Controle por Computador – Parte II

22 de novembro de 2011

Projeto via Emulação

Exemplo de Projeto: Controle de azimute de uma antena

$$G(s) = \frac{1}{s(10s+1)} = \frac{0.1}{s(s+0.1)}$$

- Especificações:
  - $M_p \leq 16\%$
  - $t_a \leq 10$ s
  - $T \leq t_s/10$
  - Erro de posição para resposta a degrau $e(\infty) = 0$

Primeiramente, projetamos o controlador em tempo contínuo.

Exemplo de Projeto via Emulação

Controle de azimute de uma antena:

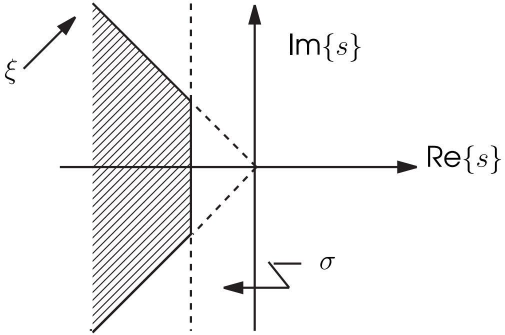
$$G(s) = \frac{1}{s(10s+1)} = \frac{0.1}{s(s+0.1)}$$

- Especificações:
  - $M_p \leq 16\%$ $\rightarrow$ $\xi \geq 0.5$
  - $t_a \leq 10\text{s}$ $\rightarrow$ $\xi\omega_n \geq 4.6/t_a = 0.46$
  - $T \leq t_s/10$ $\rightarrow$ $T \leq \frac{1.8}{10\omega_n}$
  - $e(\infty) = 0$ $\rightarrow$ pólo na origem

Projeto via Emulação

Temos que

- $\xi \geq 0.5$
- $\mathrm{Re}\{s\} = -\sigma = -\xi\omega_n \leq -4.6/10 = -0.46$



Projeto via Emulação

Escolha do controlador contínuo

$$D(s) = K\,\frac{s+\tilde{z}}{s+\tilde{p}} = K\,\frac{(s+0.1)}{(s+1)}$$

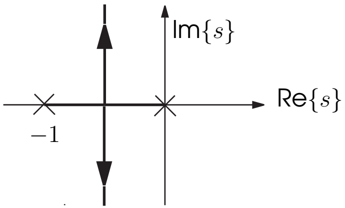
Lugar das raízes do sistema em malha fechada:

Projeto via Emulação

Escolha do controlador contínuo

$$D(s) = K\,\frac{s+\tilde{z}}{s+\tilde{p}} = K\,\frac{(s+0.1)}{(s+1)}$$

Lugar das raízes do sistema em malha fechada:



Projeto via Emulação

- Valor do ganho K? Note que em malha fechada obtém-se

$$\frac{G(s)D(s)}{1+G(s)D(s)} = \frac{0.1\,K}{s^2+s+0.1\,K} = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

Portanto:

- Escolhemos $\xi\omega_n = 0.5$
- $\xi \geq 0.5 \Rightarrow \omega_n \leq 1.$
- Para $\omega_n = 1$ obtém-se $K = 10.$

Projeto via Emulação

- Para $\xi = 0.5$, $\omega_n = 1$ e $K = 10$

$$t_s = 1.8/\omega_n = 1.8$$

O período de amostragem indicado é:

$$T = t_s/10 = 0.18 \approx 0.2 \quad \text{(exigência de projeto!)}$$

Projeto via Emulação

$$D(s) = \frac{10s+1}{s+1}$$

Obtido o controlador em tempo contínuo, aplicamos algum método de discretização para obter uma aproximação de tempo discreto.

Discretização usando mapeamento de zeros e pólos (T=0.2):

$$D(z) = \tilde{K}\,\frac{z-\hat{z}}{z-\hat{p}}$$

Projeto via Emulação

$$D(s) = \frac{10s + 1}{s + 1}$$

Obtido o controlador em tempo contínuo, aplicamos algum método de discretização para obter uma aproximação de tempo discreto.

Discretização usando mapeamento de zeros e pólos (T=0.2):

$$D(z) = \tilde{K}\,\frac{z - \hat{z}}{z - \hat{p}}$$

- Aloque o zero $\tilde{z} = 0.1$ em $\hat{z} = e^{-0.1\times 0.2} = 0.9802$
- Aloque o pólo $\tilde{p} = 1$ em $\hat{p} = e^{-1\times 0.2} = 0.8187$

Projeto via Emulação

- Calcule o ganho DC:

$$\begin{aligned}\text{Ganho DC} &= \lim_{s\to 0} D(s) = 1 \\ &= \lim_{z\to 1} D(z) = \tilde{K}\,\frac{(1-0.9802)}{(1-0.8187)} \\ &\to \tilde{K} = 9.15\end{aligned}$$

Projeto via Emulação

- Controlador discreto:

$$\begin{aligned} D(z) &= \frac{U(z)}{E(x)} = 9.15\,\frac{(z-0.9802)}{(z-0.8187)} \\ &= 9.15\frac{(1-0.9802z^{-1})}{(1-0.8187z^{-1})} \end{aligned}$$

ou

$$(1-0.8187z^{-1})U(z) = 9.15(1-0.9802z^{-1})E(z)$$

logo

$$u(k) = 0.8187u(k-1) + 9.15(e(k) - 0.9802e(k-1))$$

Projeto via Emulação

Matlab

```
n = [10 1];             % numerador
d = [1 1];              % denominador
Ds = tf(n,d);           % Controlador
Transfer function:
10 s + 1
--------
 s + 1
```

Projeto via Emulação

Matlab

```
Dz = c2d(Ds,0.2,'matched')  % equivalente discreto
Transfer function:
9.154 z - 8.973
---------------
  z - 0.8187

Dz_zpk= zpk(Dz)       % Forma fatorada
Zero/pole/gain:
9.1544 (z-0.9802)
-----------------
   (z-0.8187)
```

Projeto via Emulação

Avaliação do Projeto

Para analisar o comportamento do compensador projetado é necessário determinar a transformada-z da planta contínua precedida por um SOZ:

$$G(z) = \mathcal{Z}\left\{\frac{(1-e^{-sT})}{s}G(s)\right\} = (1-z^{-1})\,\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$$

Nota: A planta sempre deve ser discretizada usando o método de invariância a degrau.

Projeto via Emulação

Voltando ao Exemplo

Então obtém-se a função de transferência

$$G(z) = \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left\{\frac{a}{s^2(s+a)}\right\}$$

Projeto via Emulação

Voltando ao Exemplo

Então obtém-se a função de transferência

$$
\begin{aligned}
G(z) &= \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left\{\frac{a}{s^2(s+a)}\right\} \\
&= \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s^2} - \frac{1}{as} + \frac{1}{a(s+a)}\right\}
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow$ i) frações parciais acima

Projeto via Emulação

$$
\begin{aligned}
G(z) &= \frac{z-1}{z}\left\{\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{z}{a(z-1)} + \frac{z}{a(z-e^{-aT})}\right\} \\
&= \frac{(e^{-aT}+aT-1)z + (1-e^{-aT}-aTe^{-aT})}{a(z-1)(z-e^{-aT})} \\
&= 0.00199\,\frac{z+0.9934}{(z-1)(z-0.9802)}
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow$ ii) tabela de transformadas e
iii) substituindo $T \approx 0.2$s e $a = 0.1$,

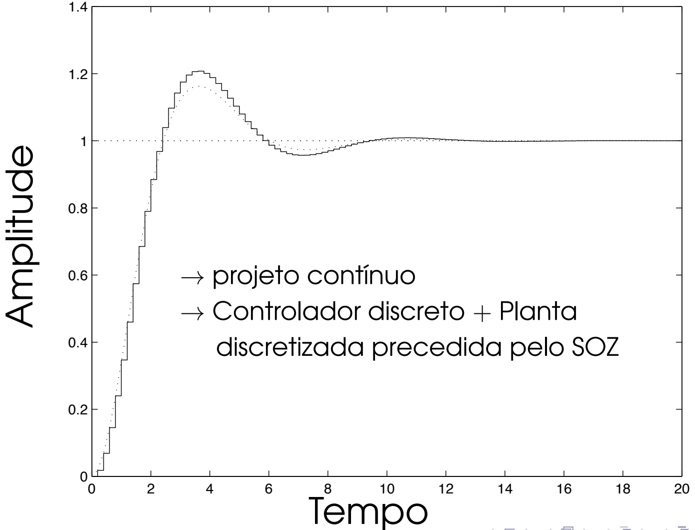
Projeto via Emulação

Matlab

```
Gz = c2d(tf([1],[10 1 0]),0.2)     % Planta discretizada
Transfer function:
0.001987 z + 0.001974
---------------------
z^2 - 1.98 z + 0.9802

Gz_zpk = zpk(Gz)      % Forma fatorada
Zero/pole/gain:
0.0019867 (z+0.9934)
--------------------
  (z-1) (z-0.9802)
```

Projeto via Emulação



Projeto via Emulação

Problema:

- Para $T = 0.2\text{s} \Rightarrow M_p = 20\%$
- Para $T = 0.1\text{s} \Rightarrow M_p = 18\%$

Solução possível:

- Modificar o projeto do controlador contínuo $D(s)$ para obter uma folga quanto à sobre-elevação da resposta temporal (especificar 12% em vez de 16% p.ex.).

Projeto via Emulação

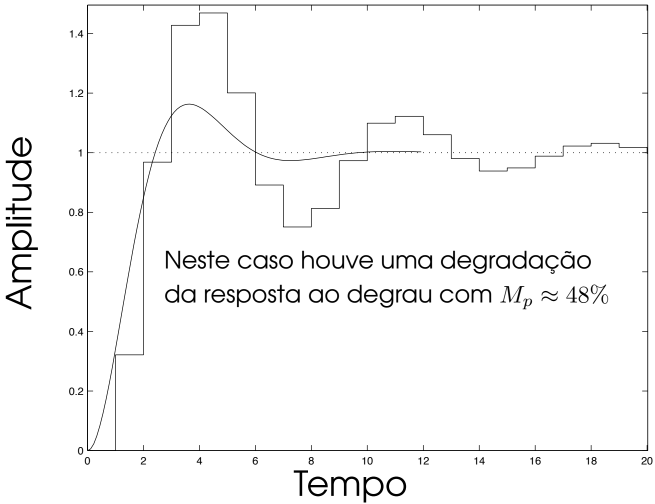
Efeito da taxa de amostragem

Considere o controle de azimute com $T = 1$. A planta + SOZ e o respectivo controlador discretizado são dados por:

$$G(z) = 0.048374 \times \frac{(z + 0.9672)}{(z - 1)(z - 0.9048)}$$

$$D(z) = 6.6425 \times \frac{(z - 0.9048)}{(z - 0.3679)}$$

Projeto via Emulação



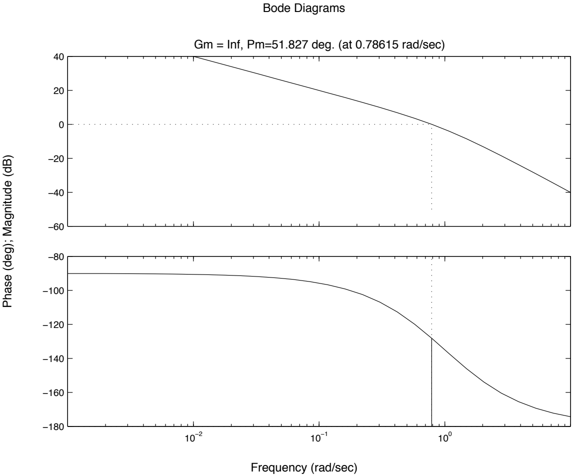
Projeto via Emulação

Efeito da taxa de amostragem

$\rightsquigarrow$ Por que uma sobre-elevação tão elevada quando se considera $T = 1$s ao invés de $T = 0.2$s (como no exemplo anterior)?

Para responder a esta questão vamos analisar a resposta em frequência do sistema contínuo em malha aberta descrito no diagrama de Bode abaixo:

Projeto via Emulação



Projeto via Emulação

Efeito da taxa de amostragem

- Uma explicação parcial para esta sobre-elevação é que o SOZ pode ser aproximado por um retardo de $T/2$. Visto que um retardo de tempo de $T/2$ produz um decréscimo em fase na frequência de cruzamento (onde $\omega_{cruz} = 0.79$ rad/s) de

$$\Delta\phi = -\frac{\omega_{cruz} T}{2} = \frac{0.79}{2}\text{rad} = 22.35^0$$

então o SOZ produz uma redução na Margem de Fase aproximadamente igual a:

$$MF = 51.8^0 - 22.35^0 = 29.45^0$$

Projeto via Emulação

- Como o amortecimento ξ está diretamente associado à margem de fase pela relação

$$\frac{MF}{100} \approx \xi$$

Logo

$$\xi \approx 0.295 \qquad \Rightarrow \qquad M_p \approx 38\% \;!!$$

Note que especificou-se uma sobre-elevação máxima de 16 %

Projeto via Emulação - Sumário

1. Projeto do controlador em tempo contínuo.
2. Escolha do tempo de amostragem (levar em conta fatores como margem de fase).
3. Projeto do filtro anti-aliasing.
4. Discretização do controlador (métodos de preferência: Tustin e Segurador de Primeira-Ordem).
5. Avaliação do projeto (sempre discretizar a planta usando 'zoh').
6. Voltar ao projeto do controlador contínuo se necessário.

PID - Versão Acadêmica

Queremos achar o equivalente discreto do controlador PID:

$$u(t) = K\left(e(t) + \frac{1}{T_i}\int_0^t e(s)\, ds + T_d \frac{de(t)}{dt}\right)$$

PID - Duas Modificações

De

$$u(t) = K\left(e(t) + \frac{1}{T_i}\int_0^t e(s)\,ds + T_d\frac{de(t)}{dt}\right)$$

Para

$$U(s) = K\left(bU_c(s) - Y(s) + \frac{1}{sT_i}\left(U_c(s) - Y(s)\right) - \frac{sT_d}{1 + sT_d/N}Y(s)\right)$$

- U_c refere-se ao sinal de comando (referência) e Y ao sinal de saída

PID - Duas Modificações

De

$$u(t) = K\left(e(t) + \frac{1}{T_i}\int_0^t e(s)\, ds + T_d\frac{de(t)}{dt}\right)$$

Para

$$U(s) = K\left(bU_c(s) - Y(s) + \frac{1}{sT_i}\left(U_c(s) - Y(s)\right) - \frac{sT_d}{1 + sT_d/N}Y(s)\right)$$

- U_c refere-se ao sinal de comando (referência) e Y ao sinal de saída
- Derivada não é realizável. N tipicamente entre 3 e 20.
- Observou-se empiricamente que há uma vantagem em não ter a derivada agindo sobre o sinal de comando e em atenuar a contribuição do sinal de comando no termo proporcional ($b \in (0, 1)$).

Discretização do Termo Proporcional

Nenhuma aproximação necessária

$$P(kh) = K(bu_c(kh) - y(kh))$$

Discretização do Termo Integral

$$I(t) = \frac{K}{T_i} \int_0^t e(s)\, ds$$

Usamos a aproximação de Euler (mais simples):

Discretização do Termo Integral

$$I(t) = \frac{K}{T_i} \int_0^t e(s)\ ds$$

Usamos a aproximação de Euler (mais simples):

$$I(kh + h) = I(kh) + \frac{Kh}{T_i} e(kh)$$

Discretização do Termo Derivativo

$$\frac{T_d}{N}\frac{dD(t)}{dt} + D(t) = -KT_d\frac{dy(t)}{dt}$$

Usamos a aproximação de atraso:

$$D(kh) = \frac{T_d}{T_d + Nh}D(kh-h) - \frac{KT_dN}{T_d + Nh}\left(y(kh) - y(kh-h)\right)$$

- Essa aproximação é simples e estável sempre.

Discretização do Termo Derivativo

$$\frac{T_d}{N}\frac{dD(t)}{dt} + D(t) = -KT_d\frac{dy(t)}{dt}$$

Usamos a aproximação de atraso:

$$D(kh) = \frac{T_d}{T_d + Nh}D(kh-h) - \frac{KT_dN}{T_d+Nh}\left(y(kh) - y(kh-h)\right)$$

- Essa aproximação é simples e estável sempre.
- O pólo correspondente a $-N/T_d$ converge para 0 quanto $T_d \to 0$.
- Com o método de Tustin, o pólo correspondente a $-N/T_d$ convergiria para -1.

Discretização de PID - Taxa de Amostragem

- Para o termo integral:

$$\frac{h}{T_i} \approx 0.1 \text{ a } 0.3$$

- Quando usamos Ziegler-Nichols, isso dá: $\frac{h}{L} \approx 0.3 \text{ a } 1$
- Para o termo derivativo:
  - O período de amostragem deve ser pequeno o bastante para não afetar o avanço de fase do termo derivativo.
  - Por isso,

$$\frac{hN}{T_d} \approx 0.2 \text{ a } 0.6$$

  - Quando usamos Ziegler-Nichols, isso dá: $\frac{h}{L} \approx 0.01 \text{ a } 0.06$
- Conclusão: O termo derivativo é determinante na escolha da taxa de amostragem.

PID - Discretização

- u(kh)=P(kh)+I(kh)+D(kh)
- A seleção dos paramêtros K, T_i, T_d é feita para a planta contínua.
- Taxa de amostragem:
  - Para PI:
    $$\frac{h}{T_i} \approx 0.1 \text{ a } 0.3$$
  - Para PID:
    $$\frac{hN}{T_d} \approx 0.2 \text{ a } 0.6$$

Especificações de Desempenho no Plano z

Teorema (do Valor Final)

$$\lim_{k\to\infty} x(k) = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$$

Especificações de Desempenho no Plano z

Regime Permanente

- Se
$$\frac{E(z)}{R(z)} = \frac{1}{1 + D(z)G(z)}$$
- Constante de posição $K_p = ?$
- Constante de velocidade $K_v = ?$

Especificações de Desempenho no Plano z

Regime Permanente

- Se
$$\frac{E(z)}{R(z)} = \frac{1}{1 + D(z)G(z)}$$
- Constante de posição $K_p = D(1)G(1)$
- Constante de velocidade $K_v = \lim_{z\to 1}(z-1)D(z)G(z)$

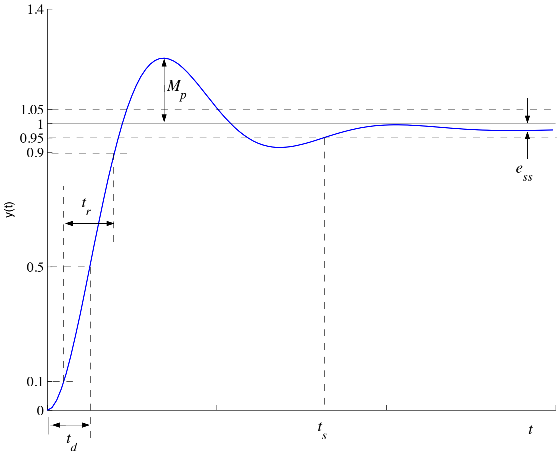
Especificações de Desempenho no Plano z

Resposta transitória

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

As especificações para resposta transitória são normalmente refletidas em termos de ξ (fator de amortecimento) e ω_n (frequência natural) do sistema em malha fechada de 2a. ordem padrão.

Especificações de Desempenho no Plano z



Especificações de Desempenho no Plano z

Máxima sobre-elevação – Overshoot

$$M_p(\%) = 100 \times e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} \approx (1 - \xi/0.6)100, \qquad 0 \leq \xi < 1$$

Tempo de subida

$$t_s \approx 1.8/\omega_n$$

Tempo de acomodação

$$t_a = 4.6/(\xi\omega_n)$$

Relações entre Planos s e Plano z

Especificações no plano-z

Os pólos em malha fechada do sistema de 2a. ordem no caso contínuo são

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

e podem ser mapeados em lugares do plano-z através da relação $z = e^{sT}$.

Relações entre Planos s e Plano z

Especificações no plano-z

Seja

$$s = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

A relação $z = e^{sT}$ é periódica com

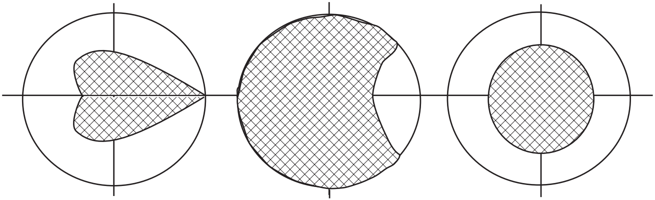
$$z = e^{-\xi\omega_n} e^{\pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$|z| = e^{-\xi\omega_n} \quad \text{e} \quad \measuredangle\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,T$$

Relações entre Planos s e Plano z

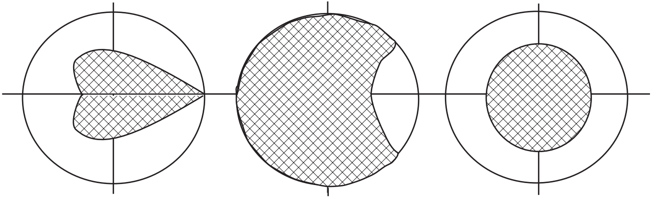
Como a parte real $-\xi\omega_n$ é mapeada em $r = e^{-\xi\omega_n T}$, a especificação $\xi\omega_n \geq 4.6/t_a$ é mapeado num círculo de raio

$$r_0 = e^{-4.6\,T/t_a}$$



Relações entre Planos s e Plano z

Dados M_p, t_s e t_a, então

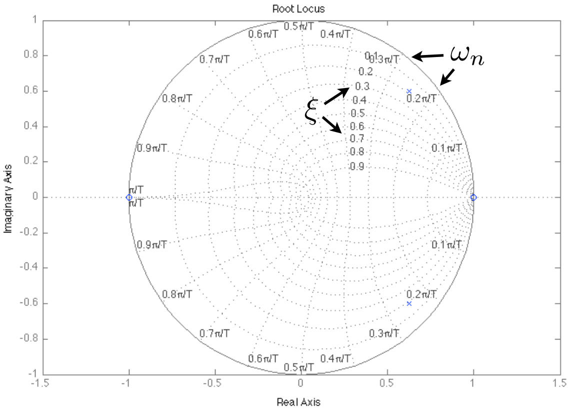


$$\xi \geq 0.6\left(1 - \frac{M_p}{100}\right) \qquad \omega_n \geq 1.8/t_s \qquad \xi\omega_n \geq 4.6/t_a$$

Apenas precisamos alocar os pólos na interseção das três regiões.

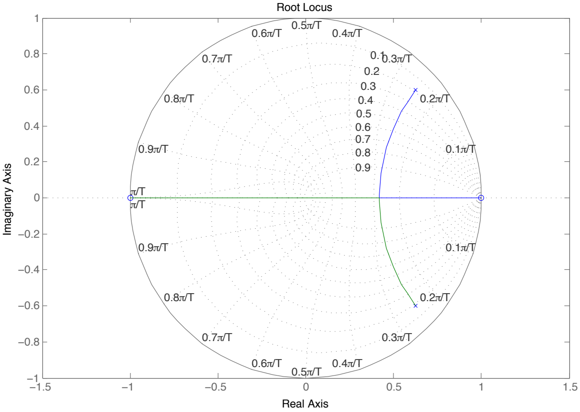
Relações entre Planos s e Plano z

Curvas no plano-z de ξ constante e ω_n constante



Projeto Usando Lugar das Raízes

A regra para calcular o lugar das raízes é a mesma. Só muda o lugar onde queremos alocar os pólos.



Projeto Usando Lugar das Raízes

No Matlab

```
rlocus(Gz)      % Plota root locus da planta discreta
zgrid             % Gera grid com curvas de
                    % \xi e w_n constantes
```

Lista de Exercícios

Q1. Verifique a estabilidade dos seguinte sistemas:

a) $y[k] = 0.4y[k-1] - 0.4y[k-2] + u[k-1]$

b) $y[k] = 1.7y[k-1] - y[k-2]$ (sistema autônomo)

c) $y[k] = 0.7y[k-1] + 0.5y[k-2] + u[k-1]$

Lista de Exercícios

Q2. Assuma que as seguintes funções de transferência são precedidas por um SOZ e calcule a função de transferência discreta resultante.

a) $G_1(s) = \frac{1}{s^2-1}$

b) $G_2(s) = \frac{e^{-2.5s}}{s+1}$

Lista de Exercícios

Q3. O seguinte compensador foi projetado para avançar a fase de 60° na frequência $\omega_1 = 3$ rad/s:

$$H(s) = \frac{s+1}{0.1s+1}$$

Para cada um dos métodos abaixo, calcule e plote a posição dos zeros e pólos do compensador discreto e calcule o avanço de fase para $z_1 = e^{j\omega_1 T}$ se $T = 0.25$ s.

a) Regra do Avanço

b) Regra do Atraso

c) Método de Tustin

d) Step Invariance

e) Mapeamento de pólos e zeros

Lista de Exercícios

Q4. Usando o Matlab, aplique os métodos de discretização abaixo para obter controladores de azimute para o exemplo de projeto dado em aula. Plote a resposta a degrau do sistema de controle obtido e compare com o projeto original, que usava mapeamento de pólos e zeros.

a) Método de Tustin ('tustin')

b) Step Invariance ('zoh')

c) First Order Hold ('foh')

Na sua resposta, apresente os controladores obtidos para cada caso e um gráfico comparando as respostas a degrau. Sugestão: use as funções tf, c2d, series, feedback, step.

Obs.: Alunos que não tenham acesso ao Matlab podem usar GNU Octave + controls package, que usa quase as mesmas funções que o Matlab: tf, c2d, sysmult, feedback, step (contudo, o método 'zoh' deve ser implementado indiretamente já que apenas os métodos equivalentes a 'imp' e 'tustin' existem no octave).

Lista de Exercícios

Q5. Considere a planta com atraso:

$$G(s) = \frac{e^{-0.2s}}{(s+1)(s+3)} \quad .$$

Projete um controlador PID contínuo usando a ferramenta sisotool do Matlab. Proponha uma discretização desse sistema de controle e plote a resposta a degrau do sistema obtido, comparando-a com a resposta do controlador contínuo. Escolha o período de amostragem de forma que o sobressinal não cresça mais de 10% com relação ao projeto do controlador contínuo. Nota: você precisa fazer uma aproximação de Padé do atraso antes de usar o sisotool.