

Tese apresentada à Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa do Instituto Tecnológico de Aeronáutica como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre do Programa de Estudos de Mestrado no Curso de Engenharia Eletrônica e Computação, Área de Sistemas e Controle.

Alexandre Rodrigues Mesquita

**CARACTERIZAÇÃO E ANÁLISE DE ROBUSTEZ DO
COMPORTAMENTO DINÂMICO DE UM SISTEMA DE
CONTROLE DE ATITUDE COM ATUADORES SUJEITOS A
RESTRIÇÕES DE CHAVEAMENTO E CONTROLADOR DE
PRIMEIRA ORDEM**

Tese aprovada em sua versão final pelos abaixo assinados



Prof. Dr. Karl Heinz Kienitz
Orientador



Prof. Dr. Erico Luiz Rempel
Co-orientador

Prof. Dr. Homero Santiago Maciel
Pró-Reitor de Pós-graduação e Pesquisa

Campo Montenegro
São José dos Campos, SP – Brasil
2006

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)**Divisão Biblioteca Central do ITA/CTA**

Mesquita, Alexandre Rodrigues

Caracterização e análise de robustez do comportamento dinâmico de um sistema de controle de atitude com atuadores sujeitos a restrições de chaveamento e controlador de primeira ordem / Alexandre Rodrigues Mesquita.

São José dos Campos, 2006.

130f.

Tese de mestrado – Curso de Engenharia Eletrônica e Computação. Área de Sistemas e Controle – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2006. Orientadores: Prof. Dr. Karl Heinz Kienitz e Prof. Dr. Erico Luiz Rempel.

1. Controle de Atitude. 2. Sistemas Chaveados. 3. Restrições. I. Centro Técnico Aeroespacial. Instituto Tecnológico de Aeronáutica. Divisão de Engenharia Eletrônica. II. Título

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

MESQUITA, Alexandre Rodrigues. **Caracterização e análise de robustez do comportamento dinâmico de um sistema de controle de atitude com atuadores sujeitos a restrições de chaveamento e controlador de primeira ordem**. 2006. 130f. Tese de mestrado em Sistemas e Controle – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Alexandre Rodrigues Mesquita

TÍTULO DO TRABALHO: Caracterização e análise de robustez do comportamento dinâmico de um sistema de controle de atitude com atuadores sujeitos a restrições de chaveamento e controlador de primeira ordem.

TIPO DO TRABALHO: Tese / 2006

É concedida ao Instituto Tecnológico de Aeronáutica permissão para reproduzir cópias desta tese e para emprestar ou vender cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta tese pode ser reproduzida sem a autorização do autor.

Alexandre Rodrigues Mesquita
Rua José Mateus dos Santos, 42, Monsenhor Otaviano
CEP 35.560-000
Santo Antônio do Monte - MG

**Caracterização e análise de robustez do comportamento dinâmico
de um sistema de controle de atitude com atuadores sujeitos a
restrições de chaveamento e controlador de primeira ordem**

Alexandre Rodrigues Mesquita

Composição da Banca Examinadora:

Prof. Dr. Elder Moreira Hemerly	Presidente - (ITA)
Prof. Dr. Karl Heinz Kienitz	Orientador - (ITA)
Prof. Dr. Erico Luiz Rempel	Co-orientador - (ITA)
Prof. Dr. José Claudio Geromel	(UNICAMP)
Prof. Dr. Waldemar de Castro Leite Filho	(IAE)
Prof. Dr. Takashi Yoneyama	(ITA)

ITA

Totus Tuus.

*Para os que alternam sua afeição entre um
e outro estado, uma firme constância.*

Agradecimentos

Não sei aonde estou indo, mas sei que, quando estava perdido e incapaz de me encontrar e achava que ia a algures, fui conduzido a alhures. Agora estou bem. Quero dizer com tudo isso que não sei aonde cheguei, mas sei que o caminho era este. Confuso? Então, deixe-me agradecer a Deus pela realização deste trabalho de pesquisa. Pelo apoio de meus orientadores. Pela instrução de meus professores. Pela companhia de meus colegas. Por ter-me dado afastar-me definitivamente do H-15. Pelo pão de cada dia via o apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, processo nº 04/12123-0. Por estar ainda lá minha família. Por não deixar-me esquecido nenhures.

Tenho porém um grande pesar, que de o passar inda estou longe. Como? Como hei de cantar com os edificios e conversar com um bonde?

Мой университет

*Французский знаете.
Делите.
Множьте.
Склоняете чудно.
Ну и склоняйте!
Скажите —
а с домом спеться
можете?
Язык трамвайский вы понимаете?*

В. Маяковский

Resumo

O presente trabalho ocupou-se do estudo da robustez do comportamento de um sistema afim por partes com tempos de transição minimamente espaçados que é encontrado em veículos lançadores e satélites. Os atuadores usados no controle de atitude desses sistemas são do tipo liga-desliga e possuem restrições temporais de chaveamento. Ciclos-limite e movimentos persistentes não-periódicos podem ocorrer. Na presença de incertezas de modelagem, o sistema está sujeito a bifurcações capazes de afetar requisitos de desempenho tais como a amplitude de oscilação.

A natureza de comportamentos dinâmicos complexos nesse sistema foi investigada usando-se diagramas de bifurcação em função dos parâmetros de controle. Adotaram-se técnicas como mapas de Poincaré, espectro de Lyapunov e dimensões fractais calculadas usando transformada de *wavelets*. Revelou-se uma rica coexistência de dinâmicas complexas, tais como ciclos-limite de período- k e caos. Um atrator similar ao quase-periódico é caracterizado.

Possíveis erros de modelagem do sistema de atuação foram caracterizados usando tanto representação paramétrica quanto não-estruturada. O método de Tsykin foi utilizado para estudar a robustez da condição de existência de ciclo-limite determinada pelas restrições de chaveamento. Assim, regiões de comportamento robusto e uma fronteira de robustez no espaço de parâmetros de controle puderam ser identificadas. Essas regiões foram validadas por meio de simulação e comparadas com aquelas obtidas pelo método da função descritiva, evidenciando-se as vantagens do método exato no projeto de controladores robustos para o sistema estudado. Também foi proposto um método de síntese de controladores robustos usando o lugar de Hamel. Para a estrutura de controle proposta, amplitude de oscilação e consumo de combustível decrescem ambos com o aumento da frequência de oscilação. Portanto, a resolução de um problema do tipo maximin para a frequência de oscilação sobre a fronteira de robustez permitiu obter amplitude e consumo reduzidos.

Abstract

This work is devoted to the study of the robust behavior in some piecewise affine systems with minimally spaced transition times. Such systems are commonly found in satellites and satellite launchers. On-off thrusters are frequently used as actuators for attitude control and are typically subject to switching constraints. In these systems, persistent motions of different nature may occur, such as limit cycles, quasi-periodic-like and chaotic motions. In the presence of model uncertainties, the emergence of bifurcations in these systems can seriously affect performance requirements, such as oscillation amplitude.

In this contribution the nature of persistent motions in an attitude control system with actuators subject to switching-time restrictions is examined as a function of control parameters. The main tools used are Poincaré maps, the Lyapunov spectrum and fractal dimensions calculated using wavelet transform. Complex-switching sequences are also studied, revealing the existence of period- k limit cycles and motions with slight sensitiveness to initial conditions, and the coexistence of complex attractors. The existence of a quasi-periodic-like behavior is predicted.

Model uncertainties in the actuation device are evaluated in both a structured and an unstructured fashion. Then, Tsytkin's method is used to investigate the robustness of the existence condition for time-constrained limit cycles. Regions of robust behavior and a robustness frontier in the control parameter space are identified. These regions are verified via simulation and compared to that given by the describing function method, evincing the benefits in the use of exact methods to address the robustness analysis in this system. Moreover, we present a design method for robust controllers based on Hamel locus. The adopted control structure is such that both oscillation amplitude and fuel consumption decrease with increases in the frequency. Thus, reduced amplitude and fuel consumption are obtained through the solution of a maximin problem for the oscillation frequency on the robustness frontier.

Sumário

1	Introdução.....	15
1.1	Histórico e motivação.....	15
1.2	Escopo do trabalho.....	17
1.3	Contribuições.....	18
1.4	Material e métodos.....	19
1.5	Organização do texto.....	19
2	O Sistema de Controle de Rolamento do VLS.....	21
2.1	Dinâmica do veículo.....	21
2.2	Lógica de chaveamento e dinâmica do atuador.....	22
2.3	Dinâmicas do sensor e do controlador.....	23
2.4	Formulação do problema no espaço de estados.....	24
2.5	Desempenho do sistema de controle.....	28
2.6	Simulação numérica.....	31
3	Espectro de Lyapunov.....	37
3.1	Definição.....	37
3.2	Dimensão de Lyapunov.....	39
3.3	Cálculo pelo método de Müller.....	40
3.4	Renormalização.....	44
3.5	Cálculo pelo método da função implícita.....	46
3.6	Resultados numéricos.....	48
4	Análise multifractal.....	54
4.1	Formalismo multifractal e o método WTMM.....	55
4.2	Cálculo do espectro de singularidades.....	58
5	O comportamento quase-periódico.....	63
5.1	Mapas de Poincaré e pontos fixos.....	64
5.2	Órbitas na seção de Poincaré.....	69
6	Multiestabilidade.....	72
7	Predição exata de ciclos-limite.....	76
7.1	O método de Tsytkin.....	77
7.2	Amplitude do ciclo-limite.....	80
7.3	Estabilidade do ciclo-limite.....	81
7.4	Expressão exata do lugar de Tsytkin.....	83
7.5	Efeitos do truncamento no cálculo do lugar de Tsytkin.....	85
7.6	Lugares de Tsytkin típicos.....	86
7.7	Assimetria nos atuadores.....	89
8	Caracterização de erros de modelagem.....	92
8.1	Fontes de incertezas no modelo.....	92
8.2	Envelope temporal para as curvas de acionamento e desligamento.....	93
8.3	Ajuste de respostas dinâmicas ao envelope.....	95
8.4	Caracterização paramétrica das incertezas.....	96
8.5	Caracterização de incertezas não-estruturadas.....	100
9	Análise da robustez da condição de existência de ciclo-limite.....	105
9.1	Procedimento para análise de robustez no caso de incertezas estruturadas.....	106
9.2	Procedimento para análise de robustez no caso de incertezas não-estruturadas.....	107
9.3	Determinação da fronteira de estabilidade do sistema.....	109
9.4	Resultados numéricos da análise de robustez.....	111
9.5	Avaliação do desempenho robusto.....	113
9.6	Resultados da análise paramétrica de robustez.....	115

9.7	Análise de robustez pelo método de Hamel	116
10	Validação da análise de robustez.....	119
11	Conclusão	123
	Referências	126

Lista de Ilustrações

Figura 1.1 – Estrutura de um sistema de controle de atitude com atuadores sujeitos a restrições de chaveamento	15
Figura 2.1 – Veículo com um par de motores a propulsão.....	21
Figura 2.2 – Exemplo das curvas de acionamento e desligamento dos propulsores.....	23
Figura 2.3 – Diagrama de blocos do sistema controlado.....	24
Figura 2.4 – Exemplo de formas de onda no sistema descrito	27
Figura 2.5 – Autômato para um sistema de controle de atitude	27
Figura 2.6 – Amostras de movimento quase-periódico obtidas por simulação com $\varepsilon = 2$ [ms] e $\varepsilon = 10$ [μ s]	34
Figura 2.7 – Amostra de movimento caótico obtida por simulação.....	35
Figura 3.1 – Volume esférico sob a ação de um fluxo diferencial	38
Figura 3.2 – Determinação da dimensão de Lyapunov	40
Figura 3.3 – Divergência de trajetórias infinitesimalmente próximas após o cruzamento da superfície de chaveamento.....	41
Figura 3.4 – Diagramas biparamétricos para os 4 maiores expoentes de Lyapunov.....	49
Figura 3.5 – Comparação do diagrama de bifurcação para ϕ discretizado, do diagrama espectral de bifurcação de ϕ e dos 3 maiores expoentes de Lyapunov	50
Figura 3.6 – Diagrama biparamétrico para a dimensão de Lyapunov.....	51
Figura 4.1 – Diagrama biparamétrico para $D_{\max} = D(q = 0)$	59
Figura 4.2 – Diagrama biparamétrico para a estimativa da dimensão de informação.....	60
Figura 4.3 – Diagrama biparamétrico para $\eta_{\max} = \eta(q = 0)$	61
Figura 4.4 – Diagrama biparamétrico para $\Delta\eta$	62
Figura 5.1 – Superfícies de chaveamento e pontos de transição para os movimentos periódico e quase-periódico.....	64
Figura 5.2 – Diagrama de fase para movimento quase-periódico com $p = -5.5, z = -4.9$	66
Figura 5.3 – Comparação dos pontos de entrada em $m = 2$ preditos e simulados.....	68
Figura 5.4 – Diagrama de fase para o movimento quase-periódico com $p = -5.5, z = -4.9$.	70
Figura 6.1 – Diagrama de fase para os pontos de transição do atrator quase-periódico e do atrator periódico com duplo chaveamento.....	72
Figura 6.2 – Seção transversal das bacias de atração do atrator quase-periódico e do atrator periódico com duplo chaveamento	73
Figura 6.3 – Projeção do atrator periódico com duplo chaveamento próximo à bifurcação de $p = -5.5, z = -3.5$	74
Figura 7.1 – Saída dos atuadores com período T	78
Figura 7.2 – Amplitudes pico-a-pico de $\phi(t)$ e $\theta(t)$ em função da frequência angular de oscilação	81
Figura 7.3 – Influência do termo de truncamento no erro relativo da frequência de oscilação	86
Figura 7.4 – Lugares de Tsytkin típicos	87
Figura 8.1 – Envelope para as curvas de acionamento/desligamento e aproximações racionais de 2ª ordem para esse envelope.....	94
Figura 8.2 – Curvas de Bode para $D_F(s)$ e $D_G(s)$ e para suas aproximações de 2ª ordem...	96
Figura 8.3 – Envelope para as curvas de acionamento/desligamento e aproximações com $\beta = \gamma = 0$	98
Figura 8.4 – Região de possíveis valores para os parâmetros de $D(b_i, s)$ com $\beta = \gamma = 0$	99

Figura 8.5 – Curvas de Bode para $D_F(s)$ e $D_G(s)$, para suas aproximações $D_F^a(s)$ e $D_G^a(s)$ e para $D_{FG}^a(s)$	100
Figura 8.6 – Envelope de fase para a função de transferência de acionamento/desligamento	103
Figura 9.1 – Aspecto do lugar de Tsytkin incerto para p e z sobre a fronteira de bifurcação	106
Figura 9.2 – Exemplos de determinação do pior caso de $L'(j\omega)$	108
Figura 9.3 – Diagrama de Bode de $D_{\xi^*}(j\omega)$ e limites do envelope de amplitude e fase.....	109
Figura 9.4 – Convergência da fronteira de bifurcação em função do termo de truncamento N	112
Figura 9.5 – Regiões de comportamento robusto do ciclo-limite	113
Figura 9.6 – Variação da mínima frequência de oscilação sobre a fronteira de bifurcação...	114
Figura 9.7 – Comparação de fronteiras considerando incertezas não-estruturadas, incertezas estruturadas e as funções $D_F(s)$ e $D_G(s)$	116
Figura 9.8 – Projeto robusto usando o lugar de Hamel e modificando a reta de chaveamento	117
Figura 9.9 – Comparação das fronteiras de bifurcação calculadas por meio do lugar de Tsytkin e do lugar de Hamel.....	118
Figura 10.1 – Dimensão de Lyapunov na vizinhança da fronteira de bifurcação	120
Figura 10.2 – Fronteiras de bifurcação e regiões em que $T > T_{\max}$ e $T < T_{\max}$	121

Lista de Símbolos

ϕ	Posição angular de rolamento
t	Variável de tempo independente
J	Momento de inércia longitudinal
s	Variável complexa
$\Phi(s)$	Transformada de Laplace de ϕ
e_1	Torque resultante dos motores
F	Empuxo máximo dos motores
ρ	Braço do binário
α	Parâmetro da dinâmica dos atuadores
β	Parâmetro da dinâmica dos atuadores
t_{lig}	Duração mínima dos pulsos dos motores
t_{ligd}	Repouso mínimo entre acionamentos de diferentes pares de motores
t_{ligm}	Repouso mínimo entre acionamentos do mesmo par de motores
$D(s)$	Característica dinâmica dos atuadores
$Er(s)$	Transformada de Laplace do erro atuante
$C(s)$	Função de transferência do controlador
z	Zero do controlador
p	Pólo do controlador
$\dot{\phi}$	Derivada temporal de ϕ
θ	Velocidade angular de rolamento
τ	Termo de atraso puro dos atuadores
u	Saída do controlador
m	Modo de operação (estado discreto) dos atuadores
t_x	Tempo a partir do último chaveamento
M	Saída do bloco ‘Chave com restrições’
σ	Variável real
\mathbb{R}	Corpo dos números reais
$\text{sgn}(\sigma)$	Função sinal
x	Vetor de estados
x_0	Condição inicial do vetor de estados
$H_m(x)$	Vetor normal à superfície de chaveamento
A, B_m	Matrizes do sistema no espaço de estados
n	Dimensão do sistema
λ_i	Expoente de Lyapunov
D_L	Dimensão de Lyapunov
ν	Variável inteira
k	Variável inteira
$g(x)$	Mapa de transição de estados
δx	Perturbação da trajetória nominal
A^T	Matriz transposta de A
$I_{N \times N}$	Matriz identidade de ordem N
T_k, L_k	Matrizes de transição de perturbações

$\ \cdot\ $	Norma euclidiana
Q_k	Matriz ortogonal
R_k	Matriz triangular superior
η	Expoente de Hölder
$D(\eta)$	Espectro de singularidades
$\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$	Espaço de funções quadrado-integráveis
$D(q)$	Dimensão de Rényi
y_m	Vetor de estados de entrada no modo m
\bar{y}_m	Ponto fixo do mapa de Poincaré
Y_m	Conjunto de pontos fixos do mapa de Poincaré
\mathcal{A}	Conjunto de possíveis amplitudes
\mathcal{F}	Conjunto de possíveis frequências de ciclo-limite
\mathcal{D}	Família de funções de transferência para a dinâmica do atuador
$l(t)$	Função degrau unitário
$r_F(t)$	Resposta mais rápida dos atuadores
$r_G(t)$	Resposta mais lenta dos atuadores
$D_F(s)$	Função de transferência para a resposta mais rápida dos atuadores
$D_G(s)$	Função de transferência para a resposta mais lenta dos atuadores
$D_F^a(s)$	Aproximação de $D_F(s)$
$D_G^a(s)$	Aproximação de $D_G(s)$
$D_{FG}^a(s)$	Aproximação da função de transferência com menor banda possível
$\bar{D}(j\omega)$	Limitante superior dos envelopes de amplitude e fase
$\underline{D}(j\omega)$	Limitante inferior dos envelopes de amplitude e fase
$\angle s$	Fase do número complexo em radianos
T	Período de oscilação
ω_0	Frequência angular de oscilação
k_r	Constante de aceleração angular
$\Lambda(\omega)$	Lugar de Tsytkin
$L(s)$	Função de transferência de malha aberta
Φ_{pp}	Amplitude pico-a-pico do ângulo de rolamento
$\delta(t)$	Função impulso
$L_S(s)$	Função de transferência de malha aberta para as perturbações em $u(t)$
$L_S^*(j\omega)$	Transformada de Laplace discreta correspondente a $L_S(s)$
\mathcal{B}	Família de possíveis lugares de Tsytkin
Λ_{ξ^*}	Caso menos favorável de Λ

1 Introdução

Neste capítulo é introduzido o problema de controle de atitude em aplicações espaciais e são apresentados os elementos motivadores do presente trabalho. Em seguida, os objetivos gerais e específicos são delineados, bem como as contribuições que se entendem dar por seu alcance. Por fim, é feita uma explicação da metodologia empregada e da organização do texto.

1.1 Histórico e motivação

Sistemas de controle de atitude com atuadores chaveados são encontrados em veículos lançadores e satélites [1-5]. Na fase de estabilização de amplitude, esses sistemas operam tipicamente em regime de ciclo-limite. Como atuadores, tem sido explorada uma variedade de propulsores liga-desliga, tais como propulsores à base de hidrazina, plasma pulsado e gás frio [6]. No entanto, a presença de não-linearidades nos dispositivos de atuação impõe algumas preocupações acerca da degradação do desempenho do sistema. Em especial, esses atuadores estão sujeitos a restrições temporais de chaveamento que, como mostrado por Oliveira e Kienitz [7], criam problemas pouco habituais de análise e síntese. A estrutura típica para esses sistemas é mostrada na figura 1.1. Tanto o modelo para a dinâmica do atuador quanto o do veículo (veículo lançador ou satélite) e dos sensores podem ser afetados por incertezas de modelagem.

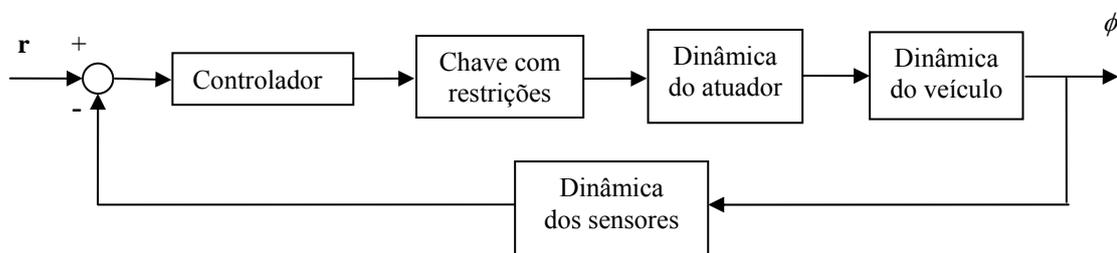


Figura 1.1 – Estrutura de um sistema de controle de atitude com atuadores sujeitos a restrições de chaveamento

O projeto de controladores tradicionalmente usado para esses sistemas não explora os atuadores até o seu limite dinâmico [4]. Recentemente foi proposta uma metodologia de

projeto que explora melhor o potencial de atuadores com restrições de chaveamento [8]. A função descritiva foi a principal ferramenta de engenharia usada nesse contexto. No entanto, muitos questionamentos permaneceram em aberto e demandaram uma continuação do esforço de pesquisa. Sobretudo, verificou-se que, quando os atuadores são requisitados a uma taxa superior àquela permitida por suas restrições, instalam-se nesses sistemas movimentos persistentes não-periódicos que podem ser de interesse prático. Condições aproximadas para a previsão desses fenômenos foram obtidas em Oliveira e Kienitz [7] usando o método da função descritiva.

Em Mesquita e Kienitz [9], realizaram-se extensos estudos numéricos dos fenômenos de bifurcação para um sistema específico da classe de sistemas descrita genericamente pelo diagrama de blocos da figura 1.1: um sistema de controle de rolamento para o veículo lançador de satélites (VLS) brasileiro. Nesses estudos, observou-se que, no espaço de parâmetros do controlador, um comportamento dinâmico interessante do ponto de vista de controle ocorre nas proximidades da fronteira em que o sistema sofre uma bifurcação. Esse comportamento é aquele para o qual a amplitude do ciclo-limite mostrou-se mínima, correspondendo a 4% daquela especificada no projeto inicial do VLS. Assim, questionamentos acerca da robustez de um controlador que opere minimizando a amplitude de ciclo-limite, mas que, devido a incertezas de modelagem, é suscetível de instaurar no sistema um movimento persistente não-periódico, demandaram uma continuação do esforço de pesquisa.

Em Mesquita [10], como ferramentas de análise do comportamento dinâmico do sistema, foram usados diagramas de bifurcação empregando transformada de Fourier e diagramas de bifurcação empregando os máximos locais da trajetória. Contudo, a natureza dos movimentos observados permanecia ainda pouco clara, o que demandava uma ampliação do ferramental de análise.

1.2 Escopo do trabalho

O objeto desta tese é o desenvolvimento e estudo de técnicas que permitam assegurar desempenho robusto para uma classe de sistemas dinâmicos híbridos que possuem restrições temporais de chaveamento. Dado que nessa classe de sistemas podem instalar-se movimentos persistentes periódicos ou não-periódicos, o trabalho está dividido em duas partes. A primeira parte visa a compreender quão apropriados podem ser os movimentos persistentes não-periódicos para a satisfação dos requisitos de desempenho. A segunda parte trata de analisar o desempenho robusto do movimento periódico.

Assim, este trabalho de mestrado reservou seus primeiros esforços à ampliação e refinamento do ferramental de análise: cálculo de dimensões do atrator; emprego da transformada de *wavelets* na construção de diagramas de bifurcação; análise dos mecanismos de bifurcação; e caracterização do movimento não-periódico de maior relevância, isto é, aquele que emerge da bifurcação do movimento periódico.

Na segunda parte do trabalho, para uma instância da classe de sistemas estudada (sistema de controle de rolamento do VLS), propôs-se caracterizar os erros de modelagem com base em um enfoque tanto paramétrico quanto não-paramétrico e, em seguida, analisar a robustez da condição de existência de ciclo-limite em função dos parâmetros do controlador. A utilização de ambos os enfoques tem por objetivo favorecer o uso de diferentes métodos de análise. Erros de modelagem na dinâmica dos atuadores são considerados, uma vez que exercem grande influência no desempenho de controle. Uma avaliação do desempenho robusto dos controladores obtidos também é proposta. Por ser a condição de existência de ciclo-limite apenas necessária, os resultados necessitaram de verificação por meio de simulação.

1.3 Contribuições

A primeira contribuição deste trabalho atinge o programa espacial brasileiro. Mostrou-se que é possível obter desempenho ótimo, conforme se define no capítulo 2, na presença de incertezas de modelagem, tendo sido desenvolvidas e apontadas as principais ferramentas de síntese para isso. Um menor erro de controle e um menor consumo de combustível tornam-se possíveis, o que poderá ter aplicações interessantes para o projeto. Igualmente, esses resultados podem ser úteis em outros sistemas de controle de atitude, permitindo um uso mais eficiente dos atuadores. Com efeito, sistemas de controle a relé que alternem entre subsistemas instáveis oferecem uma problemática que na prática é semelhante à tratada aqui.

A segunda contribuição atinge a teoria de sistemas chaveados. É apresentada uma metodologia de análise/síntese de controladores robustos para ciclos-limite usando um método exato. Até então, os trabalhos de maior projeção na literatura adotaram todos a aproximação da função descritiva [11-17]. Há casos, porém, em que essa aproximação pode levar a projetos muito conservadores ou mesmo comprometer uma análise de robustez rigorosa. O projeto de controle empreendido aqui constitui um dos casos em que a aproximação da função descritiva ocasiona dificuldades.

Por último, este texto aprofunda a compreensão de comportamentos dinâmicos complexos em sistemas híbridos (ver, por exemplo, [18-20]), em especial, sistemas afins por partes com tempos de transição minimamente espaçados. Mais que um ferramental para validação da análise de robustez, as ferramentas da teoria de dinâmica não-linear empregadas serão úteis em futuros projetos de controladores robustos, uma vez que permitem compreender as dinâmicas não-periódicas que deverão ser toleradas nos projetos mais arrojados desses controladores.

1.4 Material e métodos

Nesta pesquisa o trabalho teórico é amparado e validado por meio de simulações. Para algumas dessas simulações, a ferramenta de software *xPC Target* (Matlab) foi utilizada para gerar um ambiente de simulação rápida através da execução de um *kernel* de tempo real compacto em um PC escravo.

Na primeira parte do trabalho, além do estudo de mapas de Poincaré, a transformada de *wavelets* foi utilizada para o cálculo de dimensão multifractal do atrator e duas propostas para calcular o espectro de Lyapunov em sistemas suaves por partes foram testadas, sendo de interesse especial verificar a convergência do cálculo dos expoentes de Lyapunov nesse tipo de sistema. O procedimento básico para análise dos resultados foi: escolher um ponto no espaço de parâmetros do controlador, simular o sistema, caracterizar e analisar a trajetória no espaço de estados.

Na segunda parte, o lugar de Tsytkin e o lugar de Hamel foram usados para a obtenção de predições exatas de ciclos-limite. A análise de robustez fez-se sobre regiões de incerteza dessas curvas.

1.5 Organização do texto

O capítulo 2 traz uma descrição detalhada do sistema de controle de rolamento do VLS brasileiro, discute questões relativas ao seu desempenho e apresenta os procedimentos de simulação adotados.

O estudo do comportamento não-periódico concentra-se nos capítulos 3, 4, 5 e 6. O capítulo 3 emprega técnicas de cálculo do espectro de Lyapunov para caracterizar o comportamento dinâmico do sistema em função dos parâmetros do controlador. O uso da transformada de *wavelets* na análise geométrica dos atratores é discutido no capítulo 4. O capítulo 5 dedica-se à compreensão do movimento não-periódico de maior importância no sistema. O capítulo 6 faz uma breve análise do cenário de coexistência de múltiplos atratores.

O conteúdo desses quatro capítulos inspirou-se nas análises de bifurcações de Avanzini e Matteis [3] e pode ser consultado alternativamente em Mesquita et al. [21].

O capítulo 7 introduz os métodos exatos de predição de ciclos-limite adotados. No capítulo 8 estudam-se os possíveis erros de modelagem do sistema e estabelecem-se formas de representá-los. No capítulo 9 os métodos exatos são usados para determinar regiões de comportamento robusto do ciclo-limite no espaço de parâmetros do controlador. A validação desses resultados é feita no capítulo 10.

O capítulo 11 sumariza as principais conclusões e aponta novas direções para o aperfeiçoamento e a continuação da pesquisa.

2 O Sistema de Controle de Rolamento do VLS

O problema aqui discutido trata especificamente do controle de rolamento do veículo lançador de satélites brasileiro durante o segundo estágio de lançamento conforme [22]. Considere-se um corpo rígido como um satélite ou um veículo lançador, cuja atitude ϕ deve ser controlada por um par de atuadores, como ilustrado na figura 2.1.

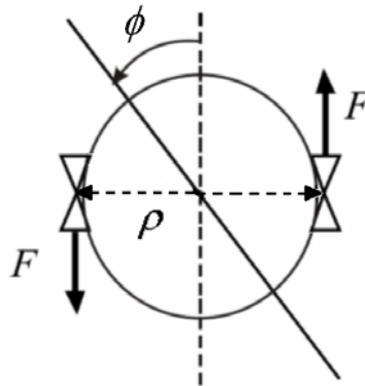


Figura 2.1 – Veículo com um par de motores a propulsão

Tal controle visa a manter reguladas posição e velocidade angular de rolamento, as quais sofrem influência de perturbações internas e externas. A importância de limitar a velocidade angular de rolamento está em reduzir o acoplamento dos modos longitudinal e látero-direcionais.

Os requisitos para o sistema controlado são:

- Máxima taxa de desvio: 5°/s
- Máximo desvio: 6°

Nas seções seguintes, detalhar-se-á o diagrama de blocos da figura 1.1.

2.1 Dinâmica do veículo

A segunda fase do lançamento se estende do instante $t = 63$ [s] ao instante $t = 118$ [s]. Nesse período ocorre variação da inércia do lançador. Contudo, por simplicidade, será considerado um momento de inércia longitudinal médio $J = 1500$ [kgm²]. Serão ainda desprezados o amortecimento aerodinâmico e o acoplamento com os modos látero-direcionais.

Dessa forma, estabelece-se a seguinte função de transferência entre o ângulo de rolamento e o torque dos motores:

$$\frac{\Phi(s)}{E_1(s)} = \frac{1}{Js^2} \quad (2.1)$$

2.2 Lógica de chaveamento e dinâmica do atuador

O sistema de atuação consiste em quatro motores com funcionamento liga-desliga e com fortes restrições de acionamento, separados por um intervalo angular de 180° , acionados aos pares de forma diferencial para que cada par atue com um momento num sentido, conforme ilustra a figura 2.1. As características desses atuadores são as seguintes:

- Empuxo máximo de cada motor: $F = 400 \pm 20$ [N]
- Braço do binário: $\rho = 0.77$ [m]
- Atraso de acionamento:
 - até 10% do máximo empuxo (t_a): 10 – 30 [ms]
 - até 90% do máximo empuxo (t_b): 20 – 50 [ms]
- Atraso de desligamento:
 - até 90% do máximo empuxo (t_c): 9 – 16 [ms]
 - até 10% do máximo empuxo (t_d): 15 – 50 [ms]
- Restrições de acionamento:
 - duração mínima de cada pulso: $t_{lig} = 100$ [ms]
 - repouso entre 2 acionamentos do mesmo par: $t_{ligm} = 50$ [ms]
 - repouso entre o acionamento de pares opostos: $t_{ligd} = 500$ [ms]

As características de acionamento e desligamento dos atuadores acima são ilustradas na figura 2.2. Num primeiro momento, os atrasos dinâmicos de acionamento e desligamento serão modelados pela função de transferência $D(s)$, como em [10]:

$$D(s) = \frac{86.8^2}{(s + 86.8)^2} \quad (2.2)$$

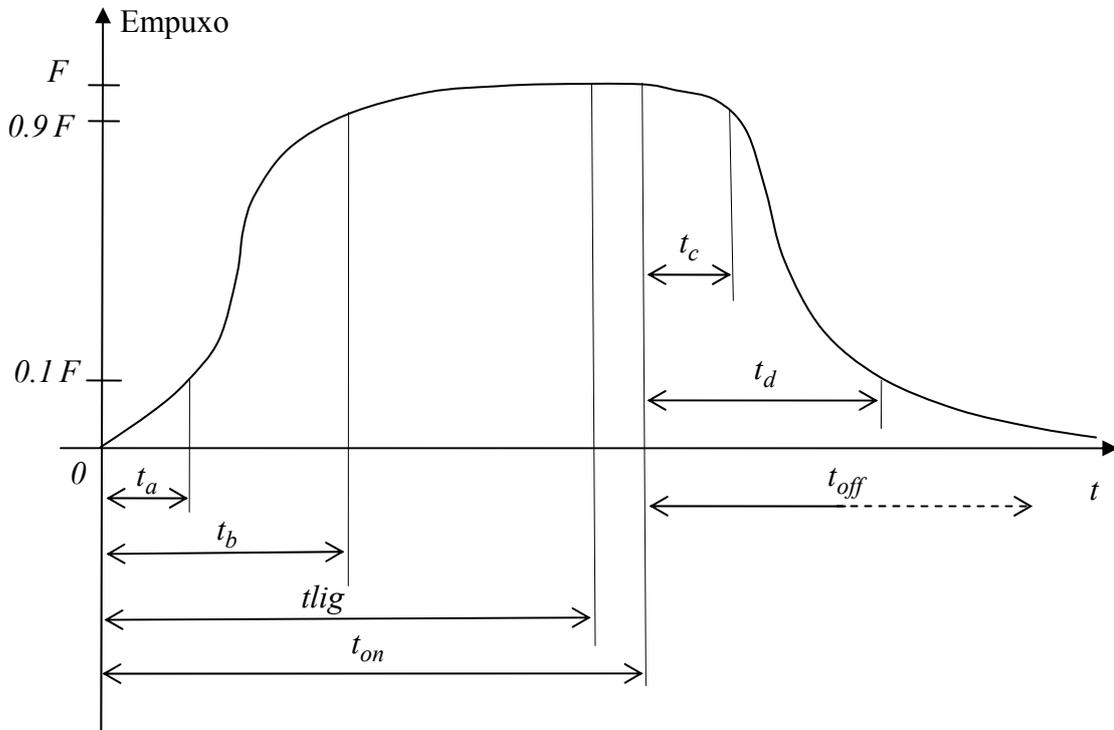


Figura 2.2 – Exemplo das curvas de acionamento e desligamento dos propulsores. t_{on} é o período em que estão ligados e t_{off} é o período em que estão desligados.

2.3 Dinâmicas do sensor e do controlador

Os sensores, giroscópio e girômetro, são considerados ideais. Para se atingirem os requisitos de desempenho, utiliza-se realimentação tacométrica além da realimentação proporcional. Seguindo [7], a lei de realimentação foi fixada como $-\phi - d\phi/dt$ de forma que se terá para o erro atuante:

$$\frac{Er(s)}{\Phi(s)} = -(1 + s) \quad (2.3)$$

A estrutura do controlador foi escolhida linear e de primeira ordem. Assim, os parâmetros para análise são o zero e o pólo da lei de controle:

$$C(s) = \frac{s - z}{s - p} \quad (2.4)$$

Neste texto será considerado o domínio em que $p \in [-12, -0.05]$ e $z \in [-9.9, -0.1]$. Essa estrutura de controle foi adotada de modo a manter unidade com trabalhos anteriores [7-10]. Uma visão completa do diagrama de blocos do sistema controlado é apresentada na figura 2.3, onde o bloco ‘Chave com restrições’ pode ser visto como um relé sem zona morta e com saídas $\{F\rho, -F\rho, 0\}$ obedecendo às restrições de chaveamento da seção anterior.

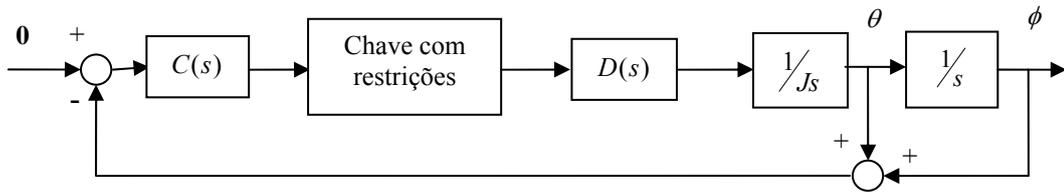


Figura 2.3 – Diagrama de blocos do sistema controlado

Uma estrutura de controle mais interessante na prática seria aquela cuja lei de realimentação é da forma $z\phi - d\phi/dt$ e cuja lei de controle $C(s)$ não possui zero. Assim, o pólo de $C(s)$ poderia ser escolhido de modo que o controlador também atue como filtro para o ruído dos sensores. Os métodos utilizados neste texto podem ser adaptados para tratar essa outra planta sem grandes dificuldades.

2.4 Formulação do problema no espaço de estados

O sistema em questão pode ser completamente descrito por sete estados: cinco contínuos, um discreto e outro contínuo por partes. No entanto, o número de estados poderá variar nos capítulos seguintes de acordo com a ordem da função de transferência $D(s)$, que modela a dinâmica dos atuadores.

As equações (2.5) e (2.6) correspondem à dinâmica do veículo, sendo $\phi(t)$ o ângulo de rolamento e $\theta(t)$ a velocidade de rolamento. As equações (2.7) e (2.8) correspondem à dinâmica de atraso do atuador, que tem por saída $e_1(t)$ e apresenta a função de transferência dada em (2.2). O atraso τ em (2.8) será considerado nulo nos capítulos de 3 a 6. Devido à

lógica de chaveamento do atuador, aparecem $m(t)$ e $t_x(t)$. O estado discreto $m(t)$ considera qual par de propulsores está ativo e, no caso de propulsores desligados, qual esteve ativo anteriormente. A variável de estado $t_x(t)$ mede o tempo desde o último chaveamento. Assim, $t_x(t)$ apresentará saltos sempre que houver transições em $m(t)$. Os sinais sobrescritos $+$ e $-$ denotam, respectivamente, limite à direita e limite à esquerda. A variável de controle $u(t)$ é a saída do controlador e também a entrada do atuador. A variável auxiliar $M(t)$ indica qual o sinal do torque produzido pelos atuadores.

$$\dot{\phi}(t) = \theta(t) \quad (2.5)$$

$$\dot{\theta}(t) = e_1(t)/J \quad (2.6)$$

$$\dot{e}_1(t) = e_2(t) \quad (2.7)$$

$$\dot{e}_2(t) = -\frac{e_1(t)}{\alpha^2} - \frac{2e_2(t)}{\alpha} + \frac{F\rho}{\alpha^2} M(t-\tau) \quad (2.8)$$

$$\dot{u}(t) = z\phi(t) + (z-1)\theta(t) - e_1(t)/J + pu(t) \quad (2.9)$$

$$\dot{t}_x(t) = 1, \text{ para } t : m(t^+) = m(t^-) \quad (2.10)$$

$$\dot{t}_x(t^+) = 0, \text{ para } t : m(t^+) \neq m(t^-) \quad (2.11)$$

$$m(t^+) = \begin{cases} 1, & \text{se } (u > 0, t_x \geq tligd \text{ e } m = 4) \\ & \text{ou } (u > 0, t_x \geq tligm \text{ e } m = 2) \\ 2, & \text{se } u < 0, t_x \geq tlig \text{ e } m = 1 \\ 3, & \text{se } (u < 0, t_x \geq tligd \text{ e } m = 2) \\ & \text{ou } (u < 0, t_x \geq tligm \text{ e } m = 4) \\ 4, & \text{se } u > 0, t_x \geq tlig \text{ e } m = 3 \\ m(t^-), & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.12)$$

$$M(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } m = 2 \text{ ou } 4 \\ 1, & \text{se } m = 1 \\ -1, & \text{se } m = 3 \end{cases} \quad (2.13)$$

onde $\alpha = 1/86.8 = 11.5 \cdot 10^{-3}$ [s].

Note-se que a ocorrência de um termo de atraso puro $M(t-\tau)$ não implica que o sistema tenha dimensão infinita, pois $M(t)$ é um sinal constante por partes. Assim, desde que $\tau < tligm$, as variáveis $m(t)$ e $t_x(t)$ permitem conhecer $M(t-\tau)$. Portanto, o sistema possui

dimensão finita e o conjunto de variáveis de estado acima bastará para descrever completamente o comportamento do sistema. Ademais, mesmo que se tenha $\tau > tligm$, um conjunto finito de variáveis de estado bastaria para descrever o histórico de chaveamentos, uma vez que se tem τ limitado.

Ao longo do texto, a seguinte representação afim por partes será adotada:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) = Ax + B_m \\ h &= H_m(x) \cdot x + b_m(x)\end{aligned}\tag{2.14}$$

onde

$$x = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ e_1 / J \\ e_2 / J \\ u \\ t_x \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha^{-2} & -2\alpha^{-1} & 0 & 0 \\ z & z-1 & -1 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{F\rho}{\alpha^2 J} M_m \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\tag{2.15}$$

e onde $M_m = M(t)$ no intervalo de $m(t)$ constante; $h = 0$ define o instante de chaveamento; $H_m(x)$ e $b_m(x)$ são definidos conforme as leis de chaveamento de (2.12), podendo assumir, respectivamente, valores nos conjuntos $\{[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0], [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]\}$ e $\{0, -tlig, -tligm, -tligd\}$.

A figura 2.4 ilustra como ocorrem as transições de estado nesse sistema. Nela aparecem transições por $u = 0$ e pelas restrições de mínimo tempo, havendo acionamentos sucessivos em um mesmo sentido e em sentidos opostos.

Esse sistema pode ser apresentado de maneira simples como um autômato híbrido [23] em que se alternam sistemas afins e em que há uma exigência de mínimo tempo de permanência em cada estado, como mostra a figura 2.5. Nessa figura, $t_\alpha = tlig - \tau$, $t_\beta = tligm - \tau$ e $t_\gamma = tligd - \tau$. Fica claro aqui que o problema de controle está em projetar uma variável de controle u .

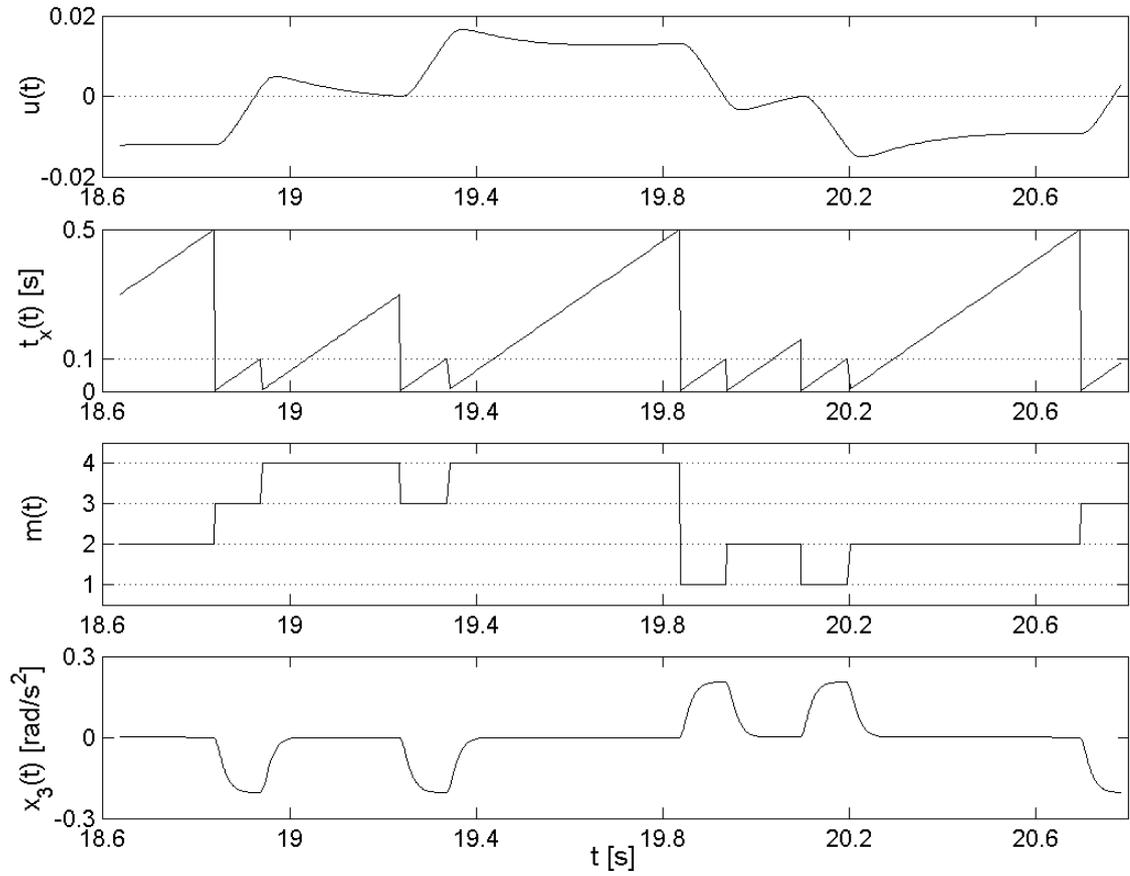


Figura 2.4 – Exemplo de formas de onda no sistema descrito

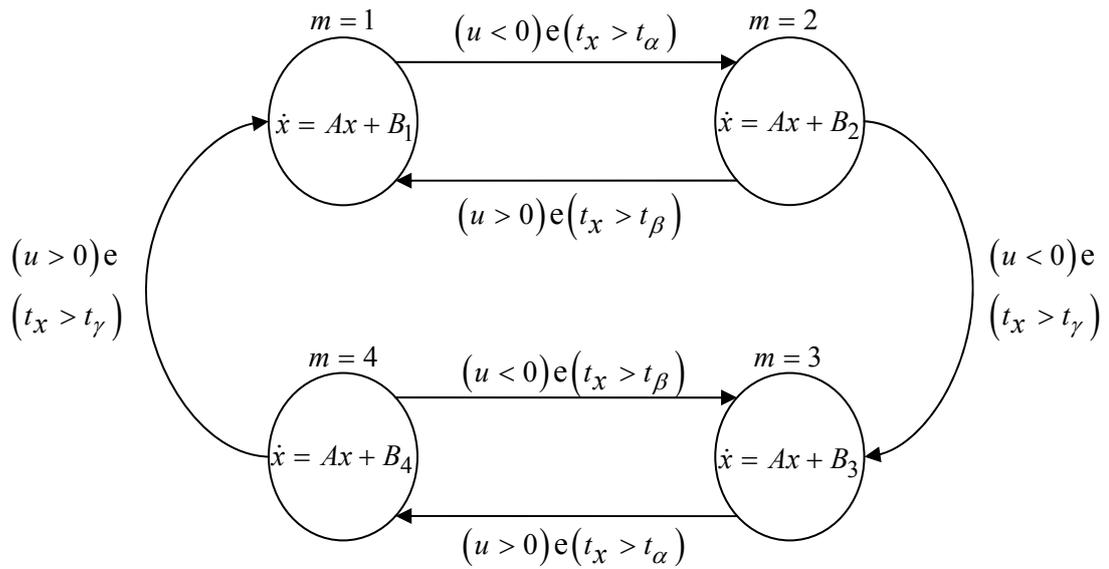


Figura 2.5 – Autômato para um sistema de controle de atitude. t_α , t_β e t_γ são constantes.

Uma introdução a sistemas híbridos pode ser encontrada em [23-24]. Na última década, a teoria de controle de sistemas chaveados experimentou um grande crescimento [25]. Contudo, os maiores esforços de pesquisa são destinados ao estudo da estabilidade de pontos de equilíbrio, sendo o progresso no caso de ciclos-limite consideravelmente menor. Em [26], são apresentadas, numa formulação de espaço de estados, condições necessárias para a existência e estabilidade de ciclos-limite para sistemas afins por partes. O estudo de ciclos-limite com comportamento global é realizado em [27]. O estudo de sistemas de controle a relé é amplamente discutido em [28] na perspectiva do domínio da frequência. Essa referência será de grande importância na análise de robustez proposta neste texto.

2.5 Desempenho do sistema de controle

O comportamento típico de sistemas dinâmicos com relés é o ciclo-limite, o que se relaciona com o fato de esse tipo de dispositivo atuar com precisão e velocidade limitadas.

Considere-se, por exemplo, o sistema $\ddot{x} = cM(t)$, onde $c = F\rho/J$ e $M(t)$ assume valores em $\{-1, 0, 1\}$ e obedece às restrições temporais de chaveamento descritas na seção 2.2. Definindo $v = \dot{x}$, conclui-se que, em cada trecho de aceleração constante, o sistema seguirá a trajetória

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{cMt^2}{2} + v_0t + x_0 \\ v(t) &= cMt + v_0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

De forma que se configuram as isóclinas: $2cM(x - x_0) = v^2 - v_0^2$, as quais sugerem uma estratégia de chaveamento que pode levar ao ponto de equilíbrio na origem: fazer

$$M = -\text{sgn}(v) \text{ quando a trajetória tocar a isóclina que passa pela origem: } \Gamma : \left(-\frac{v^2}{2c \text{sgn}(v)}, v \right).$$

Para isso, seria necessário que os atuadores estivessem desligados a pelo menos um tempo t_{ligd} , o que implica a necessidade de se ter $M = 0$ sobre a curva

$\Gamma' = \left(-\frac{v^2}{2c \operatorname{sgn}(v)} - vt_{ligd}, v \right)$. Assim, é possível constatar que essa estratégia de chaveamento

gera uma trajetória que atinge a origem do espaço de estados. Se, após tocar Γ , a trajetória leva um tempo maior que t_{lig} para chegar à origem, será possível parar aí. Contudo, uma vez na origem, os atuadores necessitam de um período de repouso até que sejam capazes de reagir a qualquer perturbação exógena. Por isso, nenhuma trajetória permanecerá no ponto de equilíbrio. Ainda, passado esse período de repouso, é possível obter-se um efeito oposto ao desejado se os atuadores forem ligados de imediato, uma vez que a duração do pulso, que é limitada inferiormente, pode ser excessiva e levar a uma ultrapassagem do ponto objetivado. Enfim, esse exemplo ilustra a impossibilidade de se satisfazer um requisito de estabilização e mostra por que a especificação de um movimento de ciclo-limite com amplitude limitada é a escolha mais simples.

Considere-se ainda esse exemplo simplificado. Suponha-se um movimento de ciclo-limite unimodal, isto é, aquele em que os modos m se sucedem numa seqüência periódica e são visitados uma única vez por período: $\{1,2,3,4,1,\dots\}$. Suponha-se também que os tempos de permanência t_m em cada modo sejam simétricos, isto é, $t_1 = t_3$ e $t_2 = t_4$. E seja (x_m, v_m) o estado inicial no modo m . Então, aplicando-se (2.16) sucessivamente pelos intervalos de tempo acima e considerando um ciclo-limite simétrico, obtém-se:

$$\begin{aligned} -x_1 = -x_2 = x_3 = x_4 &= \frac{ct_1 t_2}{4} \\ -v_1 = v_2 = v_3 = -v_4 &= \frac{ct_1}{2} \end{aligned} \tag{2.17}$$

Isso permite calcular as amplitudes pico-a-pico:

$$\begin{aligned} \Delta x &= \frac{ct_1}{2} \left(t_2 + \frac{t_1}{2} \right) \\ \Delta v &= ct_1 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Portanto, como era de se esperar, a amplitude é minimizada quando t_1 e t_2 são mínimos, ou seja, $t_1 = t_{lig}$ e $t_2 = t_{ligd}$. Nessa situação tem-se a máxima frequência de chaveamento permitida:

$$f_{\max} = \frac{1}{2(t_{lig} + t_{ligd})} \quad (2.19)$$

Além disso, como o controlador é linear e não se utiliza zona morta no atuador, a entrada do atuador nunca manterá valor nulo. Por isso, $t_2 = t_{ligd}$ valerá sempre.

Se a taxa de consumo de combustível quando os propulsores estão ligados é P_0 , então um ciclo-limite de período T terá um consumo médio

$$P = P_0 \frac{T - 2t_2}{T} = P_0 \frac{T - 2t_{ligd}}{T} \quad (2.20)$$

Portanto, também o mínimo consumo ocorre quando a taxa de chaveamento é máxima

$$\min_T P = P_0 \frac{t_{lig}}{t_{lig} + t_{ligd}} = \frac{P_0}{6} \quad (2.21)$$

Embora o exemplo apresentado nesta seção seja uma simplificação do problema original, conclusões semelhantes podem ser formuladas para este. Mostrar-se-á que também a mínima amplitude e o mínimo esforço de controle ocorrem para a situação de chaveamento mais rápido, o que é natural tendo em vista a discussão sobre a deficiência do relé quanto à velocidade de atuação. Contudo, se uma outra estratégia de chaveamento (não-linear) fosse adotada, t_2 não seria fixo e o consumo de combustível seria mínimo para o maior valor de t_2 e o menor valor de t_1 . Em contrapartida, aumentado t_2 , a amplitude já não seria mínima. Assim, controladores não-lineares podem oferecer uma maior liberdade de projeto e um melhor desempenho num projeto que enfatize o consumo de combustível. Entretanto, não estão no escopo deste trabalho, dado que tornariam a análise de robustez ainda mais complexa.

Neste trabalho, assume-se que um desempenho ideal para o sistema sujeito a incertezas deve ser aquele para o qual o único comportamento é o ciclo-limite unimodal, ou seja, um controlador ideal deve assegurar a inexistência de bifurcações. Para que isso ocorra, é

necessário que a frequência de oscilação demandada pelo controlador não seja maior que f_{\max} . Adicionalmente, o desempenho ideal deve minimizar a amplitude de oscilação, o que ocorre quando a frequência do ciclo-limite é máxima. Assim, define-se o desempenho ótimo na presença de incertezas como sendo aquele em que há um ciclo-limite com frequência de oscilação no menor intervalo $[f, f_{\max}]$ possível. Note-se que essa definição de desempenho ótimo se mostrará muito conveniente do ponto de vista de síntese, mas não equivale necessariamente a uma situação de menor amplitude possível, uma vez que pode haver controladores que impliquem intervalos de frequência contidos no intervalo acima.

2.6 Simulação numérica

De início, o sistema de controle foi simulado utilizando-se a ferramenta de software *xPC Target* do *Matlab*. Munindo-se de dois PCs, essa ferramenta permite implementar uma configuração de hardware mestre-escravo capaz de realizar simulações com alta velocidade, oferecendo a baixos custos funcionalidades similares às de uma placa de DSP de alto desempenho. Portanto, com essa ferramenta é possível realizar simulações a baixo custo num tempo significativamente menor do que aquele de simulações em ambiente *Windows*. Adicionalmente, o fato de os modelos serem programados em ambiente *Simulink* oferece grande flexibilidade quanto a mudanças estruturais do sistema. Detalhes da implementação dessa ferramenta de simulação podem ser obtidos em [10].

Uma desvantagem desse método é o fato não se poder intervir no processo até que a simulação esteja concluída, o que impede uma análise de resultados concomitante à simulação. Contudo, o maior problema desse método é outro: por esse procedimento demandar integração a passo fixo, impõe-se uma desvantajosa oposição entre tempo de simulação e precisão da integração num sistema cujo fluxo é descontínuo. Assim, a imprecisão na determinação dos pontos de chaveamento torna-se uma fonte de ruído de integração que obscurece a observação de dinâmicas tais como a caótica. Para minorar a ação desse ruído, o

passo de integração deve ser reduzido a valores tais que um outro procedimento de simulação faz-se mais interessante. Esse novo procedimento é baseado na solução exata da equação diferencial entre os chaveamentos e no uso de métodos de busca para encontrar os instantes em que os mesmos ocorrem.

A solução exata entre dois instantes de chaveamento é expressa por

$$x(x_0, m, t - \tau) = e^{A(t-\tau)}x_0 + \int_0^{t-\tau} e^{A\sigma} B_m d\sigma \quad (2.22)$$

para $t \geq \tau$, sendo x_0 o estado em que $M(t - \tau)$ sofreu transição.

Calculando-se e^{At} e $\int_0^t e^{A\sigma} B_m d\sigma$ analiticamente, é possível usar a solução acima para

construir o seguinte algoritmo de simulação:

0. Defina o estado inicial x_1 , m , o tempo de simulação T_{final} e a precisão ε e faça $t \leftarrow 0$ e $n \leftarrow 0$
 1. $n \leftarrow n + 1$, $\ell \leftarrow m$
 2. Se $m = 1$,
 - calcule $x' = x(x_n, m, tlig - \tau)$ e faça $t \leftarrow t + tlig - \tau$.
 - Se $u' < 0$, faça $x_{n+1} \leftarrow x'$, $m \leftarrow 2$ e vá para 6.
 - Caso contrário, encontre

$$\Delta t = \min \{ \Delta t > 0 : |u(x', m, \Delta t)| < \varepsilon \}.$$
 - Faça $t \leftarrow t + \Delta t$, $x_{n+1} \leftarrow x(x', m, \Delta t)$, $m \leftarrow 2$ e vá para 6.
 3. Se $m = 3$,
 - calcule $x' = x(x_n, m, tlig - \tau)$ e faça $t \leftarrow t + tlig - \tau$.
 - Se $u' > 0$, faça $x_{n+1} \leftarrow x'$, $m \leftarrow 4$ e vá para 6.
 - Caso contrário, encontre

$$\Delta t = \min \{ \Delta t > 0 : |u(x', m, \Delta t)| < \varepsilon \}.$$
 - Faça $t \leftarrow t + \Delta t$, $x_{n+1} \leftarrow x(x', m, \Delta t)$, $m \leftarrow 4$ e vá para 6.
 4. Se $m = 2$,
 - calcule $x' = x(x_n, m, tligm - \tau)$ e faça $t \leftarrow t + tligm - \tau$.
 - Se $u' > 0$, faça $x_{n+1} \leftarrow x'$, $m \leftarrow 1$ e vá para 6.
 - Caso contrário, busque

$$\Delta t = \min \{ 0 < \Delta t < tligm - tligd : |u(x', m, \Delta t)| < \varepsilon \}$$
 - Se Δt existe,
 - faça $t \leftarrow t + \Delta t$, $x_{n+1} \leftarrow x(x', m, \Delta t)$, $m \leftarrow 1$ e vá para 6.
 - Caso contrário, faça $t \leftarrow t + tligd - tligm$, $x_{n+1} \leftarrow x(x', m, tligd - tligm)$, $m \leftarrow 3$ e vá para 6.
 5. Se $m = 4$,

calcule $x' = x(x_n, m, tligm - \tau)$ e faça $t \leftarrow t + tligm - \tau$.

Se $u' < 0$, faça $x_{n+1} \leftarrow x'$, $m \leftarrow 3$ e vá para 6.

Caso contrário, busque

$$\Delta t = \min \{ 0 < \Delta t < tligm - tligd : |u(x', m, \Delta t)| < \varepsilon \}$$

Se Δt existe,

faça $t \leftarrow t + \Delta t$, $x_{n+1} \leftarrow x(x', m, \Delta t)$, $m \leftarrow 3$ e vá para 6.

Caso contrário, faça $t \leftarrow t + tligd - tligm$, $x_{n+1} \leftarrow x(x', m, tligd - tligm)$, $m \leftarrow 1$ e vá para 6.

6. Faça $x_{n+1} \leftarrow x(x_{n+1}, \ell, \tau)$.

7. Se $t < Tfinal$, vá para 1.

8. Fim.

Diversos procedimentos de busca podem ser usados para encontrar Δt . Neste trabalho, optou-se por aplicar (2.22) sucessivamente usando passo fixo até que se identifique um intervalo de mudança de sinal de $u(t)$. Então, utiliza-se sucessivamente a aproximação do método de Newton com $H_m(x) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]$:

$$\Delta t \approx -\frac{H_m(x)x}{H_m(x)[Ax + B_m]} = -\frac{H_m(x)x}{H_m(x)Ax} \quad (2.23)$$

No caso de não-convergência dentro de um determinado número de iterações ou de convergência fora do intervalo, utiliza-se o método da seção áurea no mesmo intervalo. Não sendo encontrado um subintervalo em que $u(t)$ mude de sinal, conclui-se que não há chaveamento no intervalo de busca. Note-se que para o caso de $m = 1$ e $m = 3$, assegura-se que Δt existe sempre, uma vez que o resíduo de $U(s)/M(s)$ correspondente ao termo $1/s^2$ é sempre negativo desde que o sistema seja de fase mínima e que não haja pólos no semi-plano real positivo. Um aspecto simplificador é o fato de a solução $x(x_0, m, t)$ ser uma função afim com respeito a x_0 cujos coeficientes não precisam ser recalculados sempre, dado que muitas vezes é utilizado um mesmo deslocamento no tempo: $tlig - \tau$, $tligm - \tau$, $tligd - tligm$.

No procedimento de busca do subintervalo de tempo em que se dá o chaveamento, adotou-se um passo fixo de 10 [ms]. Essa solução estará sujeita a erros em situações de tangência entre o fluxo e a superfície de chaveamento e, por isso, a incerteza na determinação

de bifurcações deve ser avaliada. Um estudo comparativo desse algoritmo, usando diferentes passos e parâmetros de controle nas vizinhanças de pontos de bifurcação, permitiu constatar que a incerteza na determinação dos pontos de bifurcação é inferior a $0.01 \text{ [s}^{-1}\text{]}$ em z e em p .

O algoritmo apresentado é capaz de determinar os instantes de chaveamento com uma precisão ε . Assim, quanto menor se desejar ε , mais se acentuará a diferença entre os tempos de execução desse algoritmo e da integração usando hardware computacional mestre escravo. A simulação que usa a solução exata tem um número de iterações que cresce, no pior caso, numa proporção de $-\log \varepsilon$; ao passo que a integração a passo fixo tem um número de iterações que cresce numa proporção de $1/\varepsilon$. As simulações apresentadas neste trabalho adotaram $\varepsilon = 10 \text{ [\mu s]}$.

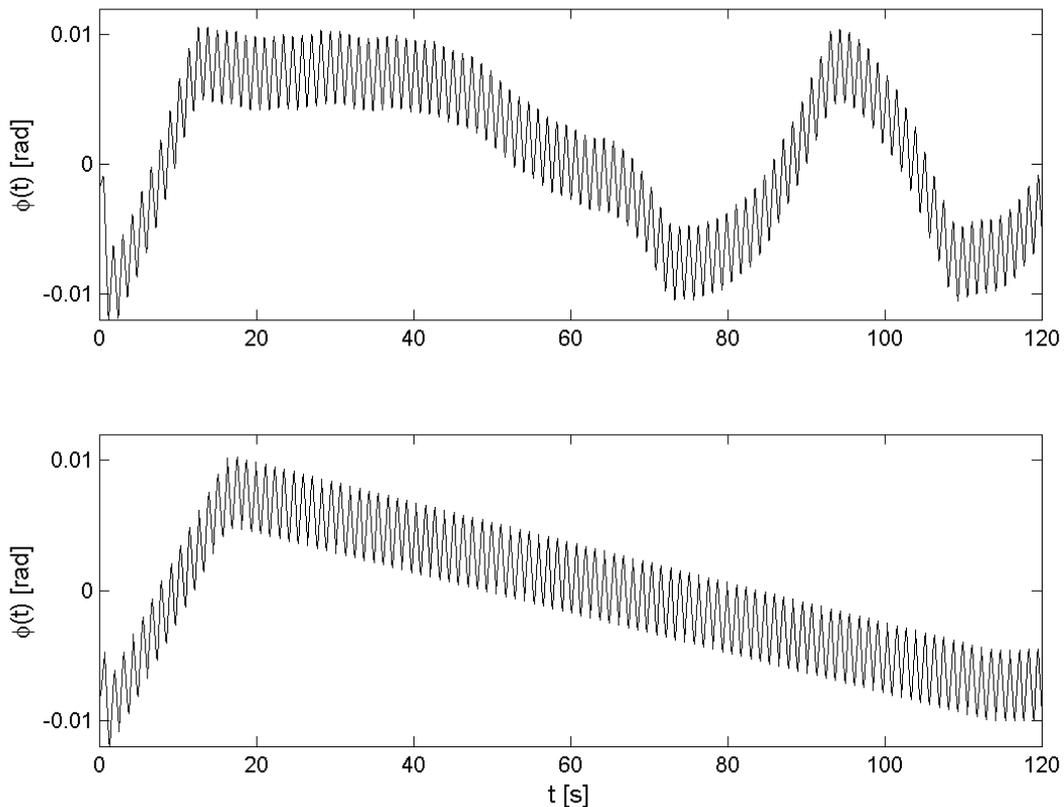


Figura 2.6 – Amostras de movimento quase-periódico obtidas por simulação com $\varepsilon = 2 \text{ [ms]}$ (superior) e $\varepsilon = 10 \text{ [\mu s]}$ (inferior) para $p = -5.5$, $z = -3.9$

Pela figura 2.6 é possível comparar as formas de onda para o movimento quase-periódico obtidas usando diferentes precisões na simulação. Nota-se que o movimento quase-periódico é constituído da superposição de um movimento de alta frequência e de outro de baixa frequência. No caso em que há maior imprecisão observa-se uma forma de onda de baixa frequência muito irregular e com uma banda de passagem maior que a do caso de maior precisão. Ressalta-se, porém, que a precisão ε não afeta a amplitude total do movimento, o que ficará claro nos capítulos subseqüentes. Na figura 2.7 mostra-se um exemplo de simulação para movimento caótico que possui o maior expoente de Lyapunov igual a 0.02.

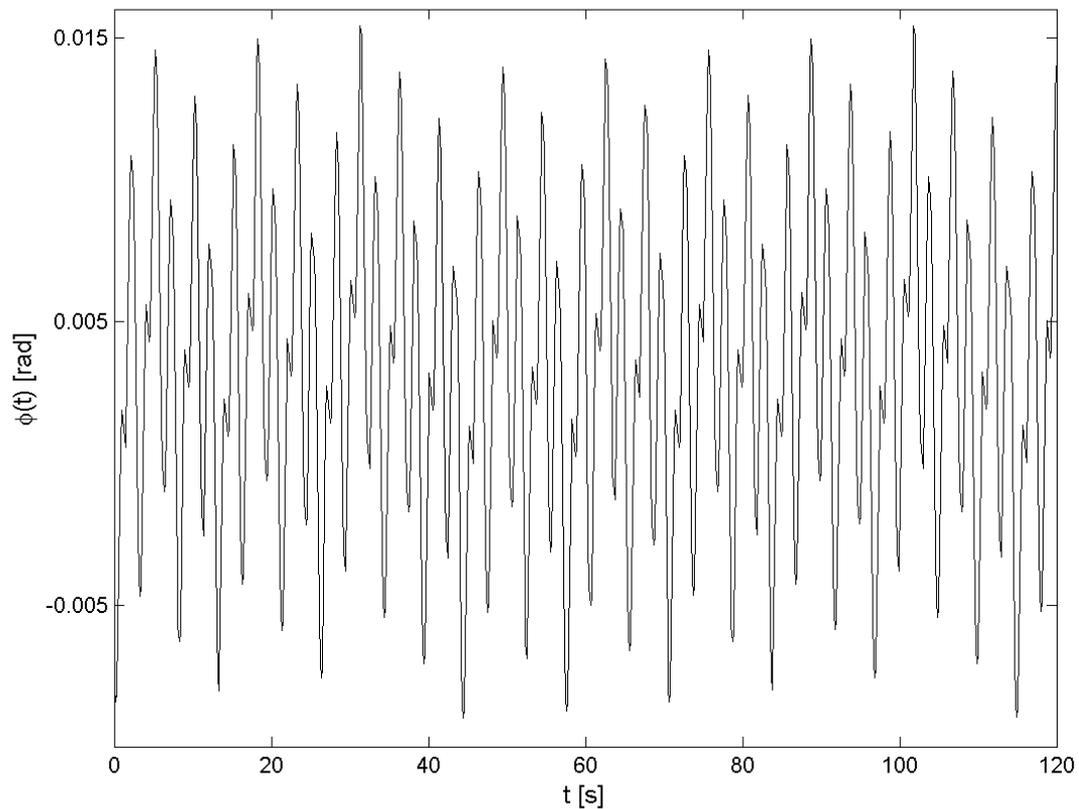


Figura 2.7 – Amostra de movimento caótico obtida por simulação com $\varepsilon = 10$ [μs] para $p = -5.5$, $z = -1.9$

Conhecendo os estados de chaveamento, obter os estados intermediários pode ser feito facilmente utilizando-se a equação (2.22). Contudo, para a maior parte das aplicações nesta pesquisa, o conhecimento dos estados de chaveamento será suficiente. Outra vantagem desse

procedimento de simulação é a possibilidade da simultânea análise de dados, o que se mostrou útil no estabelecimento de um critério de parada para o cálculo dos expoentes de Lyapunov. O maior inconveniente da abordagem de simulação aqui apresentada é a sua pequena flexibilidade a variações estruturais na planta, uma vez que estas demandariam recalcular e^{At} e $\int_0^t e^{A\sigma} B_m d\sigma$. É certo que estas funções podem ser avaliadas numericamente, mas então seria introduzida uma nova fonte de erro na determinação dos instantes de chaveamento.

Nesta pesquisa, o procedimento de simulação usando o *xPC Target* foi adotado apenas nas simulações do capítulo 4. Nos demais capítulos fez-se uso do algoritmo melhorado apresentado acima.

3 Espectro de Lyapunov

Os expoentes de Lyapunov são grandezas que caracterizam um comportamento dinâmico qualitativa e quantitativamente, estando diretamente relacionados com a taxa exponencial média de convergência ou divergência de trajetórias vizinhas no espaço de fase. O espectro constituído pelo conjunto desses expoentes é ferramenta tradicional para análise de sistemas não-lineares [29]. No caso linear, eles equivalem à parte real dos autovalores do sistema. Em especial, são eficientes indicadores de comportamento caótico e da ocorrência de bifurcações.

Os expoentes de Lyapunov podem ser em geral calculados a partir de modelos. Quando não se dispõe de modelos confiáveis, em alguns casos ainda é possível estimar o maior expoente com boa precisão a partir de séries temporais [29].

O espectro de Lyapunov está bem definido para sistemas dinâmicos suaves e ergódigos. Mas o estudo dessas grandezas, sobretudo quanto à convergência de seu cálculo, é incipiente no caso de sistemas com fluxos não-suaves como sistemas híbridos. Assim, a sua existência para o tipo de sistema estudado é por si só uma matéria de interesse. Neste capítulo serão apresentados os dois principais métodos constantes na literatura e um deles será usado para gerar diagramas de bifurcação do sistema em estudo. Um outro texto também dedicado a esse problema expõe o uso de sincronização caótica para estimar o maior expoente de Lyapunov em sistemas não-suaves [30]. Abaixo, apresenta-se uma definição desses expoentes no caso de sistemas dinâmicos contínuos.

3.1 Definição

Considere a ação de um fluxo diferencial contínuo sobre uma esfera de condições iniciais n -dimensional e de comprimento infinitesimal. Denotando por $d_i(t)$ os comprimentos

dos eixos principais do elipsóide resultante. Definem-se em ordem decrescente os expoentes de Lyapunov do correspondente sistema dinâmico:

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{d_i(t)}{d_i(0)} \quad (3.1)$$

Assim, a trajetória por cada ponto do espaço de estados pode ser perturbada em n direções principais, a cada uma dessas direções está associado um expoente. Portanto, o espectro de Lyapunov é função da condição inicial, ou melhor, é uma característica do atrator a cuja bacia pertence aquela condição inicial. Na figura 3.1 ilustra-se a ação de um campo bidimensional f sobre uma “esfera” de diâmetro inicial d_0 . Intuitivamente, tem-se que os expoentes de Lyapunov medem a taxa exponencial em que trajetórias originadas de condições iniciais vizinhas divergem. Ressalta-se que a taxa de crescimento do “volume” do elipsóide está diretamente associada à soma dos expoentes. Por isso, sistemas dissipativos devem apresentar essa soma negativa, do contrário, o volume crescerá indefinidamente. A figura ilustra mais uma característica importante do espectro de Lyapunov: a dominância do maior expoente. Dado que o conjunto ortogonal ao eixo de comprimento d_1 possui área nula, quase toda perturbação seguirá esse eixo, crescendo com taxa praticamente igual a λ_1 , que domina λ_2 .

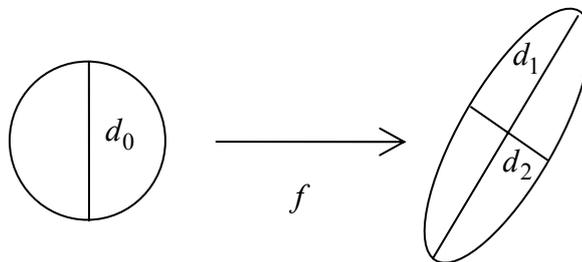


Figura 3.1 – Volume esférico sob a ação de um fluxo diferencial

Como atratores caóticos são caracterizados pela alta sensibilidade à condição inicial e por uma previsibilidade limitada, eles devem apresentar ao menos um expoente positivo. No caso de movimentos persistentes, prova-se que deve haver ao menos um expoente nulo [31], o

qual deve estar associado com a direção tangente ao fluxo. Em contrapartida, pontos de equilíbrio devem possuir todos os expoentes negativos. Num sistema dissipativo tridimensional, os espectros com os seguintes sinais são possíveis: (+, 0, -) para um atrator caótico; (0, -, -) para um ciclo limite; (0, 0, -) para um movimento quase-periódico sobre um atrator toroidal; (-, -, -) para um ponto fixo. Portanto, os sinais dos expoentes fornecem conhecimento qualitativo acerca da dinâmica analisada enquanto os seus valores fornecem conhecimento quantitativo sobre a previsibilidade de trajetórias ou sobre a duração de transitórios.

3.2 Dimensão de Lyapunov

Com base no espectro de Lyapunov, pode-se estimar a dimensão do conjunto que resulta da ação do fluxo diferencial sobre um volume esférico. Há diferentes definições de dimensão [32] tais como dimensão de capacidade, dimensão de Hausdorff, dimensão de informação e dimensão de correlação. Em geral, a diferença entre elas é pequena. Em Frederickson et al. [33] é proposta a conjectura de que a abaixo definida dimensão de Lyapunov seria igual à dimensão de informação de um atrator. Tal conjectura foi parcialmente verificada em [34].

Defina-se

$$\mu(\nu) = \sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i \quad (3.2)$$

para ν inteiro positivo, e sua extensão por interpolação linear

$$\mu(\sigma) = \sum_{i=1}^k \lambda_i + (\sigma - k)\lambda_{k+1}, \text{ se } k \leq \sigma < k+1, \quad \sigma \in \mathbb{R} \quad (3.3)$$

e defina-se ainda $\mu(\sigma) = -\infty$, se $\sigma > n$, onde n é a dimensão do sistema. Assim, tem-se que $\mu(0) = 0$, que o máximo de $\mu(\sigma)$ corresponde à soma dos expoentes positivos e que $\mu(\sigma)$ se torna negativa para σ suficientemente grande. Pode-se interpretar $\mu(\nu)$ como sendo a taxa de crescimento de um volume infinitesimal de dimensão ν , que se estende ao longo das

direções principais dos primeiros ν expoentes. Quando $\mu(\nu) \geq 0$ e $\mu(\nu+1) < 0$, existirá um conjunto de pontos com dimensão $\nu+1$ com tendência de contração e um subconjunto do mesmo com dimensão ν e tendência de expansão. Por isso, é natural esperar que a dimensão do atrator esteja entre ν e $\nu+1$. A dimensão de Lyapunov de um atrator é então definida

$$D_L = \max \{ \sigma : \mu(\sigma) \geq 0 \} \quad (3.4)$$

Considerando $\mu(\nu) \geq 0$ e $\mu(\nu+1) < 0$, tem-se

$$D_L = \nu + \frac{\mu(\nu)}{|\lambda_{\nu+1}|} \quad (3.5)$$

A figura 3.2 ilustra como se dá a determinação da dimensão de Lyapunov. Observa-se ainda que, segundo a definição acima, apenas atratores caóticos podem apresentar dimensões de Lyapunov não-inteiras. Contudo, para outras definições de dimensão, atratores não-caóticos com dimensão fracionária também são conhecidos [35].

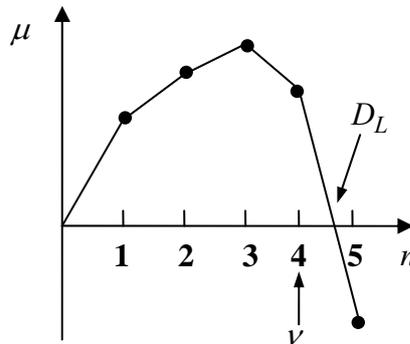


Figura 3.2 – Determinação da dimensão de Lyapunov

3.3 Cálculo pelo método de Müller

O procedimento proposto por Müller [36] representa uma das recentes tentativas de calcular o espectro de Lyapunov a partir de modelos de sistemas suaves por partes. Esse método relaciona a divergência de trajetórias infinitesimalmente próximas antes e depois de atravessarem uma superfície de chaveamento $h(x) = 0$, conforme mostra a figura 3.3. Nesta seção notar-se-á simplificadaamente $H_m(x) = H(x)$.

Inicialmente, as trajetórias divergem segundo a ação de um campo vetorial f^- . No instante \tilde{t}_k , a trajetória nominal $x(t)$ cruza a superfície de chaveamento, o qual ocorre com um atraso τ . O estado imediatamente anterior ao chaveamento é mapeado no estado imediatamente posterior pela função de transição:

$$x^+ = g(x^-) \quad (3.6)$$

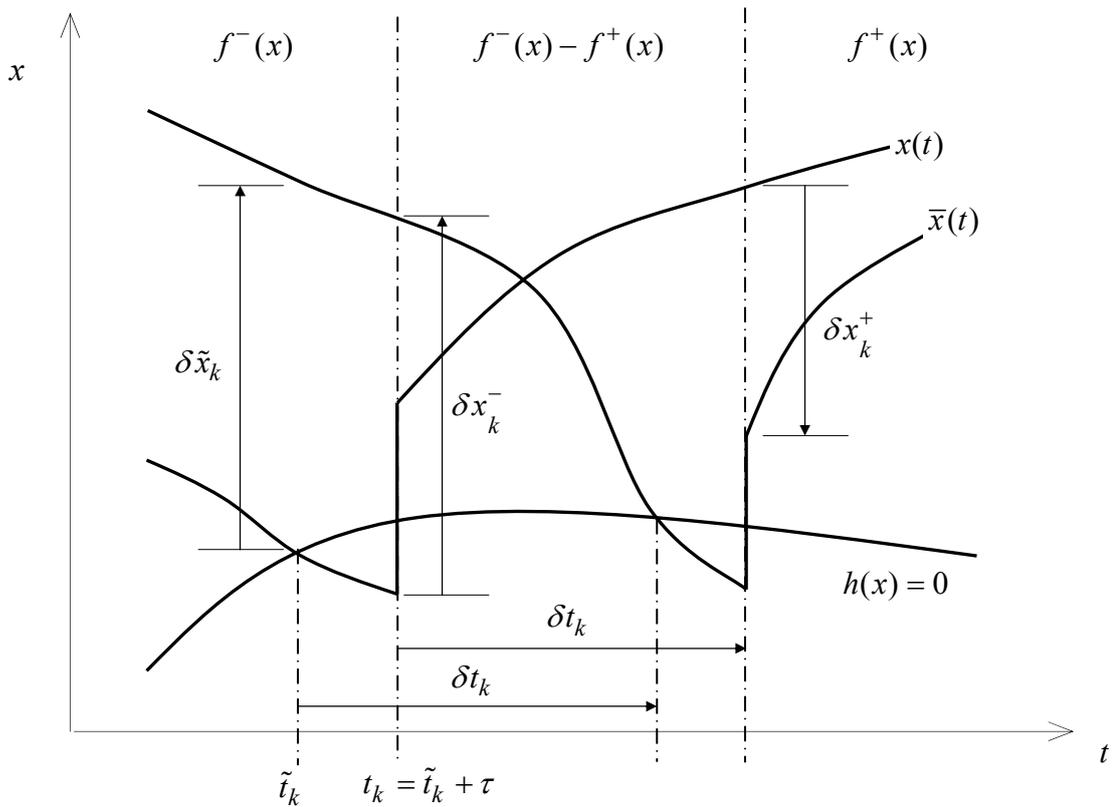


Figura 3.3 – Divergência de trajetórias infinitesimalmente próximas após o cruzamento da superfície de chaveamento $h(x) = 0$

A partir do chaveamento da trajetória nominal, as trajetórias divergem sob a ação de um campo $f^- - f^+$ até que a trajetória perturbada $\bar{x}(t)$ também sofra o ação do chaveamento no instante $t_k + \delta t_k$. Então ambas passam a seguir o campo f^+ . Considerando variações infinitesimais, as distâncias entre as trajetórias imediatamente antes e depois do k -ésimo chaveamento são dadas por:

$$\begin{aligned}
\delta x_k^+ &= \bar{x}^+(t_k + \delta t_k) - x(t_k + \delta t_k) \\
&= g(x_k^- + \delta x_k^- + f^-(x_k^-)\delta t_k) - [g(x_k^-) + f^+(x_k^+)\delta t_k] \\
&= Dg(x_k^-)\delta x_k^- + [Dg(x_k^-)f^-(x_k^-) - f^+(x_k^+)]\delta t_k
\end{aligned} \tag{3.7}$$

onde Dg indica o jacobiano de g .

O intervalo de tempo entre os chaveamentos das duas trajetórias pode ser obtido pela aproximação de primeira ordem considerando o vetor $H(\tilde{x}_k)$ normal à superfície de chaveamento $h(x) = 0$:

$$\begin{aligned}
h(\tilde{x}_k + \delta \tilde{x}_k + f^-(\tilde{x}_k)\delta t_k) &= H(\tilde{x}_k)(\delta \tilde{x}_k + f^-(\tilde{x}_k)\delta t_k) = 0 \\
\Rightarrow \delta t_k &= -\frac{H(\tilde{x}_k)\delta \tilde{x}_k}{H(\tilde{x}_k)f^-(\tilde{x}_k)}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Por substituição em (3.7), sabendo-se que $\delta x_k^- = e^{At} \delta \tilde{x}_k$, tem-se

$$\delta x_k^+ = \left[Dg(x_k^-)e^{At} + [f^+(x_k^+) - Dg(x_k^-)f^-(x_k^-)] \frac{H(\tilde{x}_k)}{H(\tilde{x}_k)f^-(\tilde{x}_k)} \right] \delta \tilde{x}_k = L_k \delta \tilde{x}_k \tag{3.9}$$

Portanto, pode-se calcular uma matriz de transição L_k que rege a evolução das pequenas variações quando há um chaveamento.

Entre os instantes de chaveamento as pequenas variações são dadas pela equação variacional:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ \delta \dot{x} = Df(x)\delta x \end{cases} \tag{3.10}$$

onde Df denota o jacobiano do campo f . Assim, para calcular os expoentes de Lyapunov, basta integrar o par de equações acima entre os instantes de chaveamento e aplicar a matriz de transição a cada chaveamento. Contudo, como o sistema estudado é afim por partes, o cálculo de variações será ainda simplificado:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + B_m \\
\delta \dot{x} &= A\delta x \Rightarrow \delta x = e^{At} \delta x_0
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Dessa forma, combinando (3.9) e (3.11), pode-se definir uma nova matriz de transição

T_k tal que

$$\delta x_k^+ = T_k \delta x_{k-1}^+ = L_k e^{A(t_k - t_{k-1} - \tau)} \delta x_{k-1}^+ \quad (3.12)$$

Procede-se em seguida ao cálculo de L_k para o sistema em estudo. Para isso, define-se a função de transição $g(x)$, que leva em conta os saltos em t_x a cada chaveamento:

$$g(x) = \begin{bmatrix} I_{5 \times 5} & 0_{5 \times 1} \\ 0_{1 \times 5} & 0 \end{bmatrix} x = Gx \quad (3.13)$$

onde $I_{5 \times 5}$ denota a matriz identidade de ordem 5. Logo, substituindo (3.11) e (3.13) em (3.9),

$$\begin{aligned} L_k &= Ge^{A\tau} + \left[AGx_k^- + B^+ - G(Ax_k^- + B^-) \right] \frac{H(\tilde{x}_k)}{H(\tilde{x}_k)[A\tilde{x}_k + B^+]} \\ &= Ge^{A\tau} + \frac{(B^+ - GB^-)H(\tilde{x}_k)}{H(\tilde{x}_k)[A\tilde{x}_k + B^+]} \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde se escreve $B^+ = B_{m(t_k^+)}$ e $B^- = B_{m(t_k^-)}$.

No caso de o chaveamento ocorrer devido ao anulamento da variável de controle $u(t)$, tem-se $H(\tilde{x}_k) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]$ e

$$L_k = Ge^{A\tau} + \frac{1}{H(\tilde{x}_k)A\tilde{x}_k} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{F\rho}{\alpha^2 J} (M(t_k^+) - M(t_k^-)) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} H(\tilde{x}_k) \quad (3.15)$$

Neste ponto, é interessante reparar no que se passa com as perturbações em t_x . A linha nula na matriz A (equação (2.15)) indica que essa perturbação permanecerá constante entre os instantes de chaveamento e a linha nula em G mostra que essa perturbação saltará para $-\delta t_k$ após o chaveamento. Além disso, a coluna nula em $Ge^{A\tau}$ mostra que dela não dependem as perturbações nos outros estados. Essa análise sugere que seria possível omitir a variável t_x do cálculo dos expoentes de Lyapunov. Contudo, esse procedimento tornaria o cálculo incorreto, como mostram os parágrafos seguintes.

No caso de o chaveamento ocorrer devido à restrição de tempo, tem-se

$$H(\tilde{x}_k) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] \text{ e}$$

$$L_k = Ge^{A\tau} + \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{F\rho}{\alpha^2 J} (M(t_k^+) - M(t_k^-)) \\ 0 \\ 1 \end{array} \right] H(\tilde{x}_k) \quad (3.16)$$

Dessa forma, tem-se que a perturbação em t_x permanece constante até que haja um chaveamento por anulamento de $u(t)$ e que essa mesma perturbação é que define δt_k cada vez que o chaveamento decorre de uma restrição temporal. Por isso, ela não pode ser desconsiderada.

Enfim, pode-se escrever

$$\delta x(t_k) = \prod_{i=1}^k T_i \delta x(t_0) = S_k \delta x(t_0) \quad (3.17)$$

o que permitirá calcular os expoentes de Lyapunov nas direções v_i :

$$\lambda_i = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k} \ln \frac{\|S_k v_i\|}{\|v_i\|} \quad (3.18)$$

3.4 Renormalização

A seqüência de multiplicações que envolve o cálculo S_k é uma fonte de erro numérico que prejudica a precisão dos expoentes, principalmente a daqueles próximos a zero. Por isso, o cálculo eficiente desses expoentes necessita de algum procedimento de renormalização. Adotou-se o algoritmo baseado em decomposição QR [37] proposto por Eckmann e Ruelle [29]. Tal algoritmo realiza a decomposição das matrizes T_k no produto das matrizes ortogonais Q_i por matrizes triangulares superiores R_i :

$$\begin{aligned} Q_1 &= I_{6 \times 6} \\ T_i Q_i &= Q_{i+1} R_i \end{aligned} \quad (3.19)$$

Substituindo (3.19) em (3.18) e usando a ortogonalidade de Q_i :

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k} \ln \frac{\left(v_i^T S_k^T S_k v_i \right)^{1/2}}{\|v_i\|} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k} \ln \frac{\left(v_i^T S_{k-1}^T Q_k R_k^T Q_{k+1}^T Q_{k+1} R_k Q_k^T S_{k-1} v_i \right)^{1/2}}{\|v_i\|} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k} \ln \frac{\left(v_i^T R_1^T \cdots R_k^T R_k \cdots R_1 v_i \right)^{1/2}}{\|v_i\|} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Então, considerando a prova do teorema de Osedelec dada por Johnson et al. [38], pode-se mostrar que para sistemas dinâmicos inversíveis, feita uma escolha qualquer de Q_1 , a seguinte igualdade verifica-se com probabilidade 1:

$$\lambda_i = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k} \sum_{\ell=1}^k \ln |R_{\ell(i)}| \quad (3.21)$$

Dado que há casos para os quais a resposta transitória do sistema estudado pode ser excessivamente longa, fez-se necessário definir um critério de parada que garantisse a precisão dos expoentes. O critério aqui introduzido impõe um limite superior à diferença entre λ_i dado por (3.21) e λ_i dado pela aproximação de mínimos quadrados:

$$\lambda'_i = \frac{\sum_{v=1}^k t_v \ln |R_{v(i)}|}{\sum_{v=1}^k t_v^2} \quad (3.22)$$

Assim, $|\lambda'_j - \lambda_j|$ é uma medida de quanto a evolução das variações tem um comportamento exponencial. Quanto menor ela for, também menor será o coeficiente linear da melhor reta que relaciona $\sum_{i=1}^k \ln |R_{i(jj)}|$ e t_k . Quanto menor esse coeficiente, melhor será a aproximação de (3.21).

3.5 Cálculo pelo método da função implícita

Outro procedimento para o cálculo dos expoentes de Lyapunov em sistemas com descontinuidades foi proposto por Souza e Caldas [39]. Embora no restante do capítulo se tenha optado pelo método de Müller, o método de Souza e Caldas é apresentado porque permite uma visão intuitiva do cálculo dos expoentes. Esse método se baseia na linearização de mapas de Poincaré. Por isso, guarda certa relação com os critérios de estabilidade de ciclos-limite derivados em [26].

Nesta seção, a componente t_x do vetor de estados x será suprimida, uma vez que é mais conveniente tratar diferenças do tempo absoluto. Assim, considere-se que as matrizes A e B_m contemplam apenas os 5 primeiros estados. Além disso, apenas se utilizará o vetor normal $H = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$ relativo ao chaveamento por $u = 0$. Também, por simplicidade, optou-se por fazer $\tau = 0$. A generalização do resultado para $\tau > 0$ não oferece dificuldades.

Tal método é aplicável quando se pode expressar (x_k, t_k) como função implícita de (x_{k-1}, t_{k-1}) . Então é possível calcular

$$T_k = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_k}{\partial x_{k-1}} & \frac{\partial x_k}{\partial t_{k-1}} \\ \frac{\partial t_k}{\partial x_{k-1}} & \frac{\partial t_k}{\partial t_{k-1}} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

e o mesmo procedimento das seções anteriores pode ser utilizado para calcular os expoentes de Lyapunov.

Para deduzir T_k , considere-se a equação

$$x_k = e^{A(t_k - t_{k-1})} x_{k-1} + \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{A(t_k - \sigma)} B_m d\sigma \quad (3.24)$$

que está sujeita à restrição

$$h(t_k, x_{k-1}, t_{k-1}) = Hx_k = 0 \quad (3.25)$$

definida conforme as condições do capítulo anterior. Derivando-se (3.24) com respeito a x_{k-1} ,

obtem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_k}{\partial x_{k-1}} &= e^{A(t_k-t_{k-1})} + \left(Ae^{A(t_k-t_{k-1})}x_{k-1} + A \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{A(t_k-\sigma)} B_m d\sigma + B_m \right) \frac{\partial t_k}{\partial x_{k-1}} \\ &= e^{A(t_k-t_{k-1})} + (Ax_k + B_m) \frac{\partial t_k}{\partial x_{k-1}} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Derivando-se (3.24) com respeito a t_{k-1} ,

$$\frac{\partial x_k}{\partial t_{k-1}} = -Ae^{A(t_k-t_{k-1})}x_{k-1} - e^{A(t_k-t_{k-1})}B_m + (Ax_k + B_m) \frac{\partial t_k}{\partial t_{k-1}} \quad (3.27)$$

Mas,

$$\begin{aligned} Ax_k &= Ae^{A(t_k-t_{k-1})}x_{k-1} + \int_{t_{k-1}}^{t_k} Ae^{A(t_k-\sigma)} B_m d\sigma \\ &= Ae^{A(t_k-t_{k-1})}x_{k-1} + \left(e^{A(t_k-t_{k-1})} - I_{5 \times 5} \right) B_m \end{aligned} \quad (3.28)$$

onde $I_{5 \times 5}$ denota a matriz identidade de ordem 5.

Logo, substituindo em (3.27)

$$\frac{\partial x_k}{\partial t_{k-1}} = (Ax_k + B_m) \left(\frac{\partial t_k}{\partial t_{k-1}} - 1 \right) \quad (3.29)$$

Ainda, ao considerar-se a restrição de (3.25),

$$\frac{\partial t_k}{\partial x_{k-1}} = - \frac{\partial h}{\partial x_{k-1}} \Big/ \frac{\partial h}{\partial t_k} = - \frac{He^{A(t_k-t_{k-1})}}{H(Ax_k + B_m)} = - \frac{He^{A(t_k-t_{k-1})}}{HAX_k} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial t_k}{\partial t_{k-1}} &= - \frac{\partial h}{\partial t_{k-1}} \Big/ \frac{\partial h}{\partial t_k} = - \frac{H \left(-Ae^{A(t_k-t_{k-1})}x_{k-1} - e^{A(t_k-t_{k-1})}B_m \right)}{H(Ax_k + B_m)} \\ &= - \frac{H(-Ax_k - B_m)}{H(Ax_k + B_m)} = 1 \end{aligned} \quad (3.31)$$

o que leva a

$$T_k = \begin{bmatrix} e^{A(t_k-t_{k-1})} + (Ax_k + B_m) \frac{\partial t_k}{\partial x_{k-1}} & 0_{5 \times 1} \\ \frac{\partial t_k}{\partial x_{k-1}} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

No caso do cruzamento de uma superfície de chaveamento determinada por restrição temporal $t_x = t_k - t_{k-1}$, ter-se-á

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial t_k}{\partial x_{k-1}} & \frac{\partial t_k}{\partial t_{k-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{1 \times 5} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

de modo que

$$T_k = \begin{bmatrix} e^{A(t_k - t_{k-1})} & 0_{5 \times 1} \\ 0_{1 \times 5} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

As expressões acima para T_k permitirão explicar de maneira intuitiva alguns dos resultados numéricos obtidos neste capítulo.

É importante notar que, diferentemente do método de Müller, que considera perturbações fora do plano de chaveamento, o método da função implícita considera apenas perturbações sobre o plano de chaveamento e contabiliza em δt_k a contribuição de perturbações transversais ao plano de chaveamento. Portanto, o método de Müller representa as perturbações de um modo mais natural que o da função implícita. Algumas experimentações numéricas mostraram que esses métodos apresentam em geral 5 expoentes comuns, os quais diferem entre si por um erro relativo menor que 4%. Outro aspecto que favoreceu a predileção pelo método de Müller é a velocidade de convergência do cálculo dos expoentes. Para esse método verificou-se que as diferenças entre as velocidades de convergência do primeiro e dos demais expoentes são menores que no caso do método da função implícita. Esse aspecto é importante uma vez que garante uma maior precisão para todos os expoentes.

3.6 Resultados numéricos

Os resultados são ilustrados na figura 3.4, onde se exibem os quatro maiores expoentes calculados pelo método de Müller dados em função dos parâmetros de controle p e z para o caso das condições iniciais $x(0) = [-0.02 \ 0.02 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ e $m(0) = 1$. Utilizou-se uma

grade de 10^4 pontos para dividir o espaço de parâmetros e estabeleceu-se uma precisão de 10^{-6} [s] para a determinação do instante de chaveamento. A tolerância para $|\lambda'_1 - \lambda_1|$ foi de 10^{-3} . Cinco regiões aparecem com destaque: duas regiões em que há movimento periódico ($\lambda_1 = 0$, e $\lambda_i < 0$, para $i > 1$) ; duas regiões em que há dinâmica quase-periódica ($\lambda_1 \approx \lambda_2 \approx 0$ e λ_3 é levemente negativo); por fim, uma última região em que o primeiro expoente se apresenta positivo.

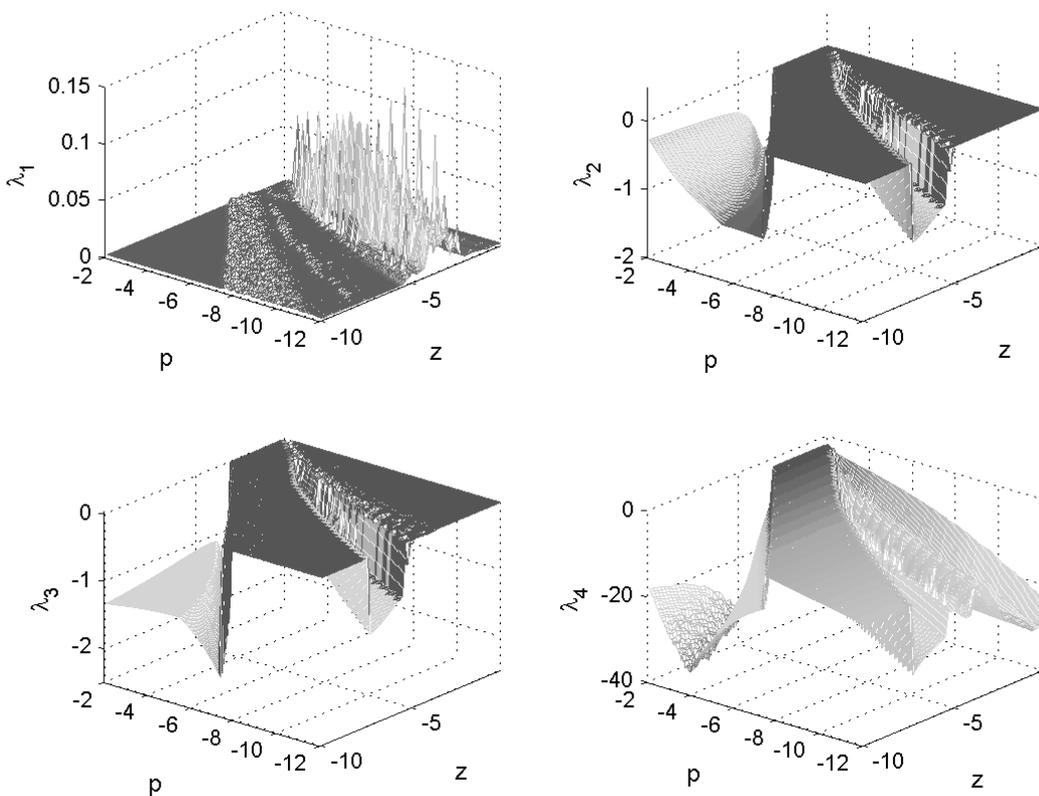


Figura 3.4 – Diagramas biparamétricos para os 4 maiores expoentes de Lyapunov. λ_i , z e p são dados em $[s^{-1}]$.

Essa figura pode ser melhor compreendida com a ajuda da figura 3.5, em que se observa um corte dos diagramas da figura 3.4 comparado com outros diagramas. O diagrama da figura 3.5-a mostra $\phi(t)$ discretizada usando a seção de Poincaré correspondente à entrada do sistema no modo $m = 2$, isto é, os valores de $\phi(t)$ quando o atuador é chaveado de uma saída positiva para uma saída nula. Note-se que esse valor está em geral bem próximo do mínimo

local de $\phi(t)$. O diagrama da figura 3.5-b exibe o diagrama espectral de bifurcação de $\phi(t)$ [10; 40], isto é, a densidade espectral de $\phi(t)$, para uma taxa de amostragem de 20 [Hz], como função do parâmetro z .

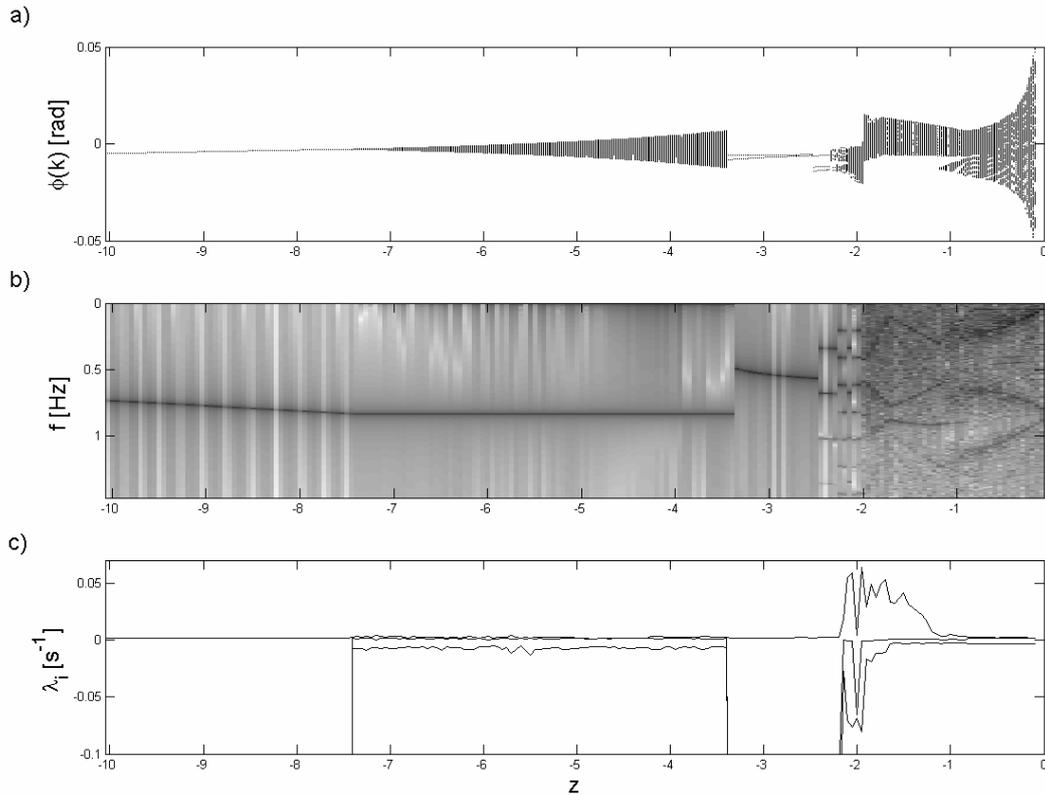


Figura 3.5 – Comparação do diagrama de bifurcação para ϕ discretizado (a), do diagrama espectral de bifurcação de ϕ (b) e dos 3 maiores expoentes de Lyapunov (c). Fixou-se $p = -5.5$.

Na figura 3.5-c, o espectro de Lyapunov indica a existência de um ciclo limite no intervalo $-10.0 < z < -7.4$. Nesse intervalo, à medida que z cresce e o atraso de fase dado pelo controlador diminui, observa-se uma diminuição da amplitude (a) e um aumento da frequência de oscilação (b). Porém, para z no intervalo $(-7.4, -3.5)$, vê-se que a frequência de chaveamento atinge o máximo permitido e nele se fixa: $f_{\max} = 0.83$ [Hz]. Portanto, ocorre uma bifurcação em $z = -7.4$: o segundo expoente atinge subitamente valor nulo, indicando que essa bifurcação é do tipo colisão de borda [41-43]. A partir daí, frequências muito baixas ganham intensidade e a amplitude passa a crescer com z numa taxa maior do que aquela em

que decresceu. O movimento que aqui aparece é similar ao quase-periódico e será discutido posteriormente.

Um maior aumento em z provocará um avanço de fase que traz o sistema de volta ao movimento periódico, o que ocorre para $-3.5 < z < -2.1$. No lugar do ciclo-limite unimodal, surgem ciclos-limite com chaveamento complexo: a seqüência de modos $\{1,2,3,4\}$ é substituída por seqüências de pulsos de durações assimétricas na forma $\{1,2,1,2,3,4,3,4\}$ e $\{1,2,1,2,3,4,3,4,1,2,3,4\}$. Para $z > -2.1$, as seqüências de chaveamento tornam-se excessivamente complexas levando a períodos demasiado grandes e a uma situação de sensibilidade às condições iniciais.

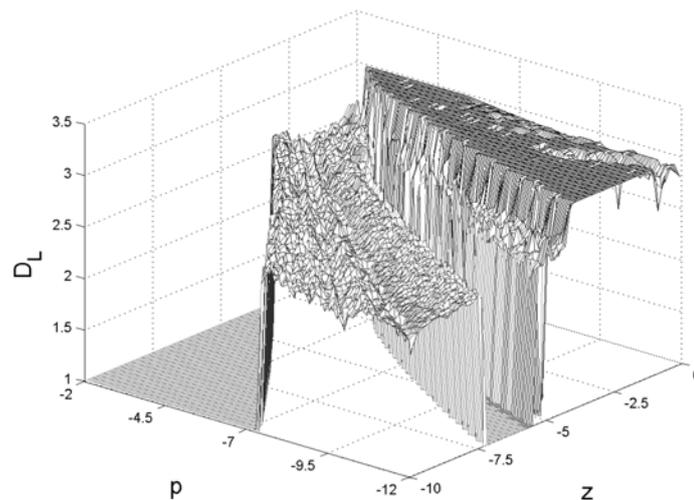


Figura 3.6 – Diagrama biparamétrico para a dimensão de Lyapunov. z e p dados em $[s^{-1}]$

Na figura 3.6 apresenta-se a dimensão de Lyapunov dos atratores para os quais tendem as trajetórias que partem da mesma condição inicial acima referida. Conforme esperado, a região correspondente a ciclos-limite apresenta atratores com dimensão 1. Já a dimensão dos atratores correspondentes ao movimento quase-periódico está em torno de 2.5. Essa não é uma indicação de que o atrator é fractal, mas um problema numérico relacionado com o fato de o terceiro expoente possuir módulo muito pequeno, de modo que se torna difícil decidir se ele é nulo ou não, ou seja, se a dimensão é 3 ou 2. No caso dos comportamentos mais

complexos, a dimensão está quase sempre bem próxima a 3, havendo casos em que ela está levemente abaixo desse valor. Essa não é uma indicação de que aqui existem atratores caóticos não-fractais, mas é um efeito da discrepância de módulos entre $\mu(3)$ e λ_4 , que decorre igualmente do baixo módulo de λ_3 .

A dificuldade de análise aqui apresentada é própria de sistemas com fluxo descontínuo. Particularmente, o baixo valor de λ_3 bem como a convergência peculiar que se nota no cálculo do espectro de Lyapunov devem-se à presença de um vértice na superfície de chaveamento, que é conseqüência do requisito de mínimo tempo de acionamento dos atuadores. Esse vértice é o ponto em que o vetor normal $H(\tilde{x}_k)$ alterna entre $[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]$ e $[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$. Supondo que o chaveamento se dê apenas pelo requisito de mínimo tempo de acionamento dos atuadores, tem-se que as perturbações evoluem de modo suave como mostra a equação (3.34). Essa equação permite ver ainda que são três os autovalores nulos, dois que estão presentes em A e um que está associado a t_k . Porém, sempre que há chaveamento pela condição $u = 0$, as perturbações sofrem uma evolução descontínua, como é fácil observar pela equação (3.32). Então, aqueles três autovalores nulos podem ser afetados. Assim, entre os instantes de chaveamento por $u = 0$ o sistema se comporta localmente como se possuísse três expoentes nulos. Contudo, esses expoentes têm um valor global diferente. Como, em movimentos mais complexos, os chaveamentos por $u = 0$ são pouco freqüentes, alguns expoentes convergem muito lentamente, como é o caso de λ_3 .

Os expoentes de Lyapunov obtidos provêm importantes informações acerca do comportamento global das dinâmicas no sistema. Duração de respostas transitórias, estabilidade e sensibilidade a condições iniciais são informações de interesse prático em

projetos de controle. Por outro lado, alguns aspectos teóricos, como a caracterização geométrica dos atratores à luz das teorias para sistemas contínuos, permanecem em aberto.

4 Análise multifractal

Neste capítulo, os diversos comportamentos do sistema serão entendidos à luz de diagramas de bifurcação que levam em conta a irregularidade de uma função distribuição de probabilidade sobre os pontos do atrator. Essa irregularidade é expressa pelo espectro de singularidades (também chamado multifractal) dessa distribuição [44], o qual, além de possibilitar discriminar diferentes tipos de comportamento dinâmico, fornece ainda informações sobre a geometria do atrator.

Esse estudo surgiu da idéia de se usar a transformada de *wavelets* para analisar sistemas dinâmicos. Devido a sua não-estacionaridade, essa transformada parece um recurso interessante para analisar dinâmicas complexas como aquelas originadas em um sistema híbrido. Dentre as diversas possibilidades de emprego dessa transformada, optou-se por aquela que segue neste texto, por ser mais bem amparada pela literatura. Sobretudo, essa técnica é interessante porque permite o cálculo de alguns tipos de dimensões fractais. Uma outra técnica que vem sendo explorada nos últimos anos é aquela que usa transformada de *wavelets* para calcular o índice de persistência de uma série temporal [45]. Essa técnica foi aplicada a algumas das séries geradas pelo sistema aqui estudado, mas a carência de resultados teóricos não permitiu obter conclusões úteis. Também é possível estimar o maior expoente de Lyapunov em séries temporais sujeitas a ruído aditivo usando a transformada de *wavelets* [46].

A análise aqui proposta é entendida como uma ferramenta alternativa no estudo de sistemas dinâmicos aos quais ferramentas tradicionais podem não ser adequadas. Embora seja computacionalmente inferior à dos expoentes de Lyapunov, ela torna-se interessante em situações em que não se dispõe de um modelo dinâmico satisfatório. O caso de sistemas com dimensão infinita seria um exemplo em que essa técnica se faria interessante. Contudo, sua

aplicação mais promissora parece estar no estudo de séries temporais ruidosas, uma vez que o método fornece uma análise mais precisa que algoritmos tradicionais de cálculo de dimensão.

Para levantar os diagramas de bifurcação, distribuições de probabilidade sobre o atrator foram calculadas a partir de respostas simuladas do sistema para cada conjunto de parâmetros. Empregou-se então o método WTMM (*wavelet transform modulus maxima*), desenvolvido por Muzy et al. [47-48] com o fim de calcular o espectro multifractal de objetos geométricos. O método tem tido, entre outras, aplicações na análise e discriminação de sinais provenientes de fluxos turbulentos [47], seqüências de DNA [49], demanda de energia elétrica [50] e sinais de ressonância magnética [51]. As seções seguintes comentam o método e apresentam sua aplicação ao sistema estudado. Os resultados obtidos foram destinados à divulgação em [52].

4.1 Formalismo multifractal e o método WTMM

Nesta seção comenta-se o formalismo multifractal para sinais unidimensionais introduzido por Muzy et al. [47] e mostra-se o procedimento usado no cálculo do espectro de singularidades de sinais experimentais a partir do método WTMM. Uma vez que uma descrição matemática rigorosa do formalismo multifractal e do método WTMM ocupariam no texto uma extensão desproporcional a sua importância no todo do trabalho, esta seção limita-se a apresentar os conceitos necessários para o entendimento dos resultados. Uma descrição detalhada do método WTMM pode ser encontrada no trabalho de Arneodo et al. [53].

A auto-similaridade é uma propriedade que pode ser verificada em diversos objetos geométricos encontrados na natureza. Em muitos casos um mesmo objeto pode apresentar conjuntos auto-similares com diferentes escalas, as quais podem estar distribuídas num intervalo da reta real. Esses objetos são denominados multifractais. Considerando-se uma trajetória no espaço de fase sobre um conjunto invariante de um sistema dinâmico, é possível definir uma função distribuição de probabilidade nesse espaço. O conjunto de pontos singulares dessa função guarda as características multifractais do atrator em questão.

Define-se o expoente de Hölder $\eta(y_0)$ de uma função $S(y)$ no ponto y_0 como sendo o maior expoente tal que exista um polinômio P_ℓ de grau ℓ satisfazendo, numa vizinhança de y_0 com K constante, a relação $|S(y) - P_\ell(y)| \leq K|y - y_0|^{\eta(y_0)}$. Sabe-se, então, que S é ℓ vezes diferenciável em y_0 mas não $\ell + 1$ vezes. O polinômio $P_\ell(y)$ corresponde à série de Taylor de S no ponto y_0 expandida até a ordem ℓ . Assim, $\eta(y_0)$ mede a “força” da singularidade no ponto y_0 . Quanto maior $\eta(y_0)$, mais regular é a função nesse ponto, dado que maior será a ordem em que a função é diferenciável no ponto.

Ao analisar a regularidade da função distribuição de probabilidade acima, pode-se dividir seu domínio em subconjuntos cujos pontos correspondem a singularidades com expoente de Hölder η e cuja dimensão de Hausdorff é denotada por $D(\eta)$ [44]. O assim chamado espectro de singularidades $D(\eta)$ está intimamente relacionado às dimensões de Rényi $D(q)$ do atrator [54]. Em especial, $D(q = 0)$ corresponde à dimensão de capacidade do objeto, $D(q = 1)$, à dimensão de informação e $D(q = 2)$, à dimensão de correlação.

Objetos monofractais possuem apenas um ponto em seu espectro de singularidades, ou seja, apenas um fator de escala. Por outro lado, é característica de objetos multifractais apresentar um espectro $D(\eta)$ com formato de uma curva de concavidade negativa. O máximo dessa curva coincide com a dimensão de capacidade do objeto. Ainda, quanto mais larga a curva $D(\eta)$, maior é o intervalo de expoentes η que aparecem na função distribuição para o atrator, ou seja, mais complexa é a sua geometria.

O cálculo do espectro multifractal a partir de séries temporais encontra na análise de *wavelets* uma ferramenta muito eficaz. A transformada de *wavelets* é uma ferramenta matemática introduzida em meados da década de 80 para fins de análise de sinais sísmicos e sonoros [55-56]. Desde então vem apresentando grande desenvolvimento teórico e prático, com aplicações em uma grande variedade de áreas da ciência [57-58]. A transformada de

wavelets contínua decompõe uma função em termos de funções elementares que consistem em translações e dilatações de uma mesma função chamada de *wavelet*-mãe, definida no espaço das funções quadrado-integráveis. Se essa função possui seus ℓ primeiros momentos nulos, então ela pode ser usada para medir os expoentes de Hölder menores que ℓ [59]. Essa capacidade de medir singularidades de uma função permite usar a transformada de *wavelets* para calcular o espectro multifractal. No cálculo desse espectro, Muzy et al. [60-61] mostraram que o método WTMM possibilita uma precisão superior à daquela obtida por outros métodos disponíveis na literatura. As linhas seguintes limitam-se a descrever o algoritmo de análise multifractal usando o método WTMM.

Seja $W_\psi[S](b, a)$ a transformada de *wavelets* contínua da função distribuição de probabilidade S , onde a escala $a \in \mathbb{R}^+$, o deslocamento $b \in \mathbb{R}$ e a *wavelet*-mãe $\psi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

O método WTMM define o conjunto de deslocamentos $\Omega(a)$, no qual os coeficientes da transformada apresentam localmente o máximo módulo para uma escala a fixa. Assim, definem-se as seguintes funções:

$$Z(q, a) = \sum_{b \in \Omega(a)} |W_\psi[S](b, a)|^q \quad q \in \mathbb{R} \quad (4.1)$$

$$\eta(q, a) = \sum_{b \in \Omega(a)} \hat{W}_\psi[S](q, b, a) \ln |W_\psi[S](b, a)| \quad (4.2)$$

$$D(q, a) = \sum_{b \in \Omega(a)} \hat{W}_\psi[S](q, b, a) \ln |\hat{W}_\psi[S](q, b, a)| \quad (4.3)$$

onde

$$\hat{W}_\psi[S](q, b, a) = |W_\psi[S](b, a)| / Z(q, a) \quad (4.4)$$

Dessa forma, obtém-se o espectro de singularidades $D(\eta)$ de S combinando os resultados abaixo:

$$\eta(q) = \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{\eta(q, a)}{\ln a} - \frac{1}{2} \quad (4.5)$$

$$D(q) = \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{D(q, a)}{\ln a} \quad (4.6)$$

É importante notar que aqui se fez uma alteração significativa do método original. Neste, os deslocamentos $\Omega(a)$ são conectados definindo-se curvas parametrizadas em a . As funções de partição $Z(q, a)$, $\eta(q, a)$ e $D(q, a)$ são então definidas como o somatório do supremo ao longo dessas linhas para as escalas menores que a . A simplificação aqui adotada destina-se à redução do tempo computacional, uma vez que determinar as linhas de máximo módulo é tarefa que requer grande esforço computacional e deverá ser aplicada a um grande número de pontos no espaço de parâmetros do controlador. Em contrapartida, essa simplificação afeta a precisão do cálculo do espectro de singularidades quando $q < 0$. Testes preliminares mostraram tolerável essa perda de precisão.

4.2 Cálculo do espectro de singularidades

Esta parte do trabalho de pesquisa foi executada quando ainda se utilizava a ferramenta de software *xPC Target* para realizar as simulações. A partir de uma mesma condição inicial e variando-se os parâmetros p e z numa grade de 600 pontos, levantou-se a resposta $\phi(t)$ do sistema para um horizonte de simulação de 600 [s], sendo descartados os 24 [s] iniciais correspondentes à resposta transitória. Utilizou-se passo de integração de 2 [ms] e método de integração explícito de 4ª ordem. Por isso, as trajetórias calculadas estão sujeitas a um ruído de integração considerável, que será amenizado em parte pelas características de filtragem da transformada de *wavelets*.

Calculou-se o espectro de singularidades da distribuição de probabilidade sobre o conjunto de máximos locais $\phi_{\max}(k)$ de $\phi(t)$, ou seja, toma-se a interseção do atrator com o hiperplano $\theta = 0$ e, em seguida, projeta-se a mesma sobre o eixo ϕ . Para se calcular a função de distribuição, calculou-se a frequência de ocorrências de $\phi_{\max}(k)$ sobre o intervalo $[\min\{\phi_{\max}(k)\} - 0.005, y]$, variando-se y com um passo mínimo de 10^{-4} no intervalo $[\min\{\phi_{\max}(k)\} - 0.005, \max\{\phi_{\max}(k)\} + 0.005]$. O número de pontos N nesse intervalo foi

limitado a 4096. A *wavelet*-mãe adotada foi aquela conhecida como chapéu mexicano, que consiste no oposto da segunda derivada da função gaussiana, a qual possui os dois primeiros momentos nulos. Portanto, é capaz de determinar o expoente de Hölder de singularidades com valor menor que 2. Consideraram-se escalas de 2 até $N/32$, distribuindo-se 12 vezes em cada oitava. Considerou-se q uniformemente distribuído em $[-8,8]$. A dimensão de Lyapunov calculada com a técnica de Müller [36] foi usada para avaliar os resultados obtidos.

As figuras 4.1 e 4.2 mostram, respectivamente, a dimensão de capacidade e a dimensão de informação da mencionada projeção do atrator resultante de cada combinação dos parâmetros p e z e calculadas usando o método WTMM. Recorrendo à dimensão de Lyapunov da figura 3.6, observa-se que os três patamares correspondem, por ordem crescente de dimensão, a movimentos periódico, quase-periódico e caótico. Também se pode observar aquela segunda região em que há movimento periódico. A região de alta dimensão para valores de p próximos a zero corresponde a uma região em que há instabilidade. Tal região não aparece na figura 3.6 devido a uma diferente escolha da grade de parâmetros.

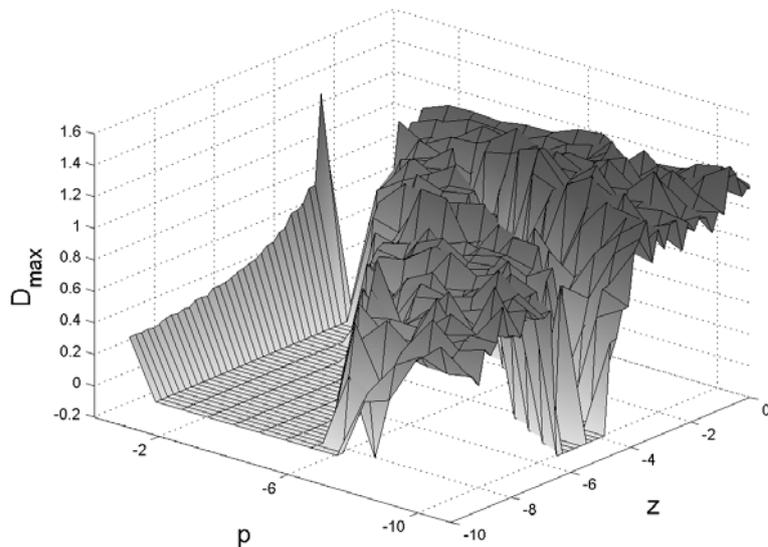


Figura 4.1 – Diagrama biparamétrico para $D_{\max} = D(q = 0)$. z e p dados em $[s^{-1}]$

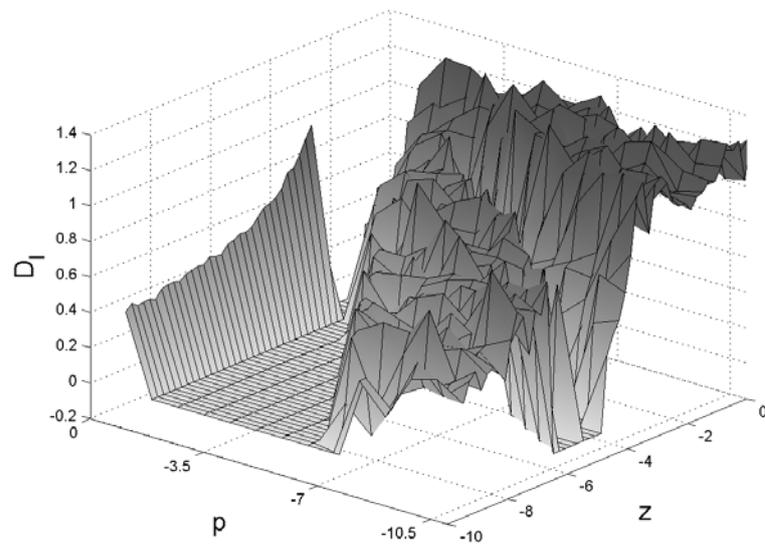


Figura 4.2 – Diagrama biparamétrico para a estimativa da dimensão de informação. z e p dados em $[s^{-1}]$

A notável correlação entre os gráficos sugere a verossimilhança das estimativas efetuadas pelo método WTMM. Sobretudo, o método permite distinguir com clareza os pontos de bifurcação. Sabendo-se que dimensões próximas a zero caracterizam a interseção de um atrator periódico com um hiperplano, observa-se que os dois primeiros gráficos possibilitam uma clara distinção desse tipo de comportamento. Contudo, para altos valores de z , os gráficos de 4.1 e 4.2 não permitem distinguir com a mesma clareza um comportamento caótico de um quase-periódico. Deve-se alertar, porém, para o fato de que não é possível comparar diretamente a dimensão de informação com a dimensão de Lyapunov, pois esta diz respeito a todo o atrator, ao passo que a primeira se calculou sobre a projeção de uma seção do atrator. Essa é uma explicação plausível de por que os dois primeiros gráficos aparentam ser uma degeneração do gráfico de dimensão de Lyapunov.

Por outro lado, a análise multifractal provê outras grandezas que também contribuem para a caracterização dos atratores. Uma delas é o expoente de Hölder mais freqüente $\eta_{\max} = \eta(q = 0)$, que é mostrado na figura 4.3. O expoente de Hölder observado atesta que o atrator caótico apresenta irregularidade levemente maior que a do quase-periódico. Há uma

distribuição de probabilidade em geral descontínua ($\eta < 1$) no primeiro e contínua ($\eta > 1$) no último. Outra grandeza que se faz de interesse é a largura $\Delta\eta$ da curva de $D(\eta)$ para metade da máxima dimensão. Essa grandeza é uma medida da complexidade geométrica do atrator. Constante na figura 4.4, atesta que tanto o movimento quase-periódico quanto o caótico exibem atratores multifractais. Contudo, para grande parte dos casos, o movimento quase-periódico apresenta um espectro de singularidades mais largo.

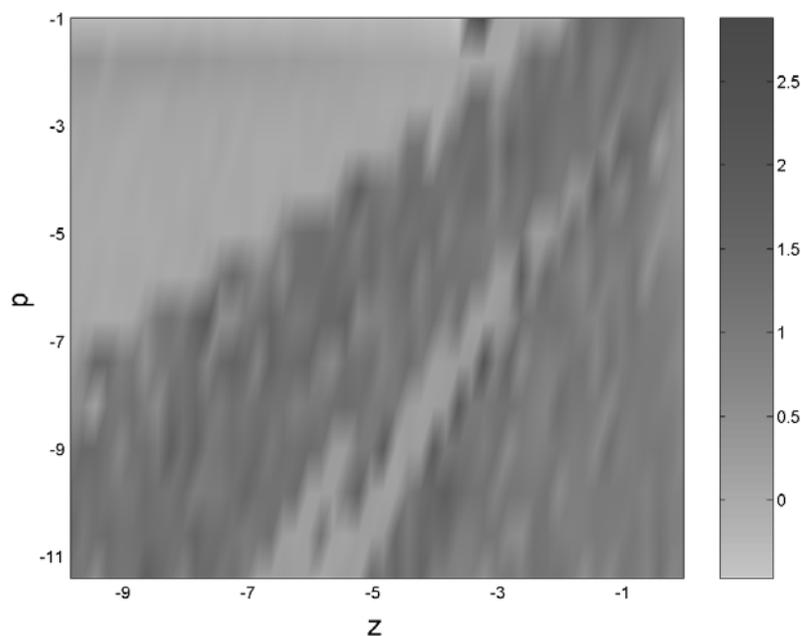


Figura 4.3 – Diagrama biparamétrico para $\eta_{\max} = \eta(q = 0)$. z e p dados em $[s^{-1}]$

A complexidade geométrica que se tem observado no atrator quase-periódico possui a mesma origem que o problema enfrentado no capítulo anterior no cálculo da dimensão de Lyapunov: o baixo valor em módulo do terceiro expoente. Esse fato é agravado pela presença do ruído de integração, que tem efeito crítico na direção correspondente a esse expoente, conforme discute o capítulo seguinte. Assim, o tempo de observação não é suficiente para tomar conclusões sobre a dimensão do atrator, uma vez que, para curtos períodos de observação, o atrator aparenta ser de dimensão 3 e que, apenas para períodos demasiado grandes e na ausência de ruído, pode-se concluir que sua dimensão é 2.

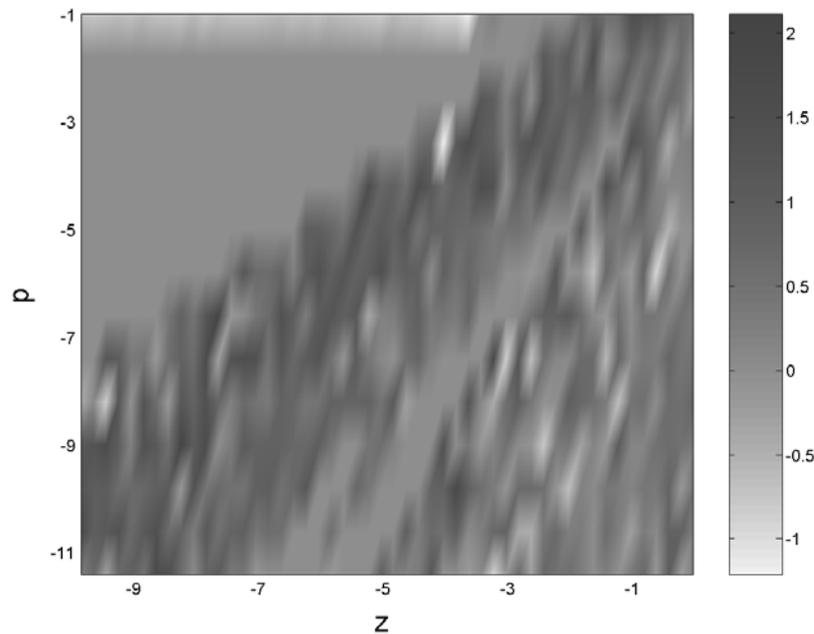


Figura 4.4 – Diagrama biparamétrico para $\Delta\eta$, z e p dados em $[s^{-1}]$

Em suma, tendo sido comparados com a dimensão de Lyapunov, os resultados fornecem sinais favoráveis para o uso do espectro multifractal como ferramenta de discriminação de comportamento dinâmico. Os diagramas obtidos exibem as bifurcações de maneira clara. Ademais, importante conhecimento sobre a irregularidade geométrica dos atratores foi ganho. Espera-se que esse conhecimento se faça útil numa futura caracterização teórica desses atratores. Devido ao fato de a análise ter-se efetuado sobre uma projeção do atrator, a interpretação dos resultados não pôde ser completa e se faz deveras complexa. Estender essa análise a mais dimensões, diminuindo a influência de projeções, deverá propiciar resultados com uma interpretação mais clara.

5 O comportamento quase-periódico

Este capítulo trata da natureza do comportamento não-periódico que emerge quando os atuadores são requisitados acima de sua máxima frequência de chaveamento. Por isso, esse deve ser considerado o movimento não-periódico de maior importância para o projeto de controle robusto.

Não sendo possível um chaveamento numa frequência superior a f_{\max} , a taxa de chaveamento estacionará nesse valor. Mostrar-se-á, então, que o mapa de Poincaré para esse sistema apresenta pontos fixos indiferentes que formam um segmento de reta e que esse conjunto de pontos fixos atrai trajetórias de modo que elas façam um movimento de espiral na sua direção, sem nunca tocá-lo. Nesse sentido, todo o segmento de reta pode ser considerado como um único atrator para essas trajetórias. Além disso, tal movimento em espiral torna-se mais lento a cada meia volta. Isso sugere que o movimento contínuo deve corresponder à superposição de um movimento periódico com amplitude fixa e frequência f_{\max} e de um segundo movimento que possui amplitude constante e frequência decaindo com o tempo. Porém, na presença de ruído, especialmente ruído de integração, esse segundo movimento apresenta uma banda constante de frequência. De fato, adicionar ruído ao sistema foi um dos recursos utilizados para ter o atrator mais rapidamente visitado.

Recordando que movimentos quase-periódicos resultam da superposição de dois movimentos periódicos com frequências incomensuráveis e que possuem atrator toroidal [62], entende-se que o atributo “quase-periódico” é apropriado para o tipo de movimento discutido. Embora um dos movimentos que se superpõem não seja periódico, trajetórias visitam toda a vizinhança de um atrator bidimensional similar a uma superfície cilíndrica.

A figura 5.1 ilustra o mecanismo da bifurcação em que o atrator quase-periódico surge a partir do periódico. Adotaram-se condições iniciais $x(0) = [0 \ 0.02 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ e

$m(0) = 1$. A bifurcação ocorre quando os pontos de transição para os estados discretos $m = 2$ e $m = 4$ passam pelo vértice da superfície de chaveamento. Enquanto no movimento periódico as transições para os modos 2 e 4 ocorrem pelo cruzamento do hiperplano $u = 0$, no movimento quase-periódico essas transições ocorrem pelo cruzamento do hiperplano $t_x = t_{lig} = 0.1$. Diferentemente do caso periódico, esse cruzamento não se dá em um único ponto, mas em um intervalo limitado. Note-se que em ambos os casos a simetria é mantida.

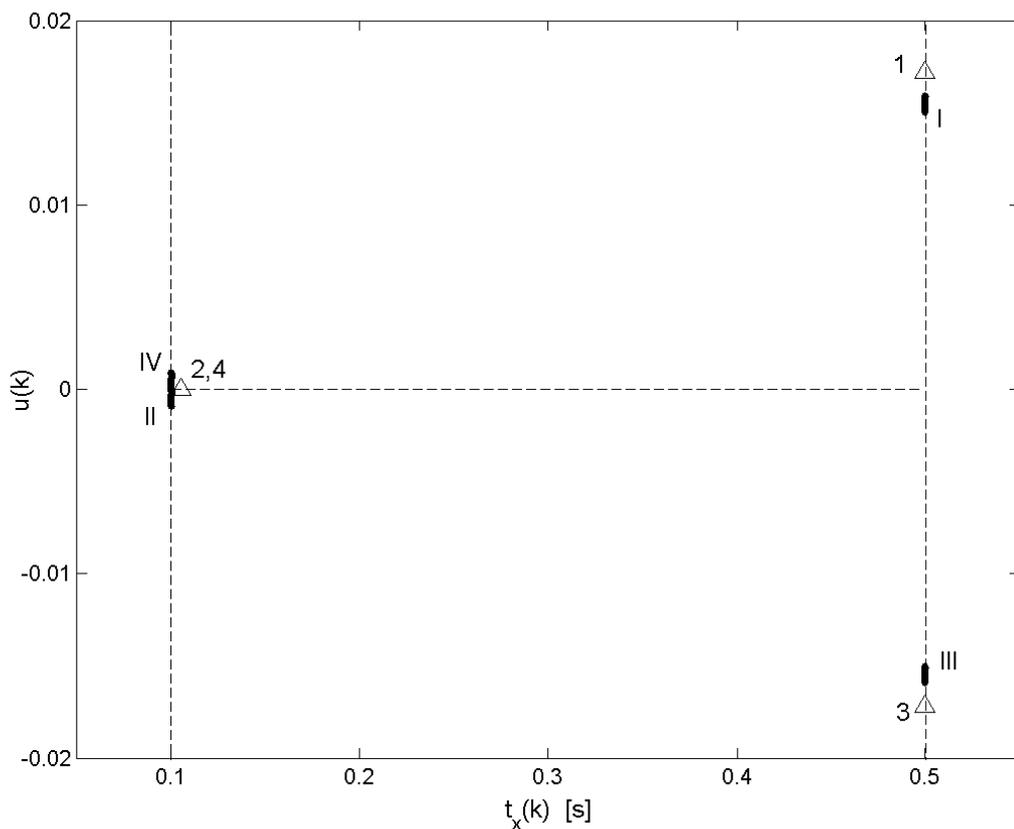


Figura 5.1 – Superfícies de chaveamento (linha pontilhada) e pontos de transição para os movimentos periódico (triângulo e algarismos arábicos; $p = -5.5$, $z = -7.6$) e quase-periódico (círculos e algarismos romanos; $p = -5.5$, $z = -7.1$). Os números indicam o estado discreto de entrada.

5.1 Mapas de Poincaré e pontos fixos

Em seguida, para simplificar a notação, o movimento em questão será estudado considerando-se que a matriz A contempla apenas os 5 primeiros estados, suprimindo-se pois

o estado t_x . Ainda, considera-se $\tau = 0$, $H = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$ e

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & F\rho/J\alpha^2 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Considera-se em seguida o que acontece quando o chaveamento ocorre com um período $T_{\max} = 1/f_{\max}$ seguindo a seqüência mais simples de modos de operação $\{1,2,3,4\}$. Seja $t_{\text{off}} = t_{\text{ligd}}$ o tempo que os atuadores permanecem desligados a cada meio ciclo e $t_{\text{on}} = T_{\max}/2 - t_{\text{off}} = t_{\text{lig}}$ o tempo que permanecem ligados. Denotando por y_m o estado de entrada no modo m , pode-se escrever:

$$y_3(k) = e^{At_{\text{off}}} y_2(k) \quad (5.1)$$

$$y_4(k) = e^{At_{\text{on}}} y_3(k) - \int_0^{t_{\text{on}}} e^{A\sigma} B d\sigma \quad (5.2)$$

$$y_1(k) = e^{At_{\text{off}}} y_4(k) \quad (5.3)$$

$$y_2(k+1) = e^{At_{\text{on}}} y_1(k) + \int_0^{t_{\text{on}}} e^{A\sigma} B d\sigma \quad (5.4)$$

Assim, é possível definir o sistema discreto que corresponde ao mapa de Poincaré para a seção $\{x : t_x = 0 \text{ e } m = 2\}$:

$$y_2(k+1) = e^{2A(t_{\text{on}}+t_{\text{off}})} y_2(k) + \left(I - e^{A(t_{\text{on}}+t_{\text{off}})} \right) \int_0^{t_{\text{on}}} e^{A\sigma} B d\sigma \quad (5.5)$$

onde $I = I_{5 \times 5}$. Note-se que no caso de o atraso τ ser não-nulo, basta definir a seção $\{x : t_x = \tau \text{ e } m = 2\}$ e a análise que segue valerá igualmente.

Os pontos fixos do mapa satisfazem

$$\left(I - e^{2A(t_{\text{on}}+t_{\text{off}})} \right) \bar{y}_2 = \left(I - e^{A(t_{\text{on}}+t_{\text{off}})} \right) \int_0^{t_{\text{on}}} e^{A\sigma} B d\sigma \quad (5.6)$$

Ainda, a matriz e^{At} possui a seguinte estrutura

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & t & q_{1,3} & q_{1,4} & 0 \\ 0 & 1 & q_{2,3} & q_{2,4} & 0 \\ 0 & 0 & q_{3,3} & q_{3,4} & 0 \\ 0 & 0 & q_{4,3} & q_{4,4} & 0 \\ \frac{z(e^{pt} - 1)}{p} & q_{5,2} & q_{5,3} & q_{5,4} & e^{pt} \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

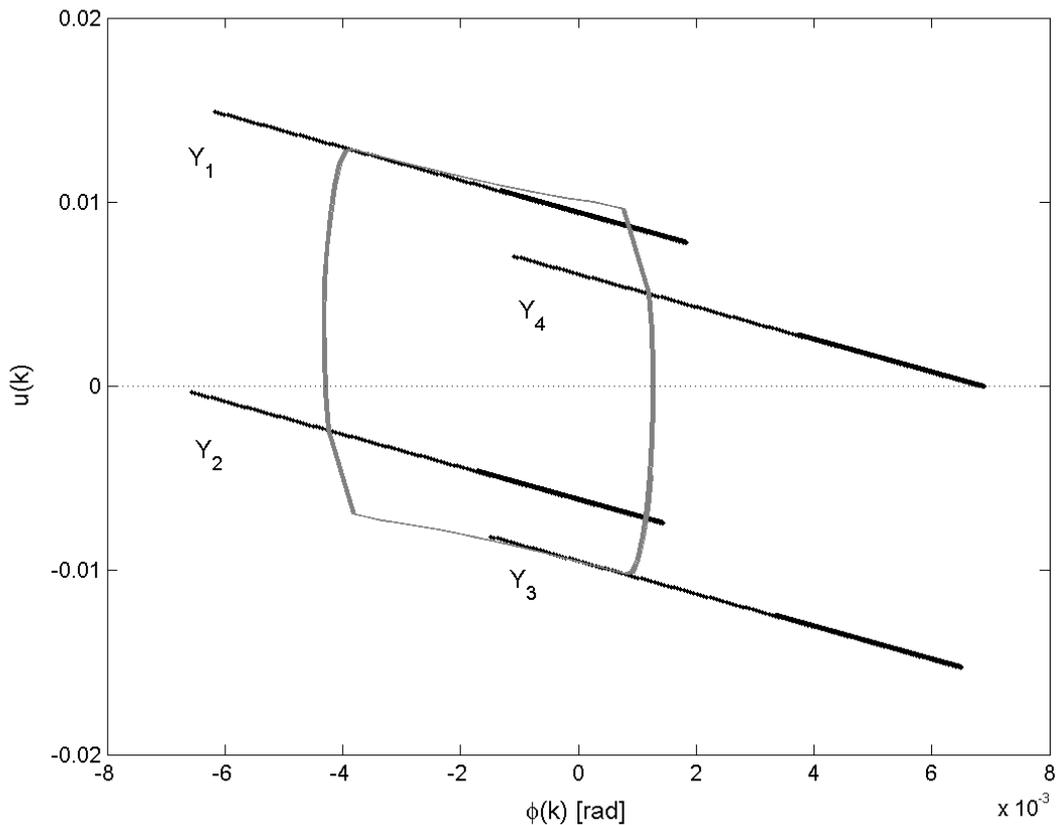


Figura 5.2 – Diagrama de fase para movimento quase-periódico com $p = -5.5$, $z = -4.9$. Pontos de transição estão em preto, enquanto parte da trajetória contínua associada está traçada em cinza.

Dado que A apresenta dois autovalores nulos, aos quais se associa um único autovetor $v = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ -z/p]^T$, e^{At} também apresenta um autovalor duplo em 1 associado a v . Assim, o conjunto Y_2 dos pontos fixos do mapa estudado deve estar sobre a reta $\bar{y}_2 + av$, onde a é real e \bar{y}_2 é um ponto fixo dado. Na figura 5.2 apresenta-se a projeção dos conjuntos Y_m e de parte da trajetória contínua associada ao movimento. O atrator contínuo em seu todo é o “cilindro” cujos lados correspondem aos segmentos Y_m e cuja base possui a forma da

curva em cinza. Observando-se a trajetória contínua, constata-se que $y_2(k)$ provê uma boa aproximação do mínimo local de $\phi(t)$.

As condições de chaveamento implicam uma limitação dos conjuntos Y_m que também pode ser vista na figura 5.2: a entrada no modo $m = 2$ requer que $y_2(k)$ seja tal que $u_2(k) \leq 0$. Similarmente, a entrada no modo $m = 4$ requer que $y_4(k)$ seja tal que $u_4(k) \geq 0$. Dessa maneira, um dos limites de Y_2 é dado por $y_2 = \bar{y}_2 + av$ tal que $u_2 = 0$, o outro é dado pelo correspondente limite de Y_4 .

Por substituição, verifica-se que uma possível solução de (5.6) será

$$\bar{y}_2 = \left(I + e^{A(t_{on}+t_{off})} \right)^{-1} \int_0^{t_{on}} e^{A\sigma} B d\sigma \quad (5.8)$$

Então, considerando a superfície de chaveamento dada por $Hy = u = 0$, o primeiro limite é o ponto

$$\bar{y}_2^1 = \bar{y}_2 - \frac{H\bar{y}_2}{Hv} v \quad (5.9)$$

e o segundo limite será

$$\bar{y}_2^2 = e^{A(t_{on}+t_{off})} \bar{y}_4^1 + \int_0^{t_{on}} e^{A\sigma} B d\sigma \quad (5.10)$$

Mas, devido à simetria, $\bar{y}_4^1 = -\bar{y}_2^1 = -\bar{y}_2 + \frac{H\bar{y}_2}{Hv} v$. Assim, substituindo \bar{y}_4^1 e recorrendo a (5.8),

$$\bar{y}_2^2 = \bar{y}_2 + e^{A(t_{on}+t_{off})} \frac{H\bar{y}_2}{Hv} v = \bar{y}_2 + \frac{H\bar{y}_2}{Hv} v \quad (5.11)$$

pois v é autovetor de e^{At} . As predições desses limites são comparadas com os resultados de simulação na figura 5.3. Note-se que, ainda que se tenha adicionado ruído ao sistema simulado, alguns atratores não foram completamente visitados, o que indica quão lento pode ser o movimento próximo ao atrator. O comprimento de Y_2 é

$$\left\| \bar{y}_2^1 - \bar{y}_2^2 \right\| = \left| 2 \frac{H\bar{y}_2}{Hv} \right| \|v\| \quad (5.12)$$

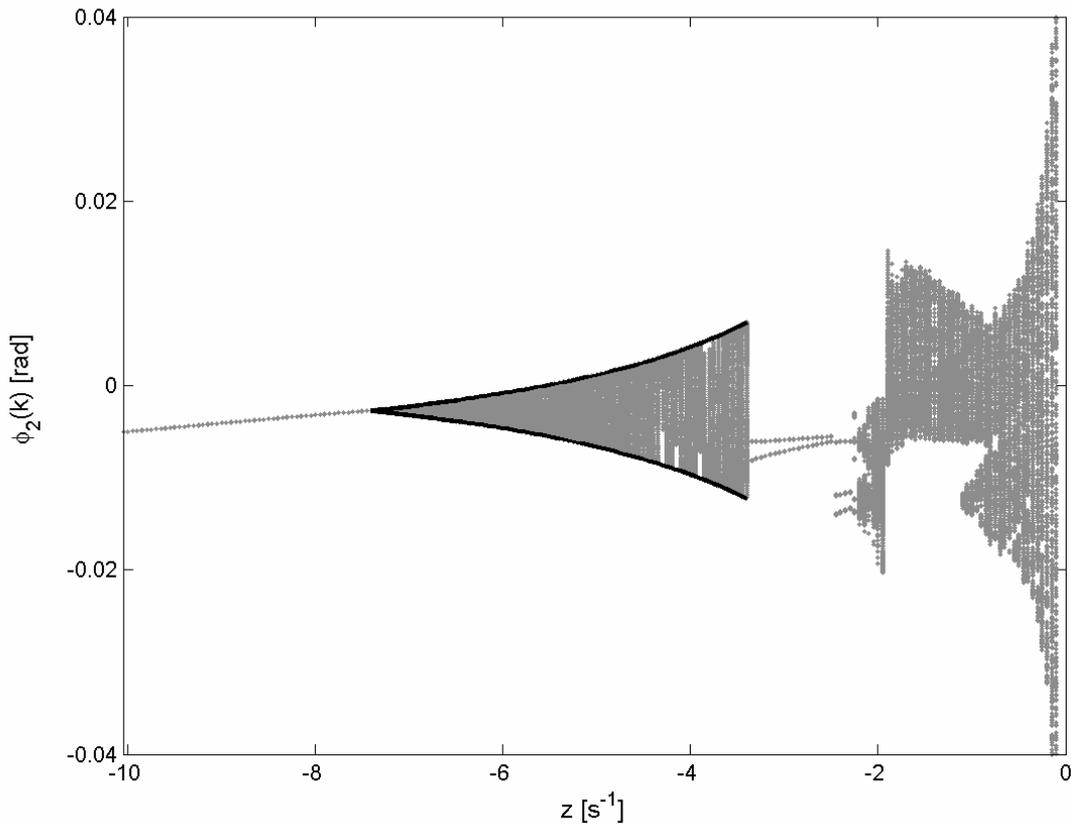


Figura 5.3 – Comparação dos pontos de entrada em $m = 2$ preditos (preto) e simulados (cinza)

Lembrando a boa aproximação dos extremos locais de $\phi(t)$ dada por ϕ_2 e ϕ_4 , pode-se estabelecer que a amplitude de pico da componente de baixa frequência de $\phi(t)$ é dada aproximadamente por $\phi_b = \left| \phi_2^1 - \phi_2^2 \right| / 2 = \left| \frac{H\bar{y}_2}{Hv} \right|$ e a amplitude de pico da componente de frequência f_{\max} será $\phi_a = \left| \phi_4^2 - \phi_2^1 \right| / 2 = \left| \bar{\phi}_2 \right|$. É importante notar que, como a componente de baixa frequência ocorre na direção de v , apenas o ângulo de rolamento e a saída do atuador estão sujeitos a ela; grandezas como a velocidade angular de rolamento terão comportamento periódico.

Ainda, apenas observando as estruturas de B e e^{At} é possível concluir que $H\bar{y}_2$ é uma função racional de primeira ordem de z . Assim, o fato de $Hv = -z/p$ sugere que a amplitude ϕ_b da componente de baixa frequência crescerá de modo aproximadamente hiperbólico com

z , o que é confirmado na figura 5.3. Por isso, pode-se concluir que, desde que o sistema execute um movimento quase-periódico, avanços de fase provocarão um aumento na amplitude de rolamento.

Uma análise semelhante à desta seção permitiria conhecer as fronteiras de bifurcação no espaço de parâmetros para as quais esse tipo de movimento desaparece. Elas correspondem às situações em que se tem $\bar{y}_2^1 = \bar{y}_2^2$ ou $H\bar{y}_3 = He^{At_{off}} \bar{y}_2^1 = 0$. O primeiro caso é aquele em que o movimento é simplesmente periódico. O segundo é aquele para o qual um chaveamento intermediário torna-se inevitável, pois os estados de entrada nos modos $m = 1$ ou 3 terão tocado a superfície de chaveamento. Na figura 5.2, isso equivaleria a ter-se os segmentos Y_1 e Y_3 tocando $u(k) = 0$.

5.2 Órbitas na seção de Poincaré

A partir da estrutura de e^{At} , observa-se que perturbações dos pontos fixos nas direções v ou $w = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ devem permanecer constantes ao longo das iterações. No entanto, perturbações na direção w provocam perturbações diretamente proporcionais na direção v . Assim, órbitas fora do atrator seguirão linhas paralelas a v até que a hipótese de máxima frequência de chaveamento seja violada. Para compreender o que ocorre quando essa hipótese está a ponto de ser violada, suponha-se que haja uma perturbação negativa na direção w . Então, a órbita consistirá em incrementos negativos fixos na direção v , o que fará $u_2(k)$ crescer. Haverá um momento em que $u_2(k) > 0$. Logo, o tempo mínimo para o chaveamento foi alcançado mas u é ainda positivo, conseqüentemente, ocorrerá um atraso no chaveamento. Dado que os atuadores estarão ligados por mais tempo que o usual, o chaveamento se dará com um valor aumentado de θ . Portanto, a cada entrada no estado 2, θ crescerá até cruzar o valor de equilíbrio: $\bar{\theta}_2$. A partir de então a perturbação na direção w será positiva e a órbita seguirá a direção positiva de v , repetindo-se todo o ciclo descrito.

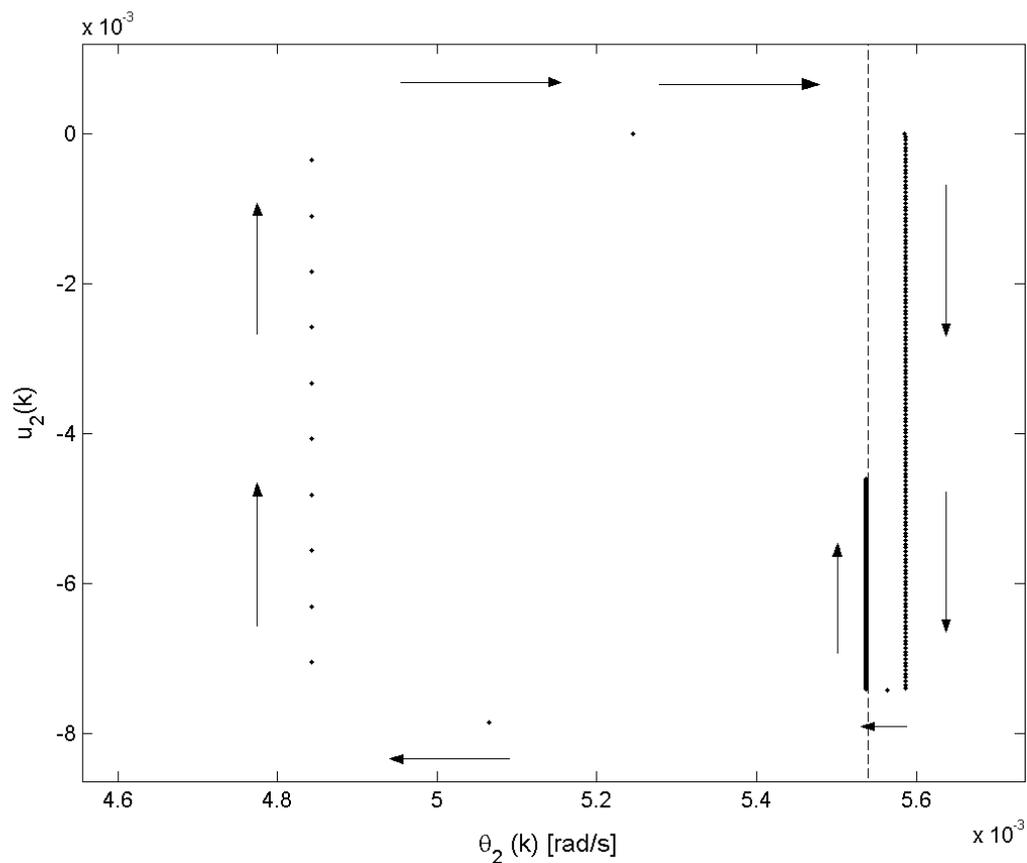


Figura 5.4 – Diagrama de fase para o movimento quase-periódico com $p = -5.5$, $z = -4.9$. A linha tracejada indica o valor de equilíbrio $\bar{\theta}_2$.

A explicação acima é ilustrada pela figura 5.4. Num primeiro momento, observa-se que os pontos da órbita possuem θ bem abaixo do valor de equilíbrio. Por isso, u sofre grandes incrementos. Como mencionado, um atraso no cruzamento da reta $u = 0$ fará com que esta seja cruzada para um valor de θ aumentado, mas ainda abaixo do valor de equilíbrio. Já o próximo ponto estará além desse valor de equilíbrio, contudo mais próximo dele que os pontos anteriores. A partir daí u sofre pequenos decrementos. Essa mesma rotina repetir-se-á para $u_4(k)$, o que pode ser visto na figura quando a órbita fica ainda mais próxima do valor de equilíbrio.

A pergunta acerca do possível desaparecimento dessas perturbações e da velocidade do mesmo deve ser respondida pelo espectro de Lyapunov. As figuras 3.4 e 3.5 mostram que

dois expoentes são nulos e um terceiro está muito próximo de zero, mas é negativo. Um desses expoentes nulos relaciona-se com distúrbios na direção da trajetória periódica. O segundo expoente nulo relaciona-se com distúrbios na direção v . Por sua vez, o terceiro expoente resulta do fato de que perturbações na direção w permanecem constantes até que a trajetória passe por um vértice da superfície de chaveamento, o que ocorre com uma frequência cada vez menor. Por isso, perturbações na direção w exibem um decaimento muito lento. Daí decorre a grande imprecisão na determinação da dimensão desse atrator que se vê no capítulo 3. Como discutido naquele capítulo, esse aspecto singular do atrator estudado é devido ao fato de que, localmente, ele se comporta com $\lambda_3 = 0$ e, globalmente, com $\lambda_3 < 0$.

Por fim, é importante ressaltar que esse mecanismo de evolução das perturbações em w ocorre de modo similar em outros movimentos mais complexos e explica alguns sintomas parecidos desses movimentos. Com efeito, nesses movimentos nota-se que chaveamentos devido à restrição de mínimo tempo de acionamento são freqüentes, o que contribui para que também aí λ_3 possua módulo pequeno.

6 Multiestabilidade

Nos capítulos anteriores os resultados discutidos foram obtidos a partir de uma única condição inicial. Contudo, outras escolhas de condições iniciais mostram a possível coexistência de atratores. Uma análise numérica mostra que o movimento periódico unimodal, onde quer que apareça no espaço $z \times p$, é comportamento global com relação à escolha de uma condição inicial no espaço de estados. Por outro lado, o comportamento quase-periódico não é global para todas as combinações do espaço de parâmetros. Para $p = -5.5$, o atrator quase-periódico é globalmente atrativo apenas para z no intervalo $(-7.4, -3.5)$. Para z no intervalo $(-3.5, -2.5)$, esse atrator coexiste com um atrator periódico em que há duplo chaveamento.

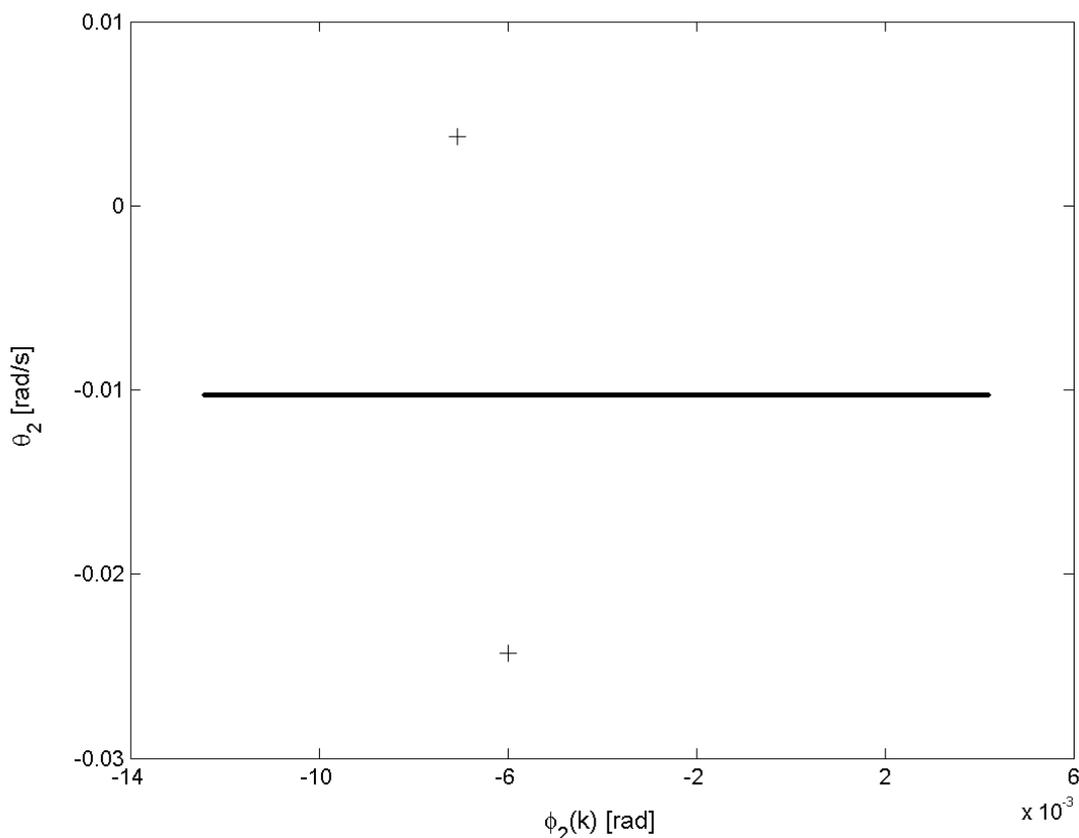


Figura 6.1 – Diagrama de fase para os pontos de transição do atrator quase-periódico (linha contínua) e do atrator periódico com duplo chaveamento (cruz) ($p = -5.5, z = -3.3$)

Uma projeção da seção de Poincaré desses atratores é mostrada na figura 6.1. Essa figura permite observar que o ciclo-limite com chaveamento duplo possui maior amplitude quanto à velocidade de rolamento do que o movimento quase-periódico (cerca de três vezes). Por outro lado, as variáveis de estado no ciclo-limite possuem média temporal nula, ao passo que no movimento quase-periódico, ao menos localmente, essa média não é nula. A seção transversal das bacias de atração na figura 6.2 ilustra a maneira complexa em que essas bacias se conectam. Ainda, observou-se que a região em preto aumenta sua área à medida que z se aproxima de -2.5 , valor para o qual o atrator quase-periódico e sua bacia desaparecem, uma vez que Y_1 e Y_3 colidem com $u = 0$.

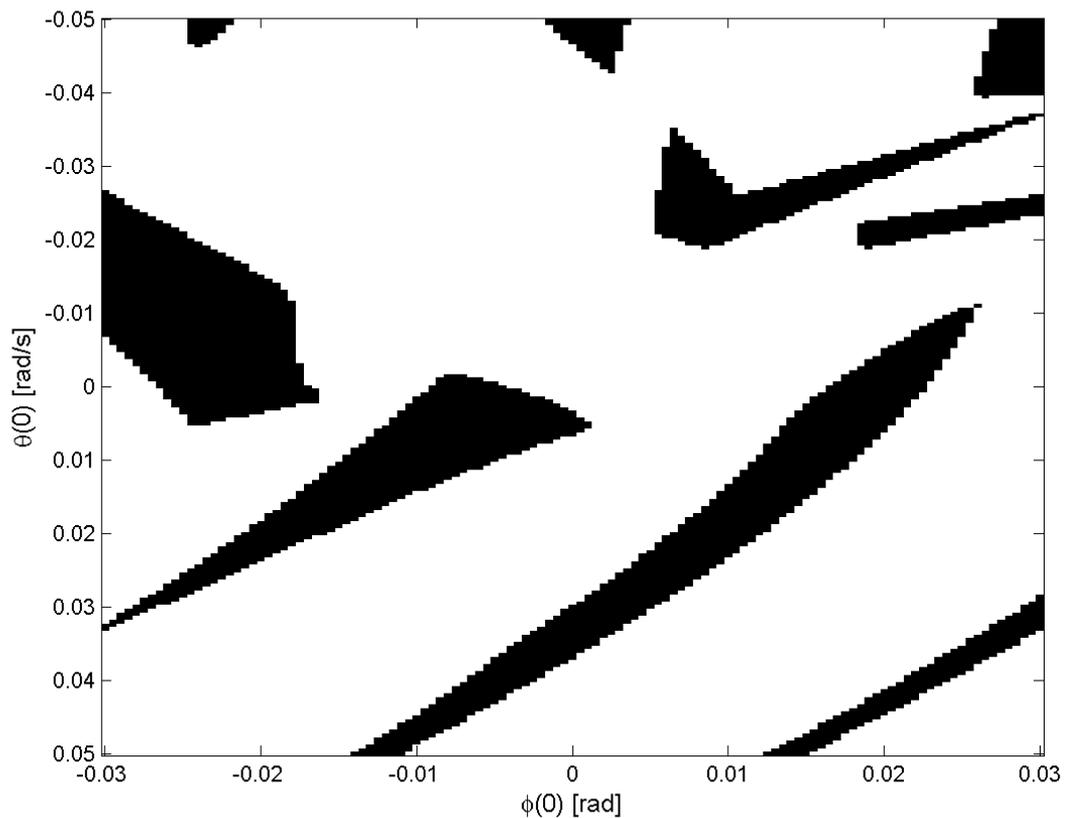


Figura 6.2 – Seção transversal das bacias de atração do atrator quase-periódico (branco) e do atrator periódico com duplo chaveamento (preto). As demais condições iniciais são nulas, $m(0) = 1$ e $p = -5.5$, $z = -3.3$

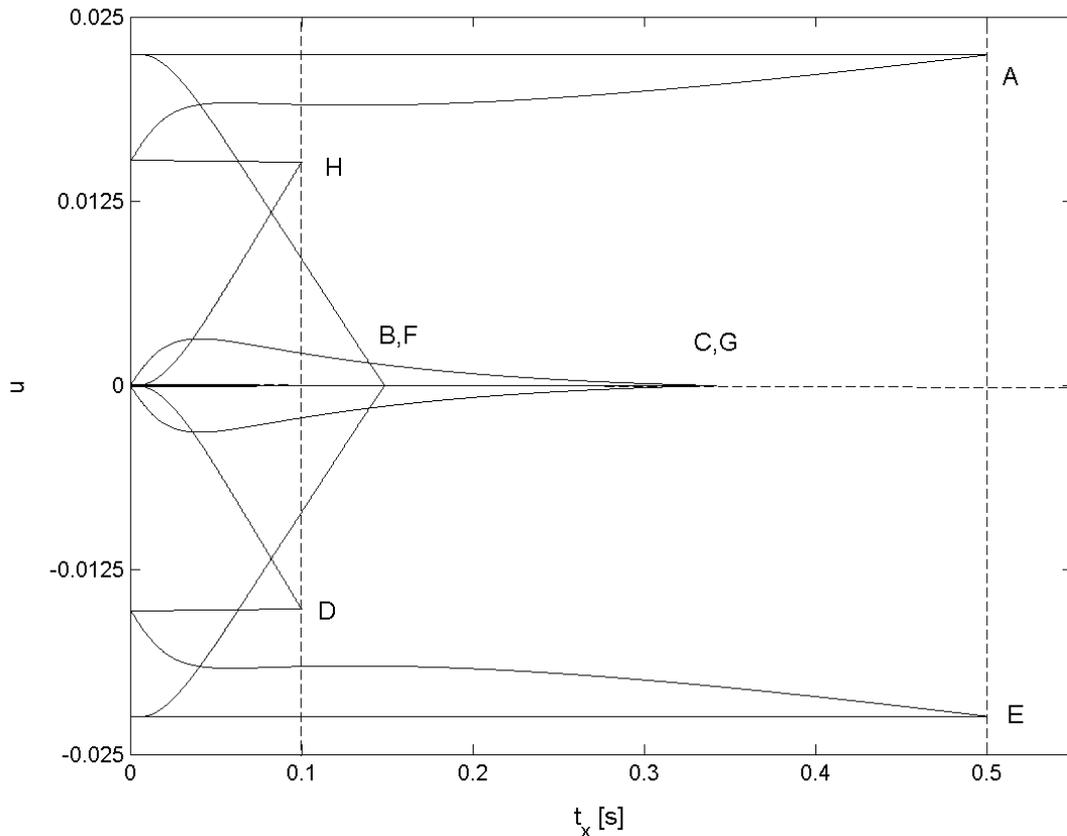


Figura 6.3 – Projeção do atrator periódico com duplo chaveamento (linha contínua) próximo à bifurcação de $p=-5.5$, $z=-3.5$. As linhas tracejadas indicam as superfícies de chaveamento e as letras enumeram os pontos de chaveamento.

Como comentado anteriormente, a brusca mudança nos expoentes de Lyapunov correspondente ao aparecimento desse novo movimento periódico é devida a uma colisão desse atrator com uma superfície de chaveamento. Isso pode ser verificado a partir da figura 6.3, onde se vê que o atrator tangencia a superfície de chaveamento no ponto C. Dessa forma, um decremento infinitesimal em z faria com que esse ponto de contato desaparecesse e, junto com ele, todo o atrator. Esse mesmo atrator periódico tornar-se-á um atrator quase-periódico por ocasião de outra colisão para $z = -2.4$. Neste caso, os pontos B e F colidem com a reta $t_x = 0.1$, o que implicará um atraso com relação ao chaveamento num sistema em que não houvesse restrições temporais. O novo movimento poderia ser chamado de quase-periódico de período-2. Assim, há diferença substancial entre as duas bifurcações discutidas:

enquanto na primeira a condição de chaveamento desaparece, na segunda a condição de chaveamento é apenas atrasada, o que leva a uma distorção do atrator e ao aumento de sua dimensão.

Tabela 1 - Resumo dos atratores observados ($p=-5.5$)

z	Atratores coexistentes $(\lambda_1, D_L, k)^a$
-7.5	(0,1,1)
-7.4	(0,2,1)
-3.3	(0,1,2), (0,2,1)
-2.5	(0,1,2), 2 (0,1,3)
-2.4	(0,3,2), 2 (0,1,3)
-2.2	(0,3,1), (0,3,2), 2 (0.016,3,3), 2 (0.06,2.75,4), 2
-2.1	(0,3,2), 2 (0.02,3,3), 2 (0.05,2.8,5), 2
-2.0	2 (0,1,12), 2 (0,1,4), 2 (0.055,2.8,5)
-1.9	2 (0.02,3,?), (0,3,4), 2 (0,3,12), (0,3,18)
-1.7	(0,3,16), (0,3,?), (0.05,3,?), (0,3,?)

^a k é o número de transições por ciclo para um dado modo m

^b O símbolo ? indica que não há uma seqüência periódica de transições

Embora haja métodos exatos como o de Tsytkin [28] que permitiriam prever movimentos periódicos mais complexos, esse estudo limitar-se-á a observar esses movimentos através de simulação, uma vez que métodos analíticos se tornam demasiado custosos computacionalmente. A tabela 1 ilustra os atratores observados à medida que se varia o parâmetro z . Os números fora dos parênteses indicam o número de atratores com as características dadas. Uma lógica que pareceria evidente seria a da transformação de atratores periódicos $(0,1,k)$ em atratores quase-periódicos $(0,3,k)$. Contudo os resultados mostram que atratores periódicos também podem resultar em atratores caóticos como é o caso de $(0,1,3)$ para $z = -2.4$ sendo mudado em $(0.016,3,3)$ para $z = -2.2$. Outra observação interessante está no fato de que nem sempre os atratores caóticos apresentam dimensão claramente não-inteira. Na maioria dos casos, apresentam dimensão bem próxima a 3.

7 Predição exata de ciclos-limite

O cálculo de ciclos-limite em sistemas não-lineares incertos tem atraído a atenção de pesquisadores na última década [11-17]. A maioria deles tem-se preocupado simplesmente em inibir o ciclo-limite de modo a obter provas de estabilidade de pontos de equilíbrio. Como o objetivo desta pesquisa é também inibir o ciclo-limite a partir de uma determinada faixa de frequências, a contribuição dessas pesquisas poderia ser proveitosa. Contudo, sem qualquer exceção, todos adotam a aproximação de primeira harmônica, a qual pode levar a resultados inadequados, como se prevê em [9]. Em seguida, comentam-se as principais estratégias para controle robusto constantes da literatura e como elas motivaram o emprego de métodos exatos.

Em Tierno [11], uma aproximação racional da função descritiva do elemento não-linear é obtida e então aplicada numa formulação de análise de robustez usando valor singular estruturado generalizado. As incertezas consideradas provêm da parte linear e do fato de se simplificar a função descritiva. Os limites do valor singular estruturado generalizado fornecem limites para a amplitude dos ciclos-limite.

Fadali e Chachavalvoong [12] e Huang et al. [13] empregaram uma generalização do teorema de Kharitonov para analisar o efeito de incertezas paramétricas sobre a condição de existência de ciclo-limite dada pelo método da função descritiva. A mesma condição foi analisada por Nataraj e Barve [14] usando um algoritmo de análise de intervalos que permitia analisar e projetar ciclos-limite com determinados intervalos de amplitude e frequência. Na presente pesquisa, esse procedimento motivou o uso de algoritmos baseados em álgebra de intervalos sobre a condição de existência de ciclos-limite dada pela expressão exata do lugar de Tsytkin. Mas essa idéia foi abandonada porque não se conseguiu desenvolver algoritmos que mostrassem o problema computacionalmente tratável, o que ocorreu provavelmente porque a função estudada possuía muitas dobras decorrentes de uma dependência complexa do lugar de Tsytkin com relação aos parâmetros do modelo e de controle.

Tan e Atherton [15] apresentaram um método de cômputo de envelopes de amplitude e fase de funções de transferência incertas e aplicaram o método da função descritiva para prever a existência de ciclos-limite. Esse trabalho motivou a representação de incertezas aqui utilizada.

A abordagem mais consistente para tratar os efeitos do uso da função descritiva foi introduzida por Katebi e Zhang [16]. Eles aplicaram a metodologia μ a sistemas cuja parte linear possui incerteza de norma limitada e incorporaram à descrição do problema a dinâmica negligenciada pelo método da função descritiva na forma de incerteza não-estruturada. De modo similar, Leephakpreeda [17] propõe uma abordagem usando controle H_∞ para prever ciclos-limite em sistemas com controladores *fuzzy*. Neste caso, considerou-se a aproximação da função descritiva como única fonte de incertezas e utilizou-se o teorema dos pequenos ganhos para provar a inexistência de ciclos-limite. No desenvolvimento desta tese, a proposta de Leephakpreeda conduziu à primeira tentativa de análise de robustez. Contudo, averiguou-se que essa metodologia é interessante apenas para sistemas com não-linearidades não muito fortes, como saturações e controladores *fuzzy*. No caso de relés, o peso da incerteza multiplicativa originada pela aproximação da função descritiva é superior a 1, o que implica um conservadorismo grande a ponto de não existir robustez. A conclusão natural é que não é possível analisar consistentemente a robustez do sistema sem considerar harmônicas superiores.

7.1 O método de Tsytkin

Nesta seção são obtidas condições necessárias para a existência de ciclos-limite conforme o método proposto por Tsytkin no seu estudo de sistemas com relé [28]. Essas condições são apenas necessárias porque o método não verifica a inexistência de chaveamentos intermediários. Suponha-se que a saída dos atuadores seja periódica como mostrado na figura 7.1:

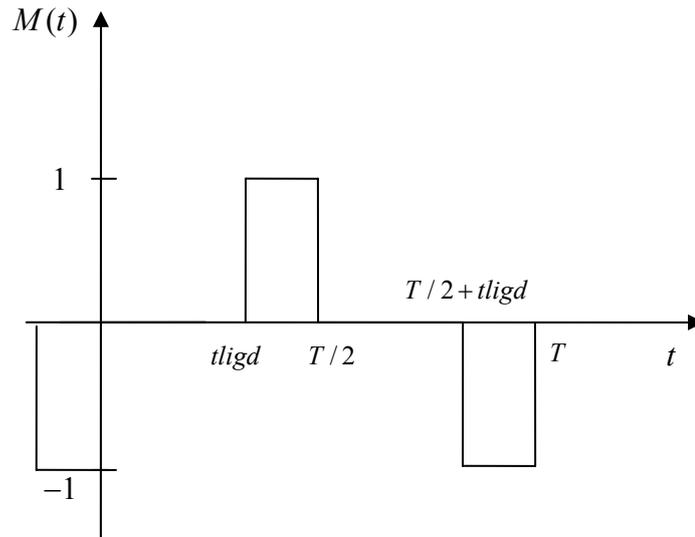


Figura 7.1 – Saída dos atuadores com período T

Essa onda periódica é equivalente à soma de duas ondas quadradas de amplitude $1/2$, estando uma atrasada de t_{ligd} com relação à outra. Denotando $\omega_0 = 2\pi T^{-1}$, a seguinte decomposição em série de Fourier é dada:

$$M(t) = \sum_{\substack{k \\ \text{ímpar}}} \frac{4}{\pi k} \operatorname{Im} \left\{ \left(\frac{1 + e^{-jk\omega_0 t_{ligd}}}{2} \right) e^{jk\omega_0 t} \right\} \quad (7.1)$$

Note-se que para $\omega_0 = \omega_{\max}$, a terceira harmônica do sinal $M(t)$ tem amplitude equivalente a 91% da amplitude da primeira harmônica, o que explica em parte os problemas da aproximação da função descritiva que se constatam no capítulo 9. As duas condições necessárias para a existência de ciclo-limite devem ser verificadas:

$$\begin{aligned} u(T/2) &= 0 \\ \frac{du}{dt}(T/2) &< 0 \end{aligned} \quad (7.2)$$

Note-se que essas mesmas condições seriam suficientes se a elas se acrescentasse

$$u(t) > 0, \forall t \in [t_{ligm}, t_{ligd}] \cup [t_{ligd} + t_{lig}, T/2) \quad (7.3)$$

Considerando-se a função de transferência em malha aberta

$$L(s) = -U(s)/M(s) = s^{-2}(1+s)D(s)C(s) \text{ e reorganizando os ganhos na constante } k_r = \frac{F\rho}{J},$$

as condições acima podem ser reescritas como

$$\begin{aligned} u(T/2) &= \sum_{\substack{k \\ \text{ímpar}}} \frac{4k_r}{\pi k} \operatorname{Im} \left\{ -L(j\omega_0 k) \left(\frac{1 + e^{-jk\omega_0 t l i g d}}{2} \right) e^{jk\omega_0 T/2} \right\} \\ &= \sum_{\substack{k \\ \text{ímpar}}} \frac{4k_r}{\pi k} \operatorname{Im} \left\{ L(j\omega_0 k) \left(\frac{1 + e^{-jk\omega_0 t l i g d}}{2} \right) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (7.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt}(T/2) &= \sum_{\substack{k \\ \text{ímpar}}} \frac{4k_r}{\pi k} \operatorname{Im} \left\{ -j\omega_0 k L(j\omega_0 k) \left(\frac{1 + e^{-jk\omega_0 t l i g d}}{2} \right) e^{jk\omega_0 T/2} \right\} \\ &= \omega_0 \sum_{\substack{k \\ \text{ímpar}}} \frac{4k_r}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ L(j\omega_0 k) \left(\frac{1 + e^{-jk\omega_0 t l i g d}}{2} \right) \right\} < 0 \end{aligned} \quad (7.5)$$

Enfim, define-se o lugar de Tsytkin $\Lambda(\omega) = \frac{1}{\omega} \frac{du}{dt}(\pi/\omega) + ju(\pi/\omega)$, que assume a

forma final:

$$\Lambda(\omega) = \sum_{\substack{k \\ \text{ímpar}}} \frac{4k_r}{\pi} \cos\left(\frac{k\omega t l i g d}{2}\right) \left[\operatorname{Re} \left\{ L(j\omega k) e^{-\frac{jk\omega t l i g d}{2}} \right\} + j \frac{1}{k} \operatorname{Im} \left\{ L(j\omega k) e^{-\frac{jk\omega t l i g d}{2}} \right\} \right] \quad (7.6)$$

Portanto, a fim de que um ciclo-limite de frequência angular ω_0 possa existir, é necessário que $\angle\Lambda(\omega_0) = \pi$, o que é equivalente à condição (7.2). Dessa forma, o lugar de Tsytkin é uma ferramenta útil na determinação de propriedades do ciclo-limite tais como amplitude e frequência. Uma formulação equivalente ao método de Tsytkin é o método de Hamel [63], que obtém as condições em (7.2) no domínio do tempo e traça a curva $\left(u(T/2), \frac{du}{dt}(T/2) \right)$ no plano de fase. Uma vantagem desse método é o fato de permitir um

projeto gráfico de controladores com realimentação do tipo $-z\phi(t) + \frac{d\phi}{dt}(t)$. Aqui, porém, o

método de Tsytkin é preferido uma vez que permitirá tratar incertezas de modelagem com facilidade.

7.2 Amplitude do ciclo-limite

Nesta seção encontra-se o cálculo das amplitudes de posição e velocidade de rolamento no ciclo-limite. Definindo $L_o(j\omega) = \Phi(j\omega)/M(j\omega)$ e assumindo que para valores pequenos de ω_0 vale a aproximação $L_o(j\omega) \approx -\omega^{-2}$, pode-se calcular facilmente a amplitude de $\phi(t)$ considerando sua expansão em série:

$$\phi(t) \approx \sum_{\substack{k \\ \text{ímpar}}} \frac{4k_r}{\pi k} \cos\left(\frac{k\omega_0 t l i g d}{2}\right) \text{Im} \left\{ \frac{e^{jk\omega_0(t-tl i g d/2)}}{-(\omega_0 k)^2} \right\} \quad (7.7)$$

$$\theta(t) \approx \omega_0 \sum_{\substack{k \\ \text{ímpar}}} \frac{4k_r}{\pi} \cos\left(\frac{k\omega_0 t l i g d}{2}\right) \text{Re} \left\{ \frac{e^{jk\omega_0(t-tl i g d/2)}}{-(\omega_0 k)^2} \right\} \quad (7.8)$$

Enfim,

$$\begin{aligned} \theta(t_{\min}) = 0 &\Rightarrow t_{\min} \approx \frac{\pi}{2\omega_0} + \frac{t l i g d}{2} \\ \Rightarrow \phi(t_{\min}) &= - \sum_{\substack{k \\ \text{ímpar}}} \frac{4k_r}{\pi\omega_0^2 k^3} \text{sen}\left(\frac{k\omega_0 t l i g d}{2} + \frac{\pi k}{2}\right) \end{aligned} \quad (7.9)$$

De modo análogo,

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt}(t_{\min}) = 0 &\Rightarrow t_{\min} \approx \frac{t l i g d}{2} \\ \Rightarrow \theta(t_{\min}) &= - \sum_{\substack{k \\ \text{ímpar}}} \frac{4k_r}{\pi\omega_0 k^2} \cos\left(\frac{k\omega_0 t l i g d}{2}\right) \end{aligned} \quad (7.10)$$

A amplitude pico-a-pico Φ_{pp} é traçada em função de ω_0 na figura 7.2, bem como Θ_{pp} .

Uma vez que Φ_{pp} decresce estritamente com ω_0 , a amplitude é mínima para $\omega_0 = \omega_{\max}$ e tem valor pico-a-pico de $0.0275k_r$. Note-se que, mesmo que haja um significativo atraso introduzido pela dinâmica do atuador de forma que $L_o(j\omega) \approx -\omega^{-2}e^{-j\omega\tau}$, o cálculo da

amplitude feito acima permanece válido, alterando-se apenas os instantes em que ocorrem os extremos locais.

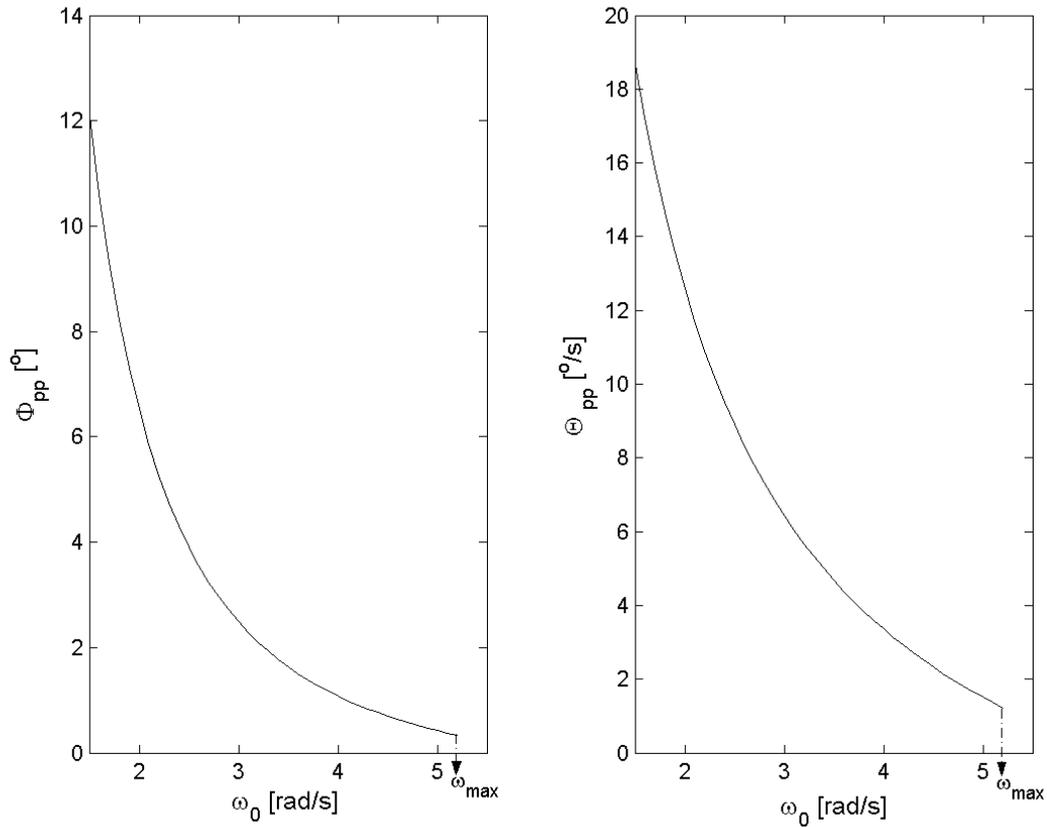


Figura 7.2 – Amplitudes pico-a-pico de $\phi(t)$ e $\theta(t)$ em função da frequência angular de oscilação para

$$k_r = 2.05 \cdot 10^{-1} \text{ [rad/s}^2\text{]}$$

7.3 Estabilidade do ciclo-limite

Esta seção desenvolve o critério de estabilidade que será usado como teste prático ao longo deste texto. Para analisar a estabilidade do ciclo-limite predito pelo método de Tsytkin, considere-se que a entrada periódica dos atuadores $u_T(t)$ é perturbada por um sinal de amplitude infinitesimal $u_d(t)$:

$$u(t) = u_T(t) + u_d(t) \quad (7.11)$$

Então, a perturbação $M_d(t)$ induzida na saída será um trem de pulsos de amplitude 1 com duração Δt_k e início nos instantes $kT/2$, quando o atuador é desligado, e nos instantes

$kT/2 + t_{ligd}$, quando o atuador é ligado. Como Δt_k deve ser tal que $u(kT/2 + \Delta t_k) = 0$, pode-se usar uma aproximação de primeira ordem e obter

$$\Delta t_k \approx -\frac{u_d(kT/2)}{\frac{du}{dt}(kT/2)} \quad (7.12)$$

Mas, devido à periodicidade, tem-se $\Delta t_k = (-1)^{k+1} u_d(kT/2)/u'$, onde $u' = \left. \frac{du}{dt} \right|_{(T/2)}$.

No limite, os pulsos podem ser aproximados por impulsos, de modo que

$$M_d(t) = \frac{1}{u'} \sum_{k=0}^{\infty} u_d(kT/2) [\delta(t - kT/2) + \delta(t - kT/2 - t_{ligd})] \quad (7.13)$$

Assim, pode-se tratar a perturbação $u_d(kT/2)$ como a saída de um sistema amostrado a uma taxa $T/2$ com função de transferência de malha aberta

$$L_S(s) = \frac{2k_r}{u'} \left(\frac{1 + e^{-st_{ligd}}}{2} \right) L(s) \quad (7.14)$$

Em seguida, aplica-se a prova de estabilidade elaborada por Tsytkin [28], que estuda a estabilidade usando o teorema de Nyquist para sistemas amostrados. Para tal, considere a transformada de Laplace discreta para a frequência de amostragem $2\omega_0$:

$$L_S^*(s) = \frac{\omega_0}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} L_S(s + 2jk\omega_0) \quad (7.15)$$

Dado que L_S é marginalmente estável e supondo que $L_S^*(j\omega)$ cruza o eixo real negativo apenas uma vez, o ciclo-limite será estável se esse cruzamento se der à direita de -1. Porém, recorrendo à definição de $\Lambda(\omega)$,

$$L_S^*(j\omega_0) = \frac{\omega_0}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} L_S(j\omega_0 + 2jk\omega_0) = \omega_0 \frac{\text{Re}\{\Lambda(\omega_0)\}}{u'} = -1 \quad (7.16)$$

Portanto, o sistema amostrado é marginalmente estável, o que requer o estudo de como $L_S^*(j\omega)$ contorna o ponto -1 para ω nas vizinhanças de ω_0 . Para isso calcula-se

$$\begin{aligned} \left[\frac{dL_S^*(j\omega)}{d\omega} \right]_{\omega=\omega_0} &= \frac{\omega_0}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{dL_S(j\omega + 2jk\omega_0)}{d\omega} \right]_{\omega=\omega_0} = \\ &= \frac{\omega_0}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \frac{dL_S(j\omega_0 + 2jk\omega_0)}{d\omega_0} \end{aligned} \quad (7.17)$$

Lembrando que $\operatorname{Re} \left\{ \frac{dL_S(jk\omega_0)}{d\omega_0} \right\}$ é uma função par com respeito a k e recorrendo

novamente à definição de $\Lambda(\omega)$, chega-se a

$$\left[\frac{dL_S^*(j\omega)}{d\omega} \right]_{\omega=\omega_0} = j \frac{\omega_0}{u'} \operatorname{Im} \left\{ \frac{d\Lambda}{d\omega_0}(\omega_0) \right\} \quad (7.18)$$

Assim, $L_S^*(j\omega)$ não contornará -1 se e só se

$$\operatorname{Im} \left\{ \frac{d\Lambda}{d\omega}(\omega_0) \right\} > 0 \quad (7.19)$$

Como em geral não se demonstra que $L_S^*(j\omega)$ cruza o eixo real uma única vez, a condição acima é na prática apenas necessária. No entanto, será de interesse no decorrer do texto, uma vez que é um critério gráfico para mostrar a inexistência de ciclos-limite estáveis. Adicionalmente, nota-se que sob as hipóteses acima haveria instabilidade do ciclo-limite no sistema estudado se a função de transferência em malha aberta possuísse fase não-mínima, uma vez que o setor de raio infinito de $L_S^*(j\omega)$ contornaria -1.

7.4 Expressão exata do lugar de Tsytkin

Uma fórmula exata para o lugar de Tsytkin será útil no estudo paramétrico do sistema. Além disso, ela permitirá também avaliar erros de truncamento no cálculo de $\Lambda(\omega)$. Esta seção é dedicada ao desenvolvimento dessas expressões exatas.

Sejam $P(s)$ e $Q(s)$ polinômios tais que

$$L(s) = \frac{P(s)}{s^2 Q(s)} e^{-s\tau} \quad (7.20)$$

com pólos simples p_ν não-nulos. Para esse caso Tsytkin fornece a expressão exata para $\Lambda(\omega)$ [28]

$$\operatorname{Re}\{\Lambda(\omega)\} = (-1)^\ell \frac{k_r}{\omega} \left\{ c' - \frac{P(0)}{Q(0)} \left[\tau - \left(\ell - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{\omega} \right] - \sum_\nu \frac{P(p_\nu)}{Q'(p_\nu) p_\nu^2} \left[1 - \frac{2 \exp(p_\nu (\ell \pi / \omega - \tau))}{1 + \exp(p_\nu \pi / \omega)} \right] \right\} \quad (7.21)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\{\Lambda(\omega)\} = & (-1)^{\ell+1} k_r \left\{ \frac{1}{2} \frac{P(0)}{Q(0)} \left(\frac{\pi \ell}{\omega} - \tau \right) \left[\tau - (\ell - 1) \frac{\pi}{\omega} \right] + \frac{d}{ds} \left[\frac{P(s)}{Q(s)} \right]_{s=0} \left[\tau - \left(\ell - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{\omega} \right] \right. \\ & \left. + \sum_\nu \frac{P(p_\nu)}{Q'(p_\nu) p_\nu^3} \left[1 - \frac{2 \exp(p_\nu (\ell \pi / \omega - \tau))}{1 + \exp(p_\nu \pi / \omega)} \right] \right\} \end{aligned} \quad (7.22)$$

onde ℓ é inteiro tal que $(\ell - 1) \frac{\pi}{\tau} \leq \omega \leq \ell \frac{\pi}{\tau}$ e $c' = \lim_{s \rightarrow \infty} sL(s)$. No caso em estudo,

$$L(s) = \frac{P(s)}{s^2 Q(s)} \left(\frac{1 + e^{-stligd}}{2} \right) e^{-s\tau} \quad (7.23)$$

há dois atrasos envolvidos: τ e $\tau' = \tau + tligd$. Como, na faixa de interesse,

$0 \leq \omega_0 \leq \frac{\pi}{tlig + tligd} < \frac{\pi}{\tau'} < \frac{\pi}{\tau}$, tem-se $\ell' = \ell = 1$. Assim, recorrendo a (7.21) e (7.22), obtém-se

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{\Lambda(\omega)\} = & -\frac{k_r}{\omega} \left\{ \frac{P(0)}{Q(0)} \left(\frac{\pi}{2\omega} - \frac{\tau + \tau'}{2} \right) \right. \\ & \left. - \sum_\nu \frac{P(p_\nu)}{Q'(p_\nu) p_\nu^2} \left[1 - \frac{\exp(p_\nu (\pi / \omega - \tau)) + \exp(p_\nu (\pi / \omega - \tau'))}{1 + \exp(p_\nu \pi / \omega)} \right] \right\} \end{aligned} \quad (7.24)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\{\Lambda(\omega)\} = & k_r \left\{ \frac{P(0)}{Q(0)} \left[\left(\frac{\pi}{2\omega} - \frac{\tau + \tau'}{2} \right) \left(\frac{\tau + \tau'}{2} \right) + \frac{\tau \tau'}{2} \right] - \frac{d}{ds} \left[\frac{P(s)}{Q(s)} \right]_{s=0} \left(\frac{\pi}{2\omega} - \frac{\tau + \tau'}{2} \right) \right. \\ & \left. + \sum_\nu \frac{P(p_\nu)}{Q'(p_\nu) p_\nu^3} \left[1 - \frac{\exp(p_\nu (\pi / \omega - \tau)) + \exp(p_\nu (\pi / \omega - \tau'))}{1 + \exp(p_\nu \pi / \omega)} \right] \right\} \end{aligned} \quad (7.25)$$

Para $\frac{\pi}{\tau'} < \omega \leq \frac{\pi}{tligd}$, $\Lambda(\omega)$ pode ser calculado fazendo-se $\ell' = 2$ e $\ell = 1$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{\Lambda(\omega)\} &= \frac{k_r}{\omega} \left\{ \frac{P(0)}{Q(0)} \left(\frac{\pi}{2\omega} - \frac{\tau' - \tau}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\nu} \frac{P(p_{\nu})}{Q'(p_{\nu})p_{\nu}^2} \left[\frac{\exp(p_{\nu}(2\pi/\omega - \tau')) - \exp(p_{\nu}(\pi/\omega - \tau))}{1 + \exp(p_{\nu}\pi/\omega)} \right] \right\} \end{aligned} \quad (7.26)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\{\Lambda(\omega)\} &= k_r \left\{ \frac{P(0)}{Q(0)} \left(\frac{\pi}{2\omega} - \frac{\tau' - \tau}{2} \right) \left(\frac{\pi}{\omega} - \frac{\tau' + \tau}{2} \right) + \frac{d}{ds} \left[\frac{P(s)}{Q(s)} \right]_{s=0} \left(\frac{\pi}{2\omega} - \frac{\tau' - \tau}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\nu} \frac{P(p_{\nu})}{Q'(p_{\nu})p_{\nu}^3} \left[\frac{\exp(p_{\nu}(2\pi/\omega - \tau')) - \exp(p_{\nu}(\pi/\omega - \tau))}{1 + \exp(p_{\nu}\pi/\omega)} \right] \right\} \end{aligned} \quad (7.27)$$

7.5 Efeitos do truncamento no cálculo do lugar de Tsytkin

Conhecendo a expressão exata para o lugar de Tsytkin, pode-se avaliar a precisão da série truncada para o mesmo. Para isso, adotou-se a estrutura da dinâmica de acionamento que foi eleita para a análise de robustez nos capítulos seguintes:

$$D(s) = \frac{e^{-s\tau}}{\alpha s + 1} \quad (7.28)$$

Tomando alguns valores típicos de p , z , τ e α , analisou-se como $\Delta\omega$, o erro relativo na determinação de ω_0 , varia em função do número N de termos em que é truncada a série de (7.6). A figura 7.3 exibe um dos piores resultados encontrados, ou seja, um daqueles em que $\Delta\omega$ decai numa taxa abaixo da média. Pelo gráfico, vê-se que uma aproximação de primeira harmônica pode levar a um erro de até 20% na determinação da frequência de oscilação.

A partir do gráfico, conclui-se ainda que $N \geq 9$ é suficiente para que $\Delta\omega < 0.02$, o que, pela análise da curva da figura 7.2, garante um erro algo menor que 1% na determinação da amplitude nas vizinhanças de ω_{\max} . Contudo, no capítulo 9 constatar-se-á que tal truncamento ainda não é suficiente para que haja uma boa precisão da fronteira de bifurcação. Naquele capítulo optar-se-á por $N = 35$, que é um valor razoável, dado que após a oscilação que se vê no gráfico o erro tende para o limite de precisão próximo a 10^{-3} .

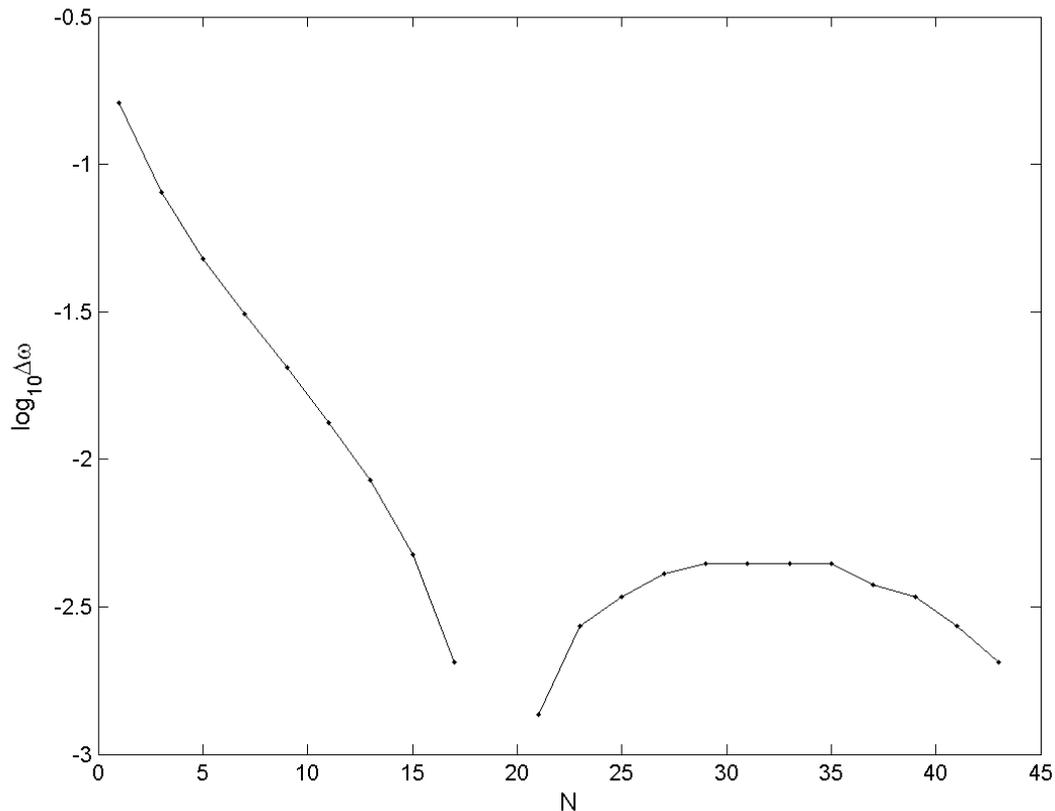


Figura 7.3 – Influência do termo de truncamento no erro relativo da frequência de oscilação calculada para o conjunto de parâmetros $p = -5$, $z = -6$, $\tau = 7$ [ms] e $\alpha = 3$ [ms]

7.6 Lugares de Tsytkin típicos

Esta seção apresenta uma discussão sobre os principais resultados que o método de Tsytkin provê para o sistema em estudo.

A primeira observação importante deve ser feita com relação ao ponto de equilíbrio na origem. Note-se que, não houvesse restrições temporais para os atuadores, seria possível um ciclo-limite com frequência $\omega_0 = \frac{\pi}{tligd}$, pois $\Lambda\left(\frac{\pi}{tligd}\right) = 0$. Contudo, nessa frequência a saída

$M(t)$ do atuador é nula. Isso significa que esse ciclo-limite é na verdade o ponto de equilíbrio na origem. Assim, sendo a derivada à esquerda $\text{Im}\left\{\frac{d\Lambda}{d\omega}\left(\frac{\pi}{tligd}\right)\right\}$ positiva, o sistema poderia

ser estabilizado pela aplicação de pulsos de duração infinitesimal.

Procede-se em seguida à análise dos lugares de Tsytkin que resultam tipicamente das expressões exatas dadas acima. Definindo $\eta = \exp(-p_v\tau) + \exp(-p_v\tau')$, podem-se reescrever os termos da série em (7.25) como

$$\frac{\exp(p_v(\pi/\omega - \tau)) + \exp(p_v(\pi/\omega - \tau'))}{1 + \exp(p_v\pi/\omega)} = \frac{\eta}{2} \left(1 + \text{th} \left(\frac{\pi p_v}{2\omega} \right) \right) \quad (7.29)$$

Portanto, percebe-se que a parte imaginária do lugar de Tsytkin é formada pela superposição de uma série de tangentes hiperbólicas e de um polinômio de primeira ordem em $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Esse fato impõe limitações importantes em $\text{Im}\{\Lambda(\omega)\}$, como um número máximo de frequências de oscilação. No caso, por exemplo, de dois pólos reais p_v e atraso nulo ($\tau = 0$), $\text{Im}\{\Lambda(\omega)\}$ consistirá na combinação linear de duas tangentes hiperbólicas e de uma reta. Então, é possível mostrar que tal lugar de Tsytkin poderá apresentar até três cruzamentos do eixo real.

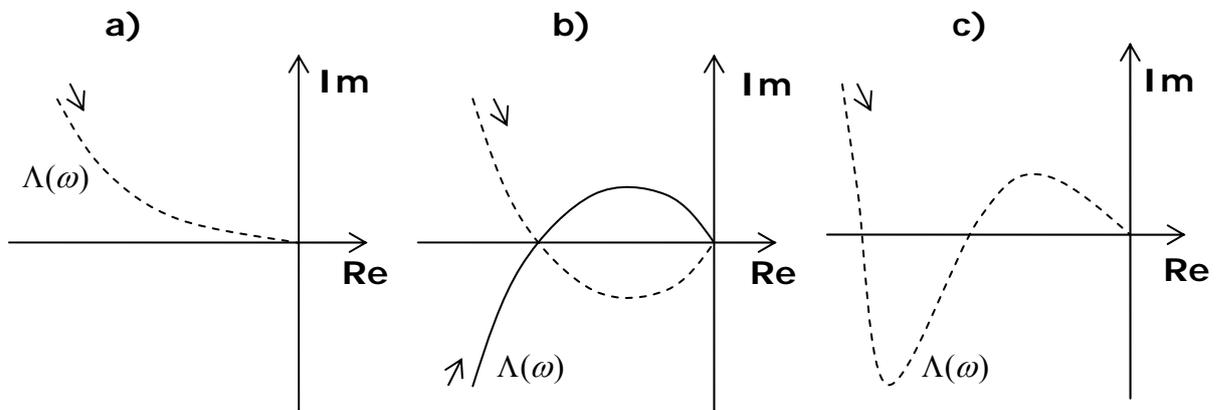


Figura 7.4 – Lugares de Tsytkin típicos

Para todos os modelos do sistema estudado, foram observados apenas lugares de Tsytkin semelhantes aos da figura 7.4. Na figura 7.4-a, o lugar de Tsytkin corresponde a um sistema que possui ponto de equilíbrio instável. Na figura 7.4-b, a linha contínua (tracejada) corresponde a um sistema que possui ponto de equilíbrio instável (estável) e um ciclo-limite

estável (instável). Conforme comentado acima, a existência de um ponto de equilíbrio estável requer a violação das restrições temporais de chaveamento. Portanto, uma outra modalidade de movimento persistente deve instalar-se quando a trajetória se aproxima do ponto de equilíbrio no caso da linha tracejada em 7.4-b. No caso 7.4-c, um ponto de equilíbrio instável, um ciclo-limite estável e outro de menor frequência, mas instável, coexistem.

Além disso, a presença de um duplo integrador implica $\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \angle \Lambda(\omega) = \pi$. Logo, deve haver um ciclo-limite com frequência muito baixa e amplitude muito alta, possuindo uma resposta transitória muito longa, ou seja, uma trajetória divergente para infinito. Ora, se a frequência é nula, não há chaveamento e, portanto, não há controle. Nos casos em tracejado da figura 7.4, o critério de estabilidade se verifica para esses ‘ciclos-limite’, isto é, o sistema está sujeito à instabilidade. Assim, 7.4-b e 7.4-c mostram que atratores estáveis e regiões de instabilidade podem ser encontrados num mesmo sistema.

Uma explicação para as formas de $\Lambda(\omega)$ observadas pode ser dada por uma análise dos resíduos:

$$c_0 = \frac{P(0)}{Q(0)} = \frac{z}{p} \quad (7.30)$$

$$c_{01} = \frac{d}{ds} \left[\frac{P(s)}{Q(s)} \right]_{s=0} = \frac{z}{p} (1-\alpha) - \frac{p-z}{p^2} \quad (7.31)$$

$$c_\alpha = -\alpha^3 \frac{P(-1/\alpha)}{Q'(-1/\alpha)} = -\frac{\alpha(\alpha-1)(1+\alpha z)}{(1+\alpha p)} \quad (7.32)$$

$$c_p = \frac{P(p)}{Q'(p)p^3} = \frac{(1+p)(p-z)}{p^3(1+\alpha p)} \quad (7.33)$$

O coeficiente angular da reta em $\frac{\pi}{2\omega}$ da parte imaginária do lugar de Tsytkin é

$c_0 \left(\frac{\tau + \tau'}{2} \right) - c_{01}$, que pode assumir valores negativos ou positivos. Como $|\alpha|, |\alpha z|, |\alpha p| \ll 1$,

c_p pode assumir valores positivos e negativos mas c_α será sempre positivo. Assim, não é possível uma combinação de três resíduos negativos, o que justifica a inexistência do lugar

oposto ao da figura 7.4-a. Igualmente, não é possível uma combinação de parâmetros em que a tangente hiperbólica mais rápida (aquela que depende de α) é negativa e a mais lenta é positiva, situação necessária para que exista o lugar oposto ao da figura 7.4-c. Quanto à parte real do lugar de Tsytkin, como o sistema é estável e de fase mínima, tem-se que $c_0 > 0$ garante que o lugar de Tsytkin esteja no semi-plano real negativo para valores de ω não muito grandes.

7.7 Assimetria nos atuadores

Um outro método exato para determinação de ciclos-limite é o método de Lure que também se baseia na verificação das condições (7.2), usando, porém, técnicas no domínio do tempo [64-65]. Esse método será apresentado em seguida para esclarecer as conseqüências da assimetria nas dinâmicas de acionamento e desligamento dos motores. Tal estudo tem o fito de fundamentar o emprego da simplificação que envolve considerar essas dinâmicas simétricas.

Suponha-se que, enquanto os motores estiverem desligados, a matriz do sistema seja A_1 e que haja um atraso τ_1 no seu desligamento após o cruzamento da superfície de chaveamento; e que, enquanto os motores estiverem ligados, a matriz do sistema seja A_2 e que haja um atraso τ_2 no seu acionamento. Além disso, denotar-se-á $B = B_1$ e $H = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]$.

Suponha-se ainda que o sistema opera em ciclo-limite com período T . Assim, a cada meio ciclo, o termo forçante $M(t - \tau)$ permanecerá nulo por um tempo $t_{off} = t_{ligd} + \tau_2 - \tau_1$ e atuante por um tempo $t_{on} = T/2 - t_{ligd} + \tau_1 - \tau_2$. Seja x_0 o estado em que $M(t - \tau)$ salta de -1 para 0. Então, pode-se determinar x_0 :

$$\begin{aligned}
x(T) &= \left(e^{A_2 t_{on}} e^{A_1 t_{off}} \right)^2 x_0 + \left(e^{A_2 t_{on}} e^{A_1 t_{off}} - I \right) \int_0^{t_{on}} e^{A_2 \sigma} B d\sigma = x_0 \\
\Rightarrow \left(I - e^{A_2 t_{on}} e^{A_1 t_{off}} \right) \left(I + e^{A_2 t_{on}} e^{A_1 t_{off}} \right) x_0 &= - \left(I - e^{A_2 t_{on}} e^{A_1 t_{off}} \right) \int_0^{t_{on}} e^{A_2 \sigma} B d\sigma \quad (7.34) \\
\Rightarrow x_0 &= - \left(I + e^{A_2 t_{on}} e^{A_1 t_{off}} \right)^{-1} \int_0^{t_{on}} e^{A_2 \sigma} B d\sigma + av = \bar{x}_0 + av
\end{aligned}$$

onde $a \in \mathbb{R}$ e v é autovetor tal que $e^{A_2 t_{on}} e^{A_1 t_{off}} v = v$. Como A_1 e A_2 diferem apenas pela dinâmica do atuador, v também é autovetor dessas matrizes de modo que $A_1 v = A_2 v = 0$.

Para que $M(t - \tau_1)$ chaveie em $t = T/2$ é necessário que $u(T/2 - \tau_1) = Hx(T/2 - \tau_1) = 0$.

Recorrendo-se à definição de x_0 , calcula-se

$$\begin{aligned}
x(T/2) &= e^{A_2 t_{on}} e^{A_1 t_{off}} x_0 + \int_0^{t_{on}} e^{A_2 \sigma} B d\sigma \\
&= \left(-e^{A_2 t_{on}} e^{A_1 t_{off}} + I + e^{A_2 t_{on}} e^{A_1 t_{off}} \right) \left(I + e^{A_2 t_{on}} e^{A_1 t_{off}} \right)^{-1} \int_0^{t_{on}} e^{A_2 \sigma} B d\sigma + a e^{A_2 t_{on}} e^{A_1 t_{off}} v \quad (7.35) \\
&= -\bar{x}_0 + av
\end{aligned}$$

Agora, definindo $\tilde{x} = x(T/2 - \tau_1)$, tem-se

$$x(T/2) = -\bar{x}_0 + av = e^{A_2 \tau_1} \tilde{x} + \int_0^{\tau_1} e^{A_2 \sigma} B d\sigma \quad (7.36)$$

Como $e^{A_2 t}$ é inversível, pode-se escrever

$$\tilde{x} = -e^{-A_2 \tau_1} \left(\bar{x}_0 - av + \int_0^{\tau_1} e^{A_2 \sigma} B d\sigma \right) \quad (7.37)$$

Analogamente, define-se $\tilde{x}' = x(T - \tau_1)$, de modo que

$$x(T) = \bar{x}_0 + av = e^{A_2 \tau_1} \tilde{x}' - \int_0^{\tau_1} e^{A_2 \sigma} B d\sigma \quad (7.38)$$

o que leva a

$$\tilde{x}' = e^{-A_2 \tau_1} \left(\bar{x}_0 + av + \int_0^{\tau_1} e^{A_2 \sigma} B d\sigma \right) \quad (7.39)$$

Mas $H\tilde{x} = H\tilde{x}' = 0$ implica $a = 0$, uma vez que $He^{-A_2 \tau_1} v = Hv \neq 0$. Assim, o período T é determinado pela solução de

$$He^{-A_2\tau_1} \left(\bar{x}_0 + \int_0^{\tau_1} e^{A_2\sigma} B d\sigma \right) = 0 \quad (7.40)$$

Como t_{off} é muito maior que o tempo de acomodação das curvas de acionamento e desligamento, é de se esperar que $e^{A_1 t_{off}} \approx e^{A_2 t_{off}}$. Assim, definindo $t'_{on} = T/2 - t_{ligr}$, pode-se reescrever a partir de (7.34)

$$\bar{x}_0 = - \left(I + e^{A_2 T/2} \right)^{-1} \int_0^{t'_{on} + \tau_1 - \tau_2} e^{A_2 t} B dt \quad (7.41)$$

As equações (7.40) e (7.41) sugerem que a melhor aproximação que considera atuadores simétricos será obtida fazendo-se $A = A_2$ e $\tau = \tau_1$. Ainda assim, o termo $\tau_2 - \tau_1$ que aparece nos limites da integral introduz erros significativos na determinação de T . Para o modelo simétrico, tal diferença pode ser entendida como uma incerteza em t_{ligr} . A observação de (7.41) sugere que essa incerteza pode ser aproximadamente balanceada por um aumento em T equivalente a $2(\tau_2 - \tau_1)$. Felizmente, supõe-se que o atraso de acionamento é em geral superior ao atraso de desligamento, o que será como se t_{ligr} fosse maior do que o considerado e terá um efeito de diminuição da frequência de oscilação. Por isso, considerar a simetria nos atuadores não comprometerá a análise de robustez da condição de existência de ciclo-limite, mas torná-la-á mais conservadora. Todavia, o mesmo não se dará quando o objetivo for delimitar inferior e superiormente os conjuntos de possíveis amplitudes e frequências.

O método de Lure foi aqui utilizado para compreender qualitativamente o efeito da simplificação num sistema híbrido assimétrico. Porém, na caracterização numérica do ciclo-limite, prefere-se o lugar de Tsytkin ao de Lure, uma vez que este é de cálculo mais trabalhoso. Na análise de robustez também o lugar de Tsytkin é preferível, uma vez que é mais fácil trabalhar com incertezas no domínio da frequência.

8 Caracterização de erros de modelagem

Este capítulo é dedicado à caracterização do conjunto \mathcal{S} de modelos que podem representar o sistema real, o qual está sujeito a incertezas de modelagem. A partir dessa caracterização deseja-se encontrar o conjunto \mathcal{A} das possíveis amplitudes do movimento resultante e verificar se o mesmo satisfaz os requisitos de projeto. No caso de ciclo-limite, \mathcal{A} dependerá diretamente do conjunto das possíveis frequências \mathcal{F} .

8.1 Fontes de incertezas no modelo

Duas das maiores incertezas no modelo adotado residem no momento de inércia J e no empuxo F , os quais variam com o tempo devido ao consumo de propelente e ao decaimento da pressão atmosférica. Uma vez que a lei de realimentação e a lei de controle $C(s)$ são lineares, está claro que essas grandezas, variando muito lentamente, afetam apenas a amplitude do movimento sem influenciar o tipo do comportamento dinâmico. No capítulo 2 apresenta-se F com uma incerteza relativa de 5%. Assim, também a amplitude do ciclo-limite estará sujeita a uma incerteza relativa de 5%. Outra fonte de incertezas seria o acoplamento do ângulo de rolamento com os outros modos. Contudo, neste trabalho será considerada apenas a incerteza na dinâmica de acionamento do atuador, uma vez que erros em J e F são de fácil análise e que o acoplamento com os outros modos, além de ser de análise mais complexa, pôde ser desprezado no projeto original [22].

Considerando-se as características dinâmicas do atuador apresentadas no capítulo 2, observa-se que não há simetria entre as dinâmicas de acionamento e desligamento dos motores e que as mesmas podem variar com o tempo. Uma análise de tal complexidade está além do escopo desta pesquisa. Por isso, esses complicantes do problema real serão desconsiderados. No entanto, acredita-se que ainda assim a análise de robustez aqui apresentada possa ser empregada no projeto de controle do sistema real, dado o seu

conservadorismo. Por exemplo, se a alteração na dinâmica dos atuadores se der lentamente, será razoável a aproximação de que o sistema atua em ciclo-limite com frequências variando lentamente em \mathcal{F} e será possível obter um cálculo bastante acurado de \mathcal{A} . Sobretudo, reforça essa hipótese o fato de que as grandezas dinâmicas pertinentes evoluem de forma monotônica durante a subida da atmosfera. Ademais, embora as dinâmicas de acionamento e de desligamento sejam diferentes, são parecidas e possuem tempos de acomodação bem menores que t_{ligd} , o que torna essas diferenças pouco significantes para o cálculo de \mathcal{A} , como discutido no capítulo anterior.

Duas abordagens de representação de incertezas serão adotadas: uma paramétrica e outra não-paramétrica. A representação paramétrica das incertezas é vantajosa porque permite o uso da expressão exata do lugar de Tsytkin, o que evita erros de truncamento. É também importante porque identifica uma estrutura plausível para a dinâmica estudada, o que favorece o uso do raciocínio qualitativo. Mas, sobretudo, simulações de validação apenas serão possíveis se uma representação paramétrica das incertezas for disponível. Por outro lado, uma representação estruturada não abrange toda a riqueza da dinâmica estudada. Dado que pouco se conhece da dinâmica que se deseja caracterizar, essa deficiência pode ser problemática. Além disso, uma análise paramétrica requer um esforço computacional maior que o de uma análise que usa incertezas não-estruturadas. Assim, uma formulação não-estruturada das incertezas faz-se também interessante. No capítulo seguinte os resultados da análise de robustez usando ambas as representações serão comparados quanto ao seu conservadorismo e velocidade de processamento.

8.2 Envelope temporal para as curvas de acionamento e desligamento

As dinâmicas de acionamento e desligamento podem ser inclusas numa mesma família \mathcal{D} de possíveis funções de transferência $D(s)$. Seguindo os atrasos dinâmicos indicados no capítulo 2, vê-se que \mathcal{D} está contida numa família \mathcal{D}' a que pertencem as funções de

transferência cujas respostas a degrau são limitadas no intervalo $[0, \tau_5]$ por uma resposta rápida e outra lenta:

$$\begin{aligned} r_F(t) &= 0.1l(t) + 0.8l(t - \tau_1) + 0.1l(t - \tau_2) \\ r_G(t) &= 0.1l(t - \tau_3) + 0.8l(t - \tau_4) + 0.1l(t - \tau_5) \end{aligned} \quad (8.1)$$

onde $\tau_1 = 9$ [ms], $\tau_2 = 15$ [ms], $\tau_3 = 30$ [ms], $\tau_4 = 50$ [ms], $\tau_5 = 100$ [ms] e $l(t)$ é a função degrau unitário. Não havendo uma especificação para τ_5 , optou-se por arbitrar um valor suficientemente grande para essa grandeza. As respectivas funções de transferência são

$$\begin{aligned} D_F(s) &= 0.1 + 0.8e^{-s\tau_1} + 0.1e^{-s\tau_2} \\ D_G(s) &= 0.1e^{-s\tau_3} + 0.8e^{-s\tau_4} + 0.1e^{-s\tau_5} \end{aligned} \quad (8.2)$$

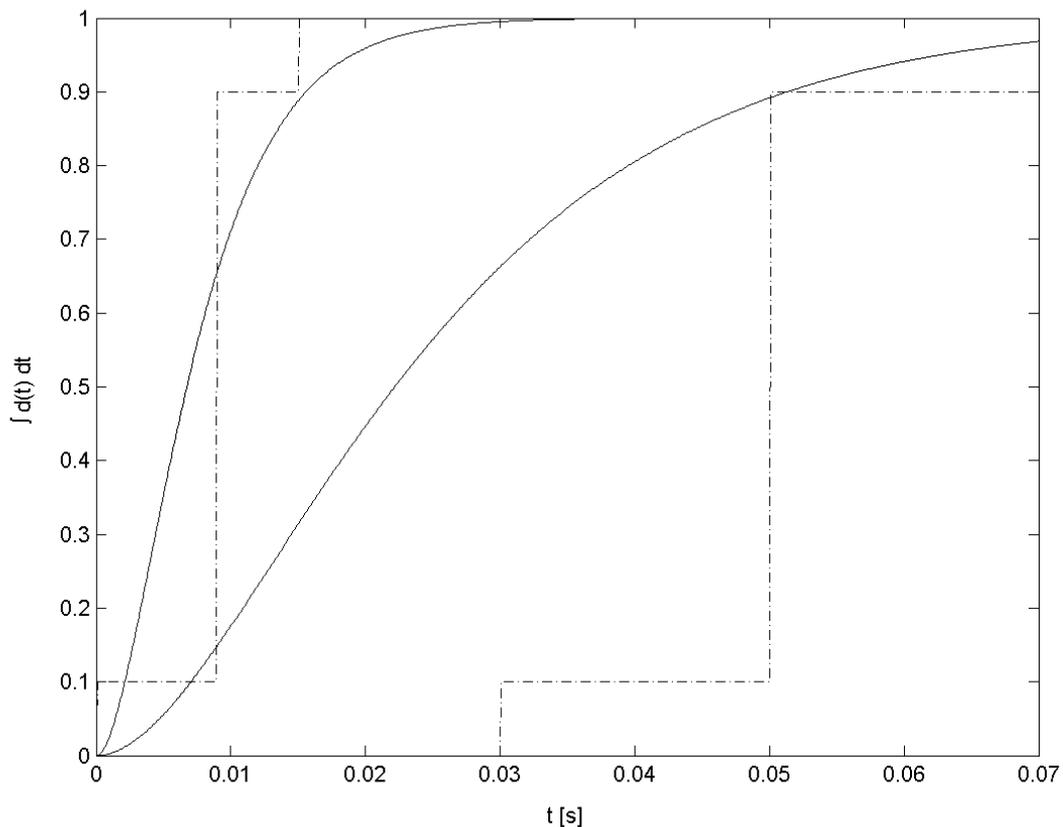


Figura 8.1 – Envelope para as curvas de acionamento/desligamento (linha descontinua) e aproximações racionais de 2ª ordem para esse envelope (linha contínua)

As funções em (8.1) definem um envelope em que estão contidas as possíveis respostas dinâmicas dos propulsores durante seu acionamento ou desligamento. A figura 8.1 apresenta esse envelope em linha descontinua e mostra as respostas de segunda ordem que melhor se

ajustam aos vértices de suas bordas. Note-se que, uma vez que uma resposta real não deverá possuir vértices como os da figura, o envelope proposto é claramente conservador. Contudo, o conservadorismo é um preço mais baixo que aquele que se pagaria na realização de ensaios de medição para obter mais pontos desse envelope.

8.3 Ajuste de respostas dinâmicas ao envelope

O problema de encontrar funções de transferência com estrutura determinada cujas respostas se ajustam ao envelope temporal dado por $r_F(t)$ e $r_G(t)$ é formulado como um problema de minimização de uma função custo. Seja uma classe de funções de transferência multiparamétricas $D(b_i, s)$ com resposta a degrau $r(b_i, t)$, onde $b_i \in V \subset \mathbb{R}^\ell$, V é compacto, e ℓ é inteiro positivo. Então, o problema de ajuste pode ser resolvido através dos dois problemas de otimização a seguir.

$$\begin{aligned} b_i^* &= \min_{b_i \in V} \left[\left(1 - r(b_i, \tau_1) / r_F(\tau_1^-) \right)^2 + K_1 \left(1 - r(b_i, \tau_2) / r_F(\tau_2^-) \right)^2 \right] \\ b_i^* &= \min_{b_i \in V} \left[\left(1 - r(b_i, \tau_3) / r_G(\tau_3^+) \right)^2 + K_2 \left(1 - r(b_i, \tau_4) / r_G(\tau_4^+) \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (8.3)$$

Para resolver tais problemas foi suficiente repetir o método de busca de Nelder-Meads (rotina `fminsearch.m` do Matlab) a partir de alguns conjuntos de parâmetros b_i escolhidos aleatoriamente. Note-se que é importante escolher altos valores de K_1 e K_2 para que os resultados sejam compatíveis com o conceito de envelope. Se, por exemplo, é feita a escolha $K_2 = 1$, $r(b_i^*, \tau_4)$ estará muito abaixo de 0.9 de forma que não se poderá considerar que $r(b_i^*, t)$ está dentro do envelope. Também, se se escolhe $K_1 = 1$, $r(b_i^*, \tau_2)$ será tão baixo que haverá um conjunto considerável de funções que estão dentro do envelope mas que são mais rápidas que $r(b_i^*, t)$.

8.4 Caracterização paramétrica das incertezas

Adotou-se $K_1 = K_2 = 8000$. A classe de funções de transferência escolhida para análise foi

$$D(b_i, s) = \frac{e^{-s\tau}(\gamma s + 1)}{(\alpha s + 1)(\beta s + 1)} \quad (8.4)$$

No caso $\tau = \gamma = 0$, o ajuste pode também ser tentado pela solução de sistemas não-lineares de duas equações e duas incógnitas. Entretanto, os resultados mostrados na figura 8.1 sugerem que esses sistemas não possuem solução. No ajuste para a resposta mais lenta, obteve-se $\alpha = \beta = 13.2$ [ms]. Para a mais rápida, $\alpha = \beta = 4$ [ms]. As curvas de Bode dessas aproximações são comparadas com as de D_F e D_G na figura 8.2.

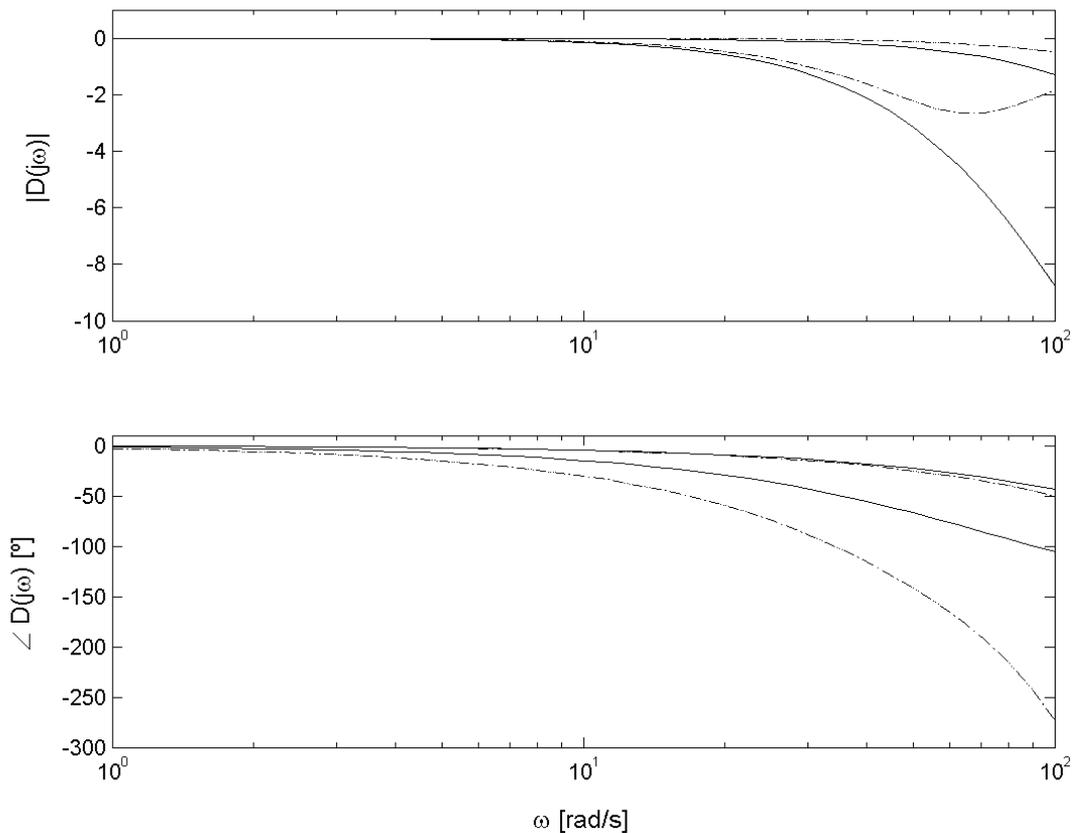


Figura 8.2 – Curvas de Bode para $D_F(s)$ e $D_G(s)$ (linha descontinua) e para suas aproximações de 2ª ordem

No caso $\tau = 0$ e $\gamma \neq 0$, o procedimento de otimização proposto é prejudicado pelo aparecimento de mínimos locais que correspondem a respostas com *undershoot* ou sobressinal, comportamento que não é natural no sistema de propulsão estudado. Nesse caso é possível acrescentar um termo à função custo que penalize o aparecimento de tais fenômenos. Procedendo assim, pôde-se concluir que a adição de um zero em pouco contribui para a melhoria do ajuste desejado. Enfim, a pobreza desses ajustes sugere que dificilmente uma família de funções de transferência racionais de baixa ordem oferecerá uma boa representação de \mathcal{D} . Tentativas de utilizar funções de ordem superior confirmaram essa idéia.

Observa-se que tal dificuldade é devida a um repentino aumento na velocidade de acionamento/desligamento, o que sugere a existência de um atraso puro. De fato, a ocorrência de atrasos significativos no transporte do combustível fundamenta essa idéia. No caso $\beta = \gamma = 0$, o problema de ajuste pode reduzir-se à solução dos sistemas

$$r_F(\tau_1^-) = \left[1 - e^{-(\tau_1 - \tau_F)/\alpha_F} \right] l(\tau_1 - \tau_F) \quad (8.5)$$

$$r_F(\tau_2^-) = \left[1 - e^{-(\tau_2 - \tau_F)/\alpha_F} \right] l(\tau_2 - \tau_F)$$

$$r_G(\tau_3^+) = \left[1 - e^{-(\tau_3 - \tau_G)/\alpha_G} \right] l(\tau_3 - \tau_G) \quad (8.6)$$

$$r_G(\tau_4^+) = \left[1 - e^{-(\tau_4 - \tau_G)/\alpha_G} \right] l(\tau_4 - \tau_G)$$

As respectivas soluções podem ser encontradas facilmente

$$\alpha_F = \frac{\tau_2 - \tau_1}{\ln(1 - r_F(\tau_1^-)) - \ln(1 - r_F(\tau_2^-))} \quad (8.7)$$

$$\tau_F = \frac{\tau_2 \ln(1 - r_F(\tau_1^-)) - \tau_1 \ln(1 - r_F(\tau_2^-))}{\ln(1 - r_F(\tau_1^-)) - \ln(1 - r_F(\tau_2^-))}$$

$$\alpha_G = \frac{\tau_4 - \tau_3}{\ln(1 - r_F(\tau_3^-)) - \ln(1 - r_F(\tau_4^-))} \quad (8.8)$$

$$\tau_G = \frac{\tau_4 \ln(1 - r_F(\tau_3^-)) - \tau_3 \ln(1 - r_F(\tau_4^-))}{\ln(1 - r_F(\tau_3^-)) - \ln(1 - r_F(\tau_4^-))}$$

Para a aproximação $D_F^a(s)$ da resposta mais rápida, gerada a partir da função de transferência $D_F(s)$, tem-se $\alpha_F = 2.73$ [ms] e $\tau_F = 8.71$ [ms]. Para a aproximação $D_G^a(s)$ da resposta mais lenta, gerada a partir de $D_G(s)$, $\alpha_G = 9.10$ [ms] e $\tau_G = \tau_{\max} = 29.04$ [ms]. Além disso, é interessante avaliar qual seria a resposta com menor faixa de passagem, que é aquela que possui o maior valor de α e menor valor de τ . Tal situação ocorre quando

$$\begin{aligned} r(b_i, \tau_1) &= r_F(\tau_1^-) \\ r(b_i, \tau_4) &= r_G(\tau_4^+) \end{aligned} \quad (8.9)$$

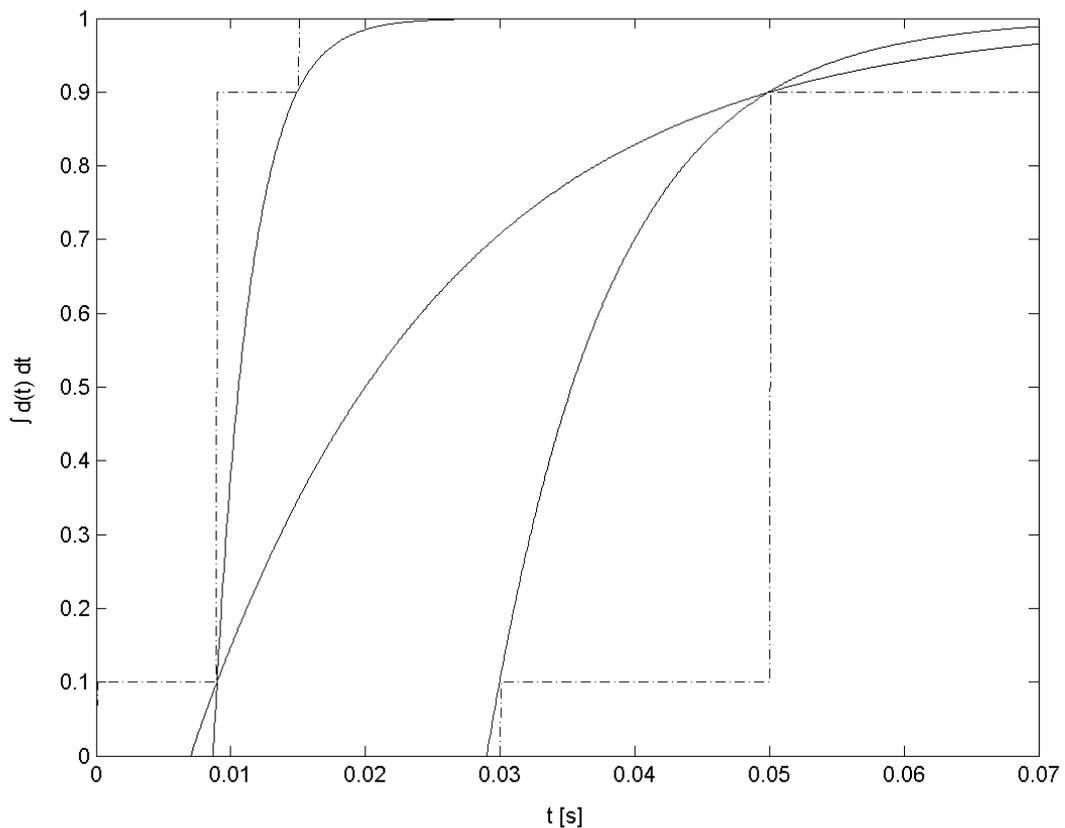


Figura 8.3 – Envelope para as curvas de acionamento/desligamento (linha descontinua) e aproximações com $\beta = \gamma = 0$ (linha contínua)

Os parâmetros correspondentes são $\alpha_{\max} = 18.66$ [ms] e $\tau_{\min} = 7.03$ [ms] e a correspondente função de transferência será denotada $D_{FG}^a(s)$. As curvas resultantes são traçadas na figura 8.3.

Considerando-se razoável um valor mínimo $\alpha_{\min} = \alpha_F = 2.73$ [ms], é possível estabelecer o domínio abaixo para os parâmetros α e τ com base na condição $r(t) \geq r_G(\tau_4^+)$.

Esse domínio também é retratado na figura 8.4:

$$\begin{aligned} \tau &\in [\tau_{\min}, \tau_{\max}] \\ \alpha &\in \left[\alpha_{\min}, \frac{\tau - \tau_4}{\ln(1 - r_G(\tau_4^+))} \right] \end{aligned} \quad (8.10)$$

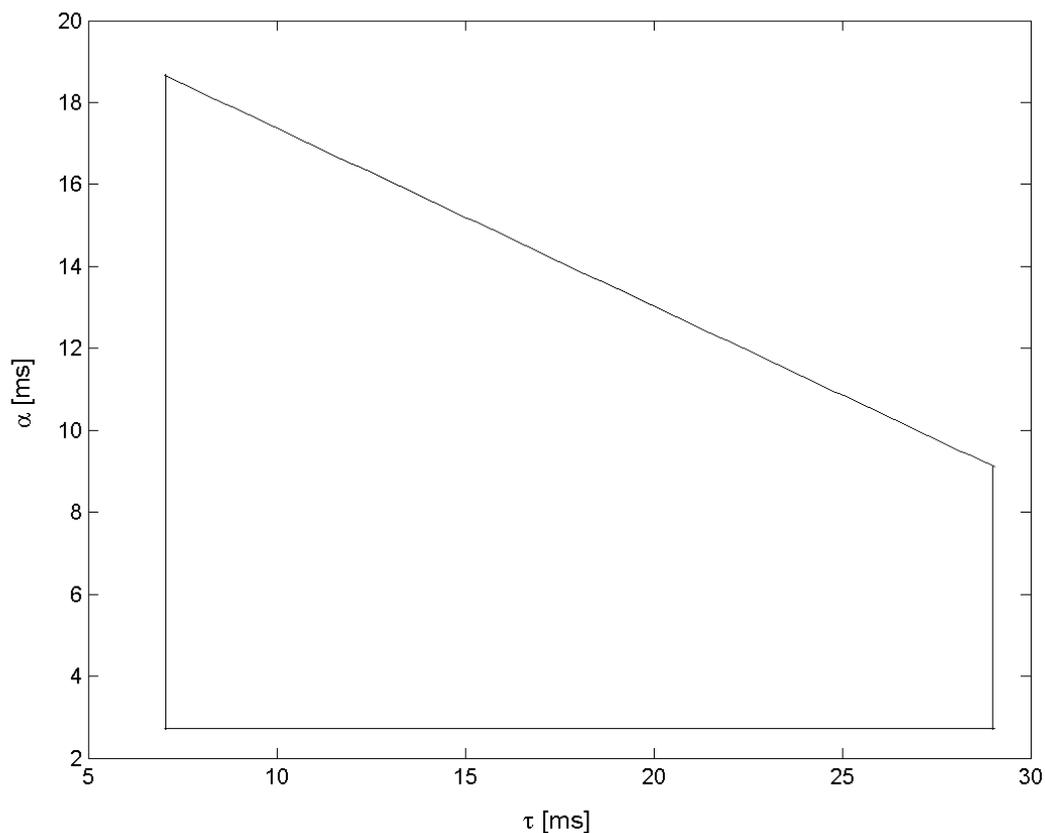


Figura 8.4 – Região de possíveis valores para os parâmetros de $D(b_i, s)$ com $\beta = \gamma = 0$

Obviamente, fazer $\beta \neq 0$ e $\gamma \neq 0$ aumenta o número de graus de liberdade para o problema de ajuste e torna a família de funções consideradas ainda mais abrangente. Contudo, julgou-se que isso seria uma complicação desnecessária dada a capacidade da aproximação anterior de bem representar o conteúdo espectral das respostas desejadas na faixa de frequência de interesse, como mostrado na figura 8.5. Conforme se discute no capítulo

seguinte, a faixa de frequência estudada deverá incluir a 35ª harmônica da máxima frequência do ciclo-limite, o que implica uma banda de interesse de 183 [rad/s]. Uma comparação das figuras 8.2 e 8.5 esclarece as diferenças entre as classes de funções envolvidas, mostrando as deficiências de uma aproximação racional principalmente no que tange à representação do conteúdo espectral de fase.

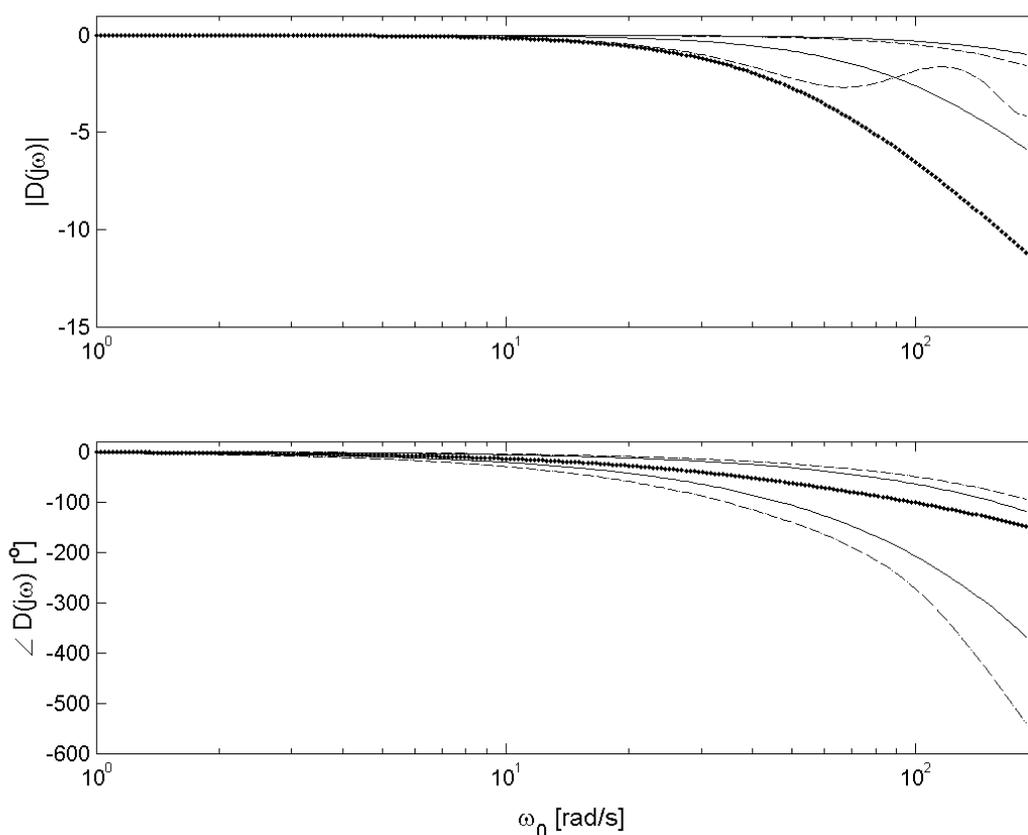


Figura 8.5 – Curvas de Bode para $D_F(s)$ e $D_G(s)$ (linha descontínua), para suas aproximações $D_F^a(s)$ e $D_G^a(s)$ (linha contínua) e para $D_{FG}^a(s)$ (linha com pontos escuros)

8.5 Caracterização de incertezas não-estruturadas

Nesta seção, trata-se da determinação de envelopes de amplitude e fase. O fato de não haver um método rigoroso de se determinar o envelope de amplitude não é muito grave, uma vez que na maior parte da faixa de interesse tem-se $|D(j\omega)|$ muito próximo de 1, o que indica que o envelope de amplitude terá um papel pouco importante na caracterização dos

ciclos-limite. Por isso, optou-se por adotar um envelope de amplitudes derivado da caracterização paramétrica acima. Seus limites são dados por $|D_F^a(j\omega)|$ e $|D_{FG}^a(j\omega)|$. À primeira vista, pode parecer que um limitante inferior mais preciso para a amplitude poderia ser obtido com uma função de maior ordem, pois esta possuiria um decaimento mais rápido com a frequência. Porém, como a faixa de passagem contém a faixa de interesse, as aproximações de ordem maior mostraram possuir amplitudes praticamente coincidentes a $|D_{FG}^a(j\omega)|$, não variando mais que 1 [dB]. Note-se ainda que considerar um envelope de amplitude com limitante inferior $|D_{FG}^a(j\omega)|$ é uma opção bastante conservadora, pois para grande extensão do domínio de τ não se admitem valores tão grandes para α .

Quanto ao envelope de fase, é possível provar certas propriedades a partir de algumas hipóteses simples. Considere-se que para \mathcal{D} existem apenas curvas de acionamento/desligamento monotonicamente crescentes e que haja um tempo máximo de acomodação τ_a para essas curvas. Então, para $D(s) \in \mathcal{D}$, tem-se $d(t) \geq 0$ para $0 \leq t < \tau_a$ e $d(t) = 0$ para $t \geq \tau_a$. Assim,

$$\begin{aligned} D(j\omega) &= \int_0^{\tau_a} d(t)e^{-j\omega t} dt \\ \Rightarrow \angle D(j\omega) &\in [-\omega\tau_a, 0] \end{aligned} \quad (8.11)$$

Além disso, dado que $r(t) \leq r_F(t)$ para $0 \leq t < \tau_a$ e $r(t) = r_F(t)$ para $t \geq \tau_a$, tem-se que

$$\begin{aligned} D(j\omega) - D_F(j\omega) &= j\omega \int_{-\infty}^{+\infty} [r(t) - r_F(t)] e^{-j\omega t} dt = j\omega \int_0^{\tau_a} [r(t) - r_F(t)] e^{-j\omega t} dt \\ \Rightarrow \angle (D(j\omega) - D_F(j\omega)) &\in \left[-\frac{\pi}{2} - \omega\tau_a, -\frac{\pi}{2} \right] \end{aligned} \quad (8.12)$$

Analogamente,

$$\angle (D(j\omega) - D_G(j\omega)) \in \left[\frac{\pi}{2} - \omega\tau_a, \frac{\pi}{2} \right] \quad (8.13)$$

Sabe-se que, se $\angle a \in [\underline{\varphi}, \bar{\varphi}]$, $\angle b \in [\underline{\chi}, \bar{\chi}]$ e $\bar{\chi} < \underline{\varphi} + \pi$, então $\angle(a+b) \in [\min\{\underline{\varphi}, \underline{\chi}\}, \max\{\bar{\varphi}, \bar{\chi}\}]$. Daí, sobre a soma de $D(j\omega) - D_F(j\omega)$ e $D_F(j\omega)$ pode-se concluir que, desde que $\angle D_F(j\omega) < \pi/2 - \omega\tau_a$,

$$\angle D(j\omega) \leq \angle D_F(j\omega) \quad (8.14)$$

De modo análogo, para $\angle D_G(j\omega) > -\pi/2$, garante-se que

$$\angle D_G(j\omega) \leq \angle D(j\omega) \quad (8.15)$$

Considerando-se um tempo de acomodação de 5% para a resposta a degrau de $D_{FG}^a(s)$, tem-se $\tau_a = 65$ [ms]. Assim, graficamente verifica-se que a condição $\angle D_F(j\omega) < \pi/2 - \omega\tau_a$ equivale a $\omega < 28$ [rad/s]. Já a condição $\angle D_G(j\omega) > -\pi/2$, equivale a $\omega < 30.5$ [rad/s]. Portanto, o envelope determinado por $\angle D_F(j\omega)$ e $\angle D_G(j\omega)$ terá validade garantida até a 5ª harmônica de f_{\max} . Contudo, devido à menor significância das demais harmônicas, parece razoável o uso desse envelope para toda a faixa de interesse. Uma opção mais conservadora seria assumir limites em $[-\omega\tau_a, 0]$ fora da faixa em que se demonstrou a validade desse envelope. Essa segunda opção é mostrada na figura 8.6.

Em suma, as seguintes funções de transferência são assumidas para definir os envelopes no domínio da frequência:

$$\bar{D}(j\omega) = \begin{cases} \left| \frac{1}{\alpha_{\min} j\omega + 1} \right| \frac{D_F(j\omega)}{|D_F(j\omega)|}, & \text{se } \omega < 28 \\ \left| \frac{1}{\alpha_{\min} j\omega + 1} \right|, & \text{se } \omega > 28 \end{cases} \quad (8.16)$$

$$\underline{D}(j\omega) = \begin{cases} \left| \frac{1}{\alpha_{\max} j\omega + 1} \right| \frac{D_G(j\omega)}{|D_G(j\omega)|}, & \text{se } \omega < 30.5 \\ \left| \frac{1}{\alpha_{\max} j\omega + 1} \right| \exp(-j\omega\tau_a), & \text{se } \omega > 30.5 \end{cases} \quad (8.17)$$

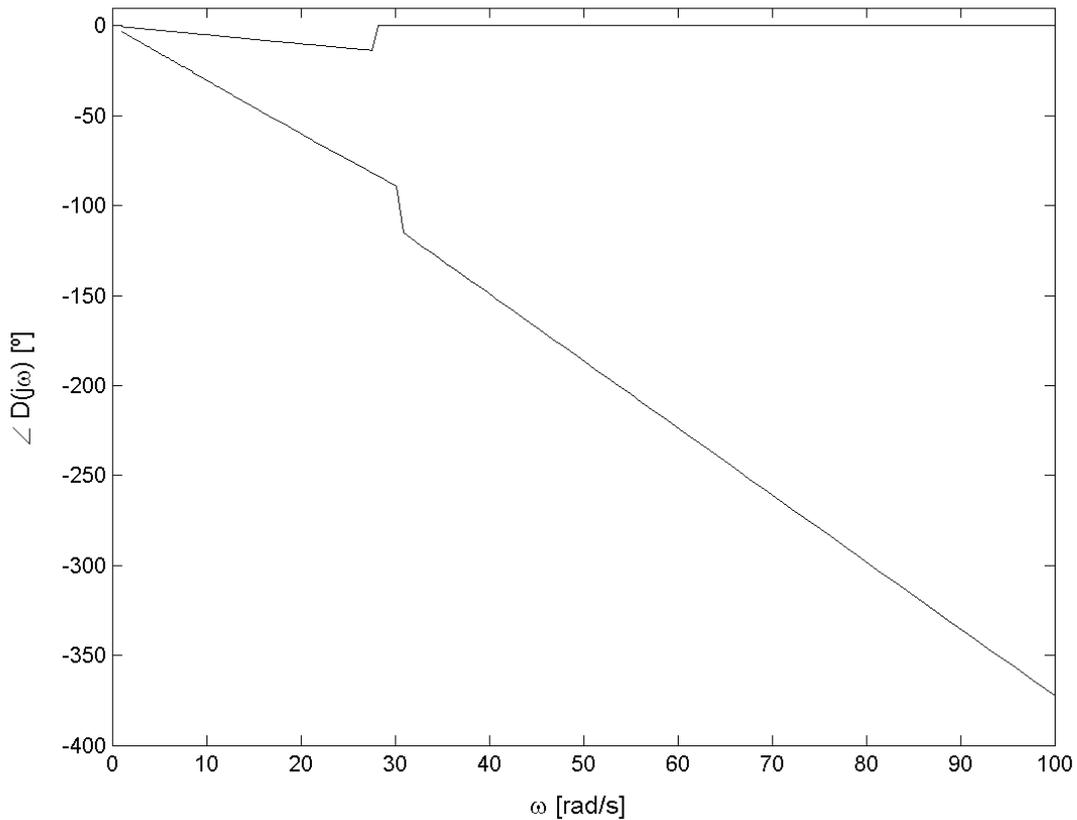


Figura 8.6 – Envelope de fase para a função de transferência de acionamento/desligamento

Note-se que a discussão presente nesta seção pode levar também à representação de incertezas na forma multiplicativa. Contudo, a representação por meio de envelopes será mais adequada para a análise de robustez que seguirá. Uma possibilidade de representação na forma multiplicativa seria considerar a planta nominal com $D(j\omega) = D_F(j\omega)$ e a com função de erro multiplicativa

$$W(j\omega) = \frac{D(j\omega)}{D_F(j\omega)} - 1 \quad (8.18)$$

Usando (8.11) e (8.12) é fácil obter um limitante para a fase do erro:

$$\angle W(j\omega) \in [-\omega\tau_a - \pi/2 - \angle D_F(\omega), -\pi/2 - \angle D_F(\omega)] \quad (8.19)$$

O limitante de amplitude é de cálculo mais complicado, mas pode ser obtido fazendo-se, por exemplo, uma análise paramétrica de $D(\alpha, \tau, s)$. Porém, constata-se que usar o intervalo de fase de (8.19) produz em geral conjuntos de incerteza muito mais conservadores que

aqueles dados pelos envelopes de fase e amplitude. Assim, para usar eficientemente a incerteza na forma multiplicativa seria necessário um esforço maior para encontrar limites menos conservadores para a fase da função erro.

9 Análise da robustez da condição de existência de ciclo-limite

Neste capítulo as condições necessárias para a existência de ciclos-limite são testadas quanto a sua robustez. Como essas condições são apenas necessárias, será importante validar os resultados obtidos, o que se fará via simulação no próximo capítulo. Devido às restrições de chaveamento, um ciclo-limite será robusto apenas se

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} f = f_{\max} \quad (9.1)$$

Seja \mathcal{B} a família de possíveis lugares de Tsytkin para o sistema perturbado por incertezas. Assim, de acordo com as restrições de chaveamento, o seguinte critério é necessário para a robustez do ciclo limite

$$\angle \Lambda_{\xi}(\omega) = \pi \Rightarrow \operatorname{Im} \left\{ \frac{d\Lambda_{\xi}}{d\omega}(\omega) \right\} < 0, \forall \Lambda_{\xi} \in \mathcal{B}, \forall \omega \in (\omega_{\max}, \pi / \text{tligd}] \quad (9.2)$$

Assim, uma fronteira de bifurcação pode ser calculada encontrando-se os valores de z e p que violam a condição acima para $\omega = \omega_{\max}$. Novamente corrobora para a necessidade de simulações de validação o fato de que não há garantias de que essa fronteira divida o espaço de parâmetros em duas regiões distintas quanto à verificação de (9.2). Contudo, é pouco provável que essa não seja a fronteira de bifurcação procurada pois, como comentado no capítulo anterior, não se observaram casos em que o lugar de Tsytkin indicasse a existência de mais de um ciclo-limite estável a não ser quando um deles é tal que $\omega_0 = 0$.

A fronteira de bifurcação será dada pelo conjunto de pontos (z, p) para os quais

$$\min_{\Lambda_{\xi} \in \mathcal{B}} \left\{ \operatorname{Im} \left\{ \Lambda_{\xi}(\omega_{\max}) \right\} \right\} = 0. \text{ Como mostra a figura 9.1, a fronteira de bifurcação procurada}$$

ocorre quando o limite inferior do intervalo de possíveis $\operatorname{Im} \left\{ \Lambda(\omega_{\max}) \right\}$ toca o zero.

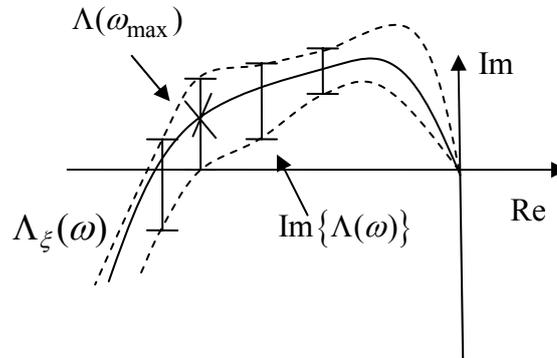


Figura 9.1 – Aspecto do lugar de Tsytkin incerto para p e z sobre a fronteira de bifurcação

9.1 Procedimento para análise de robustez no caso de incertezas estruturadas

Uma condição suficiente para invalidar (9.2) é

$$\exists \Lambda_{\xi} \in \mathcal{B} : \text{Im}\{\Lambda_{\xi}(\omega_{\max})\} < 0 \text{ e } \text{Re}\{\Lambda_{\xi}(\omega)\} < 0, \forall \omega \in [\omega_{\max}, \pi / \text{tligd}] \quad (9.3)$$

De fato, como $\Lambda_{\xi}(\pi / \text{tligd}) = 0$ e o lugar de Tsytkin é contínuo, a condição acima implica que deve haver no intervalo $(\omega_{\max}, \pi / \text{tligd}]$ uma frequência em que o lugar de Tsytkin cruze positivamente o eixo real negativo, ou seja, uma frequência correspondente a um ciclo-limite estável. Na prática, basta verificar $\text{Im}\{\Lambda_{\xi}(\omega_{\max})\} < 0$, pois em geral o lugar de Tsytkin é totalmente contido no semi-plano real negativo. Os casos em que eventualmente isso não for verdadeiro serão detectados na etapa de validação.

Assim, para o caso de incertezas estruturadas, procede-se a análise de robustez usando a expressão exata para o lugar de Tsytkin e, para cada combinação de z e p , varrendo o espaço dos parâmetros α e τ em busca da combinação que minimize $\text{Im}\{\Lambda_{\xi}(\omega_{\max})\}$. A busca poderá ser interrompida cada vez que resultar em $\text{Im}\{\Lambda_{\xi}(\omega_{\max})\} < 0$, podendo-se passar para uma nova combinação de z e p . Por isso, uma análise acelerada é obtida

dispondo-se α e τ de forma que as dinâmicas mais rápidas sejam calculadas primeiramente, o que aumenta a probabilidade de se encontrar a condição $\text{Im}\{\Lambda_\xi(\omega_{\max})\} < 0$.

9.2 Procedimento para análise de robustez no caso de incertezas não-estruturadas

Para o caso de incertezas não-estruturadas, a identificação dessa fronteira pode ser facilmente realizada pela escolha de $D_{\xi^*}(j\omega_{\max}k)$ dentro dos envelopes de amplitude e fase de modo a minimizar, sendo z e p dados, a contribuição de cada harmônica $\omega_{\max}k$ para a parte imaginária do lugar de Tsypkin.

Definindo-se $L'(s) = \frac{1 + e^{-stligd}}{2} L(s)$ e $O(s) = \frac{L'(s)}{D(s)}$ e definindo $\underline{\psi} = \frac{O(j\omega)\underline{D}(j\omega)}{|O(j\omega)\underline{D}(j\omega)|}$ e

$\bar{\psi} = \frac{O(j\omega)\bar{D}(j\omega)}{|O(j\omega)\bar{D}(j\omega)|}$, podem-se estudar as contribuições do envelope para

$$L'_{\xi^*}(j\omega) = O(j\omega)D_{\xi^*}(j\omega).$$

Se $\angle \underline{\psi} < (-\pi/2 + 2\ell\pi) < \angle \bar{\psi}$, ℓ inteiro,

$$L'_{\xi^*}(j\omega) = -j|\bar{D}(j\omega)||O(j\omega)| \quad (9.4)$$

Caso contrário,

$$L'_{\xi^*}(j\omega) = \begin{cases} |\bar{D}(j\omega)||O(j\omega)| \arg \min_{\psi \in \{\underline{\psi}, \bar{\psi}\}} (\text{Im}\{\psi\}), & \text{se } \min_{\psi \in \{\underline{\psi}, \bar{\psi}\}} (\text{Im}\{\psi\}) < 0 \\ |\underline{D}(j\omega)||O(j\omega)| \arg \min_{\psi \in \{\underline{\psi}, \bar{\psi}\}} (\text{Im}\{\psi\}), & \text{se } \min_{\psi \in \{\underline{\psi}, \bar{\psi}\}} (\text{Im}\{\psi\}) > 0 \end{cases} \quad (9.5)$$

A figura 9.2 ilustra como a expressão acima pode ser avaliada graficamente. Para cada frequência, o conjunto de possíveis $O(j\omega)D_\xi(j\omega)$ tem a forma de um retângulo e o pior caso é dado pelo ponto no lado do retângulo que possui maior valor de amplitude e valor de fase mais próximo de -90° . Na figura, o pior caso é marcado por um pequeno círculo. A figura em questão foi traçada para $\omega \in [7.6, 15.5]$, $p = -5$ e $z = -9$. De modo similar, para se encontrar o caso mais favorável, bastaria escolher a maior contribuição para a fase de 90° .

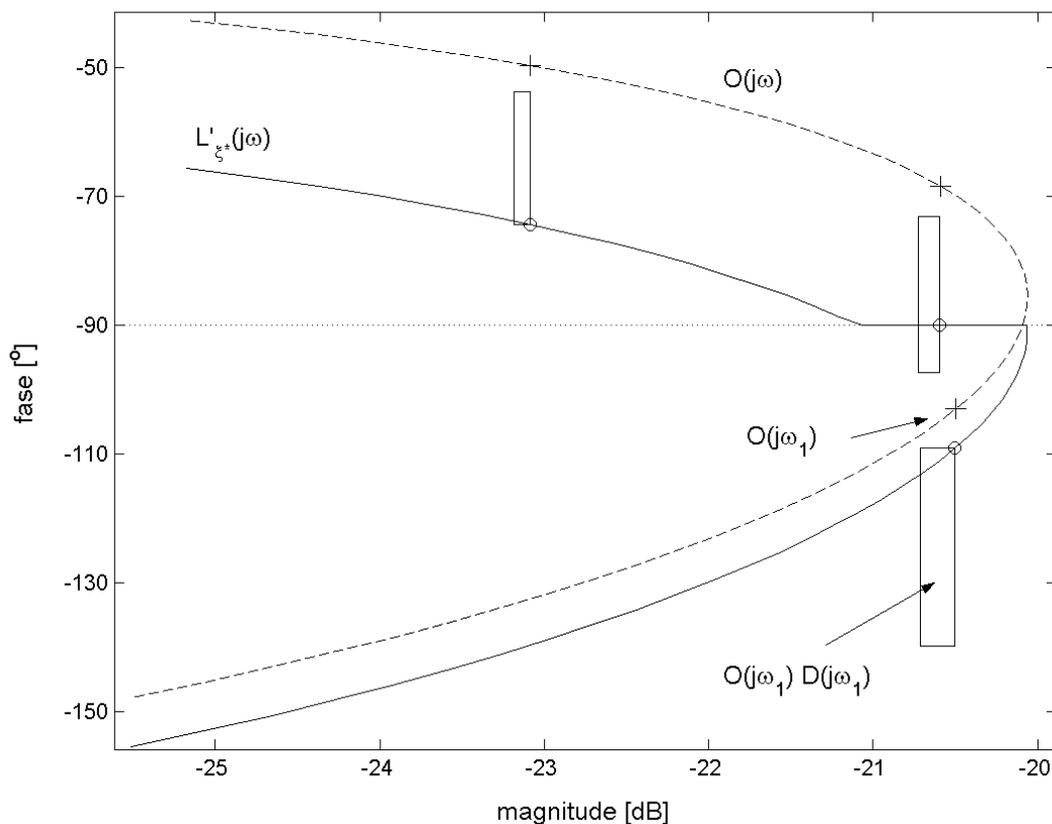


Figura 9.2 – Exemplos de determinação do pior caso de $L'(j\omega)$

Para a mesma combinação de parâmetros, que está próxima à fronteira de bifurcação, foi traçada a figura 9.3. A primeira conclusão importante é que, para baixas frequências, o pior caso ocorre para a mais rápida resposta do atuador. Para quase todo o espectro, a amplitude da resposta deve ser a maior possível, porém, há frequências em que as variações de fase e amplitude são muito rápidas. Por isso, não deverá existir uma função de transferência racional ou uma combinação de uma função racional e de uma exponencial que realizem $D_{\xi^*}(j\omega)$. É provável ainda que a resposta a degrau de $D_{\xi^*}(j\omega)$ sequer esteja contida no envelope temporal.

Entretanto, para que se trate do pior $\Lambda(\omega)$, basta que $D_{\xi^*}(j\omega)$ tenha as características desejadas para as harmônicas de ω_{\max} , que estão indicadas na figura. Isso possibilita que

$D_{\xi^*}(j\omega)$ seja mais simples e, em geral, favorece as respostas mais rápidas, uma vez que, para uma dada escolha de ω_{\max} ou de (z, p) , é menos provável que as frequências $k\omega_{\max}$ coincidam com os intervalos de grande variação de $D_{\xi^*}(j\omega)$. No caso da combinação de parâmetros da figura 9.3, a resposta mais rápida $\bar{D}(j\omega)$ mostra-se praticamente igual a $D_{\xi^*}(j\omega)$ até a 7ª harmônica.

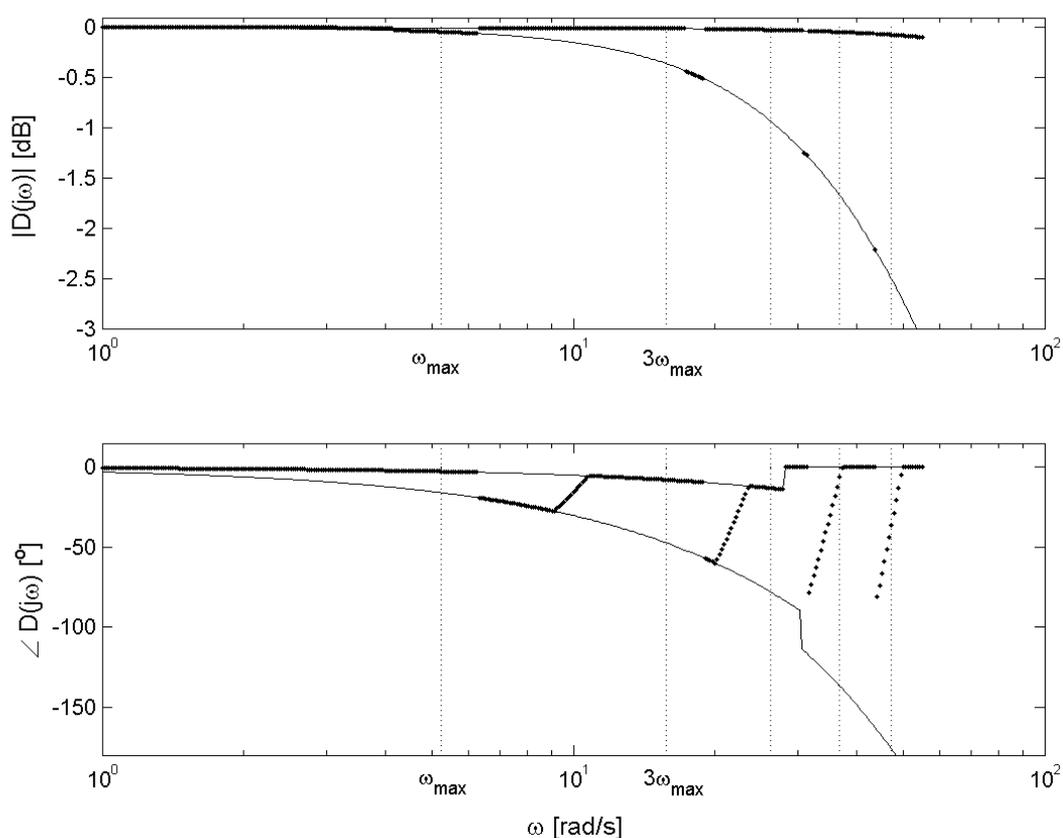


Figura 9.3 – Diagrama de Bode de $D_{\xi^*}(j\omega)$ (pontos) e limites do envelope de amplitude e fase (linha contínua)

9.3 Determinação da fronteira de estabilidade do sistema

Outra fronteira de importância para a análise de robustez nesse sistema é aquela que separa as regiões de comportamento estável e instável. Essa fronteira se relaciona com a estabilidade do ciclo-limite de frequência zero, por isso, é dada pelos valores de z e p tais que

$$\max_{\Lambda_{\xi} \in \mathcal{B}} \left(\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \operatorname{Im} \left\{ \frac{d\Lambda_{\xi}}{d\omega}(\omega) \right\} \right) = 0 \quad (9.6)$$

Para cada combinação de z e p , no caso menos favorável, ter-se-á

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \operatorname{Im} \left\{ \frac{d\Lambda_{\xi^*}}{d\omega}(\omega) \right\} = 0. \text{ Assim, no limite } \omega \rightarrow 0^+,$$

$$\operatorname{Im} \left\{ \frac{d\Lambda_{\xi^*}}{d\omega}(\omega) \right\} = \frac{4k_r}{\pi} \sum_{\substack{k \\ \text{ímpar}}} \frac{d}{d\omega} \operatorname{Im} \left\{ \cos \left(\frac{\omega k t l i g d}{2} \right) \frac{L_{\xi^*}(j\omega k)}{k} e^{-jk\omega t l i g d / 2} \right\} = 0 \quad (9.7)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{d\omega} \operatorname{Im} \left\{ \cos \left(\frac{\omega t l i g d}{2} \right) L_{\xi^*}(j\omega) e^{-j\omega t l i g d / 2} \right\} = \frac{d}{d\omega} \operatorname{Im} \left\{ L_{\xi^*}(j\omega) e^{-j\omega t l i g d / 2} \right\} = 0$$

Por fim, uma vez que $L_{\xi^*}(j\omega) \rightarrow \pi$, a condição acima é equivalente a

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \frac{d}{d\omega} \angle L_{\xi^*}(j\omega) e^{-j\omega t l i g d / 2} = 0 \quad (9.8)$$

Substituindo $L_{\xi^*}(j\omega)$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega} \angle L_{\xi^*}(j\omega) e^{-j\omega t l i g d / 2} &= \frac{d}{d\omega} \angle \left(-\frac{(j\omega+1)(j\omega-z)}{\omega^2(j\omega-p)} D_{\xi^*}(j\omega) \right) - \frac{t l i g d}{2} \\ &= \frac{d}{d\omega} \left(\pi + \arctg \omega - \arctg \frac{\omega}{z} + \arctg \frac{\omega}{p} \right) - \frac{t l i g d}{2} + \frac{d}{d\omega} \angle D_{\xi^*}(j\omega) \end{aligned} \quad (9.9)$$

Derivando, tomando o limite e igualando a zero, obtém-se

$$1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{p} - \frac{t l i g d}{2} + \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \frac{d}{d\omega} \angle D_{\xi^*}(j\omega) = 0 \quad (9.10)$$

Ao observar-se o envelope de fase e magnitude, pode-se concluir que

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \frac{d}{d\omega} \angle \underline{D}(j\omega) &\leq \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \frac{d}{d\omega} \angle D_{\xi}(j\omega) \leq \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \frac{d}{d\omega} \angle \bar{D}(j\omega) \\ \Rightarrow -0.8\tau_1 - 0.1\tau_2 &\leq \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \frac{d}{d\omega} \angle D_{\xi}(j\omega) \leq -0.1\tau_3 - 0.8\tau_4 - 0.1\tau_5 \end{aligned} \quad (9.11)$$

Esse limite pertence, portanto, ao intervalo $[-53, -8.7]$ [ms]. Como as derivadas da fase e

da parte imaginária de $L_{\xi^*}(j\omega)$ possuem sinais opostos no limite $\omega \rightarrow 0^+$, conclui-se que a

fronteira de estabilidade é determinada pela equação (9.10) quando $D_{\xi^*}(j\omega)$ é tal que

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \frac{d}{d\omega} \angle D_{\xi}(j\omega) \text{ é mínimo.}$$

Resultado análogo pode ser obtido para o caso de incertezas paramétricas usando a expressão exata do lugar de Tsytkin. Para ω pequeno, vale

$$\angle\Lambda(\omega) = \pi + \omega \left(\frac{d}{ds} \left[\frac{P(s)}{Q(s)} \right]_{s=0} \right) / \frac{P(0)}{Q(0)} - \frac{\tau + \tau'}{2} \quad (9.12)$$

Assim, a fronteira de estabilidade encontra-se em

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \frac{d}{d\omega} \angle\Lambda(\omega) = \frac{d}{ds} \left[\frac{P(s)}{Q(s)} \right]_{s=0} / \frac{P(0)}{Q(0)} - \frac{\tau + \tau'}{2} = 0 \quad (9.13)$$

Substituindo os resíduos,

$$\left(\frac{z}{p} (1 - \alpha) - \frac{p - z}{p^2} \right) / \frac{z}{p} - \tau - \frac{t \operatorname{lig} d}{2} = 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{p} - \frac{t \operatorname{lig} d}{2} - (\alpha + \tau) = 0 \quad (9.14)$$

Note-se que $(\alpha + \tau) \in [9.76, 38.1]$ [ms], que está contido no intervalo $[8.7, 53]$ [ms], referente à incerteza não-estruturada.

9.4 Resultados numéricos da análise de robustez

Para o trabalho numérico o espaço $z \times p = [-9.9, -0.1] \times [-12, -0.05]$ foi dividido numa grade com resolução $\Delta z \times \Delta p = 0.2 \times 0.05$. Calculado $\Lambda_{\xi^*}(j\omega_{\max})$ sobre essa grade, a fronteira de bifurcação é constituída pelos pontos em cada linha (ou coluna) dessa grade que minimizam o módulo de $\operatorname{Im}\{\Lambda_{\xi^*}(j\omega_{\max})\}$. A escolha do número N de harmônicas a ser utilizado no cálculo do lugar de Tsytkin foi realizada empiricamente pela observação de como a fronteira de bifurcação obtida convergia à medida que N é aumentado. Os resultados exibidos na figura 9.4 justificaram a escolha de $N = 35$ e também ilustram como o uso da fronteira prevista pelo método da função descritiva não leva ao desempenho robusto. A figura 9.4 mostra os resultados obtidos pela formulação não-estruturada das incertezas.

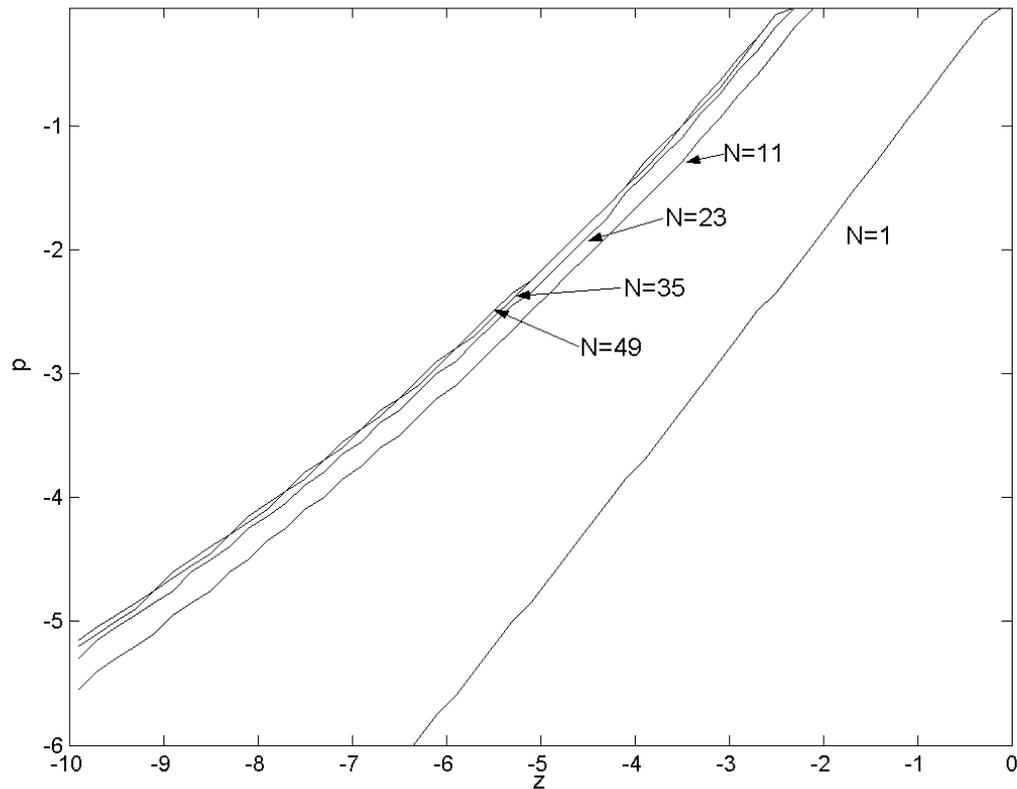


Figura 9.4 – Convergência da fronteira de bifurcação em função do termo de truncamento N . z e p dados em $[s^{-1}]$

A figura 9.5 exhibe as regiões em que a frequência do ciclo-limite simples está delimitada de modo robusto. A região apropriada para o controle é aquela em que $0 < \omega_0 < \omega_{\max}$. Em especial, a amplitude será minimizada nas vizinhanças da fronteira de bifurcação para a região $\omega_0 \geq \omega_{\max}$. A fronteira de estabilidade foi traçada para $\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \frac{d}{d\omega} \angle D_{\xi^*}(j\omega) = -53$ [ms]. A região em que é garantidamente requisitada uma frequência superior a ω_{\max} foi obtida calculando-se o Λ_{ξ} mais favorável. Em comparação com as outras, é notavelmente extensa a região em que pode ocorrer a bifurcação ($\omega_0 \geq \omega_{\max}$), o que indica quão significativo é o efeito das incertezas de modelagem.

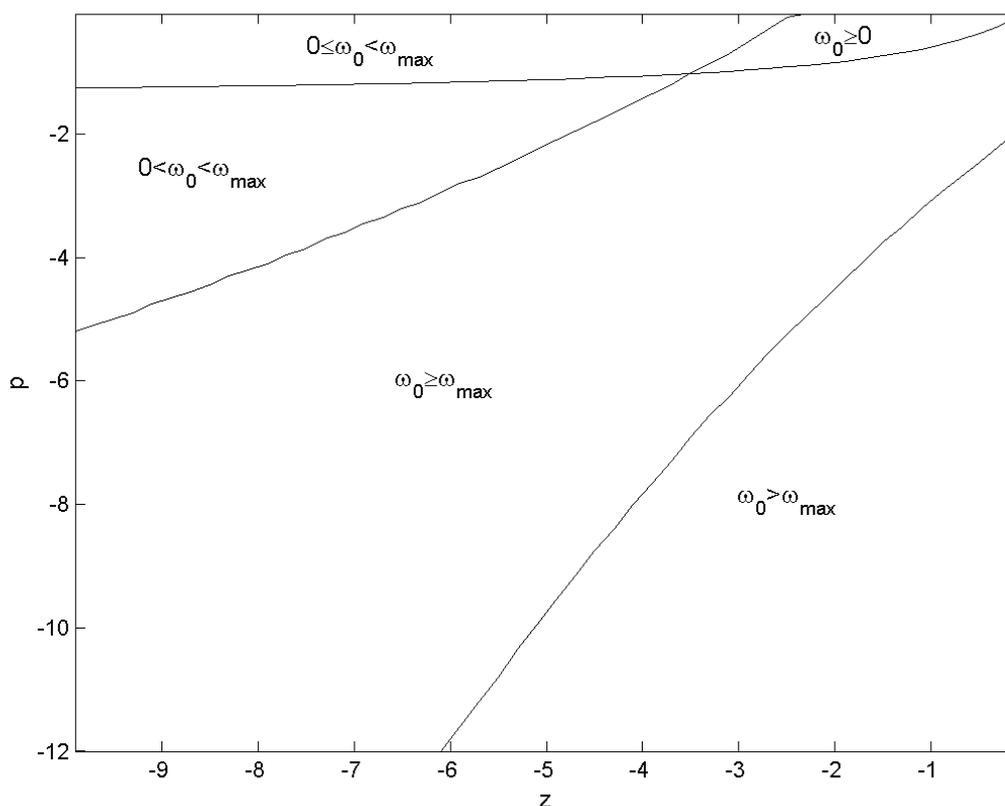


Figura 9.5 – Regiões de comportamento robusto do ciclo-limite. z e p dados em $[s^{-1}]$

9.5 Avaliação do desempenho robusto

A grande área da região $\omega_0 \geq \omega_{\max}$ sugere ainda que um projeto robusto estará sujeito a grandes intervalos de variação da frequência de oscilação e, por conseguinte, da amplitude. A figura 9.6 mostra como varia a menor frequência de oscilação possível sobre a fronteira de bifurcação. Para obter essa curva, realizou-se a busca sobre a grade de parâmetros α e τ da menor frequência de oscilação dada pela expressão exata do lugar de Tsytkin. A definição dessa grade é dada na seção seguinte. Ressalta-se que a curva obtida na figura 9.6 equivale à curva das frequências de oscilação para a planta mais lenta possível: $D_G^a(s)$. Contudo, deve haver cautela quanto a se concluir que sempre a máxima frequência corresponde à curva de acionamento mais rápida e a mínima, à mais lenta, o que tornaria a análise de robustez demasiado simples. Sabe-se que o mesmo resultado não ocorre quando se considera uma

formulação de incertezas não-estruturada ou quando se consideram outras estruturas para o controlador.

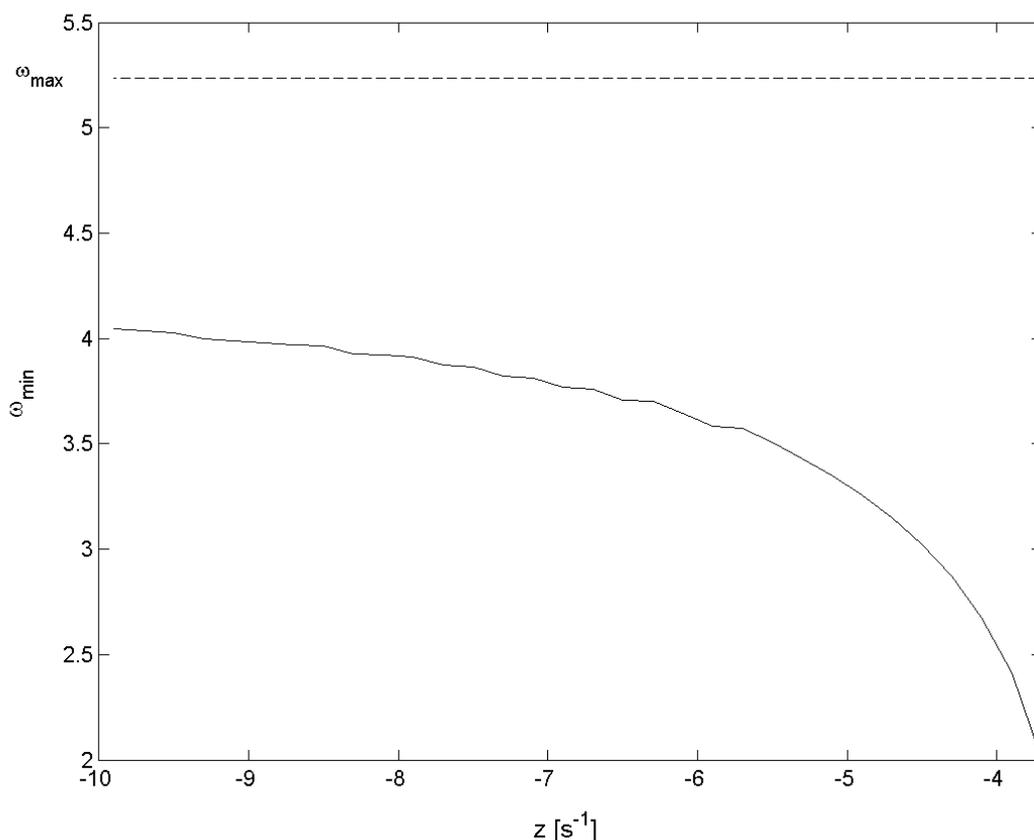


Figura 9.6 – Variação da mínima frequência de oscilação sobre a fronteira de bifurcação

A análise da figura 9.6 mostra que, conforme era esperado, quanto mais próximo do cruzamento com a fronteira de estabilidade ($z = -3.5$), maior é o intervalo de variação da frequência angular. Por outro lado, à medida que z se distancia daí, o intervalo de variação da frequência tende assintoticamente a $[0.8\omega_{\max}, \omega_{\max}]$. Nesse caso, tem-se a amplitude variando de 0.3° a 0.9° . No caso de $z = -3.7$, a amplitude de rolamento pode chegar até 6.5° . Quanto à taxa de variação de amplitude, para valores de z altos em módulo, esta pode variar entre 1.2 [$^\circ/s$] e 2.7 [$^\circ/s$]. Tudo isso mostra que é possível atender de modo robusto a requisitos de desempenho mais rigorosos que os do projeto original.

Ressalta-se que, caso não se considerasse um domínio limitado para os parâmetros de controle, o ótimo corresponderia a $z = -\infty$ e $p = -30$. Nesse caso, talvez se faça necessário ao projetista estabelecer um compromisso entre mínimo intervalo de amplitude e banda de passagem do ruído de medida.

9.6 Resultados da análise paramétrica de robustez

A análise paramétrica das condições de robustez fez-se sobre o domínio de α e τ dado no capítulo 8 dividido numa grade com $\Delta\alpha = 0.8$ [ms] e $\Delta\tau = 1.1$ [ms]. Traçou-se na figura 9.7 a fronteira de robustez obtida pela caracterização paramétrica das incertezas de modelagem. No eixo p , essa curva está em média 0.3 [s^{-1}] abaixo da primeira; e, no eixo z , 0.6 [s^{-1}] à direita. A exemplo do que se fez na seção anterior, determinou-se que uma escolha ideal de p e z sobre essa fronteira menos conservadora, reduz o intervalo de possíveis ω_0 de $[0.8\omega_{\max}, \omega_{\max}]$ para $[0.84\omega_{\max}, \omega_{\max}]$, o que implica uma diminuição na máxima amplitude possível de 11% (de 0.9° para 0.8°).

Na figura, pouco acima dessa curva observa-se a fronteira de bifurcação para o movimento quase-periódico obtida quando se considera $D(j\omega) = D_F(j\omega)$. Essa fronteira mostrou-se praticamente coincidente com a fronteira obtida por uma outra análise paramétrica considerando uma estrutura $D(j\omega) = (\alpha s + 1)^{-1}(\beta s + 1)^{-1}$ com $\alpha \times \beta$ em $[4, 13.2] \times [4, 13.2]$ [ms]. Para manter a legibilidade, optou-se por não traçar tal curva na figura 9.7. A notável proximidade dessas três curvas se deve ao fato de que, para ambas as análises paramétricas, o pior caso em todo o espaço $z \times p$ correspondeu sempre à resposta dinâmica mais rápida. Como, em cada estrutura paramétrica, a resposta mais rápida foi escolhida de modo a se ajustar a $D_F(s)$, fica explicada a proximidade das curvas. O fato de a resposta dinâmica mais rápida corresponder ao pior caso tornou a análise paramétrica mais rápida que a análise não-paramétrica.

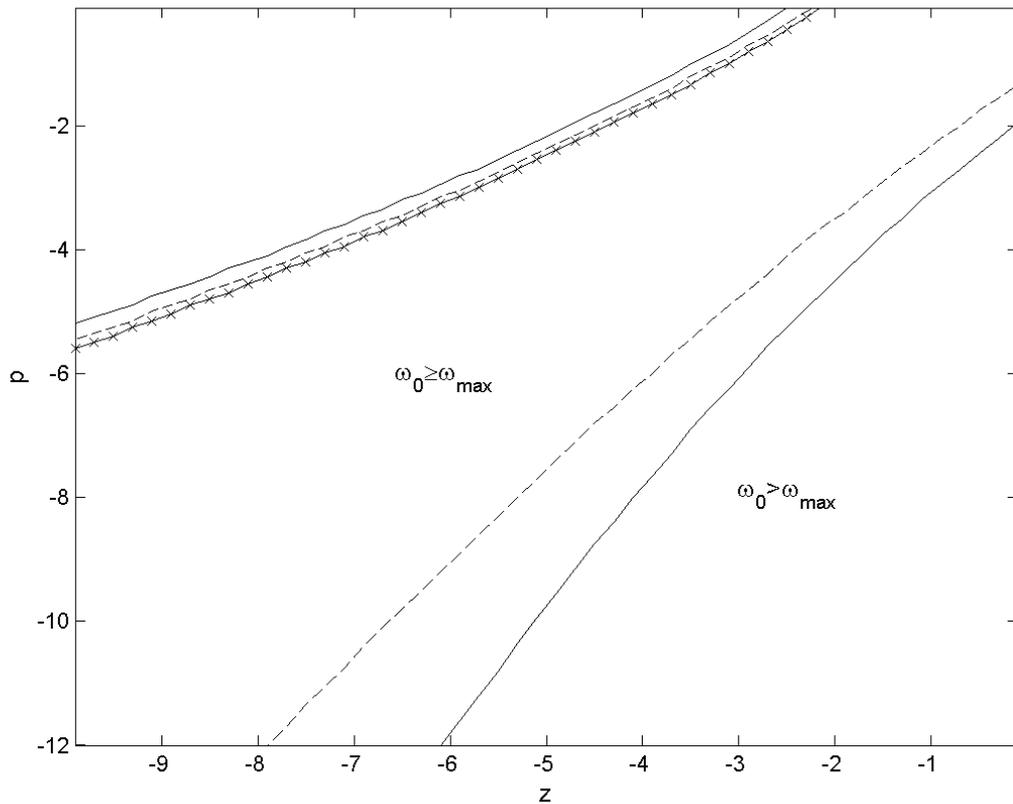


Figura 9.7 – Comparação de fronteiras considerando incertezas não-estruturadas (linhas contínuas), incertezas estruturadas (linha com cruz) e as funções $D_F(s)$ e $D_G(s)$ (linhas tracejadas). z e p dados em $[s^{-1}]$.

Já para o caso mais favorável, quando se considera $D(j\omega) = D_G(j\omega)$, verifica-se um conservadorismo bem maior, que pode chegar até 2 [rad/s] em cada eixo.

Por fim, é marcante o fato de que cada curva na figura 9.7 é muito bem aproximada por hipérboles na forma $p = -\sqrt{q_1 z^2 + q_0}$. Contudo, não parece haver nenhuma relação algébrica simples que possa ser deduzida a partir da expressão exata do lugar de Tsytkin.

9.7 Análise de robustez pelo método de Hamel

Nesta seção é apresentada uma alternativa de análise de robustez que pode tornar-se bastante interessante do ponto de vista de projeto, uma vez que diminui de um o número de parâmetros no espaço de busca. Ela consiste em substituir o lugar de Tsytkin pelo lugar de

Hamel de modo que a alocação do zero pode ser feita de maneira mais intuitiva. Definindo

$\varepsilon = u(T/2)$ e $\dot{\varepsilon} = \frac{du}{dt}(T/2)$, o lugar de Hamel é dado pela curva no plano de fase:

$$\mathcal{H} = (\dot{\varepsilon}, \varepsilon) = (\omega \operatorname{Re}\{\Lambda\}, \operatorname{Im}\{\Lambda\}) \quad (9.15)$$

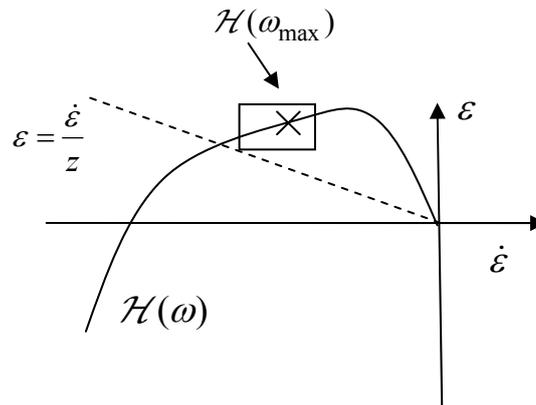


Figura 9.8 – Projeto robusto usando o lugar de Hamel (linha contínua) e modificando a reta de chaveamento (linha tracejada)

Dessa forma, a frequência de oscilação também é determinada pelo cruzamento do eixo das abscissas. Por outro lado, o acréscimo do termo $(s-z)$ à função de transferência de malha aberta pode ser interpretado como uma mudança da condição de chaveamento para $-z\varepsilon + \dot{\varepsilon} = 0$. Assim, a frequência de oscilação pode ser determinada pelo cruzamento do lugar de Hamel do sistema sem o zero e da reta $\varepsilon = \dot{\varepsilon}/z$. Isso sugere que a síntese de um controlador robusto pode ser feita ajustando-se retas que passam pela origem aos conjuntos de possíveis pontos no lugar de Hamel. A figura 9.8 ilustra como a análise de robustez a que se propôs este texto pode ser realizada: a frequência de oscilação pode ser aumentada diminuindo-se z em módulo até que a reta de chaveamento toque o conjunto de possíveis $\mathcal{H}(\omega_{\max})$.

Se esse conjunto possui o formato de retângulo e $\mathcal{H}(\omega_{\max})$ está no segundo quadrante, conclui-se que

$$z = \frac{\min \varepsilon(\omega_{\max})}{\min \dot{\varepsilon}(\omega_{\max})} = \omega_{\max} \frac{\min(\operatorname{Re}\{\Lambda_{\xi}(\omega_{\max})\})}{\min(\operatorname{Im}\{\Lambda_{\xi}(\omega_{\max})\})} \quad (9.16)$$

Procedendo assim foi possível calcular uma nova fronteira de bifurcação usando incertezas não-estruturadas. Em comparação com a fronteira calculada na seção 9.4, a nova fronteira mostra-se levemente mais conservadora, conforme se observa na figura 9.9.

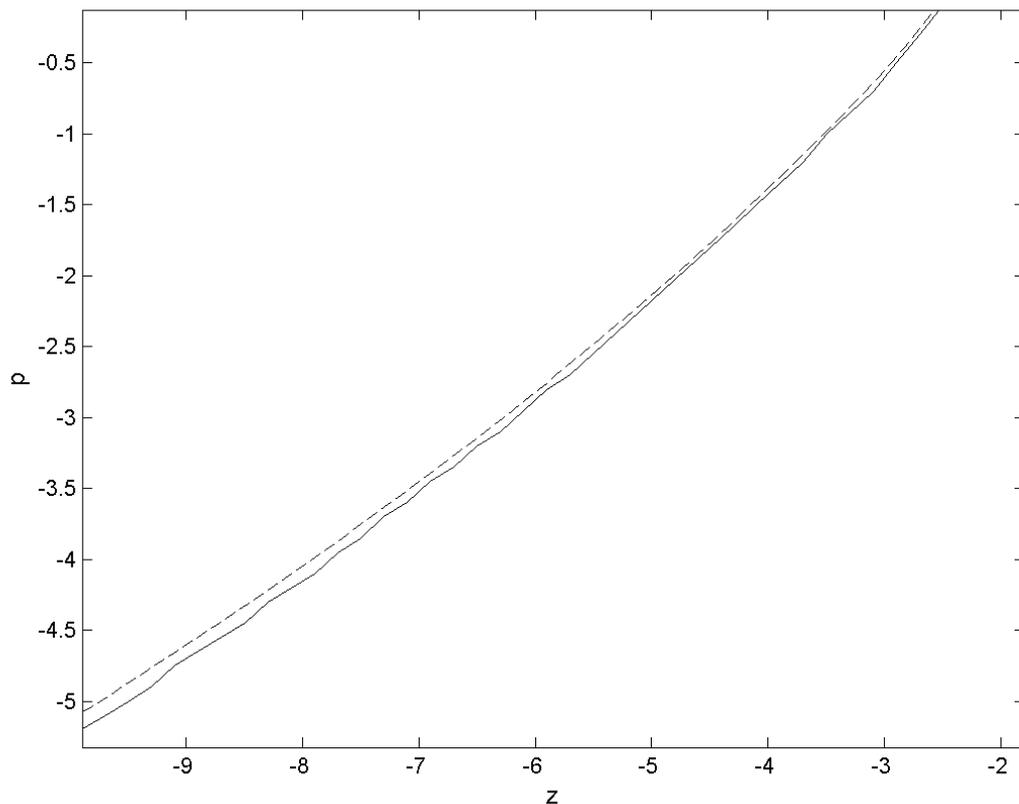


Figura 9.9 – Comparação das fronteiras de bifurcação calculadas por meio do lugar de Tsytkin (linha contínua) e do lugar de Hamel (linha tracejada). z e p dados em $[s^{-1}]$

10 Validação da análise de robustez

Como alertado nos capítulos anteriores, existe uma série de hipóteses que deveriam ser verificadas para que a análise de robustez possa ser considerada correta. Sendo a verificação analítica dessas hipóteses extremamente trabalhosa, optou-se por validar a análise usando simulações numéricas.

A primeira dessas hipóteses consistiu em considerar o ciclo-limite unimodal como comportamento global do sistema desde que não sejam violadas as restrições de acionamento dos atuadores. Sobretudo intuitivamente, essa hipótese é muito razoável. Uma análise dessa hipótese poderia ser feita definindo-se funções de Lyapunov nas superfícies de chaveamento à maneira de Gonçalves et al. [27].

Uma segunda hipótese foi a de que a condição de estabilidade de ciclos-limite usada é suficiente e necessária. Uma possível prova da suficiência estaria em estudar se $L_S^*(j\omega)$ realmente cruza o eixo real uma única vez. A terceira hipótese considerou a inexistência de chaveamentos adicionais entre os tempos de chaveamento naturais do ciclo-limite. Uma última hipótese assumiu que há apenas uma frequência de oscilação estável. Verificar essas hipóteses requereria um esforço computacional proibitivo.

A primeira estratégia de validação considerou a dimensão de Lyapunov, dado que os expoentes de Lyapunov são o indicador ideal do comportamento qualitativo do sistema e de suas bifurcações. Para cada ponto (z, p) , o procedimento de validação consistiu em escolher aleatoriamente uma condição inicial e simular o sistema, calculando seu espectro e sua dimensão de Lyapunov. Essa simulação foi realizada para uma grade no domínio de possíveis valores de α^{-1} e τ . Sempre que um desses valores indica um atrator com dimensão superior a 1.05, o comportamento dinâmico é classificado de natureza não-periódica e a busca é encerrada para aquele ponto (z, p) . Para acelerar o cálculo, α^{-1} e τ são dispostos de forma

que as dinâmicas mais rápidas são analisadas primeiramente. Desse modo, aumenta-se a probabilidade de se encontrar altas dimensões no início da busca. Ainda assim, o cálculo do espectro de Lyapunov é lento a ponto de não ser possível calcular em poucos dias todo o espaço de parâmetros considerados. Por isso, a análise pôde ser feita apenas na vizinhança da fronteira de bifurcação mostrada na figura 10.1. Adotou-se $\Delta\alpha^{-1} = 32$ [s⁻¹] e $\Delta\tau = 2.2$ [ms].

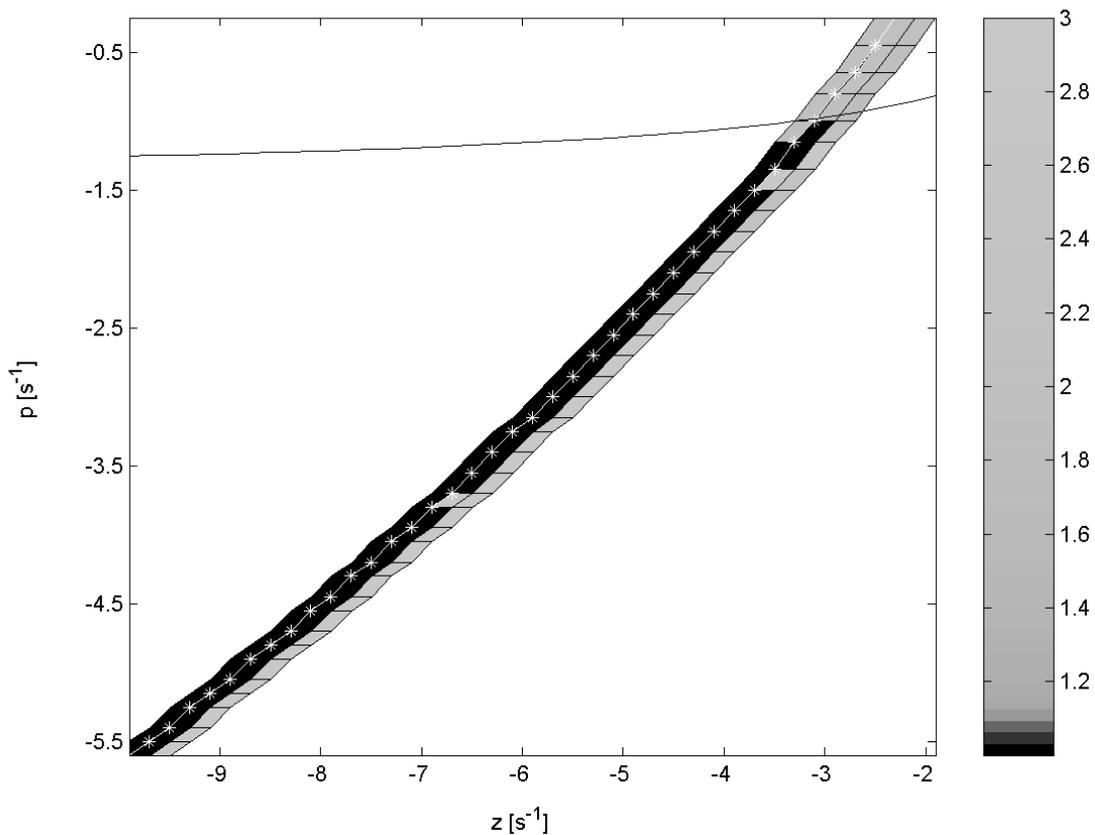


Figura 10.1 – Dimensão de Lyapunov (escala de cinza) na vizinhança da fronteira de bifurcação (linha com asteriscos). A fronteira de estabilidade é traçada em linha contínua.

Na figura 10.1 o resultado das simulações de validação são comparados com a fronteira de bifurcação obtida pela análise paramétrica de robustez. Os resultados confirmam que a fronteira obtida é de fato uma fronteira de bifurcação, pois sobre ela ocorre um súbito salto de dimensão dos atratores. Esse salto apenas não ocorre fora da região de estabilidade, como era de esperar.

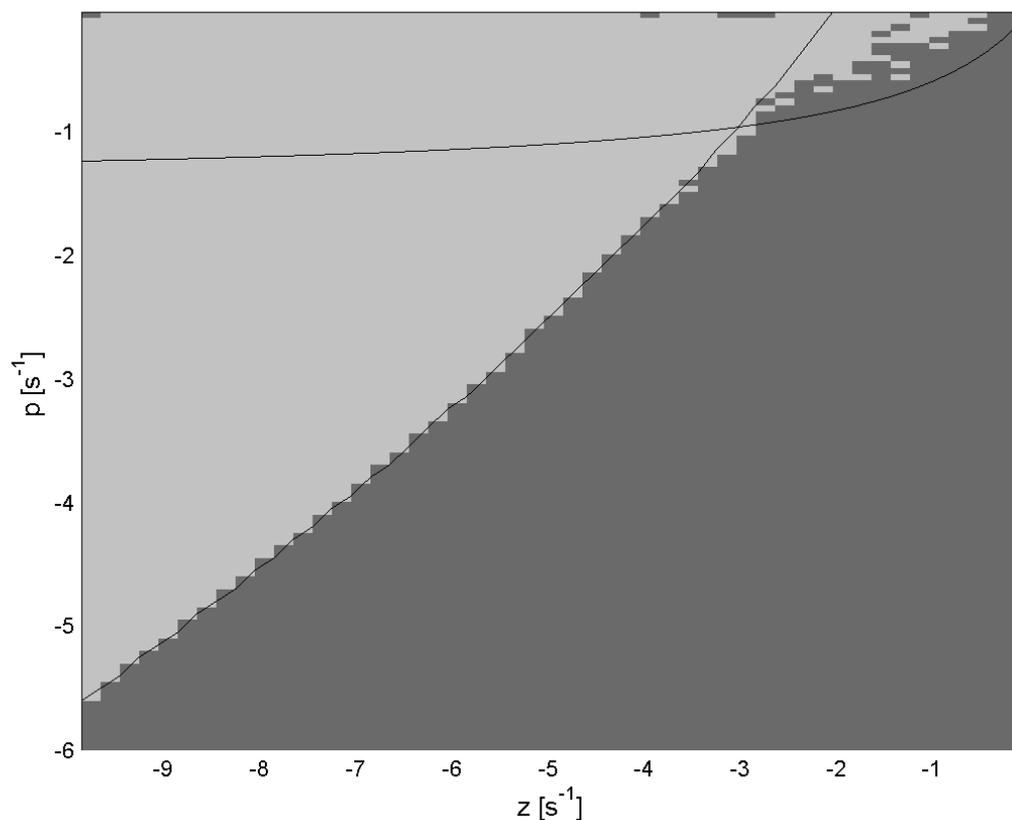


Figura 10.2 – Fronteiras de bifurcação (linhas contínuas) e regiões em que $T > T_{\max}$ (clara) e $T < T_{\max}$ (escura)

Por não se ter analisado todo o espaço de parâmetros de controle, não há como garantir que não haja outras fronteiras de bifurcação entre a fronteira de estabilidade e a fronteira de bifurcação primitiva. Assim, faz-se necessário analisar o comportamento do sistema nessa região. Para isso, uma alternativa mais rápida que calcular o espectro de Lyapunov é calcular o intervalo de tempo médio entre os instantes de entrada no modo $m = 1$. Sendo o período encontrado pequeno mas superior a T_{\max} , pode-se concluir que não há movimento quase-periódico e pode-se ter certeza sobre a existência do ciclo-limite simples. De fato, se o comportamento do sistema fosse instável, o período médio seria exageradamente grande. Se o comportamento fosse o de ciclos-limite complexos o intervalo médio entre os instantes de entrada $m = 1$ seria inferior a T_{\max} , uma vez que em cada período haveria pelo menos duas entradas em $m = 1$ num tempo menor que $tligd$. As simulações foram realizadas com

parâmetros similares aos da anterior, adotando-se um horizonte de simulação de 75 [s] e considerando-se que períodos acima de 1.20005 eram superiores a T_{\max} . Os resultados são apresentados na figura 10.2 e mostram que a região entre as duas fronteiras é realmente uma região de movimento periódico com $T > T_{\max}$.

11 Conclusão

O presente trabalho ocupou-se do estudo da robustez do comportamento de um sistema afim por partes com tempos de transição minimamente espaçados que é encontrado em veículos lançadores e satélites. Usando métodos exatos para ciclos-limite, mostrou-se como é possível obter desempenho ótimo na presença de incertezas de modelagem, tendo sido desenvolvidas e apontadas as principais ferramentas de análise e síntese para isso. O procedimento de obtenção do controlador ótimo consistiu no uso do método de Tsypkin para estudar, sobre o espaço de parâmetros de controle, a robustez da condição de existência de ciclo-limite que as restrições de chaveamento impõem. Isso permitiu identificar nesse espaço uma fronteira de robustez sobre a qual se procurou maximizar a mínima frequência de oscilação possível. Portanto, o referido desempenho ótimo tem por características assegurar que o ciclo-limite não esteja sujeito a bifurcações e que sua frequência seja máxima no pior caso. Assim, a amplitude de oscilação e o consumo de combustível são minimizados dentro da estrutura de controle escolhida.

Entre as possíveis implicações práticas desse resultado para veículos lançadores podem-se contar: redução da potência dos atuadores, diminuição do combustível transportado e aumento da carga paga. Dois benefícios imediatos seriam uma maior precisão na atitude desejada e a redução na taxa de variação da inércia do veículo. Também outros sistemas de controle a relé que alternem entre subsistemas instáveis podem aumentar sua eficiência pela aplicação da técnica proposta.

Ademais, é introduzida uma metodologia de análise/síntese de controladores robustos para ciclos-limite usando um método exato. A literatura até então investia seus esforços na aproximação da função descritiva, a qual não se mostrou tão apropriada para uma análise de robustez no presente caso. As duas principais vantagens do uso de métodos exatos são, como é evidente, a exatidão da análise e, com relação a problemas em que é possível contabilizar o

impacto da aproximação de primeira harmônica na análise de robustez, um menor conservadorismo. Uma das desvantagens dos métodos exatos com relação ao da função descritiva é a escassez de procedimentos de síntese de controladores. Um provável problema dos métodos exatos deverá surgir na análise de sistemas de maior ordem, para os quais será possível um maior número de ciclos-limite estáveis. Ambas essas deficiências podem ser tratadas usando-se a função descritiva em conjunto com os métodos exatos. Por fim, lembre-se que um proceder semelhante ao apresentado neste texto também poderá ser usado com o objetivo de limitar inferior e superiormente intervalos de frequência e amplitude de ciclos-limite.

A natureza de comportamentos dinâmicos complexos pôde ser compreendida à luz de técnicas como o espectro de Lyapunov, dimensões fractais calculadas usando transformada de *wavelets* e mapas de Poincaré. Mais que um ferramental para validação da análise de robustez, as ferramentas da teoria de dinâmica não-linear empregadas serão valiosas em futuros projetos de controladores robustos, uma vez que permitem compreender as dinâmicas não-periódicas que deverão ser toleradas ou evitadas nos projetos mais arrojados desses controladores.

Dois são os caminhos para tais projetos mais arrojados. O primeiro deles é um controle robusto que combina ciclo-limite e movimento quase-periódico. Uma vez que a amplitude do movimento quase-periódico é conhecida, esse movimento poderá ser considerado nos projetos de controle. Para tal, basta empreender uma análise paramétrica da expressão obtida para sua amplitude. O segundo caminho consiste em usar controladores não-lineares. Um exemplo interessante de controle não-linear reside no emprego de algoritmos de otimização dos instantes de chaveamento. Alguns dos algoritmos disponíveis na literatura podem ser adaptados para o caso da restrição de mínimo espaçamento entre esses instantes [66].

Para trabalhos futuros, outros dois aspectos não contemplados neste texto são dignos de atenção: o efeito de perturbações exógenas ao modelo e a resposta transitória do sistema de controle. Algumas modificações simples no controlador também devem ser investigadas: o aumento da sua ordem; e a variação do tempo de repouso dos atuadores, o que ofereceria maior liberdade no ajuste do consumo de combustível.

Referências

- [1] MENDEL, J. On-Off Limit-Cycle Controllers for Reaction-Jet-Controlled Systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. AC-15, n. 3, p. 285, 1970.
- [2] WON, C. Comparative Study of Various Control Methods for Attitude Control of a LEO Satellite. **Aerospace Science and Technology**, v. 3, n. 5, p. 323-333, 1999.
- [3] AVANZINI, G.; MATTEIS, G. De. Bifurcation Analysis of Attitude Dynamics in Rigid Spacecraft with Switching Control Logics. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 24, n. 5, p. 953-959, set/out. 2001.
- [4] LEITE FILHO, W. C. Projeto de controlador on-off com restrições de acionamento. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, 12., Uberlândia, 1998. **Anais...** Campinas: SBA, 1998, v. 4, p. 1411-1414.
- [5] _____. Strategy for Upper-Stage Pitch-Over Maneuver Control. **Aerospace Science and Technology**, v. 7, n. 3, p. 223-230, 2003.
- [6] ANTROPOV, N. et al. Pulsed plasma thrusters for spacecraft attitude and orbit control system. In: INTERNATIONAL PROPULSION CONFERENCE, 1999, Kitakyushu. **Proceedings...** Kitakyushu: [s.n.], 1999, p. 1129-1135.
- [7] OLIVEIRA, N.; KIENITZ, K. Attitude Controller Design for a System Using Actuators with Switching-Time Restrictions and Delays. In: AIAA GUIDANCE, NAVIGATION, AND CONTROL CONFERENCE, 2000, Denver. **Proceedings...** Paper AIAA-2000-3967.
- [8] OLIVEIRA, N. et. al. An algebraic approach to the design of robust limit cycle controllers. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 2003, Denver. **Proceedings...** Denver: [s.n.], p. 2419-2423.
- [9] MESQUITA, A.; KIENITZ, K. Persistent motion and chaos in attitude control with switching actuators. In: IFAC WORLD CONGRESS, 16., Praga, 2005. **Proceedings...** Conference CD-ROM, paper Th-A03-TP/15, 2005.
- [10] MESQUITA, A. **Análise paramétrica de um sistema de controle de atitude com atuadores sujeitos a restrições de chaveamento**. São José dos Campos: Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2004. Trabalho de Graduação. Disponível em www.bibl.ita.br.
- [11] TIERNO, J. Describing function analysis in the presence of uncertainty. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 20, n. 5, p. 956-961, 1997.
- [12] FADALI, M.; CHACHAVALVOONG, N. Describing function analysis of uncertain nonlinear systems using the Kharitonov approach. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 1995, Seattle. **Proceedings...** Seattle: [s.n.], 1995, p. 2908-2912.
- [13] HUANG, Y. et al. Robust limit cycles suppression for control systems with parametric uncertainty and nonlinearity. **Nonlinear Dynamics**, v. 35, p. 397-407, 2004.

- [14] NATARAJ, P.; BARVE, J. Reliable and accurate algorithm to compute the limit cycle locus for uncertain nonlinear systems. **IEE Proceedings - Control Theory and Applications**, v. 150, n. 5, p. 457-466, 2003.
- [15] TAN, N.; ATHERTON, D. New approach to assessing the effects of parametric variations in feedback loops. **IEE Proceedings - Control Theory and Applications**, v. 150, n. 2, p. 101-111, 2003.
- [16] KATEBI, M.; ZHANG, Y. H-inf control analysis and design for nonlinear systems. **International Journal of Control**, v. 61, n. 2, p. 459-474, 1995.
- [17] LEEPHAKPREEDA, T. H-inf stability robustness of fuzzy control systems. **Automatica**, v. 35, n. 8, pp. 1467-1470, 1999.
- [18] LEINE, R. et al. Bifurcations in Nonlinear Discontinuous Systems. *Nonlinear Dynamics*, v. 23, n. 2, p.105-164, 2000.
- [19] BERNARDO, D. Grazing and border-collision in piecewise-smooth systems: a unified framework. **Physical Review Letters**, v. 86, n. 12, p. 2553-2556, 2001.
- [20] COLLINS, P. (Preprint) Hybrid trajectory spaces. Disponível em: <http://homepages.cwi.nl/~collins/>. Acesso: 23/03/2006.
- [21] MESQUITA, A. et al. (submetido) Bifurcation analysis of attitude control systems with switching-constrained actuators. **Nonlinear Dynamics**.
- [22] RUIZ, L. **Anteprojeto da malha de controle de rolamento do 2º e 3º estágios do VLS utilizando o SCRL**. São José dos Campos: Instituto de Aeronáutica e Espaço, 1993. Relatório RT036ASE-C/93.
- [23] BRANICKY, M. et al. A unified framework for hybrid control: model and optimal control theory. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 43, n. 1, p. 31-45, 1998.
- [24] ANTSAKLIS, P. A Brief Introduction to the Theory and Applications of Hybrid Systems. **Proceedings of the IEEE, Special Issue on Hybrid Systems: Theory and Applications**, v. 88, n. 7, p.879--886, 2000.
- [25] LIBERZON, D. **Switching in systems and control**. Boston: Birkhauser MA, 2003.
- [26] ASTROM, K. Oscillations in systems with relay feedback. **The IMA Volumes in Mathematics and its Applications: Adaptive Control, Filtering, and Signal Processing**, v. 74, p.1-25, 1995.
- [27] GONÇALVES, J. et al. Global analysis of piecewise linear systems using impact maps and quadratic surface Lyapunov functions. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 48, n. 12, p. 2089-2106, 2003.
- [28] CYPKIN, Y. Z. **Théorie des Asservissements par Plus-ou-moins**. Paris: Dunod, 1962.
- [29] ECKMANN, J. -P.; RUELLE, D. Ergodic theory of chaos and strange attractors. **Reviews of Modern Physics**, v. 57, n. 3, p. 617-656, 1985.

- [30] STEFANSKI, A.; KAPITANIAK, T. Using chaos synchronization to estimate the largest Lyapunov exponent of nonsmooth systems. **Discrete Dynamics in Nature and Society**, v. 4, p. 207-215, 2000.
- [31] HAKEN, H. At least one Lyapunov exponent vanishes if the trajectory of an attractor does not contain a fixed point. **Physics Letters**, v. 94, p. 71, 1983.
- [32] FARMER, J. et al. The dimension of Chaotic Attractors. **Physica D**, v. 7, p. 153-180, 1983.
- [33] FREDERICKSON, P. et al. The liapunov dimension of strange attractors. **Journal of Differential Equations**, v. 49, p. 185-207, 1983.
- [34] LEDRAPPIER, F. Some relations between dimension and lyapunov exponents. **Communications in Mathematical Physics**. v. 81, p. 229-238, 1981.
- [35] GREBOGI, C. et al. Strange attractors that are not chaotic. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 13, n. 1-2, p. 261-268, 1984.
- [36] MÜLLER, P. Calculation of Lyapunov exponents for dynamical systems with discontinuities. **Chaos, Solitons and Fractals**, v. 5, n.9, p. 1671-1681, 1995.
- [37] WILKINSON, J. H. **The algebraic eigenvalue problem**. Oxford: Clarendon, 1965.
- [38] JOHNSON, R. A. et al. **Ergodic properties of linear dynamic systems**. SIAM Journal on Mathematical Analysis, v. 18, p. 1-33, 1987.
- [39] SOUZA, S.; CALDAS, I. Calculation of Lyapunov exponents in systems with impacts. **Chaos, Solitons and Fractals**, v. 19, p. 569-579, 2004.
- [40] ORRELL, D.; SMITH, L. Visualising bifurcations in high dimensional systems: The spectral bifurcation diagram. **International Journal of Bifurcations and Chaos**, v. 13, n. 10, 2003.
- [41] NUSSE, H. et al. Border-collision bifurcations: an explanation for observed bifurcation phenomena. **Physical Review E**, v. 49, n. 2, p. 1073-1076, 1994.
- [42] BANERJEE, S. et al. Bifurcation in two-dimensional piecewise smooth maps — Theory and applications in switching circuits. **IEEE Transactions on Circuits and Systems I**, v. 47, n. 5, p. 633–643, 2000.
- [43] ZHUSUBALIYEV, Zh. et al. Border-collision bifurcations on a two-dimensional torus. **Chaos, Solitons and Fractals**, v. 13, n. 9, p. 1889–1915, 2002.
- [44] HALSEY, T. et al. Fractal measures and their singularities: the characterization of strange sets. **Physical Review A**, v. 33, p. 1141-1151, 1986.
- [45] MALAMUDE, B.; TURCOTTE, D. Self-affine time series: measures of weak and strong persistence. **Journal of Statistical Planning and Inference**, v. 80, p. 173-196, 1999.

- [46] LIU, H. et al. The largest Lyapunov exponent of chaotic dynamical systems in scale space and its applications. **Chaos**, v. 13, n. 3, p. 839-844, 2003.
- [47] MUZY, J. et al. Wavelets and multifractal formalism for singular signals: application to turbulence data. **Physical Review Letters**, v. 67, p. 3515-3518, 1991.
- [48] _____. The multifractal formalism revisited with wavelets. **International Journal of Bifurcations and Chaos**, v. 4, p. 245- 303, 1993.
- [49] ARNEODO, A. et al. Wavelet based fractal analysis of DNA sequences. **Physica D**, v. 96, p. 291-320, 1996.
- [50] DEGAUDENZI, M.; ARIZMENDI, C. Wavelet-based fractal analysis of electrical power demand. **Fractals**, v. 8, p. 239-245, 2000.
- [51] SHIMIZU, Y. et al. Wavelet-based multifractal analysis of fMRI time series. **NeuroImage**, v. 22, p. 1195-1202, 2004.
- [52] MESQUITA, A. et al. (submetido) Análise multifractal de movimentos persistentes num sistema de controle de atitude. **Tendências em Matemática Aplicada e Computacional**.
- [53] ARNEODO, A. et al. The thermodynamics of fractals revisited with wavelets. **Physica A**, 213, p. 232-275, 1995.
- [54] GRASSBERGER, P.; PROCACCIA, I. Dimensions and entropies of strange attractors from a fluctuating dynamics approach. **Physica D**, v. 13, n. 1, p. 34-54, 1984.
- [55] GOUPILLAUD, P. et al. Cycle-octave and related transforms in seismic signal analysis. **Geoexploration**, v. 23, p. 85-102, 1984.
- [56] GROSSMAN, A.; MORLET, J. Decompositions of Hardy Functions into Square-Integrable Wavelets of Constant Shape. **SIAM Journal on Mathematical Analysis**, v. 15, p. 723-736, 1984.
- [57] DAUBECHIES, I. **Ten Lectures on Wavelets**. Philadelphia: SIAM, 1992.
- [58] MEYER, Y.; ROQUES, S. (eds). **Progress in Wavelet Analysis and Applications**. Gif sur Yvette: Frontières, 1993.
- [59] MALLAT, S.; HWANG, W. Singularity detection and processing with wavelets. **IEEE Transactions on Information Theory**, v. 38, p. 617-643, 1992.
- [60] MUZY, J. et al. Multifractal formalism for fractal signals. The structure function method versus the wavelet-transform modulus maxima method. **Physical Review E**, v. 47, p. 875-884, 1993.
- [61] _____. Multifractal Formalism for Singular Signals based on Wavelet Analysis. In: MEYER, Y. **Progress in wavelet analysis and applications**. Gif sur Yvette: Frontières, 1993. p. 323-336.

- [62] MOSER, J. On the theory of quasi-periodic motions. **SIAM Review**, v. 8, n. 2, p.145-72, 1966.
- [63] GILLE, J. –Ch. et al. Méthodes D'Étude des Systèmes Asservis Non Linéaires. Paris: Dunod, 1967.
- [64] GELB, A.; VELDE, W. **Multiple-Input Describing Functions and Nonlinear System Design**. New York: McGraw-Hill, 1968.
- [65] LURE, A.I. **Some Non-linear Problems in the Theory of Automatic Control**. Londres: H. M. Stationery Office, 1957.
- [66] EGERSTEDT, M. et al. Transition-Time Optimization for Switched Systems. **IEEE Transactions on Automatic Control** , v. 51, n. 1, p. 110-115, 2006.

FOLHA DE REGISTRO DO DOCUMENTO

1. CLASSIFICAÇÃO/TIPO TM	2. DATA 15 de março de 2006	3. DOCUMENTO N° CTA/ITA-IEE/TM-004/2006	4. N° DE PÁGINAS 130
5. TÍTULO E SUBTÍTULO: Caracterização e análise de robustez do comportamento dinâmico de um sistema de controle de atitude com atuadores sujeitos a restrições de chaveamento e controlador de primeira ordem			
6. AUTOR(ES): Alexandre Rodrigues Mesquita			
7. INSTITUIÇÃO(ÕES)/ÓRGÃO(S) INTERNO(S)/DIVISÃO(ÕES): Instituto Tecnológico de Aeronáutica.Divisão de Engenharia Eletrônica - ITA/IEE			
8. PALAVRAS-CHAVE SUGERIDAS PELO AUTOR: Controle de atitude; Ciclo-limite; Restrições de chaveamento; Robustez; Caracterização de incertezas; Método de Tsyppkin; Dinâmica não-linear; Movimento quase-periódico			
9. PALAVRAS-CHAVE RESULTANTES DE INDEXAÇÃO: Controle de atitude; Sistemas de chaveamento; Restrições; Robustez; Atuadores; Sistemas dinâmicos; Não-linearidade; Controle.			
10. APRESENTAÇÃO: ITA, São José dos Campos, 2006, 130 páginas			
11. RESUMO: O presente trabalho ocupou-se do estudo da robustez do comportamento de um sistema afim por partes com tempos de transição minimamente espaçados que é encontrado em veículos lançadores e satélites. Os atuadores usados no controle de atitude desses sistemas são do tipo liga-desliga e possuem restrições temporais de chaveamento. Ciclos-limite e movimentos persistentes não-periódicos podem ocorrer. Na presença de incertezas de modelagem, o sistema está sujeito a bifurcações capazes de afetar requisitos de desempenho tais como a amplitude de oscilação. A natureza de comportamentos dinâmicos complexos nesse sistema foi investigada usando-se diagramas de bifurcação em função dos parâmetros de controle. Adotaram-se técnicas como mapas de Poincaré, espectro de Lyapunov e dimensões fractais calculadas usando transformada de <i>wavelets</i> . Revelou-se uma rica coexistência de dinâmicas complexas, tais como ciclos-limite de período- <i>k</i> e caos. Um atrator similar ao quase-periódico é caracterizado. Possíveis erros de modelagem do sistema de atuação foram caracterizados usando tanto representação paramétrica quanto não-estruturada. O método de Tsyppkin foi utilizado para estudar a robustez da condição de existência de ciclo-limite determinada pelas restrições de chaveamento. Assim, regiões de comportamento robusto e uma fronteira de robustez no espaço de parâmetros de controle puderam ser identificadas. Essas regiões foram validadas por meio de simulação e comparadas com aquelas obtidas pelo método da função descritiva, evidenciando-se as vantagens do método exato no projeto de controladores robustos para o sistema estudado. Também foi proposto um método de síntese de controladores robustos usando o lugar de Hamel. Para a estrutura de controle proposta, amplitude de oscilação e consumo de combustível decrescem ambos com o aumento da frequência de oscilação. Portanto, a resolução de um problema do tipo maximin para a frequência de oscilação sobre a fronteira de robustez permitiu obter amplitude e consumo reduzidos.			
12. GRAU DE SIGILO: (X) OSTENSIVO () RESERVADO () CONFIDENCIAL () SECRETO			