

Universidade Federal de Minas Gerais - Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Elétrica

EEE945 - INTRODUÇÃO AOS PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

PROVA 2

Instrutores: Alexandre R. Mesquita e Eduardo M. A. M. Mendes

Questão 1. (60 pontos) Uma molécula de um composto A pode decair para uma molécula do composto B com taxa b ou para uma molécula do composto C com taxa c . Uma molécula de B combina-se com uma molécula de X a uma taxa x para formar o complexo BX . Por sua vez, uma molécula de C combina-se com uma molécula de Y a uma taxa y para formar o complexo CY . Os complexos BX e CY decaem para as moléculas originais com taxa \bar{x} e \bar{y} respectivamente. Assumindo que temos inicialmente uma molécula de A , uma molécula de X e uma molécula de Y num recipiente, considere o processo markoviano Z_t que descreve as moléculas presentes no recipiente. Para $b = 2$, $c = 1$, $x = 3$, $y = 5$, $\bar{x} = 1$ e $\bar{y} = 1$, pede-se:

- Apresente um grafo que descreve as transições de estado para esse processo.
- Apresente a matriz geradora desse processo.
- Qual o tempo médio para o decaimento do composto A ?
- Que tipo de distribuição de probabilidade tem o tempo acima?
- Classifique o processo quanto à sua irredutibilidade.
- Classifique o processo quanto à sua periodicidade.
- Calcule uma de suas distribuições invariantes.
- O que pode ser dito acerca de $\lim_{t \rightarrow \infty} E[f(Z_t)]$?
- O que pode ser dito acerca da média empírica de $f(Z_t)$?

Questão 2. Para a cadeia markoviana X_n dada por

$$X_{n+1} = X_n + r_n v_n, \quad X_n \in \mathbb{R}^2$$

onde os r_n são iid uniformemente distribuídos em $\{-1, 1\}$ e os v_n são iid uniformemente distribuídos em

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \right\}$$

- a) (20 pontos) Discuta sua irredutibilidade.
- b) (20 pontos) Escreva um algoritmo para simulá-la.