

ELT062 - OFICINA DE SIMULAÇÃO ANALÓGICA E DIGITAL EM CONTROLE

Linearização

Consideremos um sistema não-linear descrito pela equação diferencial

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \\ y &= g(x, u) \end{aligned} \quad (1)$$

em que u é a entrada do sistema, y é sua saída e x é um estado interno.

Dada uma solução conhecida $(\bar{u}(t), \bar{x}(t))$ da EDO, definimos $\Delta x(t) = x(t) - \bar{x}(t)$ e $\Delta u(t) = u(t) - \bar{u}(t)$, isto é, as variações em torno da solução conhecida. Obviamente, se tivermos $\Delta u = 0$, teremos que $\Delta x = 0$, dado que (\bar{u}, \bar{x}) é uma solução.

Se essas variações são pequenas, podemos obter uma aproximação de primeira ordem para f e g :

$$f(\bar{x} + \Delta x, \bar{u} + \Delta u) = f(\bar{x}, \bar{u}) + \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{u})\Delta x + \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}, \bar{u})\Delta u$$

e

$$g(\bar{x} + \Delta x, \bar{u} + \Delta u) = g(\bar{x}, \bar{u}) + \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x}, \bar{u})\Delta x + \frac{\partial g}{\partial u}(\bar{x}, \bar{u})\Delta u$$

Substituindo em (1), temos que

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} + \Delta \dot{x} &= f(\bar{x}, \bar{u}) + \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{u})\Delta x + \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}, \bar{u})\Delta u \\ \bar{y} + \Delta y &= g(\bar{x}, \bar{u}) + \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x}, \bar{u})\Delta x + \frac{\partial g}{\partial u}(\bar{x}, \bar{u})\Delta u \end{aligned}$$

Usando o fato de que (\bar{u}, \bar{x}) satisfaz (1), podemos cancelar os termos de ordem zero:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x} &= \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{u})\Delta x + \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}, \bar{u})\Delta u \\ \Delta y &= \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x}, \bar{u})\Delta x + \frac{\partial g}{\partial u}(\bar{x}, \bar{u})\Delta u \end{aligned}$$

Dessa forma, obtivemos um sistema linear que tem como entrada variações Δu e como saídas variações Δy .

Muitas das vezes, queremos linearizar em torno de um ponto de equilíbrio (\bar{u}, \bar{x}) , isto é, \bar{u} e \bar{x} são constantes. Neste caso, eles devem satisfazer a equação algébrica:

$$0 = f(\bar{x}, \bar{u}) .$$

Em geral, como só temos que resolver uma equação algébrica, é bem mais fácil encontrar pontos de equilíbrio do que encontrar soluções que variam no tempo.

Quando (\bar{u}, \bar{x}) é um ponto de equilíbrio, os jacobianos acima não variam no tempo, o que nos permite reescrever a equação linearizada em termos de matrizes constantes A, B, C e D :

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x} &= A\Delta x + B\Delta u \\ \Delta y &= C\Delta x + D\Delta u \end{aligned} \quad (2)$$

O comando `ss` do Matlab pode ser usado para definir sistemas lineares invariantes no tempo a partir das matrizes A, B, C e D .

Podemos agora aplicar ferramentas de análise linear para tratar o sistema linearizado. Em especial, estamos interessados em obter funções de transferência para

tal sistema. Uma função de transferência $G(s)$ é definida a partir das transformadas de Laplace da entrada e da saída como

$$G(s) = \frac{\Delta Y(s)}{\Delta U(s)}$$

onde as funções de transferência são calculadas para condições iniciais nulas.

Se aplicarmos a transformada de Laplace a ambos os lados de (2), assumindo condições iniciais nulas, obteremos

$$\begin{aligned} s\Delta X(s) &= A\Delta X(s) + B\Delta U(s) \\ \Delta Y(s) &= C\Delta X(s) + D\Delta U(s) \end{aligned}$$

As equações acima definem um sistema de equações lineares em X , que pode ser resolvido isolando-se X do lado esquerdo:

$$(sI - A)\Delta X(s) = B\Delta U(s) \Rightarrow \Delta X(s) = (sI - A)^{-1}B\Delta U(s)$$

Dessa forma, temos que

$$\Delta Y(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]\Delta U(s) .$$

Portanto, podemos dizer que a função de transferência entre ΔU e ΔY é

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D .$$

Note que G será uma matriz no caso de termos múltiplas entradas e múltiplas saídas. Funções de transferência podem ser obtidas no Matlab aplicando-se o comando `tf` a sistemas definidos através do comando `ss`.

Sendo conhecida a função de transferência para o sistema, as tarefas de analisar e projetar sistemas são simplificadas de maneira tremenda.

Método Alternativo. Muitas EDOs, especialmente aquelas derivadas de sistemas mecânicos, aparecem na forma implícita

$$h(\dot{x}, x, u) = 0 .$$

A princípio, para linearizar, teríamos primeiramente que colocar a EDO na forma da equação (1). Na verdade, podemos linearizar diretamente a partir de h , o que costuma ser mais simples computacionalmente já que tomar derivadas de h é em geral mais simples que tomar derivadas de sua inversa.

Eis como faríamos a linearização em torno de um ponto de operação (\bar{u}, \bar{x}) .

$$\begin{aligned} 0 &= h(0 + \Delta\dot{x}, \bar{x} + \Delta x, \bar{u} + \Delta u) \\ &= h(0, \bar{x}, \bar{u}) + \frac{\partial h}{\partial \dot{x}}(0, \bar{x}, \bar{u})\Delta\dot{x} + \frac{\partial h}{\partial x}(0, \bar{x}, \bar{u})\Delta x + \frac{\partial h}{\partial u}(0, \bar{x}, \bar{u})\Delta u \end{aligned}$$

Como $h(0, \bar{x}, \bar{u}) = 0$, temos a equação linearizada

$$(3) \quad \frac{\partial h}{\partial \dot{x}}(0, \bar{x}, \bar{u})\Delta\dot{x} + \frac{\partial h}{\partial x}(0, \bar{x}, \bar{u})\Delta x + \frac{\partial h}{\partial u}(0, \bar{x}, \bar{u})\Delta u = 0$$

Podemos resolver para $\Delta\dot{x}$:

$$\Delta\dot{x} = - \left[\frac{\partial h}{\partial \dot{x}} \right]^{-1} \left[\frac{\partial h}{\partial x} \right] \Delta x - \left[\frac{\partial h}{\partial \dot{x}} \right]^{-1} \left[\frac{\partial h}{\partial u} \right] \Delta u$$

onde as derivadas são tomadas no ponto $(0, \bar{x}, \bar{u})$. Se nosso interesse é obter funções de transferência, podemos aplicar a transformada de Laplace diretamente a (3):

$$s \left[\frac{\partial h}{\partial \dot{x}} \right] \Delta X(s) + \left[\frac{\partial h}{\partial x} \right] \Delta X(s) + \left[\frac{\partial h}{\partial u} \right] \Delta U(s) = 0$$

Resolvendo para $\Delta X(s)$, obtemos

$$\Delta X(s) = - \left[s \frac{\partial h}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial h}{\partial x} \right]^{-1} \left[\frac{\partial h}{\partial u} \right] \Delta U(s)$$

o que resulta na função de transferência

$$G(s) = - \left[s \frac{\partial h}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial h}{\partial x} \right]^{-1} \left[\frac{\partial h}{\partial u} \right]$$

Note que para resolvermos os sistemas de equações acima usamos a inversa matricial dos jacobianos (que existe para praticamente todos os casos de interesse).

Um caso comum para muitos sistemas mecânicos é aquele em que temos uma EDO de segunda ordem e x é um escalar. Nesse caso, podemos sempre escrever a EDO como

$$h(\ddot{x}, \dot{x}, x, u) = 0 .$$

Note que aqui não mais usamos a representação em espaço de estados e por isso temos uma equação diferente (com quatro variáveis). Procedendo como antes, a linearização resulta em

$$\frac{\partial h}{\partial \ddot{x}} \Delta \ddot{x} + \frac{\partial h}{\partial \dot{x}} \Delta \dot{x} + \frac{\partial h}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial h}{\partial u} \Delta u = 0$$

onde as derivadas são tomadas em $(0, 0, \bar{x}, \bar{u})$. Em seguida aplicamos a transformada de Laplace para condições iniciais nulas:

$$s^2 \frac{\partial h}{\partial \ddot{x}} \Delta X(s) + s \frac{\partial h}{\partial \dot{x}} \Delta X(s) + \frac{\partial h}{\partial x} \Delta X(s) + \frac{\partial h}{\partial u} \Delta U(s) = 0$$

Isso resulta na função de transferência

$$\frac{\Delta X(s)}{\Delta U(s)} = - \frac{\frac{\partial h}{\partial u}}{s^2 \frac{\partial h}{\partial \ddot{x}} + s \frac{\partial h}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial h}{\partial x}} .$$

Exemplo. Considere o sistema não-linear

$$\ddot{x} + b(\dot{x})c(x) = u .$$

Queremos linearizá-lo em torno do ponto de operação constante $(0, x_0)$. Para que constitua um ponto de equilíbrio, x_0 deve satisfazer

$$b(0)c(x_0) = 0 .$$

Escrever o sistema na mesma forma da equação (1) constitui uma maneira sistematizada para o procedimento de linearização. Contudo, isso não é necessário em geral. Podemos linearizar diretamente a partir da equação dada:

$$\ddot{x}_0 + \Delta \ddot{x} + b(0)c(x_0) + b'(0)c(x_0)\Delta \dot{x} + b(0)c'(x_0)\Delta x = \Delta u$$

Usando o fato de que x_0 é um ponto de equilíbrio, simplificamos a equação para

$$\Delta \ddot{x} + b'(0)c(x_0)\Delta \dot{x} + b(0)c'(x_0)\Delta x = \Delta u$$

Aplicando a transformada de Laplace, temos

$$s^2 \Delta X + b'(0)c(x_0)s \Delta X + b(0)c'(x_0)\Delta X = \Delta U$$

(note que multiplicamos por s para a primeira derivada e por s^2 para a segunda).
Resolvendo para ΔX :

$$\Delta X = \frac{\Delta U}{s^2 + b'(0)c(x_0)s + b(0)c'(x_0)}$$

Portanto, a função de transferência é

$$\frac{\Delta X}{\Delta U} = \frac{1}{s^2 + b'(0)c(x_0)s + b(0)c'(x_0)}$$

Tempo discreto. A linearização de sistemas a tempo discreto é praticamente idêntica à de sistemas a tempo contínuo. De forma análoga, escrevemos sistemas discretos na forma:

$$\begin{aligned} x[k+1] &= f(x[k], u[k]) \\ y[k] &= g(x[k], u[k]) \end{aligned}$$

Assim, como $x[k+1] = x[k]$ para pontos de equilíbrio, estes devem satisfazer a igualdade

$$\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{u}).$$

Procedendo como anteriormente, obtemos a linearização

$$\begin{aligned} \Delta x[k+1] &= \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{u})\Delta x[k] + \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}, \bar{u})\Delta u[k] \\ \Delta y[k] &= \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x}, \bar{u})\Delta x[k] + \frac{\partial g}{\partial u}(\bar{x}, \bar{u})\Delta u[k] \end{aligned}$$

o que permite escrever o sistema linearizado na forma

$$\begin{aligned} \Delta x[k+1] &= A\Delta x[k] + B\Delta u[k] \\ \Delta y[k] &= C\Delta x[k] + D\Delta u[k] \end{aligned}$$

De forma análoga, podemos aplicar a transformada- z com condições iniciais nulas para obter a função de transferência

$$Y(z) = [C(zI - A)^{-1}B + D] U(z)$$

No Matlab, podemos criar sistemas a tempo discreto a partir das matrizes A, B, C e D e do período de amostragem T usando o comando `ss(A,B,C,D,T)`. O comando `tf` também pode ser usado para obter funções de transferência a partir de objetos gerados por `ss`. Note que esquecer de especificar o período de amostragem terá consequências catastróficas, dado que o sistema será interpretado como um sistema a tempo contínuo.