

Universidade Federal de Minas Gerais - Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Elétrica

**EEE945 - INTRODUÇÃO AOS PROCESSOS ESTOCÁSTICOS**

**PROVA 2**

Instrutores: Alexandre R. Mesquita e Eduardo M. A. M. Mendes

**Questão 1.** (70 pontos) Considere um cubo com vértices 000, 001, 010, 100, 110, 101, 011 e 111. Suponha que uma mosca se mova ao longo das arestas do cubo indo de um vértice para outro em instantes de tempo discreto. Usamos  $X_n$  para denotar o vértice em que a mosca se encontra no instante  $n$ . Assuma que  $X_n$  é um processo markoviano tal que  $X_{n+1}$  é um dos vértices vizinhos a  $X_n$ , sendo que a probabilidade de visitar cada vizinho é uniforme. Pede-se:

- Apresente o grafo da cadeia markoviana.
- Apresente a matriz de transição da cadeia.
- Classifique a cadeia quanto à sua irredutibilidade.
- Classifique a cadeia quanto à sua periodicidade e indique quais são os autovalores com módulo 1.
- Indique suas distribuições invariantes.
- O que pode ser dito acerca de  $\lim_{n \rightarrow \infty} E[f(X_n)]$ ?
- O que pode ser dito acerca da média empírica de  $f(X_n)$ ?

**Questão 2.** (20 pontos) Considere o problema acima do passeio aleatório da mosca no cubo. Seja  $Y_n$  a distância em número de saltos entre o vértice 000 e  $X_n$ .  $Y_n$  é uma cadeia markoviana com vértices 0, 1, 2 e 3. Desenhe o grafo para a cadeia  $Y_n$  e calcule a média empírica de  $Y_n$ .

**Questão 3.** (20 pontos) Discuta a irredutibilidade da cadeia markoviana dada por

$$X_{n+1} = X_n + r_n v_n, \quad X_n \in \mathbb{R}^2$$

onde os  $r_n$  são iid uniformemente distribuídos em  $[0, 1]$  e os  $v_n$  são iid uniformemente distribuídos em

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$