ELT062 - OFICINA DE SIMULAÇÃO ANALÓGICA E DIGITAL EM CONTROLE

LINEARIZAÇÃO DE SISTEMAS

1. Introdução

Sistemas dinâmicos lineares são aqueles que obedecem ao princípio da superposição, isto é, um sistema linear é tal que, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

- se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são saídas correspondentes a $u_1(t)$ e $u_2(t)$ respectivamente,
- então $\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$ é a saída correspondente a $\alpha u_1(t) + \beta u_2(t)$.

A importância de sistemas lineares está na facilidade em obter resultados, tanto analíticos quanto numéricos, usando álgebra linear. Em geral, sistemas lineares descritos por EDOs podem ser escritos na forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{aligned} \tag{1}$$

em que A, B, C e D são matrizes variantes no tempo, $u(t)$ é a entrada do sistema, $y(t)$ é sua saída e $x(t)$ são estados internos. Note como a saída e a derivada dos estados são funções lineares (de primeira ordem) da entrada e dos próprios estados.

Na prática, sistemas lineares são quase inexistentes na natureza. Contudo, muitas vezes procuramos obter aproximações lineares para sistemas dinâmicos com o intuito de facilitar nossos cálculos. Em geral, um sistema não-linear pode ser dado por EDOs na forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \\ y &= g(x, u) \ , \end{aligned} \tag{2}$$

em que f e g são funções não-lineares. Assim como aproximamos funções não-lineares em um ponto pela reta tangente ao ponto usando a aproximação de Taylor, aproximaremos sistemas não-lineares em uma região do espaço de estados usando a aproximação de Taylor.

2. **Tempo Contínuo - Forma Explícita**

Consideremos um sistema não-linear descrito pela equação diferencial

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \\ y &= g(x, u) \end{aligned} \tag{3}$$

em que u é a entrada do sistema, y é sua saída e x é um estado interno.

Dada uma solução conhecida $(\bar{u}(t), \bar{x}(t))$ da EDO, definimos $\Delta x(t) = x(t) - \bar{x}(t)$ e $\Delta u(t) = u(t) - \bar{u}(t)$, isto é, as variações em torno da solução conhecida. Obviamente, se tivermos $\Delta u = 0$, teremos que $\Delta x = 0$, dado que $(\bar{u}, \bar{x})$ é uma solução.

Se essa variações são pequenas, podemos obter uma aproximação de primeira ordem para f e g:

$$f(\bar{x} + \Delta x, \bar{u} + \Delta u) = f(\bar{x}, \bar{u}) + \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{u})\Delta x + \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}, \bar{u})\Delta u$$

e

$$g(\bar{x} + \Delta x, \bar{u} + \Delta u) = g(\bar{x}, \bar{u}) + \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x}, \bar{u})\Delta x + \frac{\partial g}{\partial u}(\bar{x}, \bar{u})\Delta u$$

Substituindo em (3), temos que

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}+\Delta\dot{x}&=f(\bar{x},\bar{u})+\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{u})\Delta x+\frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x},\bar{u})\Delta u\\ \bar{y}+\Delta y&=g(\bar{x},\bar{u})+\frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x},\bar{u})\Delta x+\frac{\partial g}{\partial u}(\bar{x},\bar{u})\Delta u\end{aligned}$$

Usando o fato de que $(\bar{u},\bar{x})$ satisfaz (3), podemos cancelar os termos de ordem zero:

$$\begin{aligned}\Delta\dot{x}&=\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{u})\Delta x+\frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x},\bar{u})\Delta u\\ \Delta y&=\frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x},\bar{u})\Delta x+\frac{\partial g}{\partial u}(\bar{x},\bar{u})\Delta u\end{aligned}$$

Dessa forma, obtivemos um sistema linear que tem como entrada variações Δu e como saídas variações Δy.

2.1. **Linearização em torno de um ponto de equilíbrio.** Muitas das vezes, queremos linearizar em torno de um ponto de equilíbrio $(\bar{u},\bar{x})$, isto é, $\bar{u}$ e $\bar{x}$ são constantes. Neste caso, eles devem satisfazer a equação algébrica:

$$0=f(\bar{x},\bar{u}) \ .$$

Em geral, como só temos que resolver uma equação algébrica, é bem mais fácil encontrar pontos de equilíbrio do que encontrar soluções que variam no tempo.

Quando $(\bar{u},\bar{x})$ é um ponto de equilíbrio, os jacobianos acima não variam no tempo, o que nos permite reescrever a equação linearizada em termos de matrizes constantes A, B, C e D:

$$\begin{aligned}\Delta\dot{x}&=A\Delta x+B\Delta u\\ \Delta y&=C\Delta x+D\Delta u\end{aligned}\tag{4}$$

O comando ss do Matlab pode ser usado para definir sistemas lineares invariantes no tempo a partir das matrizes A, B, C e D.

2.2. **Funções de transferência.** Podemos agora aplicar ferramentas de análise linear para tratar o sistema linearizado. Em especial, estamos interessados em obter funções de transferência para tal sistema. Uma função de transferência $G(s)$ é definida a partir das transformadas de Laplace da entrada e da saída como

$$G(s)=\frac{\Delta Y(s)}{\Delta U(s)}$$

onde as funções de transferência são calculadas para condições iniciais nulas.

Se aplicarmos a transformada de Laplace a ambos os lados de (4), assumindo condições iniciais nulas, obteremos

$$\begin{aligned}s\Delta X(s)&=A\Delta X(s)+B\Delta U(s)\\ \Delta Y(s)&=C\Delta X(s)+D\Delta U(s)\end{aligned}$$

As equações acima definem um sistema de equações lineares em ΔX, que pode ser resolvido isolando-se ΔX do lado esquerdo:

$$(sI-A)\Delta X(s)=B\Delta U(s)\Rightarrow\Delta X(s)=(sI-A)^{-1}B\Delta U(s)$$

Dessa forma, temos que

$$\Delta Y(s)=[C(sI-A)^{-1}B+D]\Delta U(s) \ .$$

Portanto, podemos dizer que a função de transferência entre ΔU e ΔY é

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \ .$$

Note que G será uma matriz no caso de termos múltiplas entradas e múltiplas saídas. Funções de transferência podem ser obtidas no Matlab aplicando-se o comando `tf` a sistemas definidos através do comando ss.

Sendo conhecida a função de transferência para o sistema, as tarefas de analisar e projetar sistemas são simplificadas de maneira tremenda.

3. Tempo Contínuo - Forma Implícita

Muitas EDOs, especialmente aquelas derivadas de sistemas mecânicos, aparecem na forma implícita

$$h(\dot{x}, x, u) = 0 \ .$$

A princípio, para linearizar, teríamos primeiramente que colocar a EDO na forma da equação (3). Na verdade, podemos linearizar diretamente a partir de h, o que costuma ser mais simples computacionalmente já que tomar derivadas de h é em geral mais simples que tomar derivadas de sua inversa.

Eis como faríamos a linearização em torno de um ponto de operação $(\bar{u}, \bar{x})$.

$$\begin{aligned} 0 &= h(0 + \Delta\dot{x}, \bar{x} + \Delta x, \bar{u} + \Delta u) \\ &= h(0, \bar{x}, \bar{u}) + \frac{\partial h}{\partial \dot{x}}(0, \bar{x}, \bar{u})\Delta\dot{x} + \frac{\partial h}{\partial x}(0, \bar{x}, \bar{u})\Delta x + \frac{\partial h}{\partial u}(0, \bar{x}, \bar{u})\Delta u \end{aligned}$$

Como $h(0, \bar{x}, \bar{u}) = 0$, temos a equação linearizada

$$\frac{\partial h}{\partial \dot{x}}(0, \bar{x}, \bar{u})\Delta\dot{x} + \frac{\partial h}{\partial x}(0, \bar{x}, \bar{u})\Delta x + \frac{\partial h}{\partial u}(0, \bar{x}, \bar{u})\Delta u = 0 \tag{5}$$

Podemos resolver para $\Delta\dot{x}$:

$$\Delta\dot{x} = -\left[\frac{\partial h}{\partial \dot{x}}\right]^{-1}\left[\frac{\partial h}{\partial x}\right]\Delta x - \left[\frac{\partial h}{\partial \dot{x}}\right]^{-1}\left[\frac{\partial h}{\partial u}\right]\Delta u$$

onde as derivadas são tomadas no ponto $(0, \bar{x}, \bar{u})$. Se nosso interesse é obter funções de transferência entre ΔU e ΔX, podemos aplicar a transformada de Laplace diretamente a (5):

$$s\left[\frac{\partial h}{\partial \dot{x}}\right]\Delta X(s) + \left[\frac{\partial h}{\partial x}\right]\Delta X(s) + \left[\frac{\partial h}{\partial u}\right]\Delta U(s) = 0$$

Resolvendo para $\Delta X(s)$, obtemos

$$\Delta X(s) = -\left[s\frac{\partial h}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial h}{\partial x}\right]^{-1}\left[\frac{\partial h}{\partial u}\right]\Delta U(s)$$

o que resulta na função de transferência

$$G(s) = -\left[s\frac{\partial h}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial h}{\partial x}\right]^{-1}\left[\frac{\partial h}{\partial u}\right]$$

Note que para resolvermos os sistemas de equações acima usamos a inversa matricial dos jacobianos (que existe para praticamente todos os casos de interesse).

3.1. **Forma alternativa.** Um caso comum para muitos sistemas mecânicos é aquele em que temos uma EDO de segunda ordem e x é um escalar. Nesse caso, podemos sempre escrever a EDO como

$$h(\ddot{x}, \dot{x}, x, u) = 0 \ .$$

Note que aqui não mais usamos a representação em espaço de estados e por isso temos uma equação diferente (com quatro variáveis). Procedendo como antes, a linearização resulta em

$$\frac{\partial h}{\partial \ddot{x}} \Delta \ddot{x} + \frac{\partial h}{\partial \dot{x}} \Delta \dot{x} + \frac{\partial h}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial h}{\partial u} \Delta u = 0$$

onde as derivadas são tomadas em $(0, 0, \bar{x}, \bar{u})$. Em seguida aplicamos a transformada de Laplace para condições iniciais nulas:

$$s^2 \frac{\partial h}{\partial \ddot{x}} \Delta X(s) + s \frac{\partial h}{\partial \dot{x}} \Delta X(s) + \frac{\partial h}{\partial x} \Delta X(s) + \frac{\partial h}{\partial u} \Delta U(s) = 0$$

Isso resulta na função de transferência

$$\frac{\Delta X(s)}{\Delta U(s)} = -\frac{\frac{\partial h}{\partial u}}{s^2 \frac{\partial h}{\partial \ddot{x}} + s \frac{\partial h}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial h}{\partial x}} \ .$$

Exemplo. Considere o sistema não-linear

$$\ddot{x} + b(\dot{x}) c(x) = u \ .$$

Queremos linearizá-lo em torno do ponto de operação constante $(0, x_0)$. Para que constitua um ponto de equilíbrio, x_0 deve satisfazer

$$b(0) c(x_0) = 0 \ .$$

Escrever o sistema na mesma forma da equação (3) constitui uma maneira sistematizada para o procedimento de linearização. Contudo, isso não é necessário em geral. Podemos linearizar diretamente a partir da equação dada:

$$\ddot{x}_0 + \Delta \ddot{x} + b(0) c(x_0) + b'(0) c(x_0) \Delta \dot{x} + b(0) c'(x_0) \Delta x = \Delta u$$

Usando o fato de que x_0 é um ponto de equilíbrio, simplificamos a equação para

$$\Delta \ddot{x} + b'(0) c(x_0) \Delta \dot{x} + b(0) c'(x_0) \Delta x = \Delta u$$

Aplicando a transformada de Laplace, temos

$$s^2 \Delta X + b'(0) c(x_0) s \Delta X + b(0) c'(x_0) \Delta X = \Delta U$$

(note que multiplicamos por s para a primeira derivada e por s^2 para a segunda). Resolvendo para ΔX:

$$\Delta X = \frac{\Delta U}{s^2 + b'(0) c(x_0) s + b(0) c'(x_0)}$$

Portanto, a função de transferência é

$$\frac{\Delta X}{\Delta U} = \frac{1}{s^2 + b'(0) c(x_0) s + b(0) c'(x_0)}$$

4. Tempo discreto - Forma Explícita

A linearização de sistemas a tempo discreto é praticamente idêntica à de sistemas a tempo contínuo. De forma análoga, escrevemos sistemas discretos na forma:

$$\begin{aligned} x[k+1] &= f(x[k], u[k]) \\ y[k] &= g(x[k], u[k]) \end{aligned}$$

Assim, como $x[k+1] = x[k]$ para pontos de equilíbrio, estes devem satisfazer a igualdade

$$\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{u}).$$

Procedendo como anteriormente, obtemos a linearização

$$\begin{aligned} \Delta x[k+1] &= \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{u})\Delta x[k] + \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}, \bar{u})\Delta u[k] \\ \Delta y[k] &= \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x}, \bar{u})\Delta x[k] + \frac{\partial g}{\partial u}(\bar{x}, \bar{u})\Delta u[k] \end{aligned}$$

o que permite escrever o sistema linearizado na forma

$$\begin{aligned} \Delta x[k+1] &= A\Delta x[k] + B\Delta u[k] \\ \Delta y[k] &= C\Delta x[k] + D\Delta u[k] \end{aligned}$$

De forma análoga, podemos aplicar a transformada-z com condições iniciais nulas para obter a função de transferência

$$Y(z) = \left[C(zI - A)^{-1}B + D\right]\ U(z)$$

No Matlab, podemos criar sistemas a tempo discreto a partir das matrizes A, B, C e D e do período de amostragem T usando o comando `ss(A,B,C,D,T)`. O comando `tf` também pode ser usado para obter funções de transferência a partir de objetos gerados por `ss`. Note que esquecer de especificar o período de amostragem terá consequências catastróficas, dado que o sistema será interpretado como um sistema a tempo contínuo.