

EEE945 - INTRODUÇÃO AOS PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

LISTA 2

Instrutores: Alexandre R. Mesquita e Eduardo M. A. M. Mendes

Questão 1. Um canal de comunicação pode apresentar dois estados. No estado “Bom”, esse canal transmite um pacote de dados com probabilidade 0.8. No estado “Ruim”, o canal transmite um pacote com probabilidade 0.5. Sabemos que, a cada *round* de comunicação, a probabilidade de transição do estado “Bom” para o estado ruim é de 0.3 e de transição do estado “Ruim” para o estado bom é de 0.5. Calcule a taxa média de transmissão de pacotes para esse canal.

Questão 2. Considere a cadeia markoviana com matriz de transição

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.6 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0.9 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Pede-se:

- (1) Desenhe o grafo da cadeia correspondente e indique quais as classes comunicantes.
- (2) Indique quais as classes recorrentes e as classes transientes.
- (3) A cadeia é irredutível?
- (4) Calcule as distribuições invariantes ergódicas e indique seu suporte.
- (5) Obtenha os autovetores à direita para os autovalores com valor absoluto menor que 1 e indique qual sua relação com as classes comunicantes.
- (6) Obtenha os autovetores à direita para os autovalores com valor absoluto igual a 1 e indique qual sua relação com as classes comunicantes.
- (7) A partir da análise dos autovalores e autovetores, indique o período em cada classe ergódica.
- (8) Qual a média temporal de $f(X_n) = X_n^2$ se $X_0 = 3$?
- (9) O que pode ser dito sobre a média temporal de $f(X_n)$ se $X_0 = 2$?

Questão 3. Seja τ o primeiro tempo n para o qual $X_n \neq X_0$, onde $\tau = +\infty$ se $X_n = X_0, \forall n \geq 0$. Calcule $E[\tau | X_0 = i]$ em função de P_{ii} .

Questão 4. Crie um modelo markoviano para o *tie-break* entre dois tenistas A e B , sendo que cada tenista possui probabilidade α e β de vencerem um ponto em seu próprio serviço. Calcule a probabilidade de A vencer quando ele inicia servindo. Qual a duração média do *tie-break* se A inicia servindo?

Regras do *tie-break*: A serve 1 vez, então B serve 2 vezes; A serve 2 vezes e assim por diante. O primeiro jogador a atingir 7 pontos e pelo menos 2 pontos de vantagem é o vencedor. Quando um jogador atinge 7 pontos, o jogo continua até que algum jogador obtenha uma vantagem de 2 pontos.

Questão 5. Suponha que jogamos uma moeda repetidamente até obtermos 4 coroas consecutivas. Qual o tempo médio que jogaríamos a moeda?