

## OFICINA DE SIMULAÇÃO DE SISTEMAS DINÂMICOS – PC2

**Exercício 1 – Oscilador de Van der Pol.** O oscilador de Van der Pol foi um dos primeiros circuitos osciladores já construídos. Ele consiste da ligação em paralelo de um capacitor, um indutor e um resistor não-linear com característica

$$I = -\mu V + V^3 ,$$

onde  $I$  é a corrente e  $V$  é a tensão nos terminais do resistor. Note que o circuito descrito não necessita de uma fonte para fornecer energia, pois esta já é fornecida pela resistência negativa do resistor para baixos valores de tensão. Componentes com essa característica eram inicialmente obtidos usando-se válvulas. Atualmente eles podem ser criados a partir de diodos. Para isso, basta deslocar o ponto de operação do diodo para uma região com resistência negativa, o que pode ser feito usando-se uma fonte de tensão em série e uma fonte de corrente em paralelo com o diodo.

Seja  $I_L$  a corrente no indutor,  $V_C$  a tensão no capacitor,  $L$  a indutância do indutor e  $C$  a capacitância do capacitor. Obtenha as equações diferenciais que descrevem esse circuito (ligação em paralelo dos três elementos citados) e apresente-as conforme sua representação no espaço de estados de maneira que tenhamos uma equação diferencial de primeira ordem.

**Exercício 2 – Oscilador de Van der Pol (continuação).** A constante de tempo de um circuito R-C pode ser definida como o tempo necessário para que o capacitor se carregue de 63% de sua carga total a partir do momento em que o circuito é ligado. Da mesma forma, a constante de tempo de um circuito R-L será o tempo necessário para que a corrente no indutor atinja 63% do máximo a partir do momento em que o circuito é ligado. A constante de tempo de um circuito R-C é dada por  $RC$ , enquanto que a constante de tempo de um circuito R-L é dada por  $L/R$ .

No oscilador de Van der Pol, a resistência  $R$  é dada por  $-1/\mu$  na região de operação linear do elemento resistivo. Portanto, podemos pensar que constantes de tempo de magnitude  $C/\mu$  e  $L\mu$  estão presentes no circuito. Assim, que método de simulação você usaria quando  $\mu \gg \sqrt{C/L}$ ? Justifique sua resposta.

**Exercício 3.** Considere o problema de dois corpos que se atraem mutuamente pela força da gravidade. A dinâmica resultante pode ser descrita pelas equações:

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= -\mu \frac{r}{\|r\|^3} \\ \ddot{R} &= 0, \end{aligned}$$

onde  $\mu$  é uma constante que depende da massa dos dois corpos,  $R \in \mathbb{R}^3$  é a posição do centro de massa dos dois corpos e  $r \in \mathbb{R}^3$  é a posição relativa dos dois corpos. A norma  $\|r\|$  do vetor  $r$  é dada por  $\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}$ . Apresente uma representação em espaço de estados para o sistema acima.