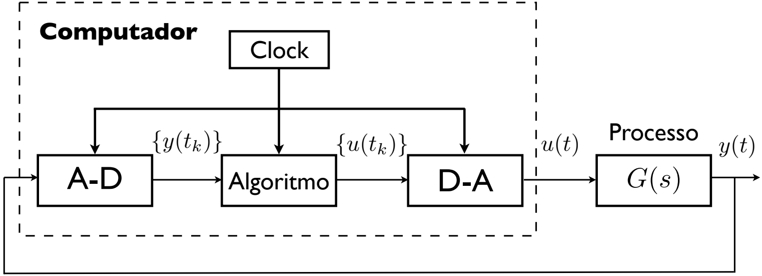
# Controle por Computador - Parte I

22 de novembro de 2011

# Controle por Computador

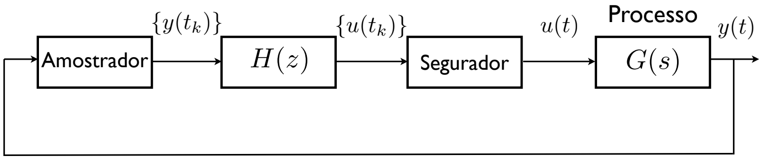



Problemas:

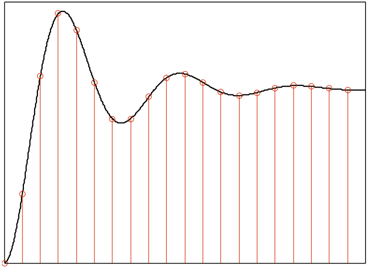
- **Tempo** é discreto no computador.
- **Espaço** é discreto no computador (não vamos tratar esse problema).

# Decomposição: Amostrador, Dinâmica Discreta, Segurador

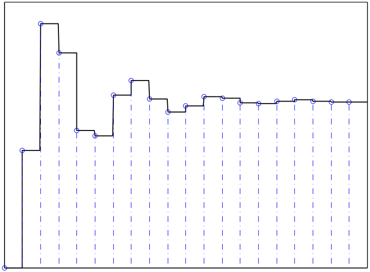
O diagrama acima pode ser rescrito da seguinte forma:



# Decomposição: Amostrador, Dinâmica Discreta, Segurador



(a) Amostragem (tempo contínuo para discreto)



(b) Segurador (tempo discreto para contínuo)

# Revisão de Transformada-z

$$\tilde{F}(z) = \mathcal{Z}\{f(kh)\} = \sum_{-\infty}^{\infty} f(kh) z^{-k}$$

- $\tilde{F}(e^{j\omega})$ é periódica com período $2\pi$.
- Região de estabilidade: $|z| < 1$.
- Funções de transferência e interconexões são como Laplace.

# Relação entre Transformada de Laplace e Transformada-$z$

## Teorema

*Seja $F(s)$ a transformada de Laplace de $f(t)$ e $\tilde{F}(z)$ a transformada-z de $f(kT)$. Então, se $F(s)$ é integrável,*

$$\tilde{F}(e^{sT}) = \frac{1}{T}\sum_{-\infty}^{\infty} F(s + jk\omega_s)$$

*onde $\omega_s = 2\pi/T$ é a frequência de amostragem.*

Primeira Conclusão: $z \sim e^{sT}$

# Teorema de Shannon

**Teorema**

*Um sinal de tempo contínuo* $f(t)$ *com banda* $(-\omega_0, \omega_0)$ *pode ser reconstruído a partir do sinal amostrado* $f(kT)$ *se a frequência de amostragem* $\omega_s$ *é superior a* $2\omega_0$*. Tal reconstrução é dada por*

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(kT)\ sinc\ \frac{\omega_s(t-kT)}{2}$$

*onde* $\omega_s = 2\pi/T$ *é a frequência de amostragem.*

Frequência de Nyquist: $2\omega_0$

Tipicamente escolhemos $\omega_s$ de 10 a 40 vezes $\omega_0$

# Exercício

Prove a primeira parte do Teorema de Shannon.

# Aliasing: Exemplo

E se o sinal não for passa-baixa?

# Aliasing: Exemplo

## E se o sinal não for passa-baixa?

- Considere o sistema de aquecimento de uma caldeira.
- O sensor de temperatura tem um tempo de amostragem de 2 min.
- Este sensor indica uma oscilação com período de 38 min no sistema de aquecimento da caldeira.
- Mas o sensor de pressão indica um período de oscilação de 2.11 min.
- O que está acontecendo?

# Aliasing: Exemplo

## E se o sinal não for passa-baixa?

- Considere o sistema de aquecimento de uma caldeira.
- O sensor de temperatura tem um tempo de amostragem de 2 min.
- Este sensor indica uma oscilação com período de 38 min no sistema de aquecimento da caldeira.
- Mas o sensor de pressão indica um período de oscilação de 2.11 min.
- O nosso primeiro teorema indica que $\tilde{F}$ terá um delta na frequência $\omega_a = \omega_s - \omega_0$.
- $\omega_a = \omega_s - \omega_0 = 2\pi(1/2 - 1/2.11) = 0.164 \Longrightarrow T_a = 38$ min.

# Aliasing

Além da contribuição de $\omega_0$, $\tilde{F}(e^{j\omega_0})$ recebe contribuições de $\omega_0 + k\omega_s$, para todo $k$ inteiro. Portanto, é impossível conhecer $F(j\omega_0)$ a partir de $\tilde{F}(e^{j\omega_0})$.

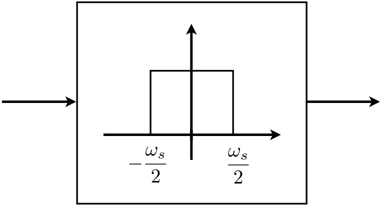
# Aliasing

E se o sinal não for passa-baixa? Que fazer?

# Aliasing

E se o sinal não for passa-baixa? Que fazer?

Usamos um Filtro *Anti-aliasing*




Filtros mais usados: Bessel (curva de fase o mais linear possível)
Butterworth (curva de ganho o mais plana possível)

# Filtro Anti-aliasing

Tipicamente este filtro introduz um atraso de fase que deve ser levado em conta no projeto de controle.

Por exemplo, para $\omega_s$ de 10 a 40 vezes $\omega_0$ e um filtro de Bessel de 6ª ordem com atenuação de 0.1 em $\omega_0$, temos um atraso de fase de 23° em $\omega_0$.

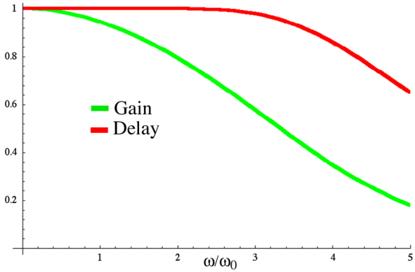
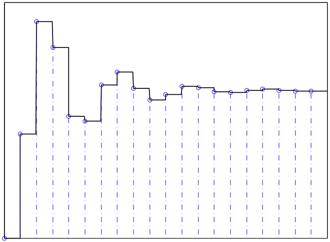



**Figura:** Filtro de Bessel de 4ª ordem

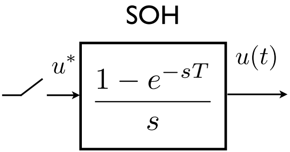
# Estrutura do Amostrador

# Segurador de Ordem Zero

O segurador de ordem zero gera um pulso retangular de duração $T$ e valor $u(kT)$ começando no instante $kT$.



(a) Saída do segurador




(b) Função de Transferência do Segurador de Ordem Zero

# Dinâmica do Segurador

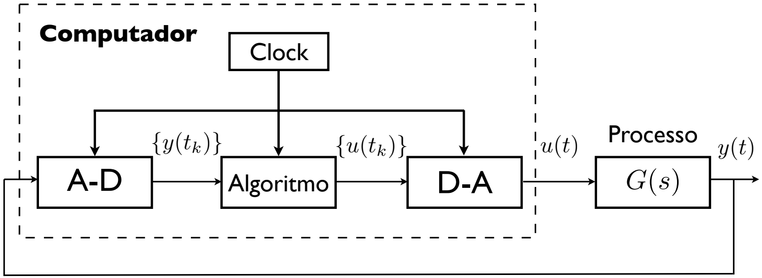
O segurador tem um efeito aproximado de um atraso de $T/2$:

$$SOH = \frac{1 - e^{-sT}}{s} = \frac{e^{\frac{sT}{2}} - e^{-\frac{sT}{2}}}{s} e^{-\frac{sT}{2}} \approx T e^{-\frac{sT}{2}}$$

Conclusão: Filtro Anti-aliasing e Segurador introduzirão um atraso de fase com relação ao controlador original (diminuição da margem de fase).

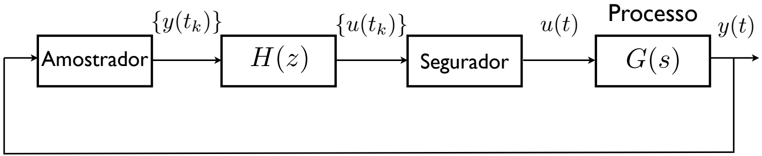
# Redução à Dinâmica de Tempo Discreto

Nosso objetivo é reduzir o diagrama abaixo a um diagrama de tempo discreto somente.



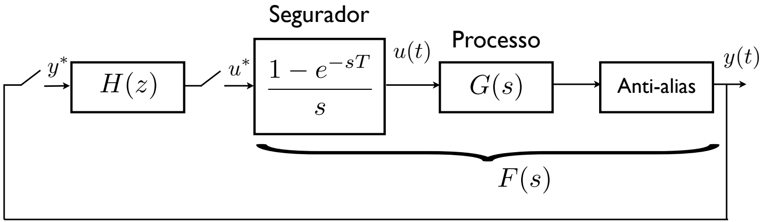
# Redução à Dinâmica de Tempo Discreto

Primeiro passo: Fazemos a decomposição do computador em Segurador, Amostrador e dinâmica discreta $H(z)$.



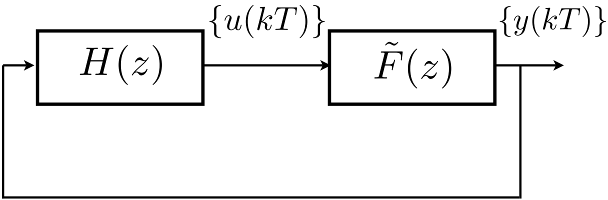
# Redução à Dinâmica de Tempo Discreto

Segundo passo: Juntamos todos os blocos de dinâmica contínua num bloco com função de transferência $F(s)$.



# Redução à Dinâmica de Tempo Discreto

Terceiro passo: Calculamos o equivalente discreto de $F(s)$.




Notação:

$$\tilde{F}(z) := \mathcal{Z}\{F(s)\} := \mathcal{Z}\{f(kT)\}$$

Tipicamente fazemos:

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{1-e^{-sT}}{s}G(s)\right\} = (1-z^{-1})\,\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$$

## Exemplo

Calcule

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{1-e^{-sT}}{s}G(s)\right\}$$

para $T = 0.1$ e

$$G(s) = \frac{s+5}{s+10}$$

Solução:

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{1-e^{-sT}}{s}G(s)\right\} = (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{0.5}{s} + \frac{0.5}{s+10}\right\}$$

$$= (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left\{0.5u(kT) + 0.5e^{-10kT}u(kT)\right\}$$

$$= (1-z^{-1})\left[\frac{0.5z}{z-1} + \frac{0.5z}{z-e^{-1}}\right] = \frac{z-(1+e^{-1})/2}{z-e^{-1}}$$

# Exemplo

Calcule

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{1-e^{-sT}}{s}G(s)\right\}$$

para $T = 0.1$ e

$$G(s) = \frac{s+5}{s+10}$$

Solução:
No Matlab: H=c2d(G,T,'zoh')

$$\frac{z-0.6839}{z-0.3979}$$

## Controlador Digital: Método Indireto ou por Emulação

Passos:

**i)** Planta Contínua

**ii)** Projeto de Controlador Contínuo

**iii)** Obtenção do Controlador Discreto que se aproxima do Controlador Contínuo

**iv)** Análise de Desempenho

**v)** Se necessário voltar ao passo ii) ou iii)

# Métodos de Discretização: Step Invariance

Nesse tipo de discretização, deseja-se que a resposta a degrau do controlador discreto seja a mesma do controlador contínuo:

$$\underbrace{\frac{\hat{H}(z)}{(1 - z^{-1})}}_{\text{resposta a degrau de } \hat{H}} = \mathcal{Z}\left\{\frac{H(s)}{s}\right\}$$

Portanto,

$$\hat{H}(z) = (1 - z^{-1})\ \mathcal{Z}\left\{\frac{H(s)}{s}\right\}$$

Equivalentemente, a entrada do controlador passa primeiro por um segurador de ordem zero.

Note: Apenas a resposta a degrau é preservada, não há garantias quanto a outros tipos de entrada.

# Métodos de Discretização: Step Invariance

$$\begin{aligned}
\hat{H}(z) &= (1 - z^{-1})\ \mathcal{Z}\left\{\frac{H(s)}{s}\right\} \\
&= (1 - z^{-1})\ \mathcal{Z}\left\{\frac{a_0}{s} + \frac{a_1}{s - p_1} + \ldots + \frac{a_n}{s - p_n}\right\}
\end{aligned}$$

# Métodos de Discretização: Step Invariance

$$
\begin{aligned}
\hat{H}(z) &= (1 - z^{-1})\ \mathcal{Z}\left\{\frac{H(s)}{s}\right\} \\
&= (1 - z^{-1})\ \mathcal{Z}\left\{\frac{a_0}{s} + \frac{a_1}{s - p_1} + \ldots + \frac{a_n}{s - p_n}\right\} \\
&= (1 - z^{-1})\ \mathcal{Z}\left\{\left[a_0 + a_1 e^{p_1 kT} + \ldots + a_n e^{p_n kT}\right] u(kT)\right\}
\end{aligned}
$$

# Métodos de Discretização: Step Invariance

$$
\begin{aligned}
\hat{H}(z) &= (1 - z^{-1})\ \mathcal{Z}\left\{\frac{H(s)}{s}\right\} \\
&= (1 - z^{-1})\ \mathcal{Z}\left\{\frac{a_0}{s} + \frac{a_1}{s - p_1} + \ldots + \frac{a_n}{s - p_n}\right\} \\
&= (1 - z^{-1})\ \mathcal{Z}\left\{\left[a_0 + a_1 e^{p_1 kT} + \ldots + a_n e^{p_n kT}\right] u(kT)\right\} \\
&= (1 - z^{-1})\left[\frac{a_0}{1 - z^{-1}} + \frac{a_1 z}{z - e^{p_1 T}} + \ldots + \frac{a_n z}{z - e^{p_n T}}\right]
\end{aligned}
$$

# Métodos de Discretização: Step Invariance

$$\begin{aligned}
\hat{H}(z) &= (1 - z^{-1})\ \mathcal{Z}\left\{\frac{H(s)}{s}\right\} \\
&= (1 - z^{-1})\ \mathcal{Z}\left\{\frac{a_0}{s} + \frac{a_1}{s - p_1} + \ldots + \frac{a_n}{s - p_n}\right\} \\
&= (1 - z^{-1})\ \mathcal{Z}\left\{\left[a_0 + a_1 e^{p_1 kT} + \ldots + a_n e^{p_n kT}\right] u(kT)\right\}
\end{aligned}$$

**Conclusão:**

Os pólos são mapeados de acordo com a relação $p_i^z = e^{p_i T}$.

# Métodos de Discretização: Step Invariance

Os pólos são mapeados de acordo com a relação $p_i^z = e^{p_i T}$:

$$\hat{H}(z) = (1 - z^{-1}) \left[ \frac{a_0}{1 - z^{-1}} + \frac{a_1 z}{z - e^{p_1 T}} + \ldots + \frac{a_n z}{z - e^{p_n T}} \right]$$

- mas não há garantias quanto à posição dos zeros
- há possibilidade de aliasing
- a aproximação da curva de fase é pobre
- por isso, esse método não é adequado para controle

# Mapeamento de Pólos e Zeros (Zero-Pole Matching)

Ideia: Tanto pólos quanto zeros devem ser mapeados de acordo com a relação $z \sim e^{sT}$

- **Pólos:** $p_i \Longrightarrow p_i^z = e^{p_i T}$

# Mapeamento de Pólos e Zeros (Zero-Pole Matching)

Ideia: Tanto pólos quanto zeros devem ser mapeados de acordo com a relação $z \sim e^{sT}$

- **Pólos:** $p_i \Longrightarrow p_i^z = e^{p_i T}$
- **Zeros:** (finitos) $z_i \Longrightarrow z_i^z = e^{z_i T}$

# Mapeamento de Pólos e Zeros (Zero-Pole Matching)

Ideia: Tanto pólos quanto zeros devem ser mapeados de acordo com a relação $z \sim e^{sT}$

- **Pólos:** $p_i \Longrightarrow p_i^z = e^{p_i T}$
- **Zeros:** (finitos) $z_i \Longrightarrow z_i^z = e^{z_i T}$
- **Zeros:** (infinitos) Se $z_i = \infty \Longrightarrow z_i^z = -1$
  - O mapeamento de frequências reais de $j\omega = 0$ até $j\omega = \pi$, são mapeadas em $z = e^{j0} = 1$ até $z = e^{j\pi} = -1$.
    Assim, o ponto $z = -1$ representa a maior frequência possível para uma função de transferência possível.

# Mapeamento de Pólos e Zeros (Zero-Pole Matching)

Ideia: Tanto pólos quanto zeros devem ser mapeados de acordo com a relação $z \sim e^{sT}$

- **Pólos:** $p_i \Longrightarrow p_i^z = e^{p_i T}$
- **Zeros:** (finitos) $z_i \Longrightarrow z_i^z = e^{z_i T}$
- **Zeros:** (infinitos) Se $z_i = \infty \Longrightarrow z_i^z = -1$
- **Ganho DC:** Escolhido de forma que $\hat{H}(z=1) = H(s=0)$.

# Mapeamento de Pólos e Zeros (Zero-Pole Matching)

Ideia: Tanto pólos quanto zeros devem ser mapeados de acordo com a relação $z \sim e^{sT}$

- **Pólos:** $p_i \Longrightarrow p_i^z = e^{p_i T}$
- **Zeros:** (finitos) $z_i \Longrightarrow z_i^z = e^{z_i T}$
- **Zeros:** (infinitos) Se $z_i = \infty \Longrightarrow z_i^z = -1$
- **Ganho DC:** Escolhido de forma que $\hat{H}(z=1) = H(s=0)$.

$$\hat{H}(z) = K \frac{(z+1)^d (z - e^{z_1 T}) \cdots (z - e^{z_{n-d} T})}{(z - e^{p_1 T}) \cdots (z - e^{p_n T})}$$

- não fornece boa aproximação na frequência e no tempo
- há possibilidade de aliasing
- mais usada para discretizar filtros

# Métodos de Discretização: Integração Numérica

Ideia

- Representar uma função de transferência por uma equação diferencial e derivar uma equação a diferenças aproximando a equação diferencial

# Métodos de Integração:

Considere a função de transferência

$$\frac{U(s)}{E(s)} = H(s) = \frac{a}{s+a}$$

É equivalente à equação diferencial

$$\dot{u} + au = ae$$

logo

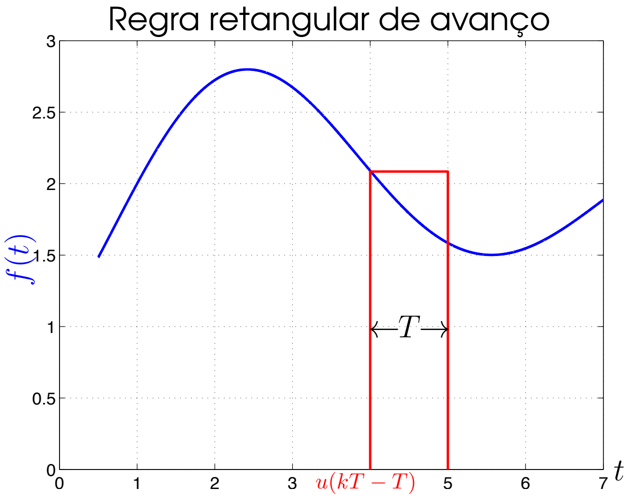
$$u(t) = \int_0^t [-au(\tau) + ae(\tau)]d\tau$$

$$\dot{u} + au = ae$$

logo

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_0^t [-au(\tau) + ae(\tau)]d\tau \\ u(kT) &= \int_0^{kT-T} [-au(\tau) + ae(\tau)]d\tau + \int_{kT-T}^{kT} \overbrace{[-au(\tau) + ae(\tau)]}^{f(t)} d\tau \\ &= u(kT-T) + \begin{cases} \text{área de } f(t) \\ \text{em } kT - T \leq \tau < kT \end{cases} \end{aligned}$$

# Métodos de Integração: Retangular de avanço (Euler)



# Métodos de Integração: Retangular de avanço (Euler)

$$
\begin{aligned}
u(kT) &= \int_0^{kT-T} [-au(\tau) + ae(\tau)]d\tau + \int_{kT-T}^{kT} \overbrace{[-au(\tau) + ae(\tau)]}^{f(t)} d\tau \\
&= u(kT-T) + \left\{ \begin{array}{l} \text{área de } f(t) \\ \text{em } kT - T \leq \tau < kT \end{array} \right. \\
&\approx u(kT-T) + T\underbrace{[-au(kT-T) + ae(kT-T)]}_{f(kT-T)}
\end{aligned}
$$

## Métodos de Integração: Retangular de avanço (Euler)

$$u(kT) \approx u(kT-T) + T\underbrace{[-au(kT-T) + ae(kT-T)]}_{f(kT-T)}$$

logo

$$U(z) = (1-aT)z^{-1}U(z) + aTz^{-1}E(z)$$

$$\begin{aligned}\frac{U(z)}{E(z)} &= \frac{aTz^{-1}}{1-(1-aT)z^{-1}} \\ &= \frac{a}{(z-1)/T+a} \approx \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{a}{s+a}\end{aligned}$$

# Métodos de Integração: Retangular de avanço (Euler)

$$\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{a}{(z-1)/T + a} \approx \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{a}{s+a}$$

logo

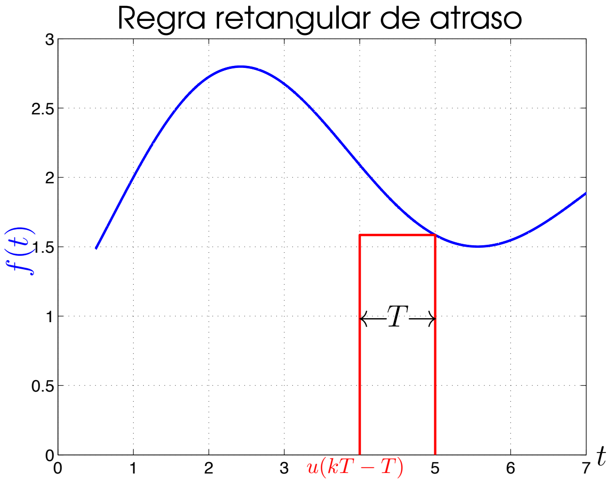
$$\frac{U(z)}{E(z)} \approx \left.\frac{U(s)}{E(s)}\right|_{s=(z-1)/T}$$

## Mapeamento pela Regra do Avanço

*Substituímos*

$$s \Longleftarrow \frac{z-1}{T} \quad ou \quad z \Longleftarrow 1 + Ts$$

# Métodos de Integração: Retangular de Atraso



# Métodos de Integração: Retangular de Atraso

$$u(kT) \approx u(kT - T) + T[-au(kT) + ae(kT)]$$

Portanto,

$$\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{a}{(1 - z^{-1})/T + a} \approx \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{a}{s + a}$$

logo

$$\frac{U(z)}{E(z)} \approx \left.\frac{U(s)}{E(s)}\right|_{s=(z-1)/(Tz)}$$

## Mapeamento pela Regra do Atraso

*Substituímos*

$$s \Longleftarrow \frac{z-1}{Tz} \quad ou \quad z \Longleftarrow \frac{1}{1 - Ts}$$

# Métodos de Integração: Retangular de Atraso

Mapeamento do eixo $j\omega$:

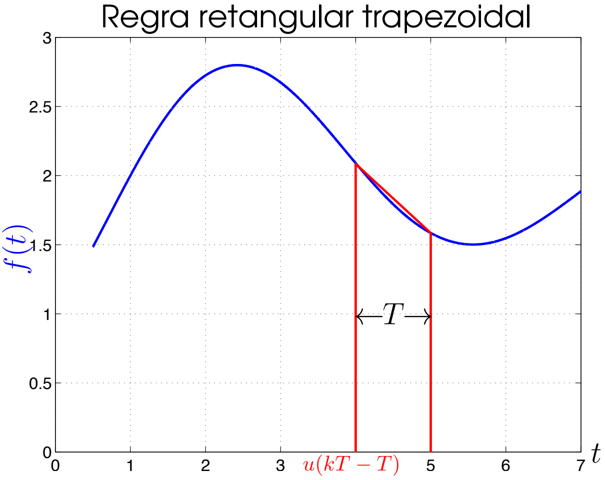
$$
\begin{aligned}
z &= \frac{1}{1 - Ts} = \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{1 - Ts} - \frac{1}{2} \right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1 + Ts}{1 - Ts}
\end{aligned}
$$

logo para $s = j\omega$,

$$
\left| z - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}
$$

Disco de raio $\frac{1}{2}$ e centro em $\frac{1}{2}$

# Métodos de Integração: Regra trapezoidal



# Métodos de Integração: Regra trapezoidal

$$\begin{aligned} u(kT) &\approx u(kT-T) + \frac{T}{2}\underbrace{[-au(kT)+ae(kT)]}_{f(kT)} \\ &\quad + \frac{T}{2}\underbrace{[-au(kT-T)+ae(kT-T)]}_{f(kT-T)} \end{aligned}$$

logo,

$$\frac{U(z)}{E(z)} =$$

# Métodos de Integração: Regra trapezoidal

$$
\begin{aligned}
u(kT) \quad \approx \quad & u(kT - T) + \frac{T}{2}\underbrace{[-au(kT) + ae(kT)]}_{f(kT)} \\
& + \frac{T}{2}\underbrace{[-au(kT - T) + ae(kT - T)]}_{f(kT-T)}
\end{aligned}
$$

logo,

$$
\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{a}{(2/T)[(z-1)/(z+1)] + a} \quad \approx \quad \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{a}{s+a}
$$

# Métodos de Integração: Regra trapezoidal

$$\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{a}{(2/T)[(z-1)/(z+1)]+a} \approx \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{a}{s+a}$$

logo

$$\frac{U(z)}{E(z)} \approx \left.\frac{U(s)}{E(s)}\right|_{s=(2/T)(z-1)/(z+1)}$$

Portanto, temos o mapeamento

$$s \Longleftarrow \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$$

ou

$$z \Longleftarrow \frac{1+Ts/2}{1-Ts/2}$$

# Transformada Bilinear ou Método de Tustin

É o mapeamento obtido através da regra do trapézio.

## Mapeamento por Tustin ou Transformada Bilinear

*Substituímos*

$$s \Longleftarrow \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} \quad ou \quad z \Longleftarrow \frac{1+Ts/2}{1-Ts/2}$$

- Não há aliasing;
- Bom compromisso entre frequência e tempo
- Melhores resultados entre os métodos de emulação

# Transformada Bilinear ou Método de Tustin

É o mapeamento obtido através da regra do trapézio.

## Mapeamento por Tustin ou Transformada Bilinear

*Substituímos*

$$s \Longleftarrow \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} \quad ou \quad z \Longleftarrow \frac{1+Ts/2}{1-Ts/2}$$

Mapeamento do eixo $j\omega$. Considere $s_w = j\omega_w$, logo

$$z \Longleftarrow \frac{1+Tj\omega_w/2}{1-Tj\omega_w/2} \rightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ \measuredangle z = 2\arctan\left(\omega_w T/2\right) \end{cases}$$

$$s = j0 \Longrightarrow z = 1 \quad \text{e} \quad s = j\infty \Longrightarrow z = -1$$

O eixo $j\omega$ é mapeado no círculo unitário e não há aliasing, i.e., o círculo é percorrido apena uma vez quando variamos $\omega$ de $-\infty$ a $\infty$.

# Transformada Bilinear ou Método de Tustin

É o mapeamento obtido através da regra do trapézio.

## Mapeamento por Tustin ou Transformada Bilinear

*Substituímos*

$$s \Longleftarrow \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} \quad ou \quad z \Longleftarrow \frac{1+Ts/2}{1-Ts/2}$$

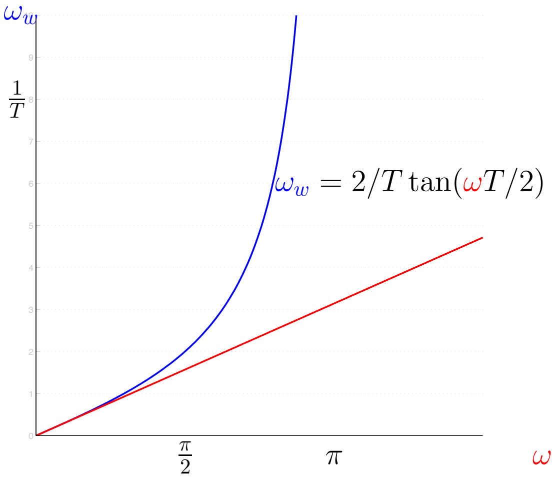
Mapeamento do eixo $j\omega$. Considere $s_w = j\omega_w$, logo

$$z \Longleftarrow \frac{1+Tj\omega_w/2}{1-Tj\omega_w/2} \rightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ \measuredangle z = 2\arctan\left(\omega_w T/2\right) \end{cases}$$

- $z = e^{sT}$ para $s = j\omega$: $\measuredangle z = \omega T$

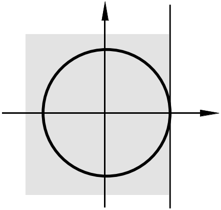
$$\omega T = 2\arctan\left(\omega_w T/2\right)$$

# Método de Tustin: Distorção da fase

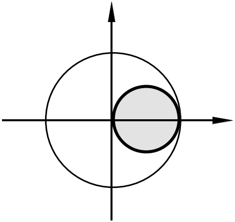


# Métodos de Integração: Comparação

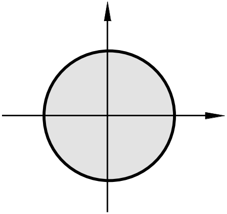
Mapeamento da região de estabilidade $\mathrm{Re}\{s\} < 0$



(c) Regra do Avanço



(d) Regra do Atraso



(e) Tustin

$z \Longleftarrow 1 + Ts$

$z \Longleftarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1+Ts}{1-Ts}$

$z \Longleftarrow \frac{1+Ts/2}{1-Ts/2}$

O método de Tustin preserva a região de estabilidade.

# Exercício

Mostre a equivalência dos métodos de discretização quando $T \to 0$.

# Discretizando no MatLab

- SYSD = c2d(SYS,Ts,method)
  - SYS $\rightarrow$ sistema de tempo contínuo
  - SYSD $\rightarrow$ sistema de tempo discreto
  - TS $\rightarrow$ tempo de amostragem
  - method = 'zoh' (zero-order hold)
  - method = 'foh' (first-order hold)
  - method = 'tustin' (Tustin's bilinear)
  - method = 'prewarp',wc (Bilinear Prewarping)
  - method = 'matched' (zero-pole matching)

# Escolha do Tempo de Amostragem

- Aproximamos o SOZ por um atraso de $T/2$
- Assuma que a margem de fase pode ser diminuída de $5^\circ$ a $15^\circ$.
- Isto leva à seguinte regra:

$$\omega_{cruz} T \sim 0.15 \text{ a } 0.5 \text{ rad}$$

ou

$$\omega_s \sim 12\omega_{cruz} \text{ a } 40\omega_{cruz}$$