Análise de Circuitos Elétricos III

Prof. Danilo Melges
(danilomelges@cpdee.ufmg.br)

Depto. de Engenharia Elétrica
Universidade Federal de Minas Gerais

Introdução à Transformada de Laplace

A Transformada de Laplace (TL)

- TL: técnica para análise de circuitos de parâmetros concentrados

- Facilita a análise de circuitos com elevado número de nós e/ou de malhas

A Transformada de Laplace em Circuitos Elétricos

- Determinar a resposta transitória de circuitos;

- Encontrar a função de transferência: descrição da resposta em regime permanente;

- Relacionar os comportamentos de um circuito nos domínios do tempo e da freqüência;

- Transformar um conjunto de equações integro-diferenciais (tempo) em equações algébricas (freqüência).

A Transformada de Laplace Bilateral

A Transformada de Laplace Bilateral da função f(t) é dada por:

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt$$

Representação alternativa: $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$

Ou seja, a TL é uma **função da variável s.**

Domínio do tempo

Transf. Laplace

Domínio da freqüência

A Transformada de Laplace Unilateral (TLU)

A Transformada de Laplace Unilateral da função f(t) é dada por:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

- A TLU envolve uma integral imprópria
- **Condição de existência da TL:** a integral tem de convergir
- Funções sem TL: t^t, $\exp(t^2)$

A Transformada de Laplace Unilateral (TLU)

A Transformada de Laplace Unilateral da função f(t) é dada por:

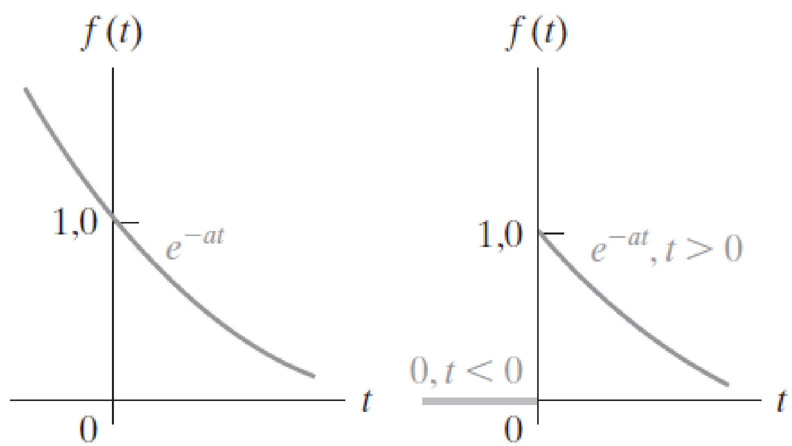
$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

- A TLU “ignora” informações para t<0
- O que ocorre antes de t=0 é “traduzido” nas condições iniciais.

A Transformada de Laplace Unilateral (TLU)

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

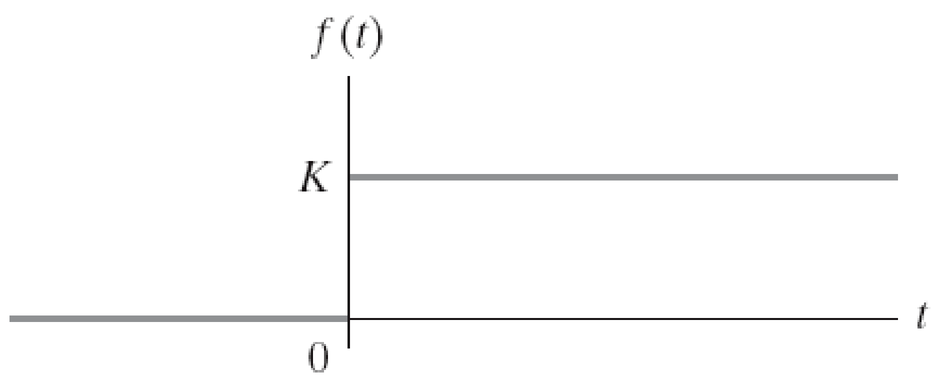
- Se houver uma descontinuidade na origem?
  - limite inferior 0^+: exclui a descontinuidade
  - limite inferior 0^-: inclui a descontinuidade



A função degrau

$$Ku(t) = 0, \qquad t < 0,$$

$$Ku(t) = K, \qquad t > 0.$$



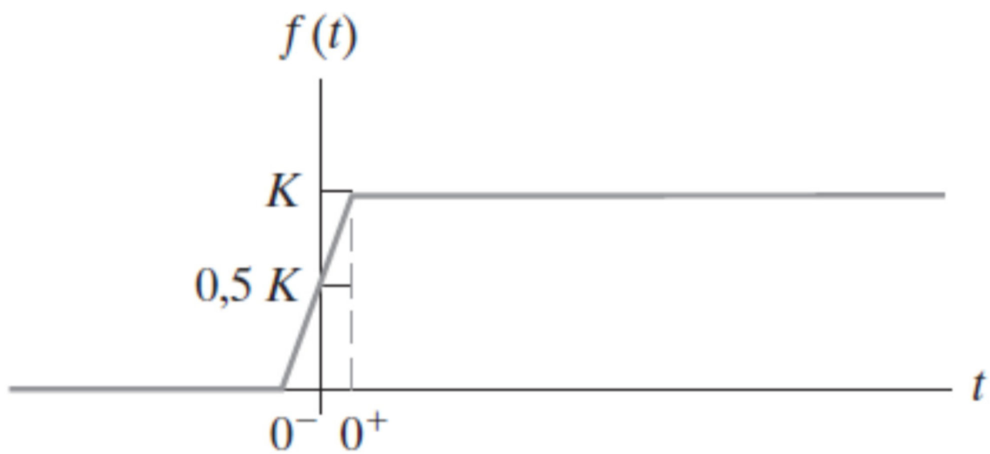
- Descontinuidade na origem (t=0)=> e.g.: chaveamento
- Se K=1: função degrau unitário

A função degrau

$$Ku(t) = 0, \qquad t < 0,$$

$$Ku(t) = K, \qquad t > 0.$$

$$Ku(0) = 0{,}5K.$$

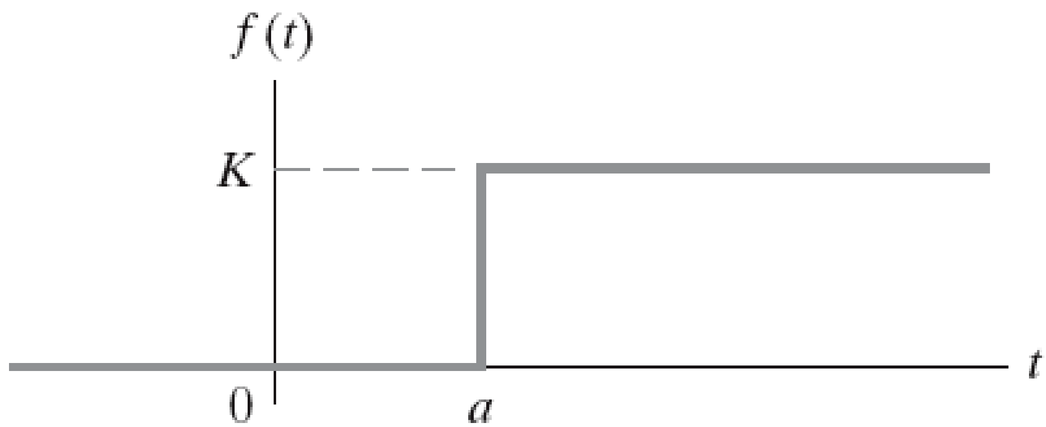


- Assume-se transição linear de 0_- para 0_+.

A função degrau deslocada

- Degrau ocorrendo em t=a **(a>0)**:

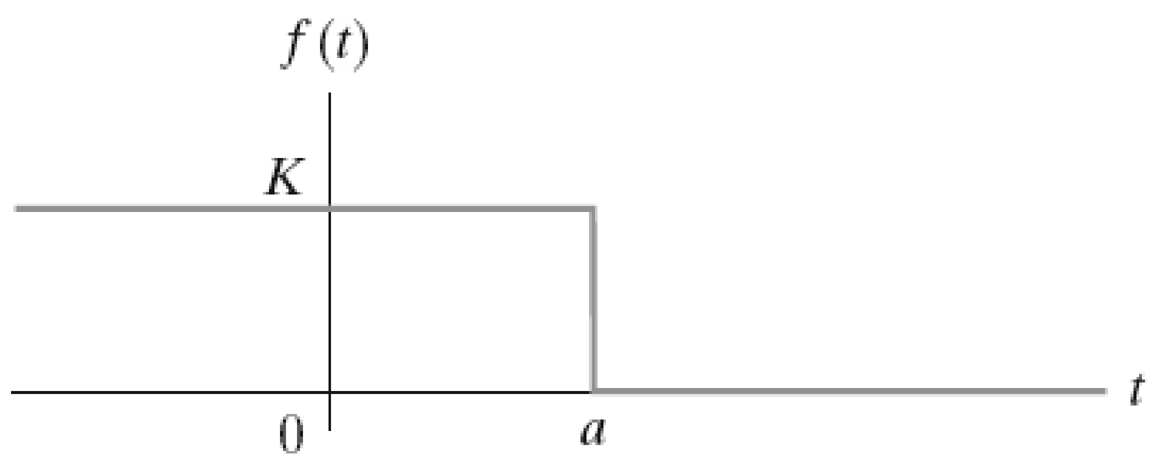
$$Ku(t - a) = 0, \qquad t < a,$$
$$Ku(t - a) = K, \qquad t > a.$$



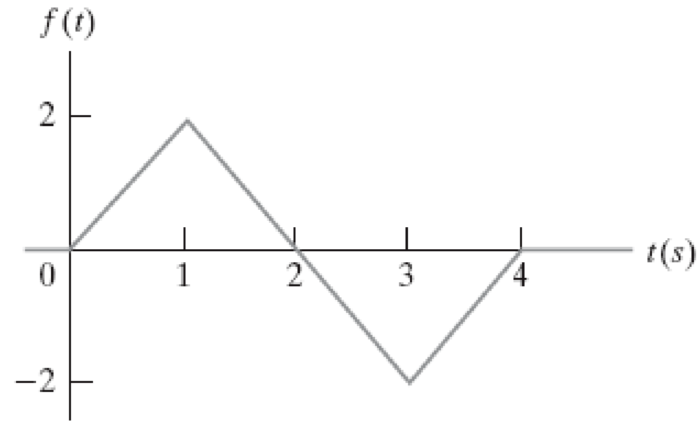
A função degrau

- Função igual a K para t<a **(a>0)**:

$$Ku(a-t)=K, \qquad t<a,$$
$$Ku(a-t)=0, \qquad t>a.$$



Outras funções



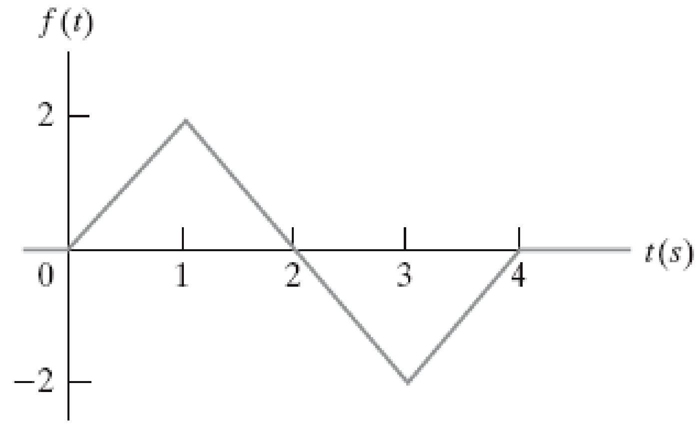
Outras funções

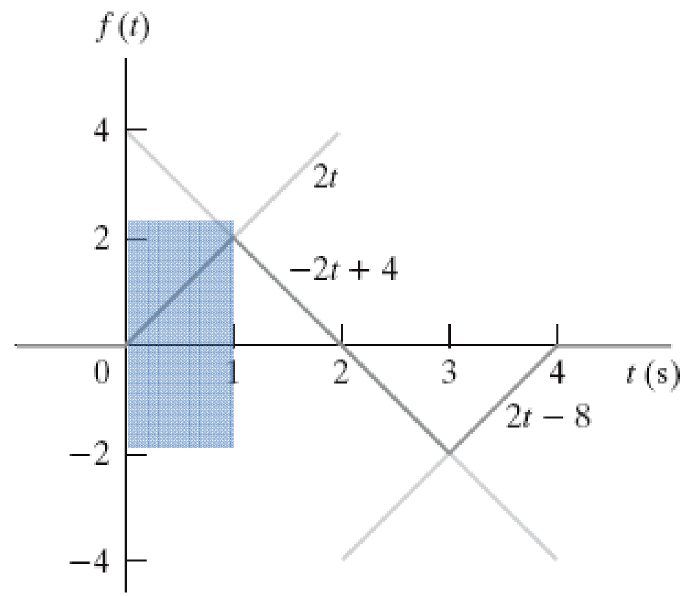
- Pode-se formar outras funções a partir da função degrau:

$$f(t) = \boxed{2t[u(t) - u(t-1)] +}$$

$$(-2t+4)[u(t-1) - u(t-3)] +$$

$$(2t-8)[u(t-3) - u(t-4)]$$





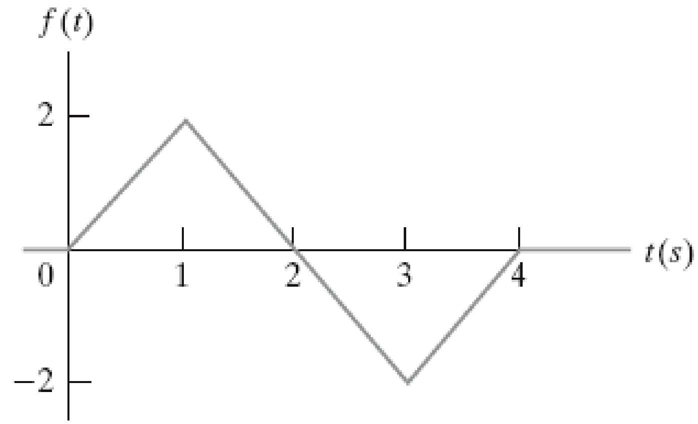
Outras funções

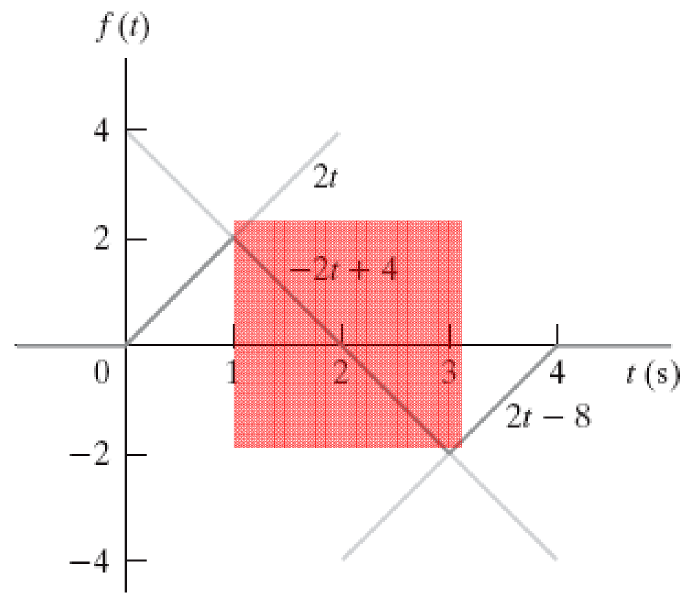
- Pode-se formar outras funções a partir da função degrau:

$$f(t) = 2t[u(t) - u(t-1)] +$$

$$\boxed{(-2t+4)[u(t-1) - u(t-3)] +}$$

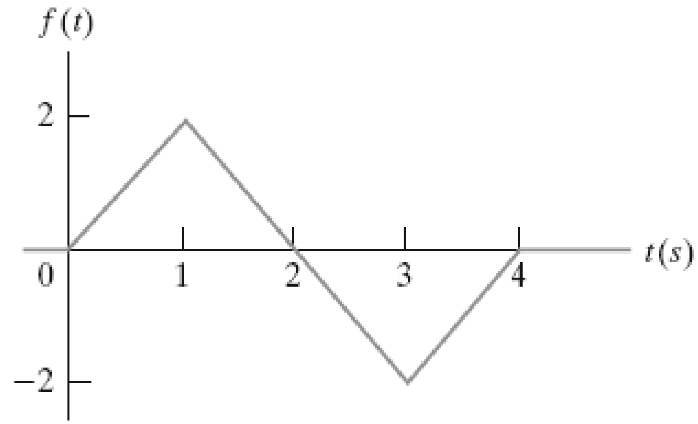
$$(2t-8)[u(t-3) - u(t-4)]$$





Outras funções

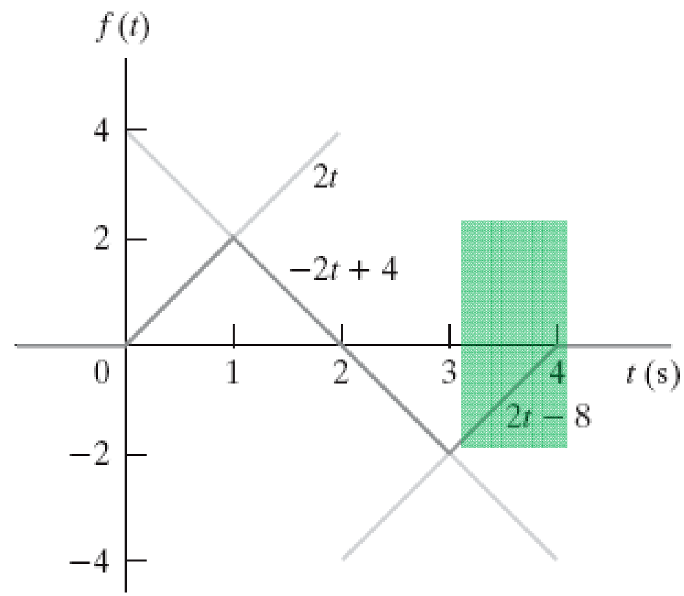
- Pode-se formar outras funções a partir da função degrau:



$$f(t) = 2t[u(t) - u(t-1)] +$$

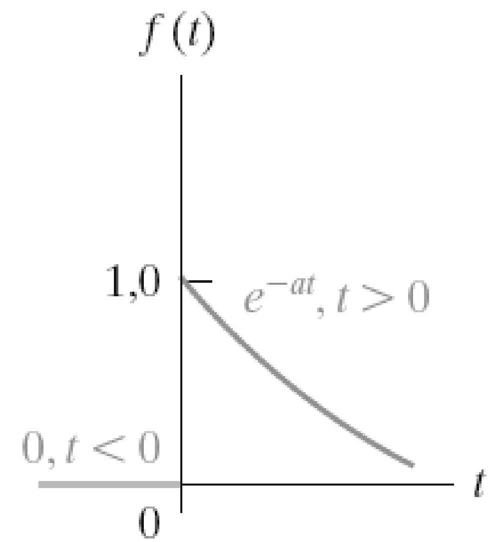
$$(-2t+4)[u(t-1) - u(t-3)] +$$

$$\boxed{(2t-8)[u(t-3) - u(t-4)]}$$



A função impulso (ou Delta de Dirac)

Quando há descontinuidade finita em f(t), a derivada não é definida no ponto de descontinuidade.



- A função impulso permite definir a derivada em uma descontinuidade ➔ permite definir a TL dessa derivada.

“Características” da função impulso

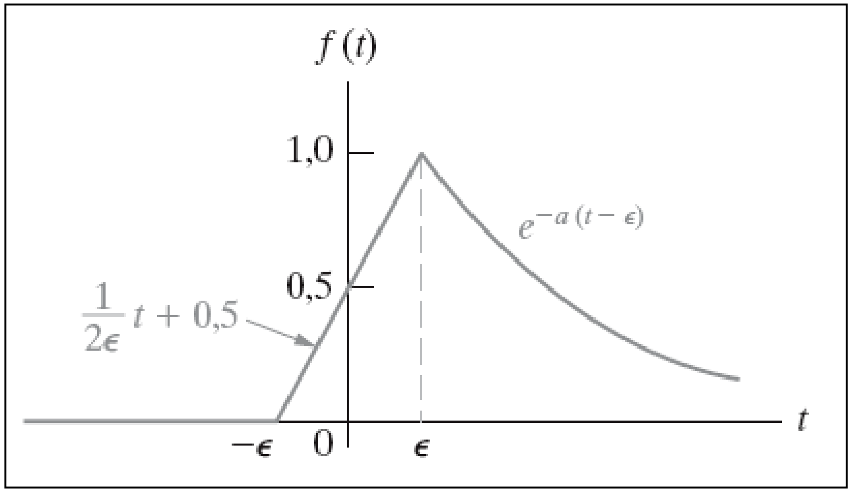
- Possui amplitude infinita e duração zero

- Não existe na natureza

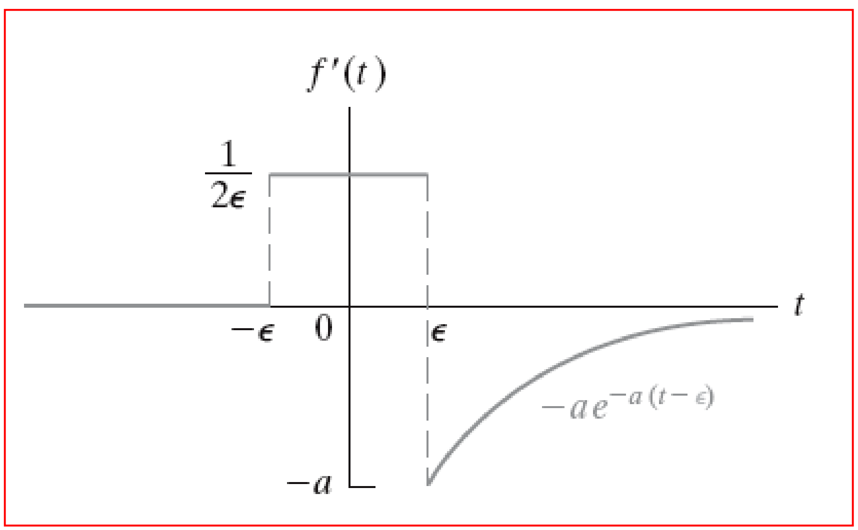
- Modelo matemático se aproxima de alguns casos práticos

e.g.: operações de chaveamento e excitação com fontes impulsivas

Derivada de uma função em uma descontinuidade

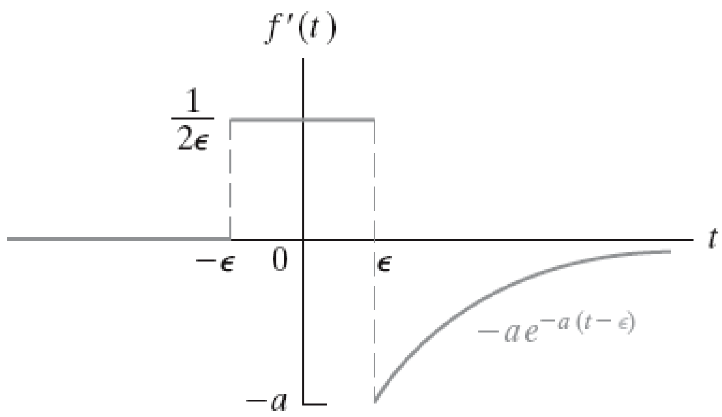


- Assume-se variação linear na descontinuidade: derivada=1/2 ϵ
- Quando ϵ→0, ocorre descontinuidade abrupta em t=0.



- Quando ϵ→0, f'(t) →∞
- A área sob a curva A_f permanece constante (igual a 1, neste caso)

A função impulso



- Quando $\epsilon \to 0$, $f'(t)$ aproxima-se de um impulso unitário, $\delta(t)$

$f'(0) \to \delta(t)$, quando $\epsilon \to 0$

- **Quando $A_f \neq 1$**, a função impulso é denotada por **$K\delta(t)$**, onde K é a área ou intensidade da função impulso.

A função impulso

- Pode ser obtida a partir de uma função de parâmetro ε que apresenta as seguintes características, quando $\varepsilon \to 0$:

  - a amplitude tende a infinito;

  - a duração tende para zero;

  - a área sob a função permanece constante.

- Há muitas funções que apresentam esta característica.

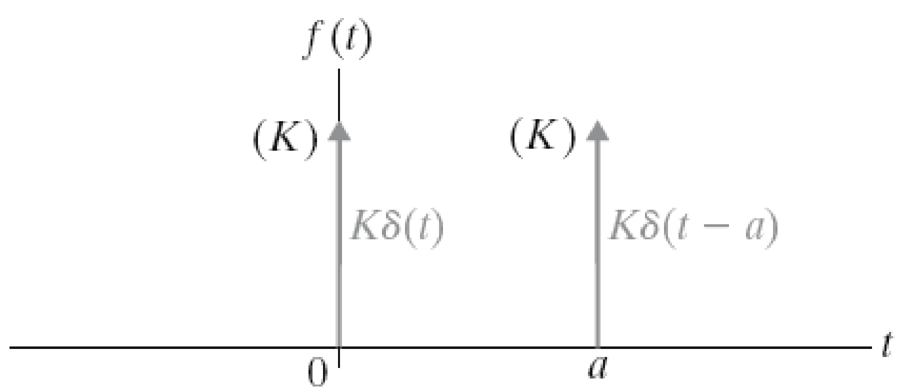
A função impulso: definição

- A função impulso é matematicamente definida por:

$$\int_{-\infty}^{\infty} K\delta(t)dt = K$$

$$\delta(t) = 0, \quad t \neq 0$$

- Impulso que ocorre em t=a é denotado por K δ(t-a)



Propriedade de amostragem do impulso

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)\,dt = f(a)$$

Decorre de:

$$\delta(t-a) = 0, \quad t \neq a$$
$$\delta(t-a) = 1, \quad t = a$$

A Transformada de Laplace da impulso

- Propriedade de amostragem do Impulso:

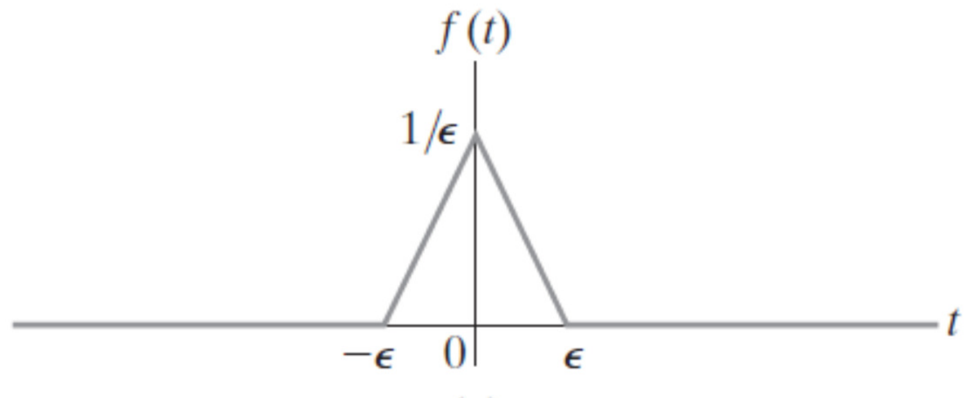
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)\,dt = f(a)$$

- Esta propriedade nos permite determinar a TL do impulso:

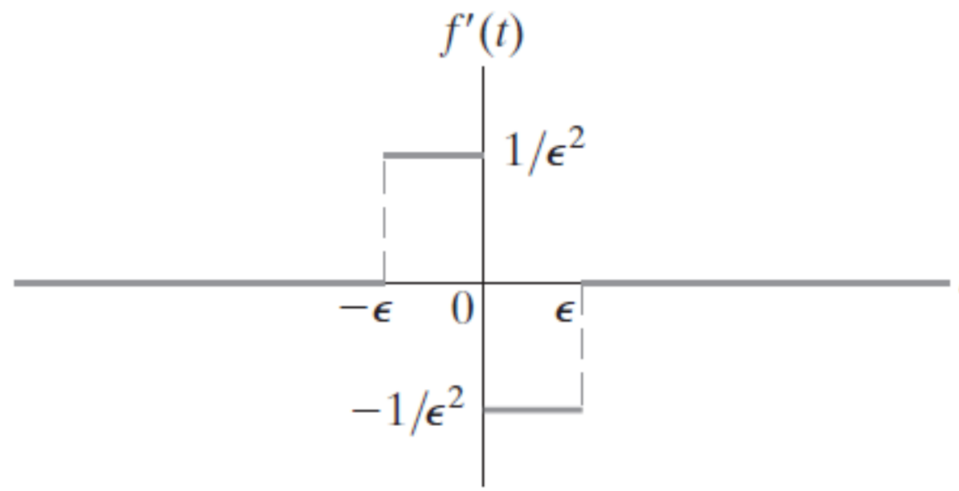
$$\mathscr{L}\{\delta(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t)e^{-st}\,dt = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

Derivada do impulso

- A função f(t) gera um impulso quando $\epsilon \rightarrow 0$:

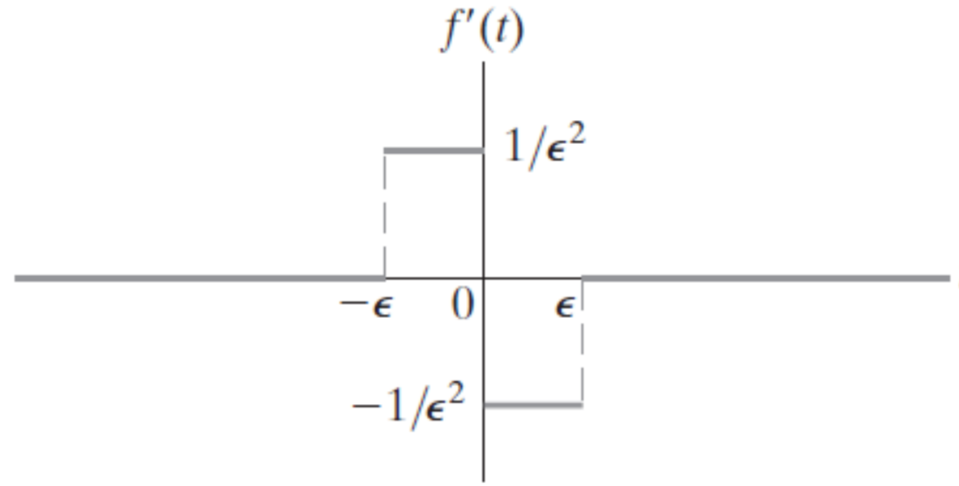


- Derivada da função geradora do impulso (doublet):



$\delta'(t)$, quando $\epsilon \rightarrow 0$

TL da derivada do impulso



- Calculando a TL de f'(t):

$$L\{\delta'(t)\} = \lim_{\epsilon \to 0}\left[\int_{-\epsilon}^{0^-} \frac{1}{\epsilon^2} e^{-st}\,dt + \int_{0^+}^{\epsilon}\left(-\frac{1}{\epsilon^2}\right) e^{-st}\,dt\right]$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{e^{s\epsilon} + e^{-s\epsilon} - 2}{s\epsilon^2}$$

Aplicando L'Hôpital

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{se^{s\epsilon} - se^{-s\epsilon}}{2\epsilon s} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{s^2 e^{s\epsilon} + s^2 e^{-s\epsilon}}{2s} = s$$

TL da derivada n-ésima do impulso

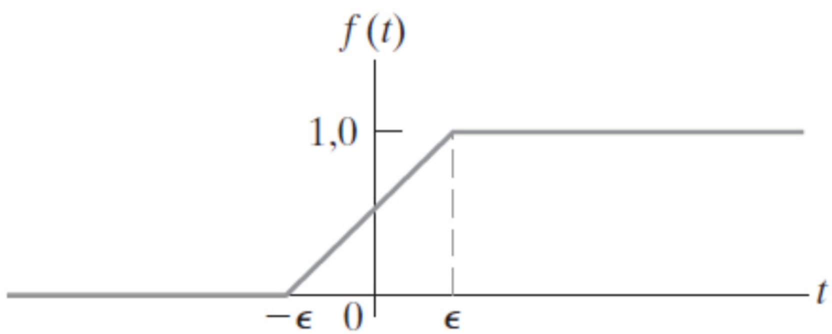
- Pode ser obtida de forma semelhante ao procedimento realizado para a primeira derivada:

$$\mathscr{L}\{\ \delta^{(n)}(t)\ \} = s^n$$

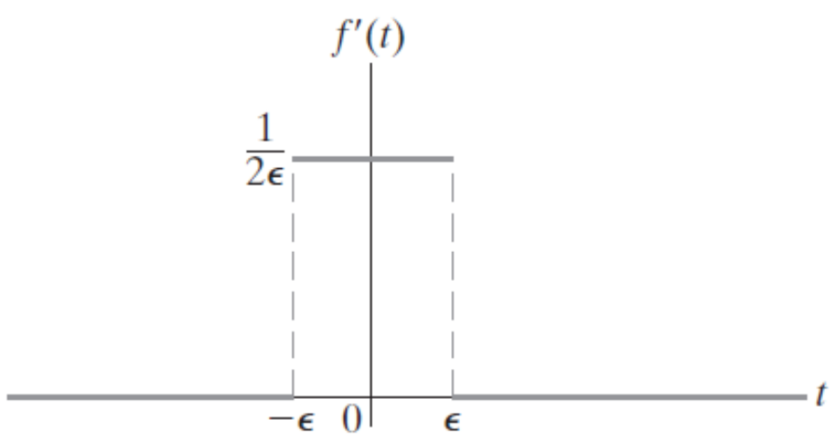
Relação entre degrau e impulso unitário

- A função impulso pode ser considerada a derivada da função degrau:

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$



Aproxima-se de uma função degrau unitário quando ϵ→0



Aproxima-se de uma função impulso unitário quando ϵ→0

Transformadas Funcionais

Transformada de Laplace do Degrau unitário

$$\mathscr{L}\{u(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt$$

Transformada de Laplace do Degrau unitário

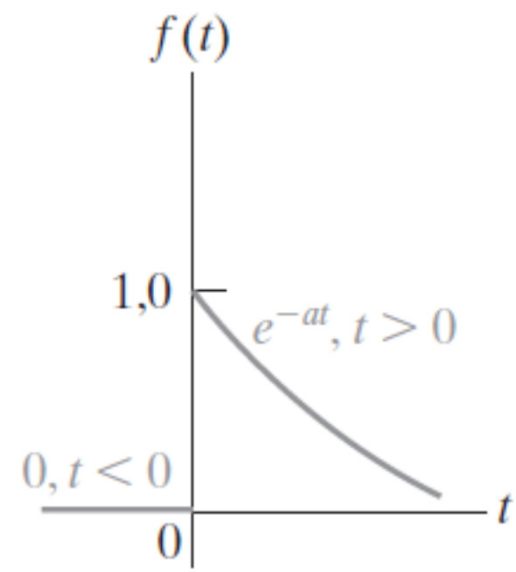
$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt = \int_{0^+}^{\infty} 1e^{-st}dt$$

$$= \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_{0^+}^{\infty} = \frac{1}{s}\,.$$

Transformada de Laplace da função exponencial decrescente

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

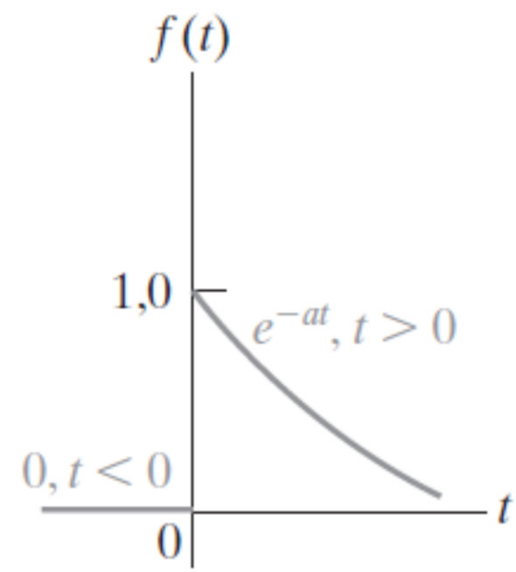
$$\mathcal{L}\{e^{-at}\} = \int_{0^+}^{\infty} e^{-at} e^{-st} \, dt$$



Transformada de Laplace da função exponencial decrescente

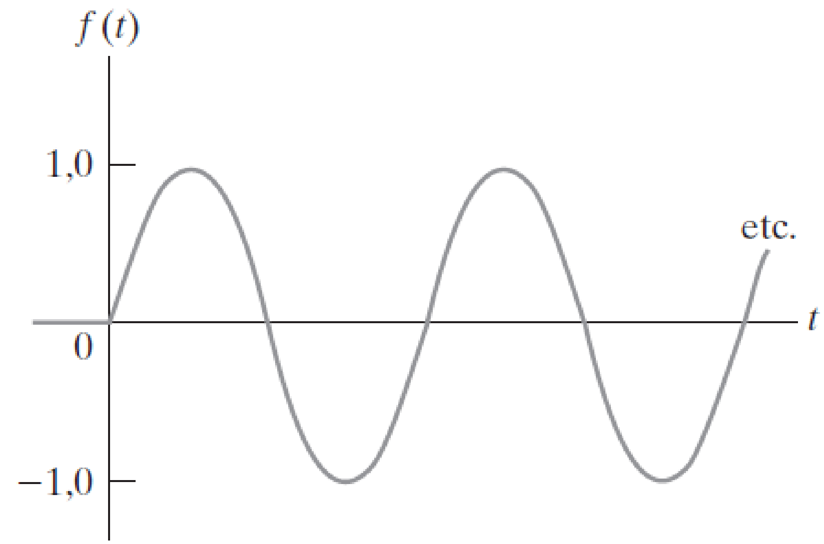
$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\} = \int_{0^+}^{\infty} e^{-at}\, e^{-st}\, dt = \int_{0^+}^{\infty} e^{-(a+s)t}\, dt = \frac{1}{s+a}.$$



Transformada de Laplace do seno

$$\mathcal{L}[sen\omega t] = \int_{0^-}^{\infty} (sen\omega t)e^{-st}\,dt$$



Transformada de Laplace do seno

$$\mathcal{L}[sen\omega t] = \int_{0^-}^{\infty} (sen\omega t) e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} \left(\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \right) e^{-st} dt$$

$$= \int_{0^-}^{\infty} \frac{e^{-(s-j\omega)t} - e^{-(s+j\omega)t}}{2j} dt = \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega} \right)$$

$$= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

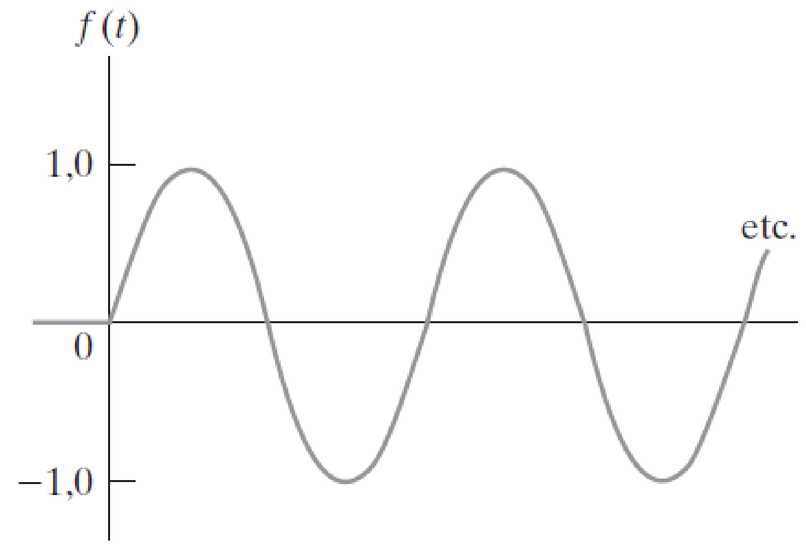


Tabela de Transformadas

Tipo	$f(t)\ (t > 0^-)$	$F(s)$
(impulso)	$\delta(t)$	1
(degrau)	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
(rampa)	t	$\frac{1}{s^2}$
(exponencial)	e^{-at}	$\frac{1}{s + a}$
(seno)	$\text{sen}\ \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
(co–seno)	$\cos\ \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
(rampa amortecida)	te^{-at}	$\frac{1}{(s + a)^2}$
(seno amortecido)	$e^{-at}\ \text{sen}\ \omega t$	$\frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}$
(co–seno amortecido)	$e^{-at} \cos\ \omega t$	$\frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2}$

Propriedades da Transformada de Laplace (“Transformadas Operacionais”)

Multiplicação por uma constante

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Se

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s),$$

então

$$\mathscr{L}\{K f(t)\} = K F(s).$$

Adição (subtração) no domínio do tempo

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Se

$$\mathscr{L}\{f_1(t)\} = F_1(s),$$

$$\mathscr{L}\{f_2(t)\} = F_2(s),$$

$$\mathscr{L}\{f_3(t)\} = F_3(s),$$

então

$$\mathscr{L}\{f_1(t) + f_2(t) - f_3(t)\} = F_1(s) + F_2(s) - F_3(s)$$

Diferenciação

- Diferenciar no tempo corresponde a multiplicar F(s) por s e subtrair o valor inicial:

$$\mathscr{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0^{-})$$

Ou seja, a diferenciação no tempo reduz-se a uma subtração na freqüência.

Diferenciação

- **Demonstração:**

$$\mathscr{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = \int_{0^-}^{\infty}\left[\frac{df(t)}{dt}\right]e^{-st}\,dt.$$

- Integrando por partes: $u=e^{-st}$ e $dv=df(t)$

$$\mathscr{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = e^{-st}f(t)\Big|_{0^-}^{\infty} - \int_{0^-}^{\infty} f(t)(-se^{-st}dt).$$

- Assumindo que a Transformada existe, então: $e^{-st}f(t)=0$ para $t=\infty$:

$$-f(0^-) + s\int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt = sF(s) - f(0^-)$$

Transformada da Derivada de segunda ordem

- Desejamos calcular: $\dfrac{d^2 f(t)}{dt^2}$

- Vamos tomar a 1ª derivada de f(t): $g(t) = \dfrac{df(t)}{dt}$

- A Transformada de Laplace de g(t) é dada por:

$$G(s) = sF(s) - f(0^-)$$

Transformada da Derivada de segunda ordem

$$g(t) = \frac{df(t)}{dt} \xrightarrow{\text{Transf. Laplace}} \boxed{G(s) = sF(s) - f(0^-)}$$

- Mas desejamos: $\dfrac{dg(t)}{dt} = \dfrac{d^2f(t)}{dt^2}$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dg(t)}{dt}\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right\} = s\boxed{G(s)} - g(0^-).$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right\} = s^2F(s) - sf(0^-) - \frac{df(0^-)}{dt}$$

Transformada de Laplace da Derivada de ordem n

- TL da Derivada de ordem 2:

$$\mathscr{L}\left\{\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right\} = s^2F(s) - sf(0^-) - \frac{df(0^-)}{dt}$$

- TL da Derivada de ordem n:

$$\mathscr{L}\left\{\frac{d^nf(t)}{dt^n}\right\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0^-) - s^{n-2}\frac{df(0^-)}{dt}$$

$$- s^{n-3}\frac{d^2f(0^-)}{dt^2} - \cdots - \frac{d^{n-1}f(0^-)}{dt^{n-1}}$$

Integração

- TL da Integral:

$$\mathscr{L}\left\{\int_{0^-}^{t} f(x)\,dx\right\} = \int_{0^-}^{\infty}\left[\overbrace{\int_{0^-}^{t} f(x)\,dx}^{u}\right]\overbrace{e^{-st}dt}^{dv}$$

- Integrando por partes:

$$\mathscr{L}\left\{\int_{0^-}^{t} f(x)\,dx\right\} = \underbrace{-\frac{e^{-st}}{s}}_{v}\int_{0^-}^{t} f(x)\,dx\bigg|_{0^-}^{\infty} + \int_{0^-}^{\infty}\frac{e^{-st}}{s}\underbrace{f(t)\,dt}_{du}$$

Integração

- Integrando por partes:

$$\mathscr{L}\left\{\int_{0^-}^{t} f(x)\,dx\right\} = \cancelto{0}{\left. -\frac{e^{-st}}{s}\int_{0^-}^{t} f(x)\,dx \right|_{0^-}^{\infty}} + \int_{0^-}^{\infty} \frac{e^{-st}}{s} f(t)\,dt$$

- Logo:

$$\mathscr{L}\left\{\int_{0^-}^{t} f(x)\,dx\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

Deslocamento no tempo

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$\mathscr{L}\{(t-a)u(t-a)\} = \int_{0^-}^{\infty} u(t-a)f(t-a)e^{-st}\,dt$$

- Como u(t-a)=0 para t<a:

$$\mathscr{L}\{(t-a)u(t-a)\} = \int_{\boxed{a}}^{\infty} f(t-a)e^{-st}\,dt$$

Deslocamento no tempo

$$\mathscr{L}\{(t-a)u(t-a)\} = \int_a^{\infty} f(t-a)e^{-st}\,dt$$

- Mudando a variável de integração: x=t-a   (t=x+a)

$$\mathcal{L}[f(t-a)u(t-a)] = \int_0^{\infty} f(x)e^{-s(x+a)}\,dx = e^{-sa}\int_0^{\infty} f(x)e^{-sx}\,dx$$

- Logo:

$$\mathcal{L}[f(t-a)u(t-a)] = e^{-sa}F(s)$$

Deslocamento na freqüência

• O deslocamento na freqüência corresponde a uma multiplicação por uma exponencial no tempo:

$$\mathcal{L}\,\{e^{-at} f(t)\} = F(s + a)$$

Demonstrar...

Mudança de escala

$$\mathscr{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right), \quad a > 0,$$

Demonstrar...

Usando as propriedades da TL

- Sabendo que $$\mathcal{L}[cos\ \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

- E, dada a propriedade do deslocamento na freqüência:

$$\mathcal{L}\{e^{-at} f(t)\} = F(s + a)$$

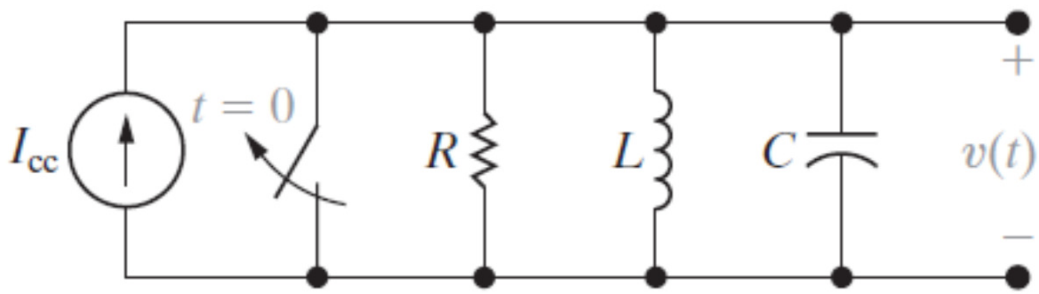
- Temos: $$\mathcal{L}[e^{-at}\ cos\ \omega t] = \frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2}$$

Propriedades da TL

Operação	$f(t)$	$F(s)$
Multiplicação por uma constante	$Kf(t)$	$KF(s)$
Adição/subtração	$f_1(t) + f_2(t) - f_3(t) + \dots$	$f_1(s) + f_2(s) - f_3(s) + \dots$
Derivada de primeira ordem (tempo)	$\dfrac{df(t)}{dt}$	$sF(s) - f(0^-)$
Derivada de segunda ordem (tempo)	$\dfrac{d^2f(t)}{dt^2}$	$s^2F(s) - sf(0^-) - \dfrac{df(0^-)}{dt}$
Derivada de ordem n (tempo)	$\dfrac{d^nf(t)}{dt^n}$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0^-) - s^{n-2}\dfrac{df(0^-)}{dt} - s^{n-3}\dfrac{df^2(0^-)}{dt^2} - \cdots - \dfrac{d^{n-1}f(0^-)}{dt^{n-1}}$
Integral em relação ao tempo	$\int_0^t f(x)\,dx$	$\dfrac{F(s)}{s}$
Deslocamento no tempo	$f(t-a)u(t-a),\ a>0$	$e^{-as}F(s)$
Deslocamento na freqüência	$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$
Mudança de escala	$f(at),\ a>0$	$\dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{s}{a}\right)$
Derivada de primeira ordem (em s)	$tf(t)$	$-\dfrac{dF(s)}{ds}$
Derivada de ordem n (em s)	$t^n f(t)$	$(-1)^n\dfrac{d^nF(s)}{ds^n}$
Integral (em s)	$\dfrac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(u)\,du$

Aplicação da TL à análise de circuitos

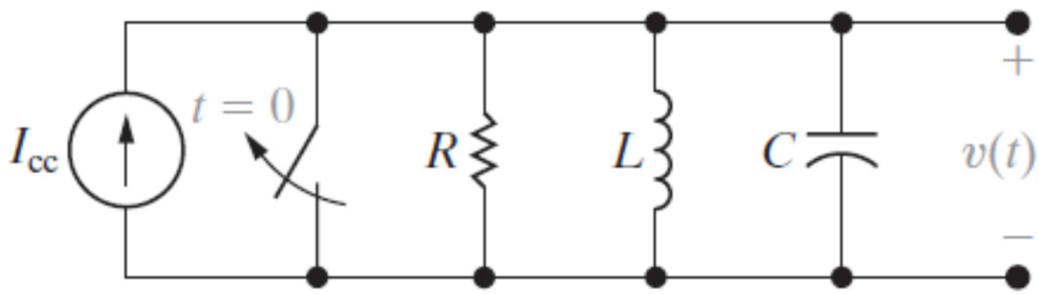
Não há energia inicial armazenada no circuito



- Descrevemos o circuito por meio de uma **equação integro-diferencial** em v(t) (**equação nodal**):

$$\frac{v(t)}{R} + \frac{1}{L}\int_0^t v(x)\,dx + C\frac{dv(t)}{dt} = I_{cc}u(t)$$

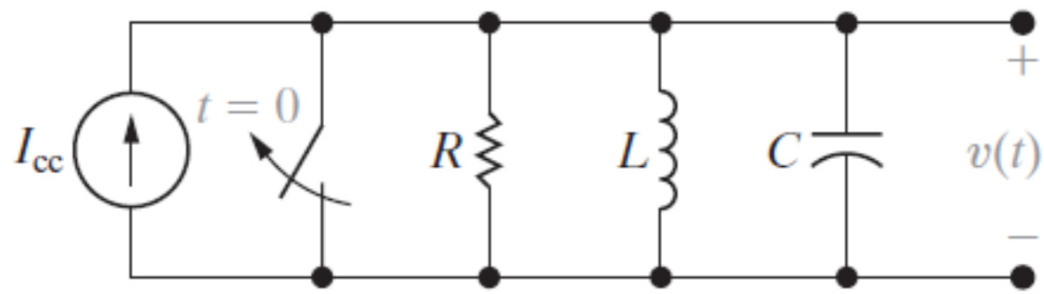
Aplicação da TL à análise de circuitos



Abertura da chave=degrau de corrente

$$\frac{v(t)}{R} + \frac{1}{L}\int_0^t v(x)\,dx + C\frac{dv(t)}{dt} = I_{cc}u(t)$$

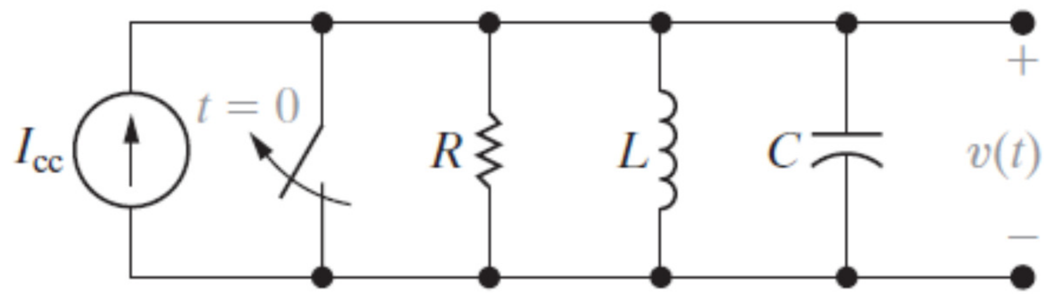
Aplicação da TL à análise de circuitos



- Transformar a equação para o domínio da freqüência: equação algébrica em s

$$\frac{v(t)}{R} + \frac{1}{L}\int_0^t v(x)\,dx + C\frac{dv(t)}{dt} = I_{cc}u(t)$$

Aplicação da TL à análise de circuitos



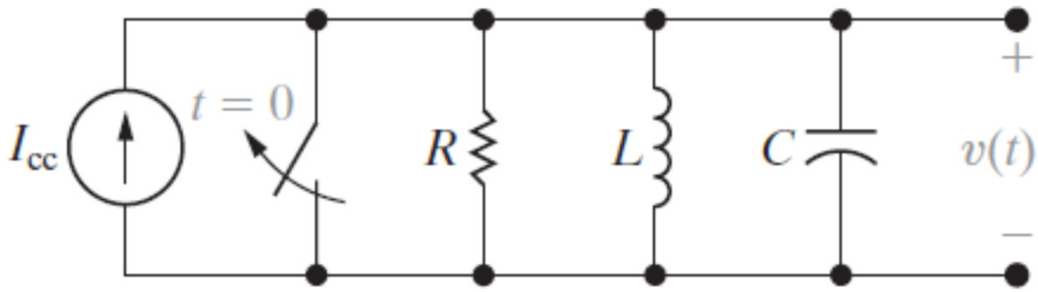
- Transformar a equação para o domínio da freqüência: equação algébrica em s

$$\frac{v(t)}{R} + \frac{1}{L}\int_0^t v(x)\,dx + C\frac{dv(t)}{dt} = I_{cc}u(t)$$

$$\frac{V(s)}{R} + \frac{1}{L}\frac{V(s)}{s} + C[sV(s) - v(0^-)] = I_{cc}\left(\frac{1}{s}\right)$$

Aplicação da TL à análise de circuitos

Não há energia inicial armazenada no circuito



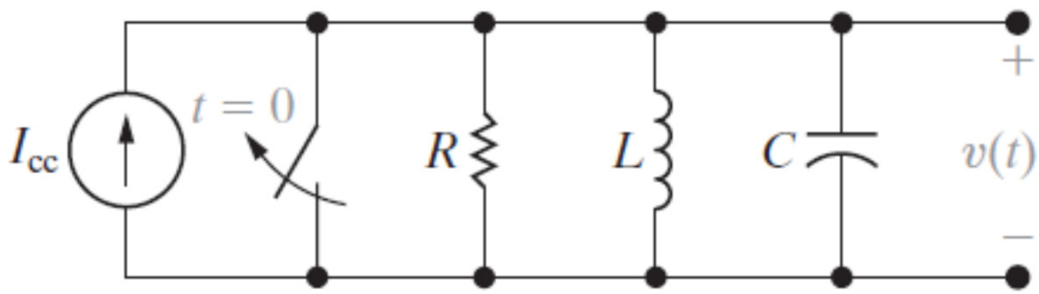
- Resolvemos a eq. Algébrica ($v_c(0^-)=0$):

$$\frac{V(s)}{R} + \frac{1}{L}\frac{V(s)}{s} + C[sV(s) - \cancelto{0}{v(0^-)}] = I_{cc}\left(\frac{1}{s}\right)$$

$$V(s)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{sL} + sC\right) = \frac{I_{cc}}{s},$$

$$V(s) = \frac{I_{cc}/C}{s^2 + (1/RC)s + (1/LC)}$$

Aplicação da TL à análise de circuitos



- Calcular a Transformada Inversa de Laplace para obter v(t) a partir de V(s):

$$V(s) = \frac{I_{cc}/C}{s^2 + (1/RC)s + (1/LC)}$$

- Verificamos a validade da expressão no domínio do tempo.