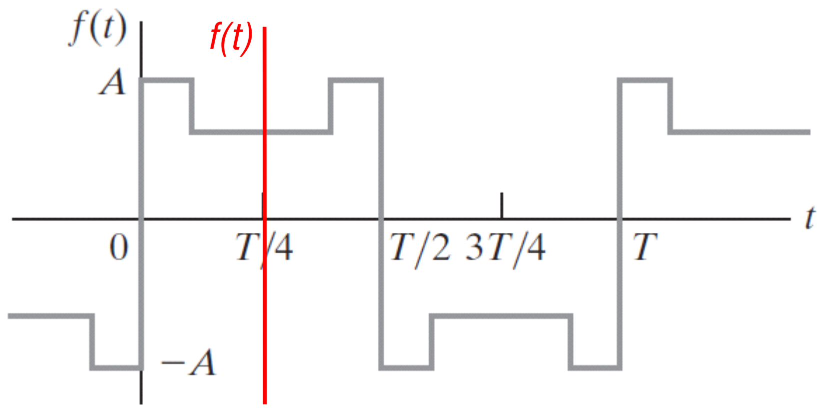
Simetria de quarto de onda

Funções com simetria de quarto de onda podem ser transformadas em par ou ímpar.

ímpar



par



Simetria de quarto de onda

Se a função for transformada em par:

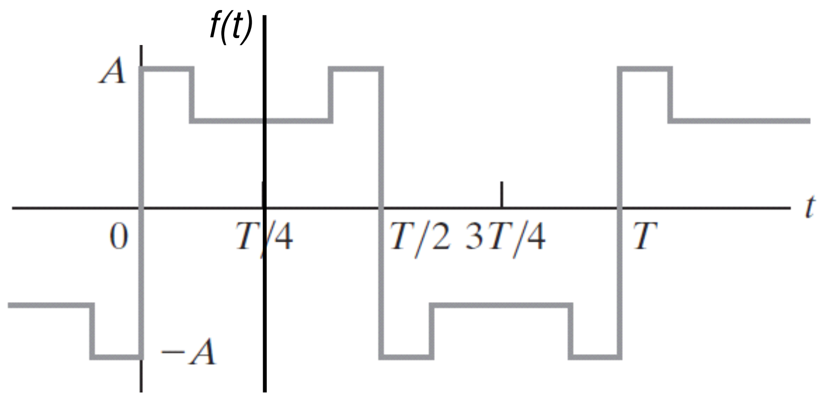
$a_v = 0$, por causa da simetria de meia-onda;

$a_k = 0$, para k par, por causa da simetria de meia-onda;

$$a_k = \frac{8}{T}\int_0^{T/4} f(t)\cos k\omega_0 t\,dt, \text{ para } k \text{ ímpar;}$$

$b_k = 0$, para todo k, porque a função é par.

par



Simetria de quarto de onda

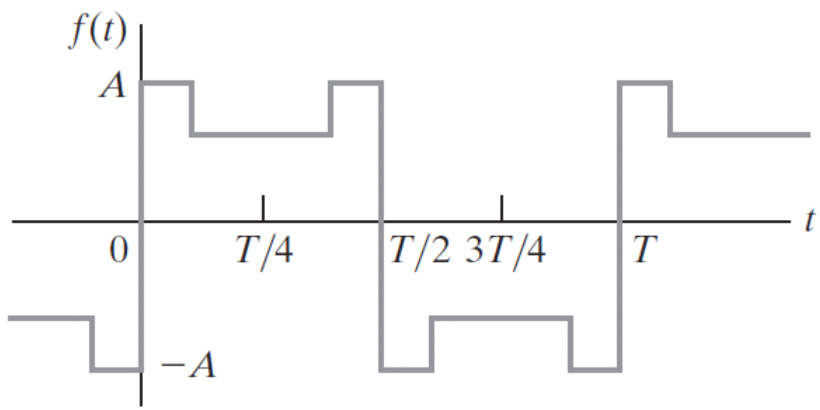
Se a função for transformada em ímpar:

$a_v = 0$, porque a função é ímpar;

$a_k = 0$, para todo k, porque a função é ímpar;

$b_k = 0$, para k par, por causa da simetria de meia-onda;

$$b_k = \frac{8}{T}\int_0^{T/4} f(t)\,\mathrm{sen}\,k\omega_0 t\,dt, \qquad \text{para } k \text{ ímpar.}$$



Forma trigonométrica da série de Fourier

$$f(t) = a_v + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t,$$

A Série de Fourier pode ser representada alternativamente por:

$$f(t) = a_v + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \cos(n\omega_0 t - 90^\circ).$$

Usando fasores, temos:

$$\mathcal{P}\{a_n \cos n\omega_0 t\} = a_n \underline{/0^\circ}$$

$$\mathcal{P}\{b_n \cos(n\omega_0 t - 90^\circ)\} = b_n \underline{/-90^\circ} = -jb_n.$$

$$\mathcal{P}\{a_n \cos(n\omega_0 t + b_n \cos(n\omega_0 t - 90^\circ)\} = a_n - jb_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\underline{/-\theta_n} = A_n\underline{/-\theta_n}.$$

$$a_n \cos n\omega_0 t + b_n \cos(n\omega_0 t - 90^\circ) = \mathcal{P}^{-1}\{A_n\underline{/-\theta_n}\} = A_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n)$$

Forma trigonométrica da série de Fourier

$$f(t) = a_v + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t,$$

A Série de Fourier pode ser representada alternativamente por:

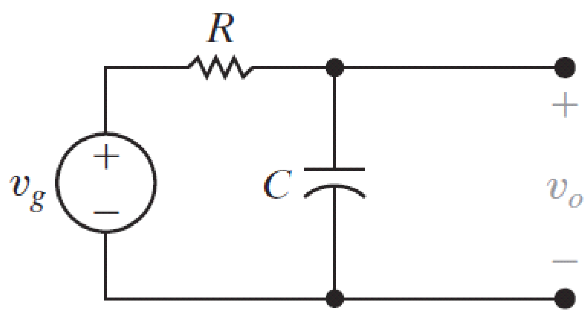
$$f(t) = a_v + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n),$$

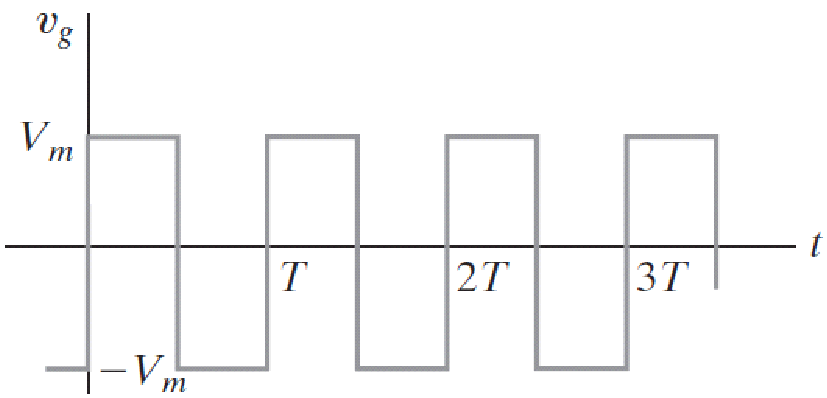
Onde A_n e θ_n são dados por:

$$a_n - jb_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\angle{-\theta_n} = A_n\angle{-\theta_n}.$$

Aplicação

Determinar a resposta de regime permanente do circuito RC:





V_g possui simetria ímpar, de meia onda e de quarto de onda, logo:

$$b_k = \frac{8}{T}\int_0^{T/4} f(t)\,\mathrm{sen}\,k\omega_0 t\,dt, \qquad \text{para } k \text{ ímpar.}$$

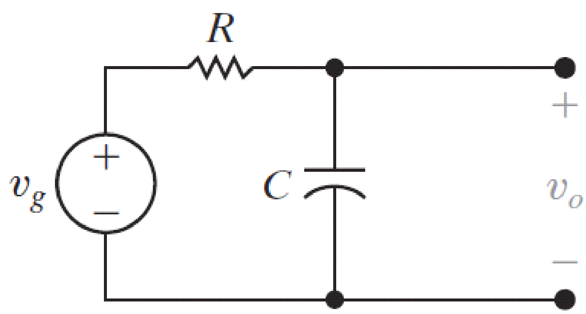
$$b_k = \frac{8}{T}\int_0^{T/4} V_m \,\mathrm{sen}\,k\omega_0 t\;dt$$

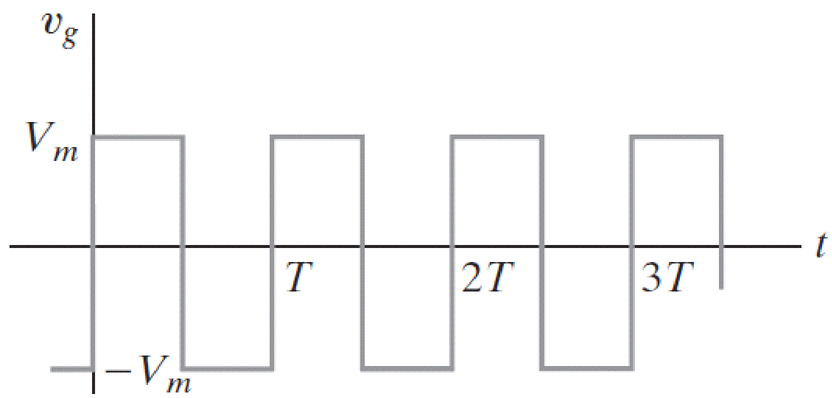
$$= \frac{4V_m}{\pi k} \qquad (k \text{ é ímpar}).$$

$$v_g = \frac{4V_m}{\pi}\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{1}{n}\,\mathrm{sen}\,n\omega_0 t.$$

Aplicação

Determinar a resposta de regime permanente do circuito RC:





Expandindo a série:

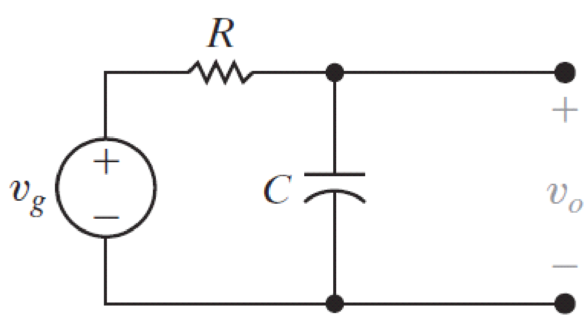
$$v_g = \frac{4V_m}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} n\omega_0 t.$$

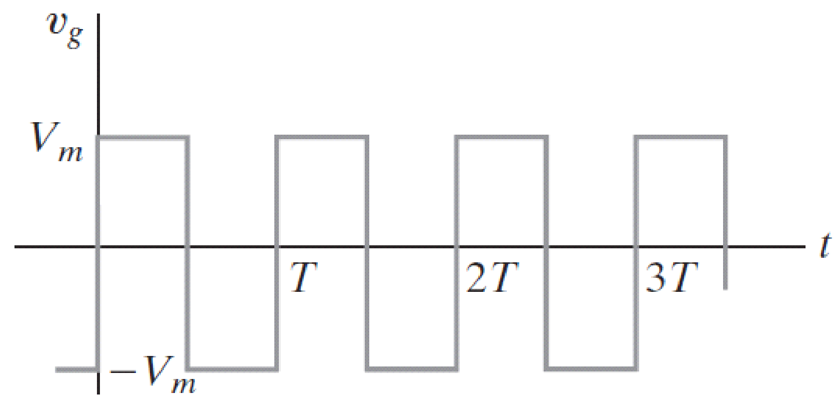
$$v_g = \frac{4V_m}{\pi} \operatorname{sen} \omega_0 t + \frac{4V_m}{3\pi} \operatorname{sen} 3\omega_0 t + \frac{4V_m}{5\pi} \operatorname{sen} 5\omega_0 t + \frac{4V_m}{7\pi} \operatorname{sen} 7\omega_0 t + \cdots$$

Vg equivale a uma infinidade de fontes em série com amplitudes e freqüências distintas.

Aplicação

Determinar a resposta de regime permanente do circuito RC:





Expandindo a série:

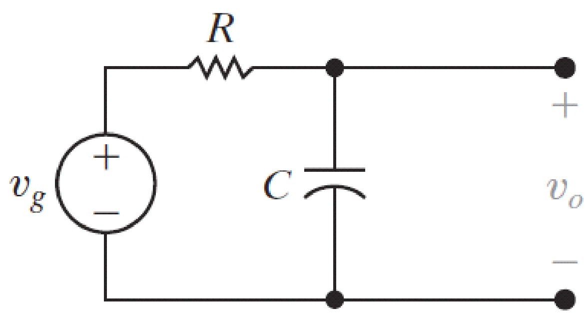
$$v_g = \frac{4V_m}{\pi}\operatorname{sen}\omega_0 t + \frac{4V_m}{3\pi}\operatorname{sen}3\omega_0 t + \frac{4V_m}{5\pi}\operatorname{sen}5\omega_0 t + \frac{4V_m}{7\pi}\operatorname{sen}7\omega_0 t + \cdots$$

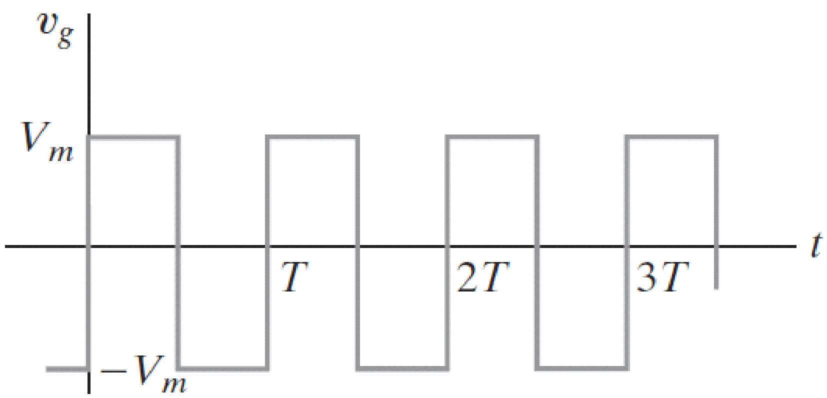
Para cada componente de entrada, a tensão de saída pode ser dada pela seguinte expressão fasorial:

$$\mathbf{V}_o = \frac{\mathbf{V}_g}{1 + j\omega RC}.$$

Aplicação

Determinar a resposta de regime permanente do circuito RC:





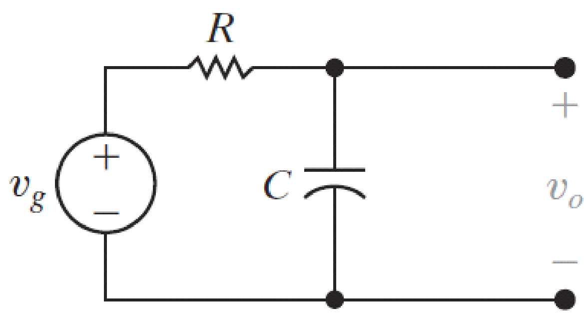
$$\mathbf{V}_o = \frac{\mathbf{V}_g}{1 + j\omega RC}.$$

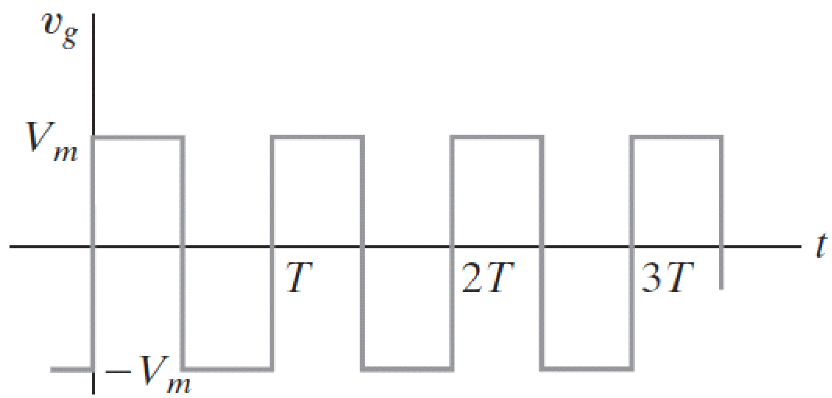
Tensão de saída em função da fundamental:

$$v_g = \frac{4V_m}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} n\omega_0 t. \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V}_{o1} = \frac{(4V_m/\pi)\angle 0^{\circ}}{1 + j\omega_0 RC}.$$

Aplicação

Determinar a resposta de regime permanente do circuito RC:





$$\mathbf{V}_o = \frac{\mathbf{V}_g}{1 + j\omega RC}.$$

Ou, na forma polar:

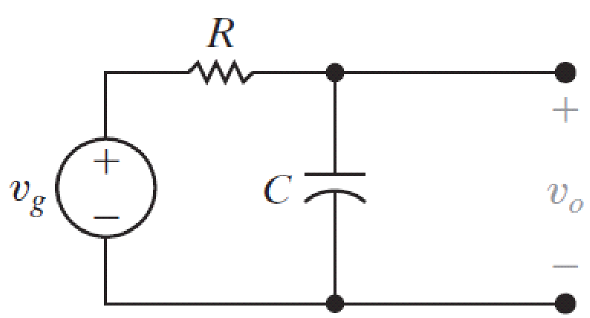
$$\mathbf{V}_{o1} = \frac{(4V_m/\pi)\angle 0^\circ}{1 + j\omega_0 RC}.$$

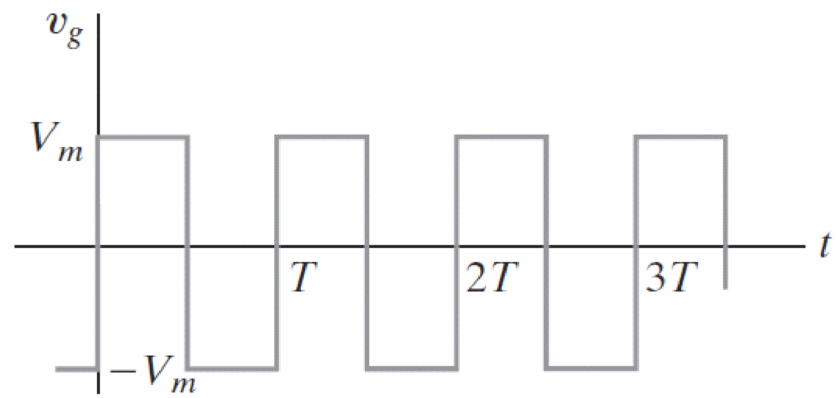
$$\mathbf{V}_{o1} = \frac{(4V_m)\angle -\beta_1}{\pi\sqrt{1 + \omega_0^2 R^2 C^2}},$$

onde $\beta_1 = \mathrm{tg}^{-1}\omega_0 RC.$

Aplicação

Determinar a resposta de regime permanente do circuito RC:





No domínio do tempo, temos:

$$\mathbf{V}_{o1} = \frac{(4V_m)\underline{/-\beta_1}}{\pi\sqrt{1 + \omega_0^2 R^2 C^2}},$$

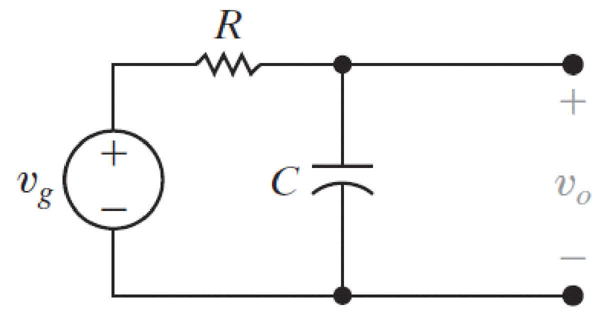
$$v_{o1} = \frac{4V_m}{\pi\sqrt{1 + \omega_0^2 R^2 C^2}} \operatorname{sen}(\omega_0 t - \beta_1).$$

$$\beta_1 = \operatorname{tg}^{-1} \omega_0 RC.$$

Aplicação

Determinar a resposta de regime permanente do circuito RC:

$$v_g = \frac{4V_m}{\pi}\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{1}{n}\operatorname{sen} n\omega_0 t.$$



Para a componente do 3o harmônico, temos:

$$\mathbf{V}_{o3} = \frac{(4V_m/3\pi)\,\angle 0^\circ}{1 + j3\omega_0 RC}$$
$$= \frac{4V_m}{3\pi\sqrt{1 + 9\omega_0^2R^2C^2}}\angle -\beta_3,$$

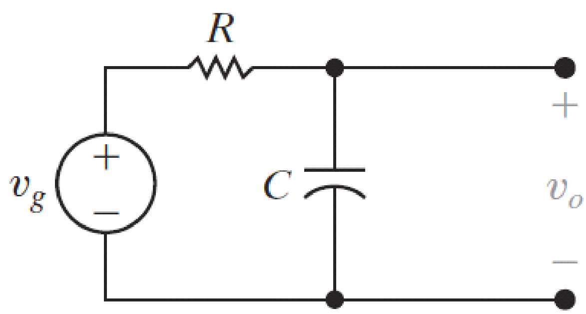
onde $\beta_3 = \operatorname{tg}^{-1} 3\omega_0 RC.$

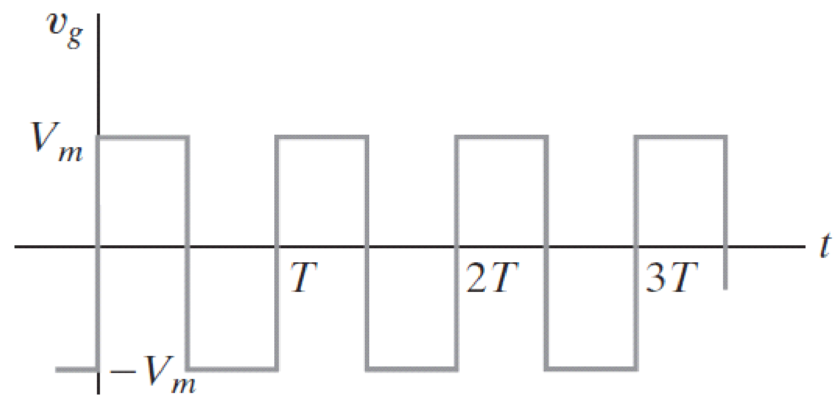
Cuja expressão no tempo é:

$$v_{o3} = \frac{4V_m}{3\pi\sqrt{1 + 9\omega_0^2R^2C^2}}\operatorname{sen}(3\omega_0 t - \beta_3)$$

Aplicação

Determinar a resposta de regime permanente do circuito RC:





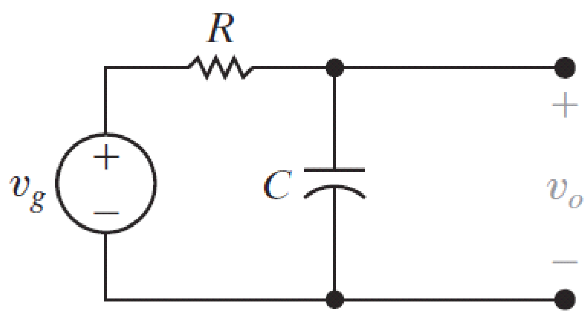
Então, a expressão para o k-ésimo harmônico pode ser dada por:

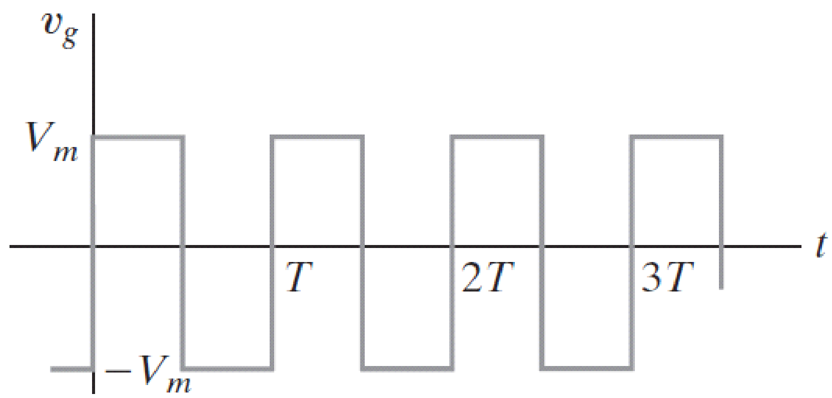
$$v_{ok} = \frac{4V_m}{k\pi\sqrt{1 + k^2\omega_0^2R^2C^2}}\,\mathrm{sen}(k\omega_0 t - \beta_k)\ (k \text{ é ímpar})$$

onde $\beta_k = \mathrm{tg}^{-1} k\omega_0 RC.\ (k \text{ é ímpar}).$

Aplicação

Determinar a resposta de regime permanente do circuito RC:



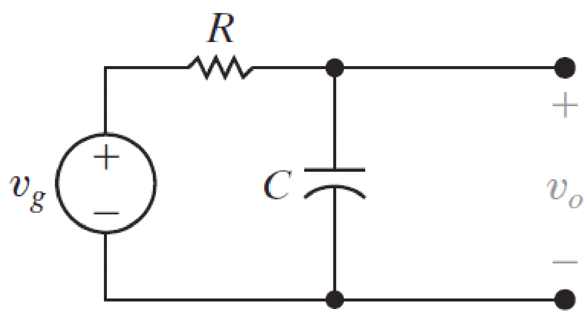


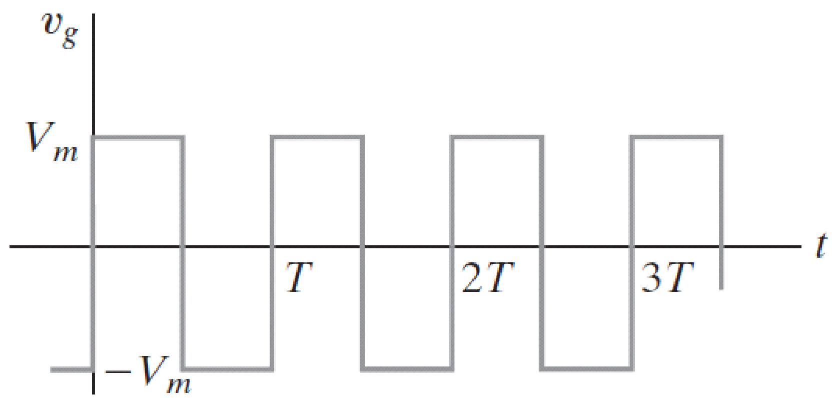
Por superposição, a expressão da tensão de saída pode ser dada por:

$$v_o(t) = \frac{4V_m}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\omega_0 t - \beta_n)}{n\sqrt{1 + (n\omega_0 RC)^2}}$$

Aplicação

Determinar a resposta de regime permanente do circuito RC:





Para valores elevados de C:

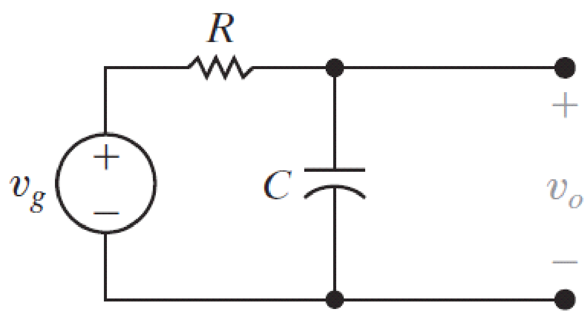
$$v_o(t) = \frac{4V_m}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\omega_0 t - \beta_n)}{n\sqrt{1 + (n\omega_0 RC)^2}}$$

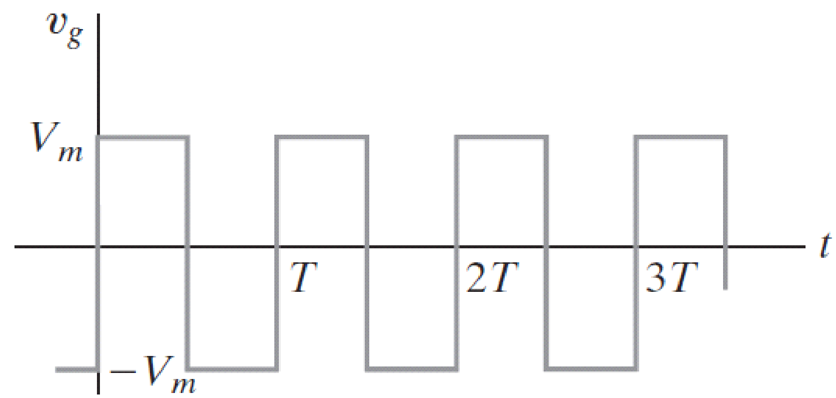
$$v_o \approx \frac{4V_m}{\pi\omega_0 RC} \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{sen}(n\omega_0 t - 90^{\circ})$$

$$\approx \frac{-4V_m}{\pi\omega_0 RC} \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos n\omega_0 t.$$

Aplicação

Determinar a resposta de regime permanente do circuito RC:





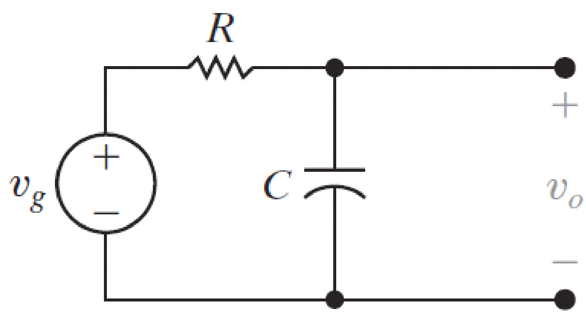
A amplitude dos harmônicos decresce com um fator de $1/n^2$:

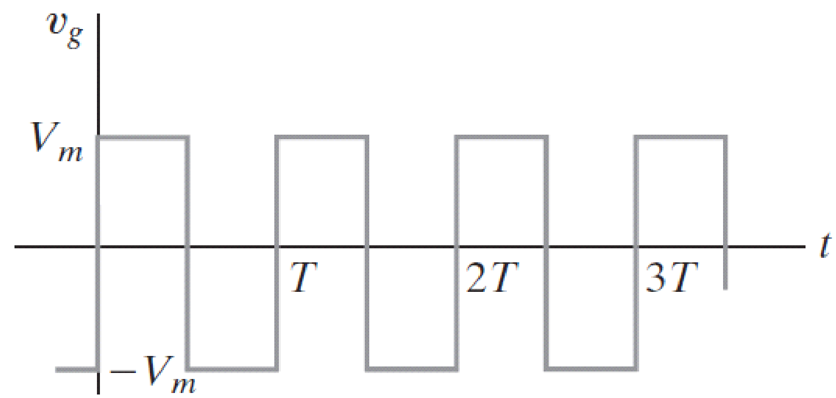
$$v_o \approx \frac{4V_m}{\pi\omega_0 RC}\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{1}{n^2}\operatorname{sen}(n\omega_0 t - 90^\circ)$$

$$\approx \frac{-4V_m}{\pi\omega_0 RC}\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos n\omega_0 t.$$

Aplicação

Determinar a resposta de regime permanente do circuito RC:





Quando C tem valor muito elevado, a tensão de saída pode ser aproximada por somente alguns harmônicos:

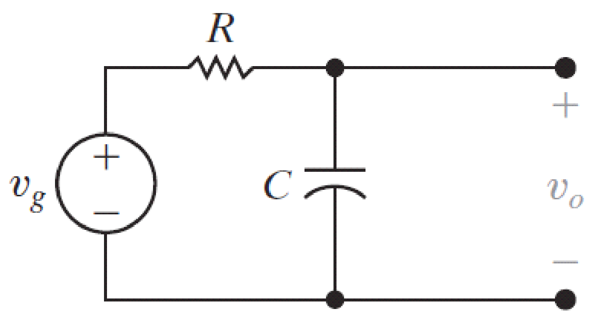
$$v_o \approx \frac{4V_m}{\pi\omega_0 RC} \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{sen}(n\omega_0 t - 90^\text{o})$$

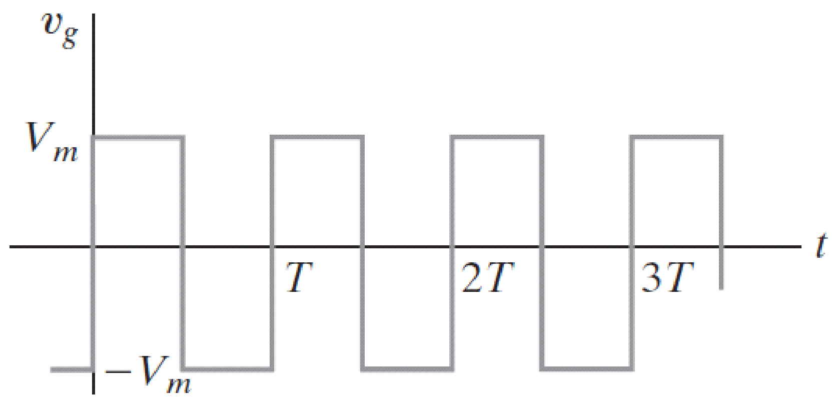
$$\approx \frac{-4V_m}{\pi\omega_0 RC} \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos n\omega_0 t.$$

$$v_o(t) \approx \frac{-4V_m}{\pi\omega_0 RC} \cos \omega_0 t,$$

Aplicação

Determinar a resposta de regime permanente do circuito RC:





Quando C → 0:

$$v_o(t) = \frac{4V_m}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{\text{sen}(n\omega_0 t - \beta_n)}{n\sqrt{1 + (n\omega_0 RC)^2}}$$

$$v_o = \frac{4V_m}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n} \text{sen}\, n\omega_0 t.$$

vo=vg

Cálculo de potência média de funções periódicas

Pode-se expressar a potência média de um circuito em função das tensões e correntes harmônicas:

$$v = V_{cc} + \sum_{n=1}^{\infty} V_n \cos(n\omega_0 t - \theta_{vn}),$$

$$i = I_{cc} + \sum_{n=1}^{\infty} I_n \cos(n\omega_0 t - \theta_{in}).$$

$$P = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} p\,dt = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} vi\,dt$$

$$P = \frac{1}{T} V_{cc} I_{cc} t \Big|_{t_0}^{t_0+T} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} V_n I_n \cos(n\omega_0 t - \theta_{vn})$$

$$\times \cos(n\omega_0 t - \theta_{in})\,dt.$$

Para o produto de cossenos, os únicos termos que são não nulos, correspondem a produtos de tensão e corrente de mesma frequencia.

$$\sum_{n=1}^{\infty} V_n \cos(n\omega_0 t - \theta_{vn}). \quad \sum_{n=1}^{\infty} I_n \cos(n\omega_0 t - \theta_{in}).$$

pois:

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_0+T} \cos m\omega_0 t \cos n\omega_0 t \, dt &= 0, \quad \text{para todo } m \neq n, \\ &= \frac{T}{2}, \quad \text{para } m = n.\end{aligned}$$

Cálculo de potência média de funções periódicas

Usando a identidade trigonométrica:

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$$

temos:

$$P = \frac{1}{T}V_{cc}I_{cc}t\Big|_{t_0}^{t_0+T} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} V_n I_n \cos(n\omega_0 t - \theta_{vn})$$

$$\times \cos(n\omega_0 t - \theta_{in})\, dt.$$

$$P = V_{cc}I_{cc} + \frac{1}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_n I_n}{2}\int_{t_0}^{t_0+T}[\cos(\theta_{vn} - \theta_{in}) + \cos(2n\omega_0 t - \theta_{vn} - \theta_{in})]dt,$$

Cálculo de potência média de funções periódicas

$$P = V_{cc}I_{cc} + \frac{1}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_nI_n}{2}\int_{t_0}^{t_0+T}[\cos(\theta_{vn} - \theta_{in}) + \cancelto{0}{\cos(2n\omega_0 t - \theta_{vn} - \theta_{in})}]dt,$$

$$\boxed{P = V_{cc}I_{cc} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_nI_n}{2}\cos(\theta_{vn} - \theta_{in}).}$$

A potência média total é a soma das potências médias de cada harmônico separadamente (mais a potência devido aos offsets).

Valor eficaz de uma função periódica

O valor eficaz de uma função periódica pode ser dado em função dos coeficientes de Fourier:

$$F_{\mathrm{ef}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)^2\,dt}.$$

$$F_{\mathrm{ef}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\left[a_v + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(n\omega_0 t - \theta_n\right)\right]^2 dt}.$$

Valor eficaz de uma função periódica

Lembrando que:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \cos m\omega_0 t \cos n\omega_0 t \, dt = 0, \quad \text{para todo } m \neq n,$$
$$= \frac{T}{2}, \quad \text{para } m = n.$$

Temos:

$$F_{\text{ef}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\left[a_v + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n)\right]^2 dt}.$$

$$F_{\text{ef}} = \sqrt{\frac{1}{T}\left(a_v^2 T + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{T}{2}A_n^2\right)}$$
$$= \sqrt{a_v^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n^2}{2}}$$
$$= \sqrt{a_v^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_n}{\sqrt{2}}\right)^2}.$$

Valor eficaz de uma função periódica

O valor eficaz de uma função periódica é a raiz quadrada da soma do quadrado do valor eficaz de cada harmônico e do quadrado do valor DC:

$$F_{\text{ef}} = \sqrt{\frac{1}{T}\left(a_v^2 T + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T}{2} A_n^2\right)}$$

$$= \sqrt{a_v^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^2}{2}}$$

$$= \sqrt{a_v^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{A_n}{\sqrt{2}}\right)^2}.$$

Forma exponencial da Série de Fourier

Partindo da Série de Fourier:

$$f(t) = a_v + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \boxed{\cos n\omega_0 t} + b_n \boxed{\operatorname{sen} n\omega_0 t}$$

E substituindo:

$$\boxed{\cos n\omega_0 t = \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2}},$$

$$\boxed{\operatorname{sen} n\omega_0 t = \frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2j}.}$$

Obtemos:

$$f(t) = a_v + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2}\left(e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}\right) + \frac{b_n}{2j}\left(e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}\right)$$

Forma exponencial da Série de Fourier

$$f(t) = a_v + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2}(\boxed{e^{jn\omega_0 t}} + \boxed{e^{-jn\omega_0 t}}) + \frac{b_n}{2j}(\boxed{e^{jn\omega_0 t}} - \boxed{e^{-jn\omega_0 t}})$$

$$= a_v + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - jb_n}{2}\right)\boxed{e^{jn\omega_0 t}} + \left(\frac{a_n + jb_n}{2}\right)\boxed{e^{-jn\omega_0 t}}.$$

Definindo: $$C_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) = \frac{A_n}{2}\underline{/-\theta_n}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

Forma exponencial da Série de Fourier

Definindo: $$C_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) = \frac{A_n}{2}\angle{-\theta_n}, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

E sabendo que:

$$a_k = \boxed{\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos k\omega_0 t\, dt,}$$

$$b_k = \boxed{\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,\mathrm{sen}\, k\omega_0 t\, dt.}$$

Pela definição: $$C_n = \frac{1}{2}\left[\boxed{\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos n\omega_0 t\, dt} - j\boxed{\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,\mathrm{sen}\, n\omega_0 t\, dt}\right]$$

$$= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)(\cos n\omega_0 t - j\mathrm{sen}\, n\omega_0 t)\, dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)e^{-jn\omega_0 t}\, dt,$$

Forma exponencial da Série de Fourier

De:

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt.$$

temos:

$$C_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} {}_{t_0}f(t)\,dt = a_v.$$

e:

$$C_{-n} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)e^{jn\omega_0 t}\,dt = C_n^* = \frac{1}{2}(a_n + jb_n).$$

Forma exponencial da Série de Fourier

Substituindo:

$$\boxed{C_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)} = \frac{A_n}{2}\underline{/-\theta_n}, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

$$\boxed{C_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} {}_{t_0}f(t)\,dt = a_v.}$$

$$C_{-n} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)e^{jn\omega_0 t}\,dt = \boxed{C_n^* = \frac{1}{2}(a_n + jb_n).}$$

Em:

$$f(t) = a_v + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2}(e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}) + \frac{b_n}{2j}(e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t})$$

$$= \boxed{a_v} + \sum_{n=1}^{\infty}\boxed{\left(\frac{a_n - jb_n}{2}\right)}e^{jn\omega_0 t} + \boxed{\left(\frac{a_n + jb_n}{2}\right)}e^{-jn\omega_0 t}.$$

Temos:

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(C_n e^{jn\omega_0 t} + C_n^* e^{-jn\omega_0 t})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n^* e^{-jn\omega_0 t}.$$

Forma exponencial da Série de Fourier

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n e^{jn\omega_0 t} + C_n^* e^{-jn\omega_0 t})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n^* e^{-jn\omega_0 t}.$$

Mas:

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n^* e^{-jn\omega_0 t} = \sum_{n=-1}^{-\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}.$$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{-\infty}^{-1} C_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t},$$

Forma exponencial da Série de Fourier

Trata-se de uma representação alternativa e mais concisa:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t},$$

onde $$C_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-jn\omega_0 t}\, dt.$$

Forma exponencial da Série de Fourier

Pode-se expressar o valor eficaz em função dos coeficientes complexos de Fourier:

$$F_{ef} = \sqrt{a_v^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_n}{\sqrt{2}}\right)^2}.$$

$$F_{ef} = \sqrt{a_v^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2 + b_n^2}{2}},$$

Mas:

$$C_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) = \frac{A_n}{2}\angle{-\theta_n}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

$$|C_n| = \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2},$$

$$C_0^2 = a_v^2.$$

Logo:

$$\boxed{F_{ef} = \sqrt{C_0^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty}|C_n|^2}.}$$