

Laboratório de Modelagem, Análise e Controle de Sistemas Não-Lineares

Departamento de Engenharia Eletrônica

Universidade Federal de Minas Gerais

Av. Antônio Carlos 6627, 31270-901 Belo Horizonte, MG Brasil

Fone: +55 31 3409-3470



Projeto de Controladores Takagi-Sugeno baseados em Modelos de Referência

Víctor Costa da Silva Campos

Orientador: Prof. Dr. Leonardo Antônio Borges Tôrres

Co-Orientador: Prof. Dr. Reinaldo Martinez Palhares

Belo Horizonte, 9 de agosto de 2011

Laboratório de Modelagem, Análise e Controle de Sistemas Não-Lineares

Departamento de Engenharia Eletrônica

Universidade Federal de Minas Gerais

Av. Antônio Carlos 6627, 31270-901 Belo Horizonte, MG Brasil

Fone: +55 31 3409-3470



Projeto de Controladores Takagi-Sugeno baseados em Modelos de Referência

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica

Víctor Costa da Silva Campos

Orientador: Prof. Dr. Leonardo Antônio Borges Tôrres

Co-Orientador: Prof. Dr. Reinaldo Martinez Palhares

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

Belo Horizonte
9 de agosto de 2011

"Projeto de Controladores Takagi-Sugeno Baseados em Modelos de Referência"

Victor Costa da Silva Campos

Dissertação de Mestrado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Aprovada em 11 de julho de 2011.

Por:



Prof. Dr. Leonardo Antônio Borges Tôres
DELT (UFMG) - Orientador



Prof. Dr. Reinaldo Martinez Palhares
DELT (UFMG) - Co-Orientador



Prof. Dr. Eduardo Mazoni Andrade Marçal Mendes
DELT (UFMG)



Prof. Dr. Leonardo Amáral Mozelli
(UFSJ)

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela oportunidade. Ao Léo por ter me apresentado ao controle de aeronaves e motivado meus estudos. Ao Reinaldo pelas discussões e por ter me apresentado às LMIs e ao controle fuzzy. Ao prof. Paulo Iscold pela oportunidade de trabalhar no projeto de assistência à pilotagem. Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pela bolsa de mestrado de tal projeto.

Agradeço à minha família pelo apoio e carinho. À Ana pela motivação, carinho e inspiração nesses últimos meses. Aos amigos por estarem sempre lá. Aos amigos de laboratório e do mestrado, em especial ao Tales, Cristina, Grazi, Dimas, Tiago, Vitinho, Gonçalo e Rogério pela companhia e apoio durante esse período da minha vida.

"A lesson without pain is meaningless. That's because no one can gain without sacrificing something. But by enduring that pain and overcoming it... he shall obtain a powerful, unmatched heart. A fullmetal heart."

Edward Elric, FullMetal Achemist Brotherhood

"Mozzie: May you live in interesting times.

Neal: You know that's the first of two curses.

Mozzie: What's the other one?

Neal: May you find what you're looking for."

White Collar, primeira temporada, episódio 12

Resumo

As técnicas de controle fuzzy Takagi-Sugeno (TS) permitem que a síntese de controladores não lineares seja realizada por meio de problemas de otimização sujeitos a Desigualdades Matriciais Lineares e exigem, para isso, um modelo fuzzy TS do sistema a ser controlado.

Neste trabalho, uma função de Lyapunov fuzzy candidata e condições de síntese propostas em trabalhos recentes da literatura são usados para projetar controladores fuzzy TS baseados em modelos de referência. Além disso, algumas modificações em relação a uma técnica numérica de obtenção de modelos fuzzy são sugeridas, de modo a torná-la mais geral.

As condições de síntese supramencionadas são aplicadas ao problema de sincronismo de dois osciladores caóticos acoplados unidirecionalmente por um canal de transmissão e ao problema de controle do movimento longitudinal de uma aeronave de asa fixa.

Em relação ao problema de sincronismo de dois osciladores caóticos, a contribuição deste trabalho está na proposição de uma estratégia de sincronismo em que se estuda formalmente o efeito da distorção introduzida pelo canal de transmissão com banda limitada.

Em relação ao problema de controle do movimento longitudinal de uma aeronave de asa fixa, a lei de controle utilizada pode ser pensada como um controlador de ganho escalonado, sintonizado de forma sistemática graças a representação Takagi-Sugeno (TS) do mesmo. Além disso, o uso de um modelo de referência permite especificar de forma simples o desempenho associado ao problema de Assistência à Pilotagem - um dos temas motivadores deste trabalho.

Abstract

Takagi-Sugeno fuzzy control techniques allow the synthesis of nonlinear controllers based on Linear Matrix Inequalities, as long as a fuzzy Takagi-Sugeno model of the system is available.

In this work, a fuzzy candidate Lyapunov function and recently proposed synthesis conditions serve as basis to design model reference based fuzzy Takagi-Sugeno controllers. In addition, some modifications are proposed generalizing a numerical technique used to obtain the fuzzy models.

Such synthesis conditions are applied to the problem of synchronizing two chaotic oscillators coupled unidirectionally by a transmission channel, and to the problem of controlling the longitudinal dynamics of a fixed wing aircraft.

Regarding the chaotic oscillators synchronization problem, one of the contributions is the proposition of a synchronization strategy that formally incorporates the transmitted signal distortion introduced by a band-limited transmission channel.

On the problem of fixed wing aircraft longitudinal control, the final control law can be seen as a gain scheduled controller, whose scheduling strategy is automatically accomplished relying on the TS representation of the controller. In addition, the use of a closed loop reference model simplify the performance requirements specification related to the design of piloting assistance systems - a motivating problem to the present work.

Sumário

1	Introdução	2
1.1	Motivação	3
1.2	Objetivos	3
1.3	Metodologia Utilizada	3
1.4	Estrutura do Texto	4
2	Metodologia	5
2.1	Considerações iniciais	5
2.2	Função de Lyapunov Fuzzy Candidata	6
2.3	Controle Fuzzy Takagi-Sugeno por Modelo de Referência	10
2.4	Modelagem Takagi-Sugeno de Sistemas Dinâmicos	15
2.4.1	Transformação do Produto Tensorial	15
2.4.2	Modificações Propostas	18
2.5	Conclusões	20
3	Sincronismo de Osciladores Caóticos Utilizando Modelo de Referência	21
3.1	Descrição do Problema	21
3.2	Modelagem Fuzzy do Circuito de Chua	24
3.3	Obtenção do Controlador e Simulações	28
3.4	Análise dos Resultados	42
4	Controle do Movimento Longitudinal de Uma Aeronave Utilizando Modelo de Referência	43
4.1	Descrição do Problema	44
4.2	Modelagem Fuzzy do F16	45
4.3	Obtenção do Controlador e Simulações	46
4.4	Análise dos Resultados	51
5	Conclusões e Trabalhos Futuros	56
5.1	Considerações Gerais	56
5.2	Aplicação ao Sincronismo de Osciladores Caóticos	57
5.3	Aplicação ao Controle Longitudinal de uma Aeronave	57
5.4	Artigo submetido	58
5.5	Trabalhos Futuros	58
5.5.1	Transformação do Produto Tensorial	58
5.5.2	Controle Fuzzy Takagi-Sugeno por Modelo de Referência	58
5.5.3	Sincronismo de Osciladores Caóticos Acoplados por um Canal de Transmissão	59
5.5.4	Controle do Movimento Longitudinal de uma Aeronave	59

Bibliografia	60
A Transformação do Produto Tensorial	63
A.1 Conceitos Preliminares	63
A.2 Transformação do Produto Tensorial	66
A.2.1 Amostragem e Representação Tensorial	66
A.2.2 Decomposição de Valores Singulares de Alta Ordem	66
A.2.3 Representações convexas	68
A.2.4 Aproximações para as matrizes de peso	72
A.3 Exemplo de Aplicação a Sistemas Dinâmicos	73

Lista de Figuras

2.1	Funções de peso HOSVD obtidas no exemplo 2.1.	17
2.2	Funções de peso RNO-INO obtidas no exemplo 2.1.	18
3.1	Diagrama da estratégia de sincronismo.	22
3.2	Diagrama do circuito de Chua.	22
3.3	Módulo da FFT da série temporal de v_{C_1}	25
3.4	Módulo da FFT da série temporal de v_{C_2}	25
3.5	Módulo da FFT da série temporal de i_L	26
3.6	Funções de pertinência do circuito de Chua.	26
3.7	Condutância do diodo de Chua. Função original e modelo fuzzy.	27
3.8	Trajetórias no espaço de estados dos osciladores mestre (esquerda) e escravo (direita). Simulação sem sinal de excitação no oscilador mestre.	29
3.9	Trajetórias no espaço de estados dos osciladores mestre (esquerda) e escravo(direita). Si- mulação com sinal de excitação no oscilador mestre.	29
3.10	Erro de sincronismo da variável v_{C_1} . Simulação sem sinal de excitação no oscilador mestre.	30
3.11	Erro de sincronismo da variável v_{C_2} . Simulação sem sinal de excitação no oscilador mestre.	31
3.12	Erro de sincronismo da variável i_L . Simulação sem sinal de excitação no oscilador mestre.	32
3.13	Ação de controle r_x . Simulação sem sinal de excitação no oscilador mestre.	33
3.14	Ação de controle r_y . Simulação sem sinal de excitação no oscilador mestre.	34
3.15	Ação de controle r_z . Simulação sem sinal de excitação no oscilador mestre.	35
3.16	Erro de sincronismo da variável v_{C_1} . Simulação com sinal de excitação no oscilador mestre.	36
3.17	Erro de sincronismo da variável v_{C_2} . Simulação com sinal de excitação no oscilador mestre.	37
3.18	Erro de sincronismo da variável i_L . Simulação com sinal de excitação no oscilador mestre.	38
3.19	Ação de controle r_x . Simulação com sinal de excitação no oscilador mestre.	39
3.20	Ação de controle r_y . Simulação com sinal de excitação no oscilador mestre.	40
3.21	Ação de controle r_z . Simulação com sinal de excitação no oscilador mestre.	41
4.1	Diagrama do movimento longitudinal de uma aeronave.	44
4.2	Funções de pertinência do modelo encontrado para o F16.	46
4.3	Diagrama de simulação do controle longitudinal de um F16.	50
4.4	Resultados de simulação para controle de altitude e velocidade de um caça militar F-16. Ações de controle correspondentes a deflexão de profundor δ_e	52
4.5	Resultados de simulação para controle de altitude e velocidade de um caça militar F-16. Ações de controle correspondentes ao comando de tração δ_t	53
4.6	Resultados de simulação para controle de altitude e velocidade de um caça militar F-16. Controle de velocidade: (. . .) entrada para o modelo de referência; (- - -) saída do modelo de referência; (—) saída correspondente da aeronave.	54

4.7	Resultados de simulação para controle de altitude e velocidade de um caça militar F-16. Controle de altitude: (. . .) entrada para o modelo de referência; (- - -) saída do modelo de referência; (—) saída correspondente da aeronave.	55
A.1	$f(x, y) = xy(1 + \text{sen}(x) \cos(y))$, utilizada no exemplo A.2.	67
A.2	funções de peso obtidas no exemplo A.3.	68
A.3	funções de peso SN-NN obtidas no exemplo A.4.	69
A.4	funções de peso CNO obtidas no exemplo A.5.	71
A.5	funções de peso RNO-INO obtidas no exemplo A.6.	72
A.6	Erro quadrático de aproximação ao se utilizar as matrizes de peso do exemplo A.6.	73
A.7	diferentes funções de peso obtidas no exemplo A.7.	75

Lista de Tabelas

3.1 Erro absoluto máximo de sincronismo em “estado estacionário”. Oscilador mestre sem excitação.	42
3.2 Erro absoluto máximo de sincronismo em “estado estacionário”. Oscilador mestre com excitação.	42

Notação

a	Escalar
\mathbf{a}	Vetor
A	Matriz
\mathcal{A}	Tensor
\mathbf{a}_i	Vetor coluna i da matriz A
a_{ij}	Elemento da linha i , coluna j da matriz A
$a_{i_1 i_2 \dots i_N}$	Elemento da posição (i_1, i_2, \dots, i_N) do tensor \mathcal{A}
$\mathcal{A}_{(n)}$	Matriz de modo n do tensor \mathcal{A}
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Operador de produto escalar
\times_n	Operador de produto modo- n entre um tensor e uma matriz
$\ \cdot \ $	Operador de norma
$\mathcal{S} \bigotimes_{n=1}^N U^{(n)}$	Notação curta para $\mathcal{S} \times_1 U^{(1)} \times_2 U^{(2)} \dots \times_N U^{(N)}$
$\mathbf{1}$	Vetor cujos componentes são todos iguais a um
A^T	Matriz transposta da matriz A
$*$	Elementos transpostos em uma matriz simétrica
$\text{diag}(\cdot)$	Matriz bloco diagonal
$\partial f / \partial \mathbf{x}$	Gradiente de f (vetor coluna), ou matriz Jacobiana de f (se f for multivariável)
$P \succ 0$	Indica que a matriz P é definida positiva
$P \succeq 0$	Indica que a matriz P é semi-definida positiva
$P \prec 0$	Indica que a matriz P é definida negativa
$P \preceq 0$	Indica que a matriz P é semi-definida negativa

Lista de Siglas

CNO	Próxima a Normalizada - <i>Close to Normalized</i>
CNPq	Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
HOSVD	Decomposição de Valores Singulares de Alta Ordem - <i>Higher Order Singular Value Decomposition</i>
INO	Normalizada Inversa - <i>Inverted Normalized</i>
LMI	Desigualdade Matricial Linear - <i>Linear Matrix Inequality</i>
LPV	Linear com Parâmetros Variantes - <i>Linear Parameter Varying</i>
NN	Não Negativa - <i>Non Negative</i>
NO	Normalizada - <i>Normalized</i>
PDC	<i>Parallel Distributed Compensation</i>
PDVA	Grupo de Pesquisa e Desenvolvimento de Veículos Autônomos
qLPV	quase-LPV - <i>quasi-Linear Parameter Varying</i>
RNO	Normalizada Relaxada - <i>Relaxed Normalized</i>
SN	Normalizada em Soma - <i>Sum Normalized</i>
TS	Takagi-Sugeno

Capítulo 1

Introdução

*“Control! Control! You must learn control!”
Mestre Yoda.*

Modelos fuzzy Takagi-Sugeno (TS) (Takagi e Sugeno 1985), também conhecidos como modelos nebulosos TS, fornecem uma representação para sistemas dinâmicos não-lineares em que o modelo não-linear é composto de modelos lineares locais. Nos últimos anos, tal representação permitiu que diversas estratégias de controle robusto de sistemas lineares fossem generalizadas para o contexto de sistemas não-lineares pelo uso de Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs) (Teixeira e Assunção 2007). Uma referência que apresenta várias condições de síntese e análise para sistemas não-lineares com modelos fuzzy TS é (Tanaka e Wang 2001), apesar de resultados recentes da literatura apresentarem condições menos conservadoras.

Conforme apresentado em (Boyd e Vandenberghe 2004; Palhares e Gonçalves 2007), LMIs são desigualdades generalizadas que determinam uma ordenação sobre o cone das matrizes semi-definidas positivas. Conforme apresentado nessas referências, o interessante de tais restrições é que elas são convexas e, portanto, quando utilizadas em conjunto com um problema cuja função objetivo seja convexa definem um problema de otimização convexa. Tais problemas, usualmente chamados de problemas de programação semi-definida, têm portanto as características gerais de problemas convexas, sendo que a principal delas é que todo mínimo local é também um mínimo global do problema.

Como visto em (Boyd et al. 1994), a ideia de que vários problemas da teoria de sistemas dinâmicos e controle pode ser resolvida por meio de LMIs não é nova e vem desde o trabalho de Lyapunov (Lyapunov 1992), onde foi demonstrado que a estabilidade de sistemas lineares poderia ser verificada por meio de uma LMI (para a qual ele também demonstrou como encontrar uma resposta analítica). Entretanto, foi apenas com o desenvolvimento de métodos eficientes para a resolução de problemas convexas sujeitos a LMIs no final dos anos 80, que elas foram utilizadas, mais comumente, para resolver problemas mais gerais (para os quais não existe uma resposta analítica, ou para os quais a solução pode ser laborosa). Além disso, o trabalho (Boyd et al. 1994) foi o primeiro a fazer um esforço de mostrar que vários problemas da teoria de sistemas dinâmicos e controle podem ser reduzidos à problemas de otimização convexa envolvendo LMIs.

No contexto de controle de aeronaves, o uso de modelos de referência para a malha fechada fornece uma maneira simples de se impor um comportamento desejado para a aeronave em malha fechada. Tais modelos permitem a imposição de características necessárias (impostas por normas) ou até mesmo que o comportamento de uma aeronave em malha fechada se aproxime ao de outra aeronave. Além disso, no contexto de veículos aéreos não tripulados, o uso de modelos de referência impondo um comportamento mais simples para a aeronave (malhas de primeira ordem desacopladas) permite que as camadas de planejamento e coordenação dos veículos autônomos faça uso de modelos mais simples.

A estratégia de síntese de controladores baseados em modelos de referência desejados para a malha fechada é normalmente utilizada no contexto de sistemas de controle adaptativo. Entretanto, também pode ser utilizada para outras topologias de controladores, como utilizado neste trabalho e em (Mansouri et al. 2009), por exemplo. O interessante de tal estratégia é que ela permite diretamente a escolha do comportamento do sistema em malha fechada.

1.1 Motivação

O uso de técnicas de controle fuzzy TS permite a extensão dos resultados de controle robusto de sistemas lineares para sistemas não-lineares. Além disso, a obtenção de condições de síntese de controladores em termos de LMIs permite que, se desejado, várias outras condições sejam adicionadas, como restrições sobre os pólos dos sistemas lineares locais do modelo, e a síntese de controladores robustos.

Como parte do projeto *Sistema para Assistência à Pilotagem de Aeronaves de Aviação Geral* do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), o desenvolvimento de estratégias de controle que possam ser aplicadas de maneira sistemática a aeronaves deve ser abordado. Interessantemente as técnicas de controle fuzzy TS geram controladores de estrutura semelhante aos controladores de ganho escalonado, que são comumente utilizados em controle de aeronaves e são, muitas vezes, interpolados de maneira heurística (Rugh e Shamma 2000). Além disso, o uso de técnicas de controle por modelo de referência permitem a especificação direta do comportamento desejado para a malha fechada do sistema.

Como parte do Grupo de Pesquisa e Desenvolvimento de Veículos Autônomos (PDVA), a imposição de modelos de referência simples para o movimento de uma aeronave tem aplicações no desenvolvimento de veículos aéreos não tripulados, pois permite simplificações durante o desenvolvimento das estratégias de planejamento e coordenação do veículo autônomo.

Por outro lado, a sincronização de osciladores caóticos é um problema que vem sendo estudado nos últimos anos, especialmente sua aplicação à transmissão segura de informação. Entretanto, a maior parte dos trabalhos não apresenta considerações sobre o efeito da distorção introduzida pelo canal de transmissão entre os osciladores, e seria interessante a proposição de uma estratégia de sincronismo que levasse em conta tal distorção.

1.2 Objetivos

O propósito deste trabalho é, a partir de resultados recentes da literatura, propor uma metodologia para a síntese de controladores fuzzy TS por modelo de referência utilizando LMIs. Além disso, este trabalho também se propõe a utilizar tal estratégia em duas situações diferentes:

1. O sincronismo de dois circuitos de Chua acoplados unidirecionalmente por um canal de transmissão modelado como um filtro de primeira ordem, desconsiderando-se os ruídos introduzidos por tal comunicação;
2. O controle de altitude e velocidade de uma aeronave de asa fixa, desconsiderando-se os efeitos do movimento látero-direcional da aeronave e os efeitos de perturbações atmosféricas.

1.3 Metodologia Utilizada

Para derivar as condições de síntese de controladores fuzzy por modelo de referência, este trabalho baseia-se na função de Lyapunov fuzzy candidata apresentada em (Rhee e Won 2006) e aprimora as condições de

síntese apresentadas em (Mozelli, Palhares e Avellar 2009; Mozelli et al. 2010) de modo que se busque um controlador que minimize o custo garantido \mathcal{H}_∞ ao invés de apenas se buscar um controlador estabilizante qualquer. Tais condições modificadas são então aplicadas a um sistema aumentado de modo a gerar controladores que façam com que o sistema se comporte como o modelo de referência desejado.

Em ambas as aplicações do trabalho utilizam-se modelos caixa branca do sistema. Na aplicação de sincronismo de osciladores caóticos, utiliza-se o modelo do circuito de Chua apresentado em (Mozelli 2008), bem como sua modelagem fuzzy exata para o sistema. Além disso, propõe-se o uso de um controlador por modelo de referência para uma estratégia de sincronismo que leva em conta a distorção gerada pelo canal de transmissão.

Na aplicação do controle do movimento longitudinal, utiliza-se o modelo de um caça militar *General Dynamics F-16A Block-32*, com as equações dadas pelo modelo apresentado em (Stevens e Lewis 2003) e os parâmetros retirados do simulador de voo *FlightGear* (*FlightGear Flight Simulator* 2011). Para a obtenção do modelo fuzzy TS, utilizou-se uma modificação da técnica de transformação do produto tensorial. O controlador obtido pode ser visto como um controlador de ganho escalonado, e a estratégia utilizada permite a especificação do desempenho associado ao problema de Assistência à Pilotagem de uma forma simples.

Vale ressaltar que as contribuições deste trabalho foram o uso das condições de síntese no contexto de controladores por modelo de referência e a modificação à técnica da transformação do produto tensorial, de modo que a obtenção numérica de modelos fuzzy TS pudesse ser realizada de forma mais geral.

1.4 Estrutura do Texto

Este trabalho tem por objetivo a proposição de LMIs para a síntese de controladores fuzzy TS baseados em modelos de referência e sua aplicação a dois problemas, o sincronismo de osciladores caóticos acoplados por um canal de transmissão e o controle do movimento longitudinal de uma aeronave de asa fixa. Para esse fim, o trabalho está definido da seguinte forma:

O capítulo 1 fez uma pequena introdução, além de apresentar a motivação do trabalho, os objetivos que devem ser atendidos e a metodologia utilizada.

O capítulo 2 apresenta as condições propostas para a síntese de controladores fuzzy TS e seu desenvolvimento. Apresenta também algumas modificações a uma técnica de obtenção de modelos TS de modo a torná-la mais geral. Tal técnica, bem como alguns conceitos necessários de álgebra multilinear, são apresentados no apêndice A.

Tais técnicas são aplicadas ao problema de sincronismo de dois circuitos de Chua acoplados por um canal de transmissão modelado como um filtro de primeira ordem no capítulo 3, enquanto que, no capítulo 4, são aplicadas ao problema do controle do movimento longitudinal (controle de velocidade e altitude) de um F16.

Por fim, o capítulo 5 apresenta as conclusões do trabalho e possíveis direções de pesquisa para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Metodologia

Este capítulo apresenta as metodologias desenvolvidas durante este trabalho. Inicialmente são apresentadas as considerações necessárias para o uso das técnicas de controle fuzzy TS aqui apresentadas. Em seguida é apresentada a função de Lyapunov fuzzy adotada durante esse trabalho. Tal função é então utilizada para determinar condições para um limite superior da norma \mathcal{H}_∞ de um sistema. Essas condições podem então ser utilizadas para sintetizar um controlador fuzzy por modelo de referência. O uso de tais condições para tal controle é apresentado na Metodologia 2.1.

Por fim, apresenta-se, na Metodologia 2.2, uma modificação da técnica do produto tensorial¹ que permite a obtenção de um modelo fuzzy a partir de uma descrição mais geral do sistema. Apresenta-se também a modificação necessária à ação de controle, pois o modelo obtido dessa maneira é um pouco diferente daquele considerado para o desenvolvimento da estratégia de controle.

2.1 Considerações iniciais

Para fins de uso das técnicas aqui apresentadas, considera-se que os sistemas dinâmicos não lineares a serem controlados podem ser representados através de um modelo fuzzy TS (Takagi e Sugeno 1985) dado pelas regras:

$$R_i: \text{ Se } x_1 \in \mathcal{M}_1^{k_1=\alpha_{i1}} \text{ e } x_2 \in \mathcal{M}_2^{k_2=\alpha_{i2}} \text{ e } \dots \text{ e } x_n \in \mathcal{M}_n^{k_n=\alpha_{in}},$$

$$\text{então } \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= A_i \mathbf{x} + B_{u_i} \mathbf{u} + B_{w_i} \mathbf{w}, \\ \mathbf{y} &= C_i \mathbf{x} + D_{u_i} \mathbf{u} + D_{w_i} \mathbf{w}, \end{cases}$$

em que $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados; $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entradas de controle; $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de entradas de perturbação; $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^k$ é o vetor de saídas controladas; as matrizes $A_i, B_{u_i}, B_{w_i}, C_i, D_{u_i}, D_{w_i}$ são as matrizes que descrevem o comportamento do sistema e são de dimensões adequadas; R_i indica o número da regra; x_1 a x_n são as variáveis premissas do modelo; $\mathcal{M}_j^{k_j}$ são os conjuntos fuzzy relacionados à variável x_j e α_{ij} relaciona qual conjunto fuzzy da variável x_j está associado à regra i .

Nota-se que neste trabalho apenas as variáveis de estado são utilizadas como variáveis premissas. Entretanto vale ressaltar que tal modelo permite a modelagem de qualquer sistema não-linear afim nas entradas de controle e perturbação.

¹Apresentada no apêndice A.

Considerando que a cada conjunto $\mathcal{M}_j^{\alpha_{ij}}$ corresponda uma função de pertinência, $\omega_j^{\alpha_{ij}}(x_j)$, que possui a propriedade

$$0 \leq \omega_j^{\alpha_{ij}}(x_j) \leq 1,$$

pode-se escrever a função de pertinência normalizada para cada conjunto de regras, como sendo

$$\mu_j^{\alpha_{ij}}(x_j) = \frac{\omega_j^{\alpha_{ij}}(x_j)}{\sum_{\alpha_{ij}=1}^{r_j} \omega_j^{\alpha_{ij}}(x_j)},$$

com r_j sendo o número de conjuntos representados por \mathcal{M}_j . Tais funções de pertinência possuem as propriedades

$$\mu_j^{\alpha_{ij}}(x_j) \geq 0 \quad \sum_{\alpha_{ij}=1}^{r_j} \mu_j^{\alpha_{ij}}(x_j) = 1. \quad (2.1)$$

Pode-se então escrever as funções de pertinência normalizadas do modelo como

$$h_i(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^n \mu_j^{\alpha_{ij}}(x_j) = \frac{\prod_{j=1}^n \omega_j^{\alpha_{ij}}(x_j)}{\prod_{j=1}^n \sum_{\alpha_{ij}=1}^{r_j} \omega_j^{\alpha_{ij}}(x_j)} = \frac{\prod_{j=1}^n \omega_j^i(x_j)}{\sum_{k=1}^r \prod_{j=1}^n \omega_j^k(x_j)}. \quad (2.2)$$

Tais funções de pertinência possuem as propriedades

$$h_i(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{x}) = 1,$$

com r sendo o número de regras do modelo. Utilizando-se estas funções de pertinência, pode-se escrever o modelo do sistema como:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{x}) [A_i \mathbf{x} + B_{u_i} \mathbf{u} + B_{w_i} \mathbf{w}], \\ \mathbf{y} &= \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{x}) [C_i \mathbf{x} + D_{u_i} \mathbf{u} + D_{w_i} \mathbf{w}]. \end{aligned} \quad (2.3)$$

2.2 Função de Lyapunov Fuzzy Candidata

Durante este trabalho foi adotada a função de Lyapunov fuzzy proposta em (Rhee e Won 2006). Tal função é construída de maneira similar ao procedimento usado no método do gradiente variável (Slotine e Li 1991).

A função de Lyapunov candidata é definida como sendo uma função dada por:

$$V(\mathbf{x}) = 2 \int_{\Gamma[0, \mathbf{x}]} \left\langle \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{s}) P_i \mathbf{s}, \mathbf{ds} \right\rangle, \quad (2.4)$$

em que $\Gamma[0, \mathbf{x}]$ é um caminho qualquer entre a origem e o estado, P_i são matrizes que parametrizam a função de Lyapunov e a integral acima é uma integral de linha.

Deseja-se que o gradiente de $V(\mathbf{x})$ seja dado por:

$$\nabla V(\mathbf{x}) = 2 \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{x}) P_i \mathbf{x}. \quad (2.5)$$

Para que (2.5) descreva o gradiente de $V(\mathbf{x})$, é necessário que $\nabla V(\mathbf{x})$ descreva um campo vetorial conservativo.

A restrição de que $\nabla V(\mathbf{x})$ seja um campo vetorial conservativo é equivalente a impor que sua matriz Jacobiana seja simétrica, ou seja:

$$\frac{\partial \nabla V(\mathbf{x})_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \nabla V(\mathbf{x})_j}{\partial x_i}, \quad \forall i, j.$$

Aplicando-se a regra da cadeia para o cálculo da Jacobiana, tem-se:

$$\frac{\partial \nabla V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = 2 \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{x}) P_i + 2 \sum_{i=1}^r P_i \mathbf{x} \left(\frac{\partial h_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)^T. \quad (2.6)$$

Expandindo-se o segundo termo da equação (2.6), encontra-se:

$$\sum_{i=1}^r P_i \mathbf{x} \left(\frac{\partial h_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)^T = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^r \left(\frac{\partial h_i(\mathbf{x})}{\partial x_1} \right) [P_{11}^i x_1 + \dots + P_{1n}^i x_n] & \dots & \sum_{i=1}^r \left(\frac{\partial h_i(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right) [P_{11}^i x_1 + \dots + P_{1n}^i x_n] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^r \left(\frac{\partial h_i(\mathbf{x})}{\partial x_1} \right) [P_{n1}^i x_1 + \dots + P_{nn}^i x_n] & \dots & \sum_{i=1}^r \left(\frac{\partial h_i(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right) [P_{n1}^i x_1 + \dots + P_{nn}^i x_n] \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Na equação (2.7), P_{ij}^k é o elemento da linha i e coluna j da matriz P_k .

Impondo-se a condição de simetria sobre a equação (2.6), chega-se em:

$$\sum_{k=1}^r h_k(\mathbf{x}) P_{ij}^k + \left(\frac{\partial h_k(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right) [P_{i1}^k x_1 + \dots + P_{in}^k x_n] = \sum_{k=1}^r h_k(\mathbf{x}) P_{ji}^k + \left(\frac{\partial h_k(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right) [P_{j1}^k x_1 + \dots + P_{jn}^k x_n], \quad \forall i \neq j. \quad (2.8)$$

Como não são consideradas informações adicionais sobre $h_k(\mathbf{x})$, reescreve-se a equação (2.8) utilizando igualdade de polinômios para chegar em:

$$\sum_{k=1}^r h_k(\mathbf{x}) P_{ij}^k = \sum_{k=1}^r h_k(\mathbf{x}) P_{ji}^k, \quad (2.9)$$

e

$$\sum_{k=1}^r \left(\frac{\partial h_k(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right) P_{im}^k = \sum_{k=1}^r \left(\frac{\partial h_k(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right) P_{jm}^k, \quad \forall i \neq j, m. \quad (2.10)$$

A equação (2.9) implica que $P_{ij}^k = P_{ji}^k$, que por sua vez implica que as matrizes P_i utilizadas para parametrizar o gradiente da função de Lyapunov devem ser simétricas.

Utilizando a equação (2.2), pode-se escrever:

$$\sum_{k=1}^r h_k(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^r \prod_{p=1}^n \mu_p^{\alpha_{kp}}(x_p) = \sum_{k_1=1}^{r_1} \sum_{k_2=1}^{r_2} \dots \sum_{k_n=1}^{r_n} \prod_{p=1}^n \mu_p^{\alpha_{\{k_1, \dots, k_n\}k_p}}(x_p) = 1. \quad (2.11)$$

O terceiro termo da equação (2.11) reescreve o somatório fuzzy, explicitando a relação da função de pertinência com cada subconjunto (relativo a uma variável de estado), de modo que o índice k é substituído pelos índices k_1, \dots, k_n .

A partir da equação (2.11), é possível se escrever:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^r \left(\frac{\partial h_k(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right) = \\
& \sum_{k=1}^r \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq j}}^n \mu_p^{\alpha_{kp}}(x_p) \left(\frac{\partial \mu_j^{\alpha_{kj}}(x_j)}{\partial x_j} \right) = \\
& \sum_{k_1=1}^{r_1} \dots \sum_{\substack{k_n=1 \\ p \neq j}}^{r_n} \prod_{p=1}^n \mu_p^{\alpha_{\{k_1, \dots, k_n\}k_p}}(x_p) \sum_{k_j=1}^{r_j} \left(\frac{\partial \mu_j^{\alpha_{\{k_1, \dots, k_n\}k_p}}(x_j)}{\partial x_j} \right) = 0. \tag{2.12}
\end{aligned}$$

É interessante notar que, devido às propriedades das funções de pertinência normalizadas apresentadas na equação (2.1), o último somatório do terceiro termo da equação (2.12) é igual a zero, ou seja:

$$\sum_{k_j=1}^{r_j} \left(\frac{\partial \mu_j^{\alpha_{\{k_1, \dots, k_n\}k_p}}(x_j)}{\partial x_j} \right) = 0. \tag{2.13}$$

Combinando a equação (2.10) com a equação (2.12), e reescrevendo utilizando a substituição de índices de k por k_1, \dots, k_n tem-se:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k_1=1}^{r_1} \dots \sum_{\substack{k_n=1 \\ p \neq j}}^{r_n} \prod_{p=1}^n \mu_p^{\alpha_{\{k_1, \dots, k_n\}k_p}}(x_p) \sum_{k_j=1}^{r_j} \left(\frac{\partial \mu_j^{\alpha_{\{k_1, \dots, k_n\}k_p}}(x_j)}{\partial x_j} \right) P_{im}^{k_1, \dots, k_n} = \\
& \sum_{k_1=1}^{r_1} \dots \sum_{\substack{k_n=1 \\ p \neq i}}^{r_n} \prod_{p=1}^n \mu_p^{\alpha_{\{k_1, \dots, k_n\}k_p}}(x_p) \sum_{k_i=1}^{r_i} \left(\frac{\partial \mu_i^{\alpha_{\{k_1, \dots, k_n\}k_p}}(x_i)}{\partial x_i} \right) P_{jm}^{k_1, \dots, k_n}. \tag{2.14}
\end{aligned}$$

Uma solução possível para a equação (2.14) é fazer P_{im} independente de k_j e P_{jm} independente de k_i . Dessa forma ambos os lados da igualdade serão iguais a zero, já que os termos P_{im} e P_{jm} poderão sair do último somatório, e este será então igual a zero conforme a equação (2.13).

Aplicando esta solução possível, e variando i, j e m (com $i \neq j$), chega-se a uma estrutura em que os termos fora da diagonal das matrizes P_k são os mesmos para todas as regras, e os termos na diagonal P_{ii}^k variam apenas com k_i .

Uma outra restrição necessária para que a função apresentada em (2.4) seja uma função de Lyapunov candidata é que $V(\mathbf{x})$ seja um função definida positiva. Além disso, para que ela possa ser utilizada para verificar a estabilidade global de sistemas é necessário que $V(\mathbf{x})$ seja radialmente ilimitada.

Como é necessário que $\nabla V(\mathbf{x})$ seja um campo conservativo, a integral de linha apresentada na equação (2.4) pode ser resolvida independente do caminho escolhido.

Escolhendo tal caminho como sendo uma reta entre a origem e o estado, pode-se parametrizar tal caminho fazendo-se $\mathbf{s} = \tau \mathbf{x}$ com $\tau \in [0, 1]$. Pode-se então rescrever $V(\mathbf{x})$ como

$$V(\mathbf{x}) = 2 \int_0^1 \tau \mathbf{x}^T \sum_{i=1}^r h_i(\tau \mathbf{x}) P_i \mathbf{x} d\tau. \tag{2.15}$$

Impondo-se a restrição $P_i = P_i^T \succ 0$, pode-se escrever

$$\bar{P} \succ \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{x}) P_i \succ \underline{P} \succ 0, \tag{2.16}$$

em que pode-se escrever:

$$\begin{aligned}\bar{P} &= \bar{\lambda}I, \\ \underline{P} &= \underline{\lambda}I,\end{aligned}$$

sendo $\bar{\lambda}$ e $\underline{\lambda}$ o maior e o menor autovalor dentre as matrizes pertencentes ao politopo formado pelas matrizes P_i .

Aplicando as desigualdades apresentadas na equação (2.16) na equação (2.15), tem-se

$$\begin{aligned}2 \int_0^1 \tau \mathbf{x}^T \bar{P} \mathbf{x} d\tau &> V(\mathbf{x}) > 2 \int_0^1 \tau \mathbf{x}^T \underline{P} \mathbf{x} d\tau, \\ \mathbf{x}^T \bar{P} \mathbf{x} &> V(\mathbf{x}) > \mathbf{x}^T \underline{P} \mathbf{x}.\end{aligned}\tag{2.17}$$

De (2.17) conclui-se que $V(\mathbf{x})$ é uma função definida positiva e radialmente ilimitada (já que ambos os limites inferior e superior possuem estas características).

Pode-se então enunciar o seguinte teorema:

Teorema 2.1 (Teorema 2 de Rhee e Won 2006). *A função*

$$V(\mathbf{x}) = 2 \int_{\Gamma[0, \mathbf{x}]} \left\langle \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{s}) P_i \mathbf{s}, d\mathbf{s} \right\rangle,\tag{2.4}$$

com

$$\begin{aligned}P_i &= M_0 + M_i, \\ M_0 &= \begin{bmatrix} 0 & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{12} & 0 & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{1n} & m_{2n} & \cdots & 0 \end{bmatrix},\end{aligned}\tag{2.18}$$

$$M_i = \begin{bmatrix} m_{11}^{\alpha_{i1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_{22}^{\alpha_{i2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_{nn}^{\alpha_{in}} \end{bmatrix},$$

e

$$P_i \succ 0,\tag{2.19}$$

é uma função de Lyapunov fuzzy candidata, em que α_{ij} é como anteriormente descrito e relaciona qual conjunto fuzzy da variável x_j está associado à regra i . Tal notação mostra que apenas a diagonal das matrizes P_i muda com a regra, e que tal mudança está relacionada às variáveis premissas do modelo.

O gradiente dessa função é dado pela equação (2.5), repetida aqui por conveniência:

$$\nabla V(\mathbf{x}) = 2 \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{x}) P_i \mathbf{x}.\tag{2.5}$$

2.3 Controle Fuzzy Takagi-Sugeno por Modelo de Referência

Esta seção apresenta, utilizando a função de Lyapunov candidata proposta em (Rhee e Won 2006) e condições baseadas nos trabalhos (Mozelli, Palhares e Avellar 2009; Mozelli et al. 2010), condições relaxadas para a síntese de controladores fuzzy por modelo de referência.

De modo a determinar tais condições, será feito o uso do seguinte teorema, que relaciona uma desigualdade envolvendo a derivada temporal de uma função de Lyapunov do sistema e os sinais de entrada e saída, com um limite superior da norma \mathcal{H}_∞ (norma induzida $\mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_2$) do sistema.

Teorema 2.2. *Supondo-se um sistema relaxado ($\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$) e estável com uma função de Lyapunov $V(\mathbf{x})$.*

Se

$$\dot{V}(\mathbf{x}) + \gamma^{-2} \mathbf{z}^T \mathbf{z} - \mathbf{w}^T \mathbf{w} < 0, \quad (2.20)$$

então

$$\|\mathbf{z}\|_2 < \gamma \|\mathbf{w}\|_2. \quad (2.21)$$

Demonstração. De (2.20) tem-se que,

$$\begin{aligned} & \int_0^T \{ \gamma^{-2} \mathbf{z}^T \mathbf{z} - \mathbf{w}^T \mathbf{w} \} d\tau \leq V(\mathbf{x}(0)) - V(\mathbf{x}(T)), \quad \forall T > 0, \\ V(\mathbf{x}(T)) \geq 0 & \Rightarrow \int_0^T \{ \gamma^{-2} \mathbf{z}^T \mathbf{z} - \mathbf{w}^T \mathbf{w} \} d\tau \leq V(\mathbf{x}(0)), \quad \forall T > 0, \\ V(\mathbf{x}(0)) = 0 & \Rightarrow \int_0^T \{ \gamma^{-2} \mathbf{z}^T \mathbf{z} - \mathbf{w}^T \mathbf{w} \} d\tau \leq 0, \quad \forall T > 0, \\ \Rightarrow \int_0^T \gamma^{-2} \mathbf{z}^T \mathbf{z} d\tau & \leq \int_0^T \mathbf{w}^T \mathbf{w} d\tau, \quad \forall T > 0, \\ \Rightarrow \int_0^\infty \gamma^{-2} \mathbf{z}^T \mathbf{z} d\tau & \leq \int_0^\infty \mathbf{w}^T \mathbf{w} d\tau \Rightarrow \|\mathbf{z}\|_2 \leq \gamma \|\mathbf{w}\|_2. \end{aligned}$$

□

Pode-se então fazer uso dos teoremas 2.1 e 2.2 para enunciar um outro teorema que define condições para a síntese de controladores fuzzy do tipo *Parallel Distributed Compensation* (PDC)² no contexto de projeto \mathcal{H}_∞ .

Para isso considera-se que o sistema é representado por

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{x}) [A_i \mathbf{x} + B_{u_i} \mathbf{u} + B_{w_i} \mathbf{w}], \\ \mathbf{z} &= \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{x}) [C_i \mathbf{x} + D_{u_i} \mathbf{u} + D_{w_i} \mathbf{w}], \end{aligned} \quad (2.22)$$

em que \mathbf{x} , \mathbf{u} e \mathbf{w} são como definidos anteriormente e \mathbf{z} é a saída de desempenho do sistema.

²Compensação Paralela Distribuída.

Teorema 2.3. Dados um escalar μ , um modelo fuzzy TS de um sistema não-linear da forma apresentada na equação (2.22) e uma lei de controle da forma

$$\mathbf{u} = \sum_{j=1}^r h_j(\mathbf{x}) K_j \mathbf{x}; \quad (2.23)$$

garante-se que o ganho \mathcal{L}_2 do sistema em malha fechada é menor do que γ , se as seguintes LMIs forem satisfeitas

$$\begin{aligned} \Theta_{ii} &< 0, & \forall i \in 1, \dots, r, \\ \Theta_{ij} + \Theta_{ji} &< 0, & \forall i < j, i, j \in 1, \dots, r, \\ P_i &> 0, & \forall i \in 1, \dots, r. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Com

$$\Theta_{ij} = \begin{bmatrix} -A_i R - R^T A_i^T - B_{u_i} S_j - S_j^T B_{u_i}^T & * & * & * \\ R^T + P_i - \mu A_i R - \mu B_{u_i} S_j & \mu(R + R^T) & * & * \\ -B_{w_i}^T & -\mu B_{w_i}^T & -I & * \\ C_i R + D_{u_i} S_j & 0 & D_{w_i} & -\gamma^2 I \end{bmatrix}, \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} P_i &= M_0 + M_i, \\ M_0 &= \begin{bmatrix} 0 & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{12} & 0 & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{1n} & m_{2n} & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$M_i = \begin{bmatrix} m_{11}^{\alpha_{i1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_{22}^{\alpha_{i2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_{nn}^{\alpha_{in}} \end{bmatrix},$$

e os ganhos do controlador dados por

$$K_j = S_j R^{-1}. \quad (2.26)$$

Demonstração. A ideia para a demonstração desse teorema é utilizar os teoremas 2.1 e 2.2 nas equações em malha fechada do sistema para chegar no resultado desejado.

Pode-se reescrever a derivada temporal da função de Lyapunov apresentada na equação (2.5) como:

$$\dot{V}(\bar{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}^T & \dot{\bar{\mathbf{x}}}^T & \mathbf{w}^T \end{bmatrix} T_i \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}, \quad (2.27)$$

com

$$\begin{aligned} T_i &= \begin{bmatrix} 0 & P_i & 0 \\ P_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ P_i &> 0, \end{aligned}$$

as matrizes P_i dadas pela equação (2.18), e $\bar{\mathbf{x}}$ dado pela relação $\mathbf{x} = M^T \bar{\mathbf{x}}$.

Aplicando-se a lei de controle da equação (2.23) na equação (2.22), pode-se escrever as equações da

malha fechada do sistema como

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(\mathbf{x})h_j(\mathbf{x}) [(A_i + B_{u_i}K_j)\mathbf{x} + B_{w_i}\mathbf{w}], \\ \mathbf{z} &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(\mathbf{x})h_j(\mathbf{x}) [(C_i + D_{u_i}K_j)\mathbf{x} + D_{w_i}\mathbf{w}].\end{aligned}$$

Pode-se então adicionar o termo nulo (Mozelli, Palhares e Mendes 2010)

$$2 \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(\mathbf{x})h_j(\mathbf{x}) [\mathbf{x}^T M^{-1} + \dot{\mathbf{x}}^T G^{-1}] [\dot{\mathbf{x}} - (A_i + B_{u_i}K_j)\mathbf{x} - B_{w_i}\mathbf{w}] = 0$$

à equação (2.20) sem alterar seu valor. Este termo nulo pode ser reescrito como

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(\mathbf{x})h_j(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T & \dot{\mathbf{x}}^T & \mathbf{w}^T \end{bmatrix} \Gamma_{ij} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}, \quad (2.28)$$

com

$$\Gamma_{ij} = \begin{bmatrix} -M^{-1}(A_i + B_{u_i}K_j) - (A_i + B_{u_i}K_j)^T M^{-T} & * & * \\ M^{-T} - G^{-1}(A_i + B_{u_i}K_j) & G^{-1} + G^{-T} & * \\ -B_{w_i}^T M^{-T} & -B_{w_i}^T G^{-T} & 0 \end{bmatrix}.$$

É possível reescrever $\gamma^{-2}\mathbf{z}^T\mathbf{z}$ como:

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(\mathbf{x})h_j(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T & \dot{\mathbf{x}}^T & \mathbf{w}^T \end{bmatrix} Z_{ij} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}, \quad (2.29)$$

com

$$Z_{ij} = \begin{bmatrix} (C_i + D_{u_i}K_j)^T \gamma^{-2}(C_i + D_{u_i}K_j) & * & * \\ 0 & 0 & * \\ D_{w_i}^T \gamma^{-2}(C_i + D_{u_i}K_j) & 0 & D_{w_i}^T \gamma^{-2}D_{w_i} \end{bmatrix}.$$

E finalmente, pode-se escrever $-\mathbf{w}^T\mathbf{w}$ como:

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(\mathbf{x})h_j(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}^T & \dot{\bar{\mathbf{x}}}^T & \mathbf{w}^T \end{bmatrix} W \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}, \quad (2.30)$$

com

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I \end{bmatrix}.$$

Usando uma mudança linear de coordenadas de \mathbf{x} para $\bar{\mathbf{x}}$, dada por

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= M^T \bar{\mathbf{x}}, \\ \dot{\mathbf{x}} &= M^T \dot{\bar{\mathbf{x}}};\end{aligned}$$

que equivale a multiplicar Γ_{ij} e Z_{ij} a esquerda por $\alpha_1 = \text{diag}(M, M, I)$ e a direita por $\alpha_2 = \text{diag}(M^T, M^T, I)$ nas equações (2.28) e (2.29).

Pode-se então reescrever a equação (2.20) como:

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(\mathbf{x})h_j(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} \bar{x}^T & \dot{\bar{x}}^T & w^T \end{bmatrix} L_{ij} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \dot{\bar{x}} \\ w \end{bmatrix} < 0, \quad (2.31)$$

com

$$L_{ij} = (T_i + \alpha_1(\Gamma_{ij} + Z_{ij})\alpha_2 + W).$$

Já que a equação (2.31) é uma forma quadrática, é suficiente garantir que a seguinte LMI seja atendida:

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(\mathbf{x})h_j(\mathbf{x})L_{ij} \prec 0. \quad (2.32)$$

Fazendo-se $G^{-1} = \mu M^{-1}$, $R = M^T$ e $S_j = K_j M^T$ é possível escrever:

$$L_{ij} = \begin{bmatrix} -A_i R - R^T A_i^T - B_{u_i} S_j - S_j^T B_{u_i}^T & * & * \\ R^T + P_i - \mu A_i R - \mu B_{u_i} S_j & \mu(R + R^T) & * \\ -B_{w_i}^T & -\mu B_{w_i}^T & -I \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

$$+ \begin{bmatrix} R^T C_i^T + S_j^T D_{u_i}^T \\ 0 \\ D_{w_i} \end{bmatrix} \gamma^{-2} \begin{bmatrix} C_i R + D_{u_i} S_j & 0 & D_{w_i} \end{bmatrix}.$$

Utilizando L_{ij} dado pela equação (2.33) e aplicando-se o complemento de Schur à LMI da equação (2.32), tem-se:

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(\mathbf{x})h_j(\mathbf{x})\Theta_{ij} \prec 0, \quad (2.34)$$

com Θ_{ij} conforme a equação (2.25).

A equação 2.34 pode ser reescrita como:

$$\sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{x})h_i(\mathbf{x})\Theta_{ii} + \sum_{i=1}^r \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r h_i(\mathbf{x})h_j(\mathbf{x})\Theta_{ij} \prec 0,$$

em que pode-se ver que uma condição suficiente é:

$$\begin{aligned} \Theta_{ii} &< 0 & \forall i \in 1..r, \\ \Theta_{ij} + \Theta_{ji} &< 0 & \forall i < j, \in i = 1..r, \end{aligned}$$

que em conjunto com a restrição apresentada na equação 2.19 do Teorema 2.1 fornecem as condições apresentadas neste teorema. \square

Pode-se então fazer uso do Teorema 2.3 para escrever um problema de otimização convexa que busque os ganhos de um controlador fuzzy por modelo de referência.

Uma maneira possível de fazê-lo é aplicar o Teorema 2.3 sobre uma representação aumentada do sistema de modo que a saída de desempenho, \mathbf{z} , represente uma medida do erro entre a saída do sistema e a saída do modelo de referência.

Uma escolha interessante para tal saída de desempenho é utilizar a integral do erro entre o sistema e o modelo de referência, pois dessa maneira garante-se que o controlador terá uma ação integral e portanto irá garantir erro em estado estacionário nulo para uma entrada em degrau. Entretanto, para sistemas em que já exista um estado puramente integrador, tal garantia já é atendida naturalmente e não há

necessidade de se adicionar um integrador explicitamente ao sistema aumentado.

Além disso, em alguns casos, pode ser interessante adicionar também os sinais de controle multiplicados por uma matriz de pesos a saída de desempenho de modo a tornar a resposta do controlador menos agressiva.

Tendo essas observações em mente, uma maneira possível de se utilizar o Teorema 2.3 para se encontrar um controlador por modelo de referência é resumida a seguir.

Metodologia 2.1. *Considere um modelo fuzzy TS do sistema dado por:*

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{x}) [A_i \mathbf{x} + B_{u_i} \mathbf{u} + B_{w_i} \mathbf{w}], \\ \mathbf{y} &= \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{x}) [C_i \mathbf{x} + D_{u_i} \mathbf{u} + D_{w_i} \mathbf{w}],\end{aligned}\tag{2.3}$$

e o modelo de referência linear a ser seguido dado por:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_m &= A_m \mathbf{x}_m + B_m \mathbf{r}, \\ \mathbf{y}_m &= C_m \mathbf{x}_m + D_m \mathbf{r},\end{aligned}\tag{2.35}$$

com \mathbf{x}_m sendo os estados do modelo de referência, \mathbf{y}_m as saída do modelo de referência, e \mathbf{r} os sinais de referência. A única exigência em relação às dimensões de tais sinais é que \mathbf{y}_m e \mathbf{y} tenham a mesma dimensão.

Levando em conta as considerações realizadas anteriormente, pode-se escrever as equações do sistema aumentado como:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_{aug} &= \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{x}) \{ \bar{A}_i \mathbf{x}_{aug} + \bar{B}_{u_i} \mathbf{u} + \bar{B}_{w_i} \mathbf{w}_{aug} \}, \\ \mathbf{z} &= \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{x}) \{ \bar{C} \mathbf{x}_{aug} + \bar{D}_u \mathbf{u} + \bar{D}_{w_i} \mathbf{w}_{aug} \},\end{aligned}\tag{2.36}$$

$$\bar{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & 0 & 0 \\ 0 & A_m & 0 \\ C_i & -C_m & 0 \end{bmatrix},\tag{2.37}$$

$$\bar{B}_{u_i} = \begin{bmatrix} B_{u_i} \\ 0 \\ D_{u_i} \end{bmatrix},\tag{2.38}$$

$$\bar{B}_{w_i} = \begin{bmatrix} B_{u_i} N_j & B_{w_i} \\ B_m & 0 \\ -D_m & D_{w_i} \end{bmatrix},\tag{2.39}$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\tag{2.40}$$

$$\bar{D}_u = \begin{bmatrix} 0 \\ D_{zu} \end{bmatrix},\tag{2.41}$$

$$\bar{D}_{w_i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ D_{zu} N_j & 0 \end{bmatrix},\tag{2.42}$$

com $\mathbf{x}_{aug} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T & \mathbf{x}_m^T & \mathbf{e}_1^T \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{w}_{aug} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}^T & \mathbf{w}^T \end{bmatrix}^T$, D_{zu} é a matriz de pesos da ação de controle e N_j representam ganhos de ação direta do controlador.

Aplicando-se o Teorema 2.3 ao sistema aumentado da equação (2.36), sabe-se que os ganhos do controlador podem ser encontrados pelo seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} \min_{P_i, N_j, S_j, R, \delta} \quad & \delta \\ \bar{\Theta}_{ii} & \prec 0 & \forall i \in 1, \dots, r, \\ \bar{\Theta}_{ij} + \bar{\Theta}_{ji} & \prec 0 & \forall i < j, i, j \in 1, \dots, r, \\ P_i & \succ 0 & \forall i \in 1, \dots, r. \end{aligned}$$

Com

$$\bar{\Theta}_{ij} = \begin{bmatrix} -\bar{A}_i R - R^T \bar{A}_i^T - \bar{B}_{u_i} S_j - S_j^T \bar{B}_{u_i}^T & * & * & * \\ R^T + P_i - \mu \bar{A}_i R - \mu \bar{B}_{u_i} S_j & \mu(R + R^T) & * & * \\ -\bar{B}_{w_i}^T & -\mu \bar{B}_{w_i}^T & -I & * \\ \bar{C} R + \bar{D}_u S_j & 0 & \bar{D}_{w_i} & -\delta I \end{bmatrix},$$

e P_i seguindo a estrutura imposta no Teorema 2.1.

Os ganhos do controlador são encontrados fazendo-se:

$$K_j = S_j R^{-1},$$

tal que a lei de controle pode ser escrita como:

$$\mathbf{u} = \sum_{j=1}^r h_j(\mathbf{x}) \left[K_{1j} \mathbf{x} + K_{2j} \mathbf{x}_m + K_{3j} \int (\mathbf{y} - \mathbf{y}_m) dt + N_j \mathbf{r} \right], \quad (2.43)$$

em que, como o Teorema 2.3 foi aplicado sobre o sistema aumentado apresentado na equação (2.36), os ganhos do controlador podem ser divididos em ganhos relativos aos estados do sistema, K_{1j} , ganhos relativos aos estados do modelo de referência, K_{2j} , e ganhos relativos ao erro integral, K_{3j} .

2.4 Modelagem Takagi-Sugeno de Sistemas Dinâmicos

Em muitos casos, para se encontrar um modelo TS do sistema dinâmico na forma apresentada na equação (2.3) é preciso antes se encontrar um modelo quase-LPV (qLPV) do sistema. Após essa etapa, pode-se buscar encontrar um modelo exato ou aproximado, de maneira analítica ou por meio de técnicas numéricas como as apresentadas no Apêndice A.

Esta seção busca apresentar modificações na técnica de transformação do produto tensorial (Baranyi 2004) de modo a torná-la mais geral. Sendo assim, de modo que as metodologias desenvolvidas neste trabalho não fossem obscurecidas por uma explicação da transformação do produto tensorial, optou-se por apresentar uma breve explicação da técnica original. Para maiores detalhes sobre a técnica e os conceitos de álgebra multilinear necessários referencia-se o leitor ao Apêndice A.

2.4.1 Transformação do Produto Tensorial

A transformação do produto tensorial é uma técnica numérica que fornece aproximações convexas para funções, válidas dentro de um subespaço limitado do domínio da função a ser aproximada. Tais aproximações convexas podem ser representadas através de um polítopo de valores (não necessariamente pertencentes ao espaço imagem da função) cuja combinação convexa é capaz de representar o comportamento da função. Tal representação é equivalente a um modelo fuzzy TS da função.

Quando aplicada sobre um modelo qLPV de um sistema dinâmico, tal técnica é então capaz de encontrar uma representação fuzzy TS do sistema. Neste caso, temos um politopo de sistemas lineares, pois fixando os valores dos parâmetros do modelo qLPV, este se torna um modelo linear.

Essa técnica pode ser dividida em quatro etapas:

- **Amostragem e Representação Tensorial:** Define-se um grid de amostragem nas variáveis do domínio da função a ser aproximada, e armazena-se os valores da função para cada ponto do grid em um tensor, \mathcal{S}_d .
- **Decomposição de Valores Singulares de Alta Ordem:** Utiliza-se a Decomposição de Valores Singulares de Alta Ordem para decompor tal tensor apenas nas direções correspondentes às variáveis do domínio da função. Tal decomposição permite que o tensor de amostras da função seja escrito como um produto tensorial: $\mathcal{S}_d = \mathcal{S} \otimes_{n=1}^N U^{(n)}$. Em que $U^{(n)}$ representa os pesos relativos a variável n do grid de amostras e cada vetor coluna $\mathbf{u}_i^{(n)}$ representa uma função de peso diferente para essa variável.
- **Representações convexas:** Transforma-se as “matrizes de peso” de modo que elas tenham características de funções de pertinência normalizadas e outras características desejadas.
- **Aproximação para as matrizes de peso:** Tendo impostas as características desejadas sobre as matrizes de peso, aproxima-se tais matrizes por funções.

Exemplo 2.1. Considere as equações cinemáticas de um robô móvel com movimento restringido ao plano xy :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \cos(\theta), \\ \dot{y} &= v \sin(\theta), \\ \dot{\theta} &= w.\end{aligned}$$

Em que x é a posição do robô na direção x , y é a posição do robô na direção y , θ é o ângulo de guinada do robô, v é a velocidade de translação e w é a velocidade de rotação. Considerando que o vetor de estados do sistema é dado por $\mathbf{z} = [x \ y \ \theta]^T$, que o vetor de entradas é dado por $\mathbf{u} = [v \ w]^T$, e que o vetor de saídas é dado por $\mathbf{p} = [x \ y]^T$, pode-se escrever:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}} &= B(\mathbf{z})\mathbf{u} \\ \mathbf{p} &= C\mathbf{z} \\ B(\mathbf{z}) &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Das três variáveis que compõem o vetor de estados, apenas uma delas, θ , influencia as matrizes do sistema. Além disso, temos também que apenas a matriz B varia com este estado. As matrizes A e D são matrizes de zeros e por isso não aparecem nas equações acima, e a matriz C é uma matriz constante.

Sendo assim, a função que devemos aproximar nesse exemplo é $B(\theta)$ e sabemos que as outras matrizes serão as mesmas para os todos os sistemas vértices que forem encontrados no modelo final.

Como θ é o ângulo de guinada do robô móvel, sabe-se que $\theta \in [-\pi, \pi]$. Decidiu-se então por se utilizar um grid de 101 pontos para $\theta \in [-\pi, \pi]$. No caso deste exemplo, temos que $B(\theta) \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ e, portanto, com 101 amostras teremos um tensor $\mathcal{S}_d \in \mathbb{R}^{101 \times 3 \times 2}$.

Aplicando a Decomposição de Valores Singulares de Alta Ordem tem-se as funções de peso apresentadas na Figura 2.1. A função $B(\theta)$ pode ser recuperada fazendo-se

$$B(\theta) = \mathbf{u}_1^{(1)} B_1 + \mathbf{u}_2^{(1)} B_2 + \mathbf{u}_3^{(1)} B_3$$

com

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.2009 & 0 \\ 0.0000 & 0 \\ 0 & -10.0489 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} -7.1386 & 0 \\ 0.0000 & 0 \\ 0 & -0.1427 \end{bmatrix} \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0.0000 & 0 \\ -7.0711 & 0 \\ 0 & -0.0000 \end{bmatrix}$$

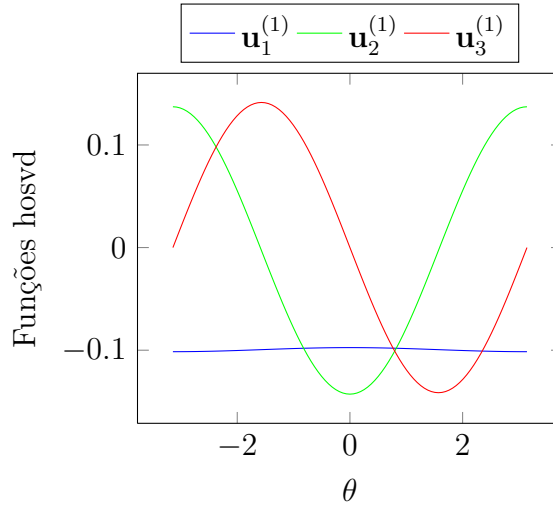


Figura 2.1: Funções de peso HOSVD obtidas no exemplo 2.1.

Entretanto, como visto na Figura 2.1, as funções de peso obtidas nessa etapa não apresentam as características de funções de pertinência e o modelo obtido não é equivalente a um modelo fuzzy TS.

Utilizando a transformação Normalizada Relaxada (RNO)-Normalizada Inversa (INO)³ sobre a matriz de peso, obtêm-se as funções de peso apresentadas na Figura 2.2.

A função $B(\theta)$ pode ser recuperada fazendo-se

$$B(\theta) = \mathbf{u}_1^{(1)} B_1 + \mathbf{u}_2^{(1)} B_2 + \mathbf{u}_3^{(1)} B_3$$

com

$$B_1 = \begin{bmatrix} -0.2968 & 0 \\ 1.9776 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1.8614 & 0 \\ -0.7324 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B_3 = \begin{bmatrix} -1.5641 & 0 \\ -1.2449 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como ambas as representações obtidas são equivalentes, elas possuem o mesmo erro de representação para os pontos pertencentes ao grid. Nesse exemplo, tal erro é de $1,2321 \times 10^{-25}$.

³Apresentada no Apêndice A.

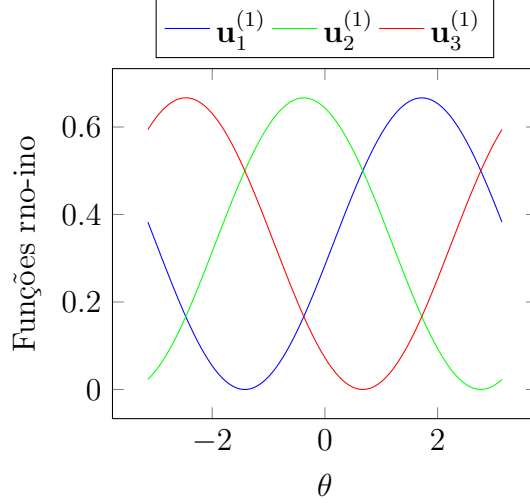


Figura 2.2: Funções de peso RNO-INO obtidas no exemplo 2.1.

2.4.2 Modificações Propostas

Dado um modelo na forma

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= f(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \\ \mathbf{y} &= g(\mathbf{x}, \mathbf{u});\end{aligned}\tag{2.44}$$

deseja-se encontrar um modelo qLPV:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= A(\mathbf{x})\mathbf{x} + B(\mathbf{x})\mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= C(\mathbf{x})\mathbf{x} + D(\mathbf{x})\mathbf{u}.\end{aligned}\tag{2.45}$$

Em alguns casos, tal representação pode ser facilmente encontrada através de manipulações matemáticas, enquanto que em outros casos tal abordagem pode ser pouco óbvia devido a um grande número de não-linearidades, ou ao modelo não ser afim nas entradas de controle. Para esses casos, na Metodologia apresentada a seguir, propõe-se algumas modificações à transformação do produto tensorial de modo que, dado um modelo do sistema na forma apresentada em (2.44), se encontre um modelo TS tal que:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{x}) [A_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(\mathbf{x})) + B_{u_i}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0(\mathbf{x}))], \\ \mathbf{y} - \mathbf{y}_0(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{x}) [C_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(\mathbf{x})) + D_{u_i}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0(\mathbf{x}))],\end{aligned}\tag{2.46}$$

no qual $\mathbf{x}_0(\mathbf{x})$ e $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ representam uma transformação não-linear da entrada e dos estados para as “coordenadas de equilíbrio” mais próximas do estado atual do sistema.

Além disso, para o desenvolvimento a seguir, considera-se que um par de equilíbrio $(\mathbf{x}^{eq}, \mathbf{u}^{eq})$ é composto pelos estados e ações de controle tais que $f(\mathbf{x}^{eq}, \mathbf{u}^{eq}) = 0$.

Metodologia 2.2. *Considerando que a transformação do produto tensorial*⁴ (Baranyi 2004) *é dividida nas etapas de Amostragem e Representação tensorial, Decomposição de Valores Singulares de Alta Ordem (HOSVD), Representações convexas e Aproximações para as matrizes de peso, propõe-se algumas*

⁴Conforme apresentado no apêndice A.

alterações a essas etapas de modo que dado um modelo na forma (2.44), encontre-se um modelo na forma (2.46).

As seguintes modificações são propostas para a etapa de Amostragem e Representação tensorial:

- Para cada ponto do grid de amostragem monta-se um vetor de estados, \mathbf{x}_p , composto pelos estados representados no grid e zeros nos estados livres (aqueles que não influenciam os parâmetros do modelo);
- Procura-se pelo par de equilíbrio ($\mathbf{x}^{eq}, \mathbf{u}^{eq}$) mais próximo ao ponto \mathbf{x}_p e os estados livres de \mathbf{x}_p são substituídos pelos seus equivalentes em \mathbf{x}^{eq} ;
- Lineariza-se o sistema em torno do par ($\mathbf{x}_p, \mathbf{u}^{eq}$). Como este não é necessariamente um ponto de equilíbrio, obtêm-se um modelo local afim no formato:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) + B(\mathbf{u} - \mathbf{u}^{eq}) + f(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}^{eq}), \\ \mathbf{y} &= C(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) + D(\mathbf{u} - \mathbf{u}^{eq}) + g(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}^{eq});\end{aligned}$$

- Encontra-se a mudança de variáveis necessária para se linearizar este modelo afim resolvendo-se o sistema linear:

$$\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_x \\ \mathbf{d}_u \end{bmatrix} = -f(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}^{eq});$$

- Chega-se em um modelo da forma:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + B(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0), \\ \mathbf{y} - \mathbf{y}_0 &= C(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + D(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0),\end{aligned}$$

onde $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_p + \mathbf{d}_x$, $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}^{eq} + \mathbf{d}_u$ e $\mathbf{y}_0 = g(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}^{eq}) + C\mathbf{d}_x + D\mathbf{d}_u$;

- Utilizam-se as matrizes A , B , C e D para compor um tensor, \mathcal{S}_d e os vetores \mathbf{x}_0 , \mathbf{u}_0 e \mathbf{y}_0 para compor outro tensor, \mathcal{S}_{d0} . Tal separação é feita na expectativa de se reduzir o número de regras necessárias para representar o tensor \mathcal{S}_d .

O restante dos passos da técnica são então aplicados separadamente sobre os dois tensores. Entretanto, é interessante ressaltar que para o tensor \mathcal{S}_{d0} não é necessário se encontrar uma representação TS e portanto a etapa Representações convexas não é necessária para esse tensor.

No final das etapas da transformação do produto tensorial, tem-se então que:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} A(\mathbf{x}) & B(\mathbf{x}) \\ C(\mathbf{x}) & D(\mathbf{x}) \end{bmatrix} &\approx \mathcal{S} \underset{n=1}{\otimes}^N \mathbf{u}^{(n)}(\mathbf{x}), \\ \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{y}_0 \end{bmatrix} &\approx \mathcal{S}_0 \underset{n=1}{\otimes}^N \mathbf{q}^{(n)}(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

É possível então escrever um modelo na forma da equação (2.46). Se tal modelo for utilizado em conjunto com a metodologia 2.1, a seguinte modificação na ação de controle será necessária:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{y}_0 \end{bmatrix} = \mathcal{S}_0 \underset{n=1}{\otimes}^N \mathbf{q}^{(n)}(\mathbf{x}),$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \sum_{j=1}^r h_j(\mathbf{x}) \left[K_{1_j}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + K_{2_j}(\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_{m_0}) + K_{3_j} \int (\mathbf{y} - \mathbf{y}_m) dt + N_j(\mathbf{r} - \mathbf{y}_0) \right], \quad (2.47)$$

com \mathbf{x}_{m_0} obtido a partir das relações existentes entre \mathbf{x} , \mathbf{x}_m e \mathbf{y} .

2.5 Conclusões

Ao longo deste capítulo, as Metodologias desenvolvidas durante este trabalho foram apresentadas.

Uma derivação um pouco diferente da função de Lyapunov fuzzy utilizada (Rhee e Won 2006) foi apresentada, seguida de uma modificação das condições de síntese utilizadas nos trabalhos (Mozelli, Palhares e Avellar 2009; Mozelli et al. 2010) de modo que elas pudessem ser utilizadas para o problema de controle \mathcal{H}_∞ .

Por fim, as contribuições principais deste trabalho foram apresentadas na forma das Metodologias 2.1 e 2.2, sendo elas respectivamente a aplicação das condições de síntese no contexto de síntese de controladores baseados em modelos de referência e uma modificação à técnica de transformação do produto tensorial de modo que ela fosse capaz de encontrar modelos fuzzy TS na forma (2.46) dado um modelo na forma (2.44).

Capítulo 3

Sincronismo de Osciladores Caóticos Utilizando Modelo de Referência

A sincronização de processos auto-oscilatórios é um fenômeno não-linear fundamental que tem atraído a atenção de pesquisadores já a alguns séculos, desde que C. Hyugens descreveu-a para sistemas mecânicos acoplados. Nas últimas décadas, estudos nessa área têm se focado na sincronização de oscilações caóticas auto-sustentadas em conjunção com o interesse crescente, em física não-linear, no problema do caos determinístico e várias aplicações da teoria do caos. O desenvolvimento da teoria do caos dinâmico naturalmente levou a investigações sobre sincronização caótica, que decorre de sua grande importância fundamental e grande aplicabilidade para a transmissão segura de informações, na biologia, na fisiologia e nos problemas químicos, para o gerenciamento do caos e outras aplicações. *Tradução livre de trecho encontrado em (Koronovskii, Moskalenko e Hramov 2009)*

A sincronização de osciladores caóticos é um problema que vem sendo estudado nos últimos anos, especialmente sua aplicação à transmissão segura de informação, e para o qual várias estratégias foram propostas, como as apresentadas em (Koronovskii, Moskalenko e Hramov 2009; Mozelli et al. 2007; Torres e Aguirre 2004).

Entretanto, a maior parte desses trabalhos não apresenta considerações sobre o efeito da distorção introduzida pelo canal de transmissão entre o oscilador mestre e o oscilador escravo, ou, se apresenta, tais considerações são mais experimentais do que teóricas.

Neste capítulo propõe-se uma estratégia de sincronização de osciladores caóticos, considerando o efeito do canal de transmissão, baseada em um modelo de referência para o oscilador escravo.

3.1 Descrição do Problema

O problema a ser resolvido neste capítulo é o seguinte: dados dois osciladores conectados unidirecionalmente (topologia mestre-escravo) por um canal de transmissão modelado como um filtro de primeira ordem, encontrar um controlador por modelo de referência que leve o oscilador escravo a seguir o oscilador mestre.

Outros trabalhos, como (Park, Lee e Park 2002), também utilizam controle por modelo de referência para a sincronização de osciladores caóticos, entretanto, como dito anteriormente, tais trabalhos não consideram a existência de um canal de transmissão com distorção entre os dois osciladores.

Para isso, propõe-se uma estratégia que busca equalizar as distorções introduzidas pelo canal de

comunicação utilizando a malha fechada. Como assume-se que o filtro de transmissão é um filtro de primeira ordem, é possível se encontrar uma realização para o modelo do filtro de modo que os estados do modelo sejam iguais às saídas. O canal de transmissão é então utilizado como modelo de referência de um sistema composto pelo oscilador escravo aumentado com um modelo do canal de comunicação em sua saída. Desse modo, busca-se minimizar a diferença entre a saída do sistema aumentado (saída do modelo do canal de transmissão) e o modelo de referência (o canal de transmissão original).

Entretanto, diferentemente da estratégia proposta na Metodologia 2.1, o controlador não tem acesso ao sinal de referência (que excita o modelo de referência) e, portanto, a estratégia aqui proposta não faz uso dos ganhos N_j presentes na lei de controle (2.43).

Levando isso em consideração, pode-se representar a estratégia de sincronização de maneira genérica como apresentado na Figura 3.1.

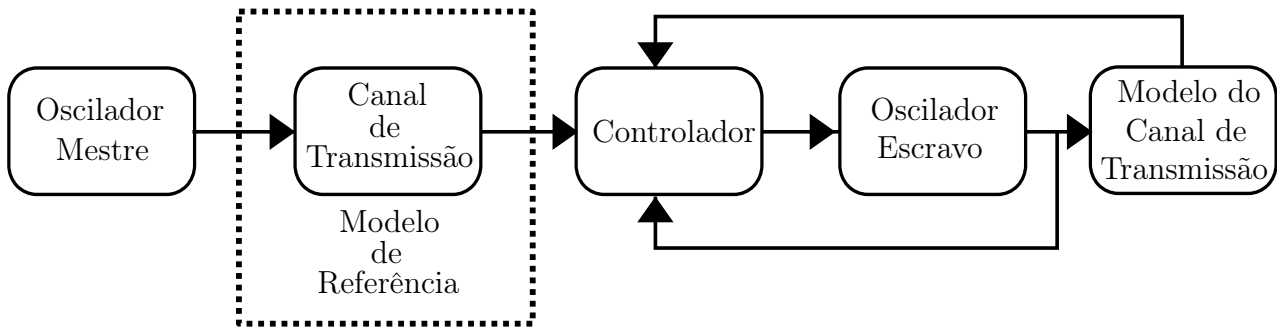


Figura 3.1: Diagrama da estratégia de sincronismo.

A fim de exemplificar a estratégia de sincronismo proposta foram utilizados dois modelos idênticos de circuitos de Chua para os osciladores mestre e escravo. Um diagrama esquemático para esse sistema caótico é apresentado na Figura 3.2.

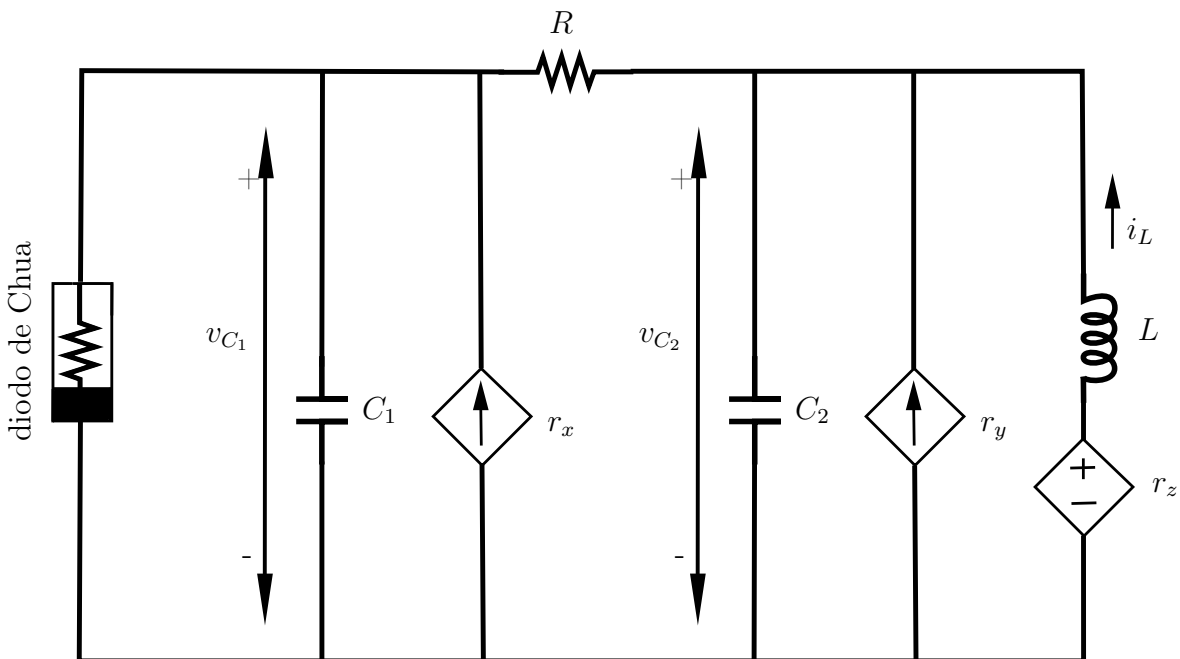


Figura 3.2: Diagrama do circuito de Chua.

Seguindo as convenções adotadas na figura, o circuito de Chua pode ser representado de acordo com

as equações:

$$\begin{aligned}\dot{v}_{C_1} &= \frac{1}{C_1} \left\{ \frac{v_{C_2} - v_{C_1}}{R} - G(v_{C_1})v_{C_1} + r_x \right\}, \\ \dot{v}_{C_2} &= \frac{1}{C_2} \left\{ \frac{v_{C_1} - v_{C_2}}{R} + i_L + r_y \right\}, \\ \dot{i}_L &= \frac{1}{L} \{-v_{C_2} + R_L i_L + r_z\}.\end{aligned}\tag{3.1}$$

$$\tag{3.2}$$

onde R_L é a resistência parasita do indutor, $G(v_{C_1})$ é a condutância do diodo de Chua e as outras variáveis são como mostradas na figura.

A condutância não-linear, $G(v_{C_1})$ é dada por:

$$G(v_{C_1}) = \begin{cases} G_a & , \quad -E \leq v_{C_1} \leq E \\ G_b + \frac{(G_a - G_b)E}{|v_{C_1}|} & , \quad \text{caso contrário} \end{cases}\tag{3.3}$$

Considera-se que todos os estados do oscilador mestre são enviados por um canal de transmissão modelado como:

$$\begin{aligned}\dot{v}_{C_{1f}} &= -2\pi f v_{C_{1f}} + 2\pi f v_{C_{1m}}, \\ \dot{v}_{C_{2f}} &= -2\pi f v_{C_{2f}} + 2\pi f v_{C_{2m}}, \\ \dot{i}_{Lf} &= -2\pi f i_{Lf} + 2\pi f i_{Lm}.\end{aligned}\tag{3.4}$$

onde f é a frequência de corte do filtro (igual para todos os canais), $v_{C_{1m}}$, $v_{C_{2m}}$ e i_{Lm} são os sinais enviados pelo oscilador mestre e $v_{C_{1f}}$, $v_{C_{2f}}$ e i_{Lf} são os sinais recebidos após o canal de transmissão.

Utilizando uma representação em espaço de estados, as equações do canal de transmissão podem ser escritas como:

$$\begin{aligned}\dot{x}_f &= A_f x_f + B_f u_f, \\ A_f &= \begin{bmatrix} -2\pi f & 0 & 0 \\ 0 & -2\pi f & 0 \\ 0 & 0 & -2\pi f \end{bmatrix}, \\ B_f &= \begin{bmatrix} 2\pi f & 0 & 0 \\ 0 & 2\pi f & 0 \\ 0 & 0 & 2\pi f \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{3.5}$$

Foram utilizados os parâmetros apresentados em (Mozelli 2008) para os circuitos mestre e escravo: $C_1 = 30,14\mu F$, $C_2 = 185,6\mu F$, $L = 52,28H$, $R = 1673\Omega$, $R_L = 0\Omega$, $G_a = -0,801mS$, $G_b = -0,365mS$, $E = 1,74V$.

Além disso, analisando o conteúdo espectral dos sinais transmitidos pelo mestre (Figuras 3.3 a 3.5), percebe-se que a maior parte do sinal encontra-se abaixo de 2 Hz. Por isso, considerou-se que a frequência de corte do filtro $f = 2$ Hz.

3.2 Modelagem Fuzzy do Circuito de Chua

De modo a utilizar a metodologia 2.1, é necessário primeiramente obter um modelo fuzzy TS do sistema. Como o circuito de Chua apresenta apenas uma não-linearidade, conforme apresentado na equação (3.1), pode-se encontrar um modelo exato com apenas duas regras seguindo-se os passos apresentados em (Tanaka e Wang 2001).

As regras do modelo são:

1. Se v_{C_1} é “próximo de zero” (com função de pertinência Φ_1) então:

$$\dot{\mathbf{x}} = A_1 \mathbf{x} + B \mathbf{u},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} \frac{-1 - RG_a}{RC_1} & \frac{1}{RC_1} & 0 \\ \frac{1}{RC_2} & \frac{-1}{RC_2} & \frac{1}{C_2} \\ 0 & \frac{-1}{L} & \frac{-R_L}{L} \end{bmatrix},$$

$$B = I;$$

2. Se v_{C_1} é “distante de zero” (com função de pertinência Φ_2) então:

$$\dot{\mathbf{x}} = A_2 \mathbf{x} + B \mathbf{u},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \frac{-1 - RG_c}{RC_1} & \frac{1}{RC_1} & 0 \\ \frac{1}{RC_2} & \frac{-1}{RC_2} & \frac{1}{C_2} \\ 0 & \frac{-1}{L} & \frac{-R_L}{L} \end{bmatrix},$$

$$B = I.$$

com $\mathbf{x} = [v_{C_1} \ v_{C_2} \ i_L]^T$, $\mathbf{u} = [r_x \ r_y \ r_z]^T$, e

$$G_c = G_b + \frac{(G_a - G_b)E}{d},$$

$$\Phi_1 = \begin{cases} 1 & , \quad -E \leq v_{C_1} \leq E \\ \frac{E}{|v_{C_1}|} \frac{(d - |v_{C_1}|)}{(d - E)} & , \quad \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\Phi_2 = \begin{cases} 0 & , \quad -E \leq v_{C_1} \leq E \\ \frac{d}{|v_{C_1}|} \frac{(|v_{C_1}| - E)}{(d - E)} & , \quad \text{caso contrário} \end{cases}.$$

onde d representa o valor máximo que espera-se que $|v_{C_1}|$ atinja.

Para o sistema utilizado, $d = 6V$ e as funções de pertinência são como as mostradas na Figura 3.6.

Como a não-linearidade do sistema é atribuída somente à característica não-linear da condutância do diodo de Chua, uma maneira de se visualizar a capacidade de aproximação do modelo obtido é apresentada na Figura 3.7. Percebe-se pela figura que, como esperado, o modelo obtido é exato.

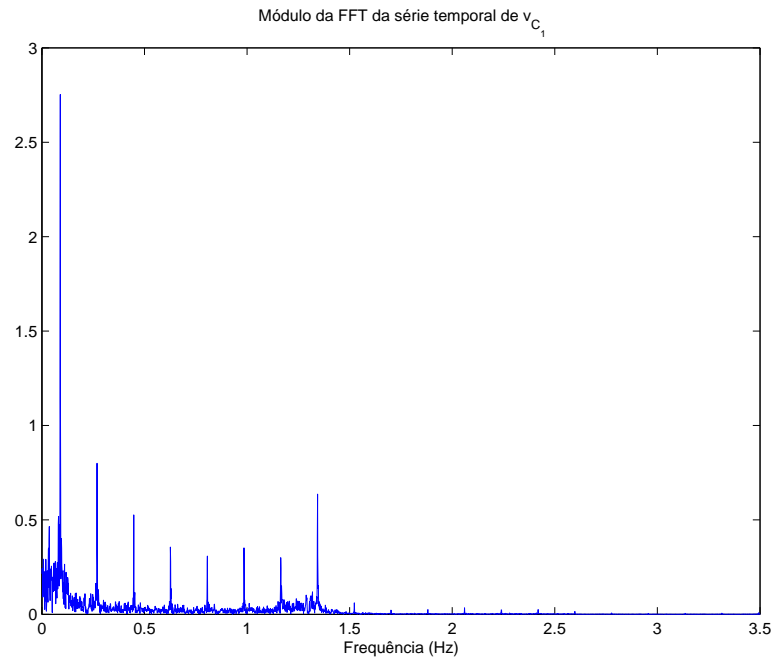


Figura 3.3: Módulo da FFT da série temporal de v_{C_1} .

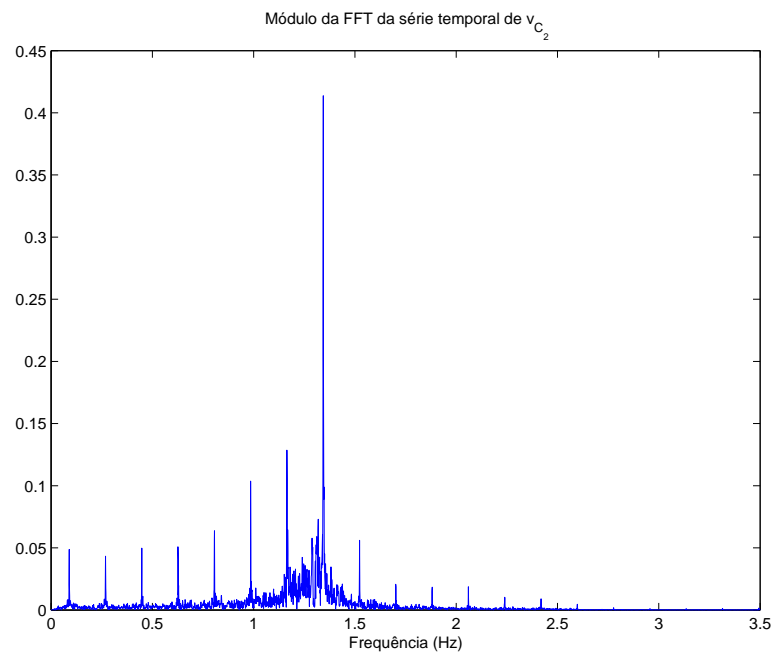


Figura 3.4: Módulo da FFT da série temporal de v_{C_2} .

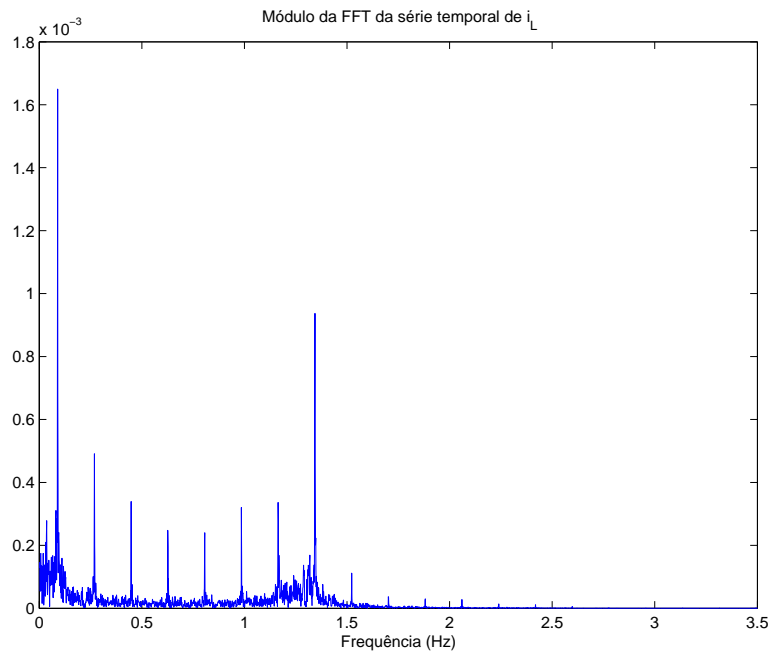


Figura 3.5: Módulo da FFT da série temporal de i_L .

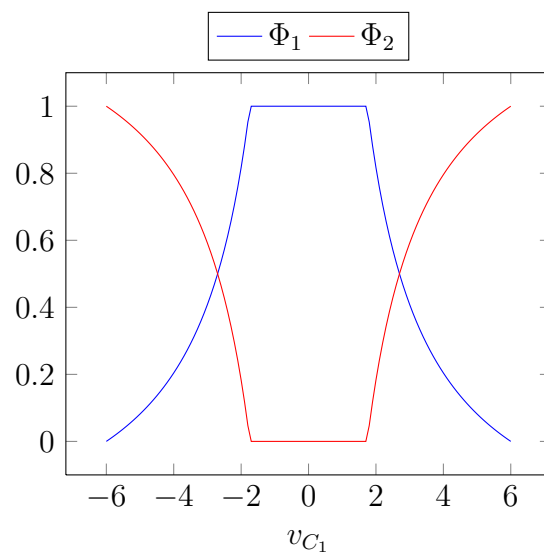


Figura 3.6: Funções de pertinência do circuito de Chua.

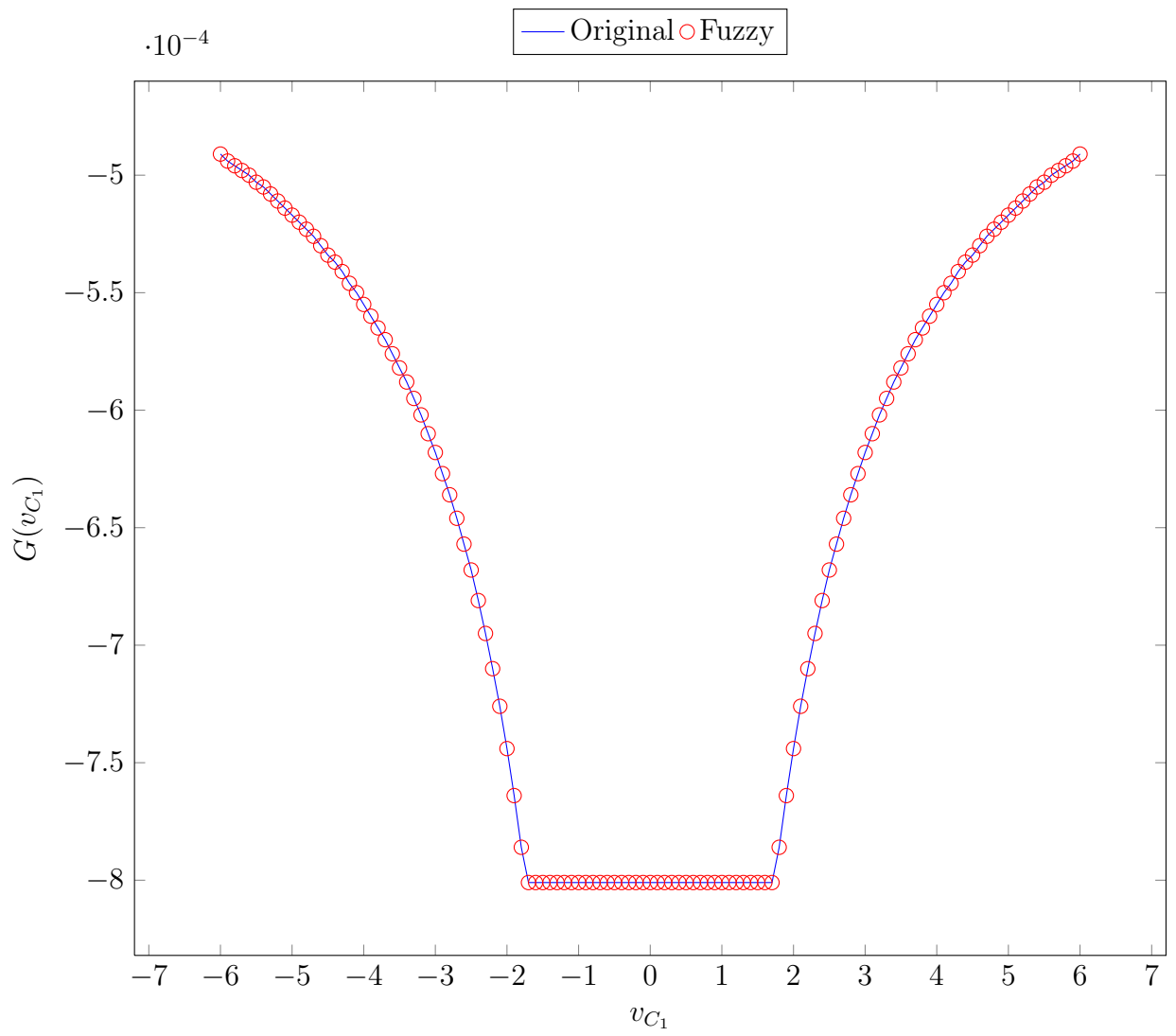


Figura 3.7: Condutância do diodo de Chua. Função original e modelo fuzzy.

3.3 Obtenção do Controlador e Simulações

Tendo uma representação fuzzy TS do circuito escravo, é possível criar um sistema aumentado para utilizar uma estratégia de acordo com a apresentada na Figura 3.1. Utilizando $A_e(x)$ e B_e como as matrizes de estado do circuito escravo (onde $A_e(x)$ e B_e representam as matrizes A_1 , A_2 e B_e da seção anterior) e A_f e B_f como as matrizes de estado do canal de comunicação, como as apresentadas na equação (3.5), pode-se escrever as equações do sistema aumentado como:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_{ef} &= \begin{bmatrix} A_e(x) & 0 \\ B_f & A_f \end{bmatrix} \mathbf{x}_{ef} + \begin{bmatrix} B_e \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \mathbf{x}_{ef},\end{aligned}\quad (3.6)$$

com $\mathbf{x}_{ef} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T & \mathbf{x}_f^T \end{bmatrix}^T$.

Conforme apresentado no diagrama da Figura 3.1, utiliza-se o sistema da equação (3.6) como o sistema a ser controlado, e as equações do filtro (3.4) como o modelo de referência para a malha fechada por meio da Metodologia 2.1.

A partir da representação do sistema aumentado e do modelo de referência, o pacote YALMIP (Löfberg 2004) foi utilizado para encontrar os ganhos do controlador. Para a síntese do controlador, não foi utilizada uma matriz de pesos para a entrada (ou seja, $D_{zu} = 0$) e utilizou-se, arbitrariamente, $\mu = 0,4$.

Os seguintes ganhos foram encontrados para o controlador:

$$K_{1_1} = \begin{bmatrix} -376.38 & -19.8704 & 0.0427629 & -5360.28 & -1.09093 \\ -3.24184 & -366.358 & -5392.85 & -0.891473 & -5360.22 \end{bmatrix} \quad K_{2_1} = \begin{bmatrix} 5360.39 & 1.09298 \\ 0.882205 & 5360.35 \end{bmatrix}$$

$$K_{3_1} = \begin{bmatrix} -646404 & -273.977 \\ -244.583 & -646523 \end{bmatrix}$$

$$K_{1_2} = \begin{bmatrix} -366.066 & -19.8499 & 0.0394976 & -5359.78 & -0.824461 \\ -3.22735 & -366.293 & -5392.85 & -0.702558 & -5359.38 \end{bmatrix} \quad K_{2_2} = \begin{bmatrix} 5359.9 & 0.826716 \\ 0.693627 & 5359.51 \end{bmatrix}$$

$$K_{3_2} = \begin{bmatrix} -646267 & -231.257 \\ -214.395 & -646388 \end{bmatrix}$$

Nota-se que, por não ter sido incluído peso sobre a ação de controle, foram encontrados ganhos com valores muito altos. Uma solução possível para tal problema seria o uso de controladores sub-ótimos (em relação ao limitante superior da norma \mathcal{H}_∞) ou a inserção de um peso sobre o sinal de controle. Entretanto, o uso de tais estratégias implicaria em um erro maior e, sendo assim, optou-se por utilizar o controlador apresentado apesar dos valores altos.

Foram realizadas duas simulações diferentes para avaliar o desempenho do controlador. Em ambas as simulações os estados iniciais utilizadas foram $v_{C_1} = 0,1$ V, $v_{C_2} = 0,1$ V e $i_L = 0$ mA para o escravo e $v_{C_1} = 0,1$ V, $v_{C_2} = 0,6$ V e $i_L = 0$ mA para o mestre.

Na primeira simulação, representada nas Figuras 3.8 e 3.10 a 3.15, não foi utilizado nenhum sinal de perturbação nas entradas do oscilador mestre.

Na segunda simulação, representada nas Figuras 3.9 e 3.16 a 3.21, foram utilizados os sinais: $r_{x_m} = 3 \text{ sen}(0,2\pi t)$, $r_{y_m} = 3 \text{ sen}(0,2\pi t + 2\pi/3)$ e $r_{z_m} = 1 \times 10^{-3} \text{ sen}(0,2\pi t + 4\pi/3)$.

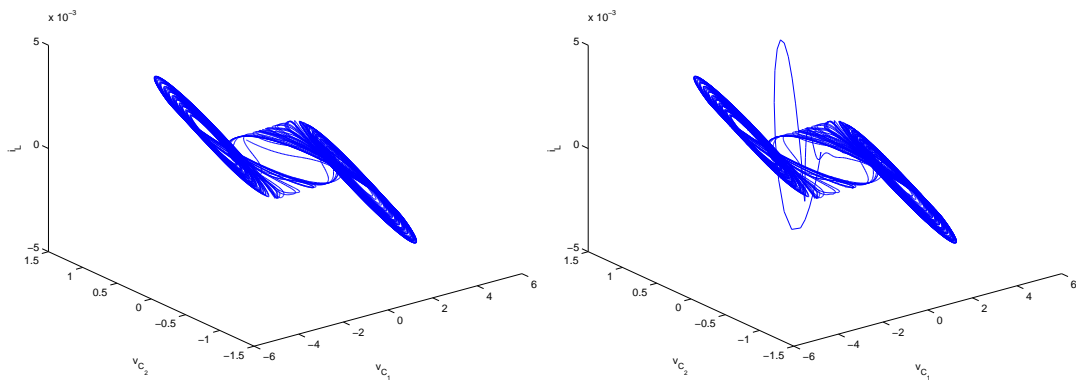


Figura 3.8: Trajetórias no espaço de estados dos osciladores mestre (esquerda) e escravo (direita). Simulação sem sinal de excitação no oscilador mestre.

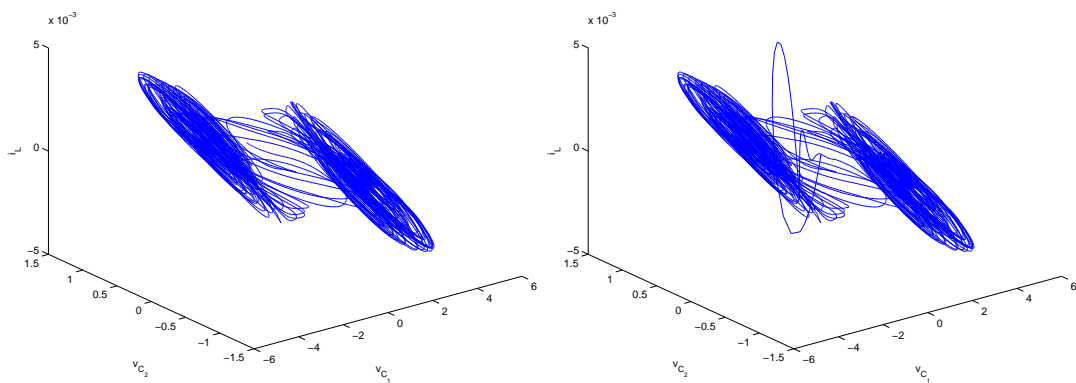


Figura 3.9: Trajetórias no espaço de estados dos osciladores mestre (esquerda) e escravo (direita). Simulação com sinal de excitação no oscilador mestre.

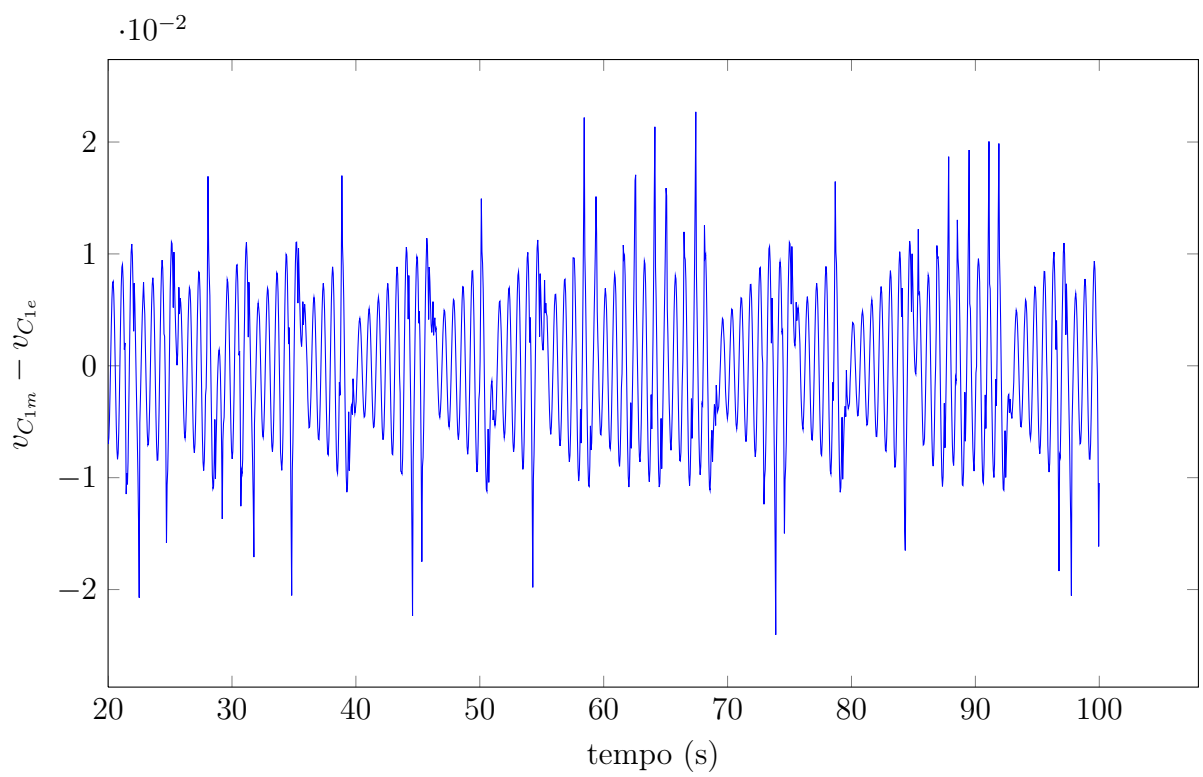
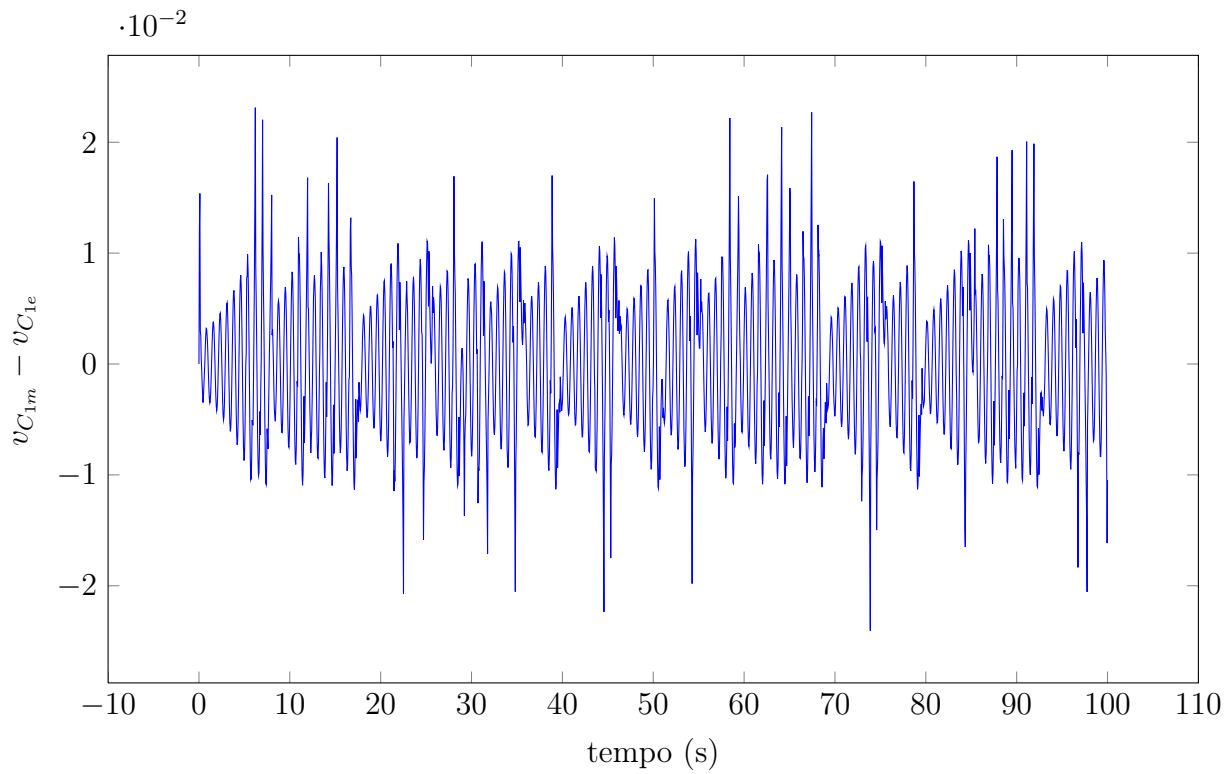


Figura 3.10: Erro de sincronismo da variável v_{C_1} . Simulação sem sinal de excitação no oscilador mestre.

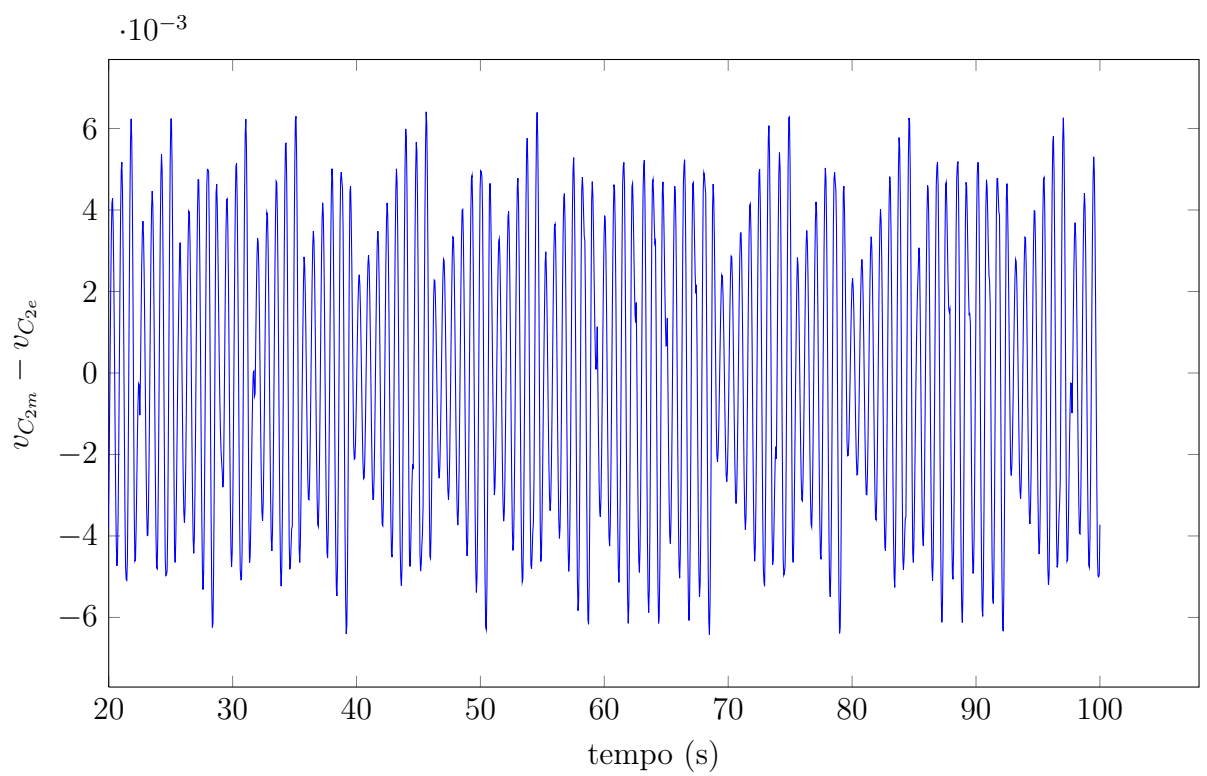
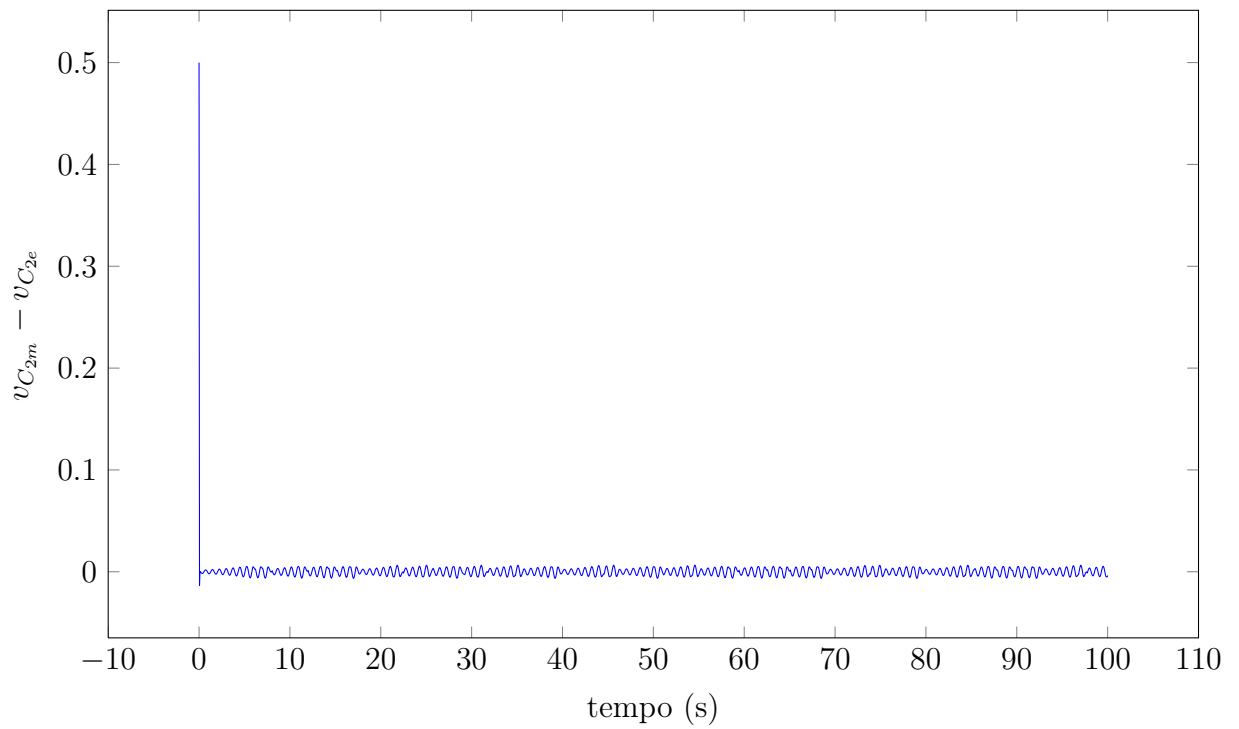


Figura 3.11: Erro de sincronismo da variável v_{C_2} . Simulação sem sinal de excitação no oscilador mestre.

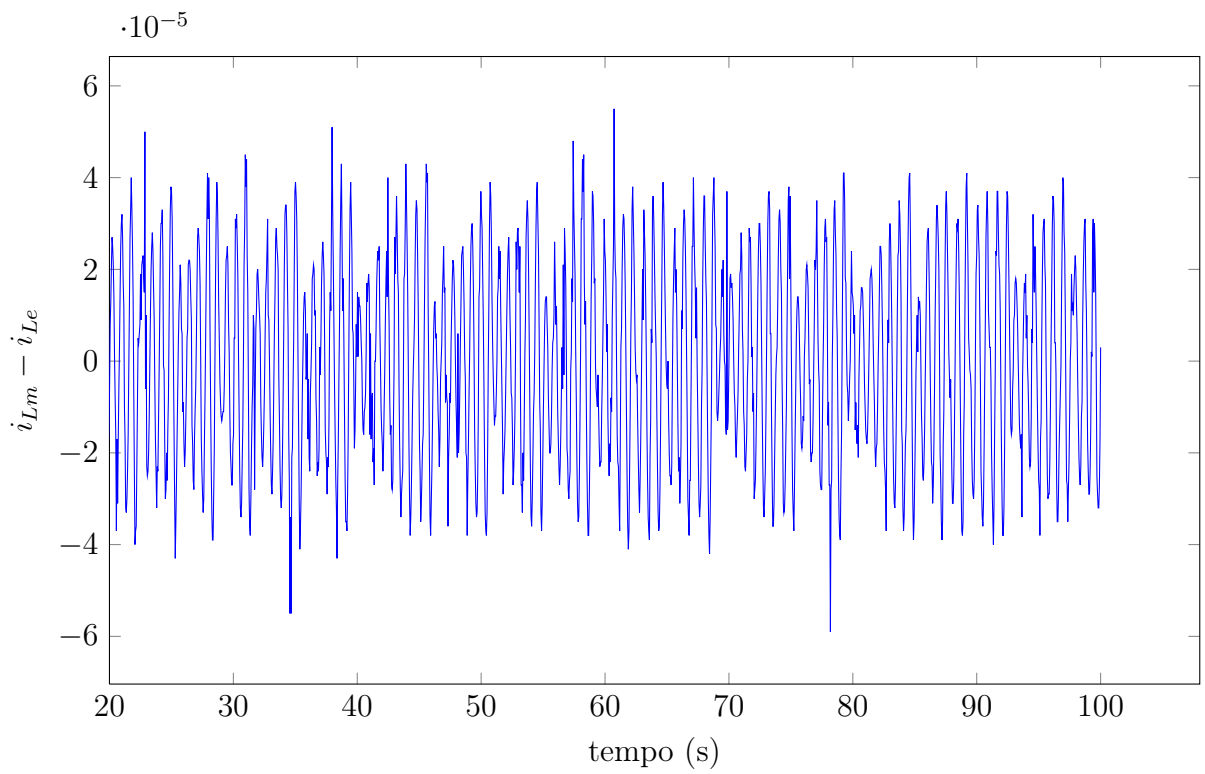
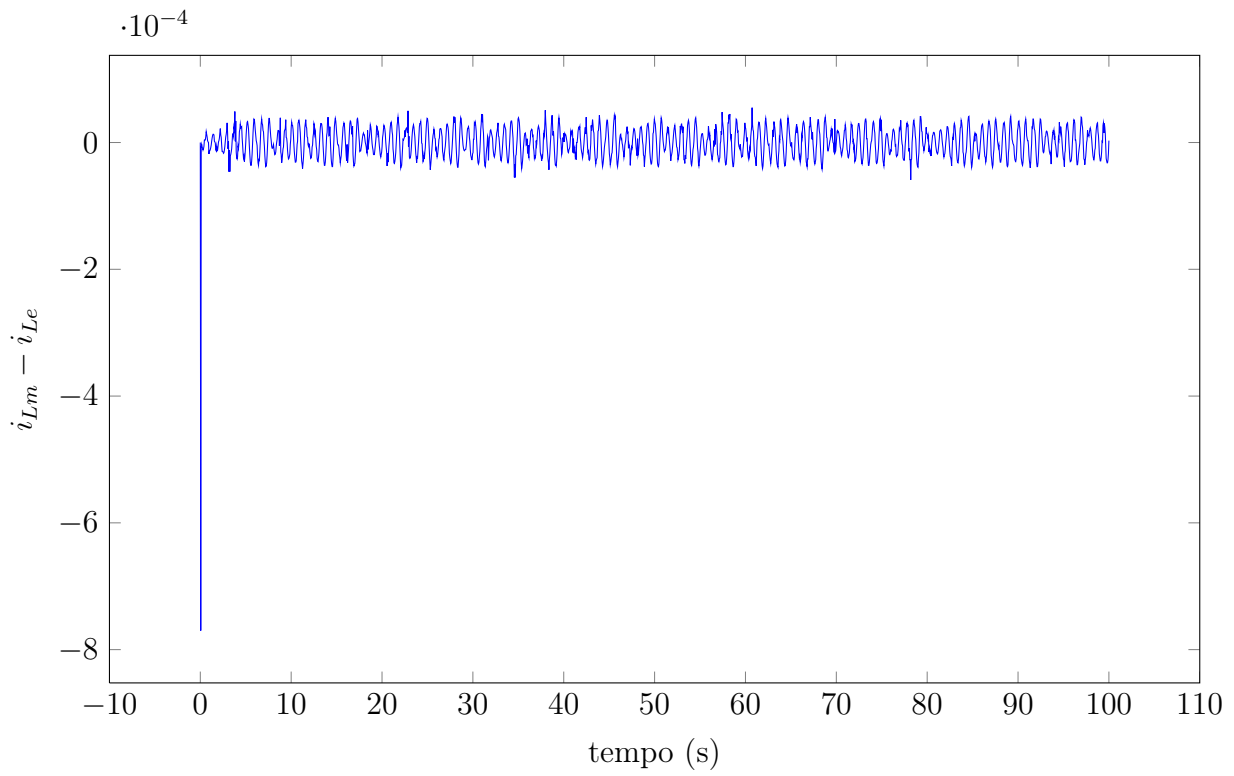


Figura 3.12: Erro de sincronismo da variável i_L . Simulação sem sinal de excitação no oscilador mestre.

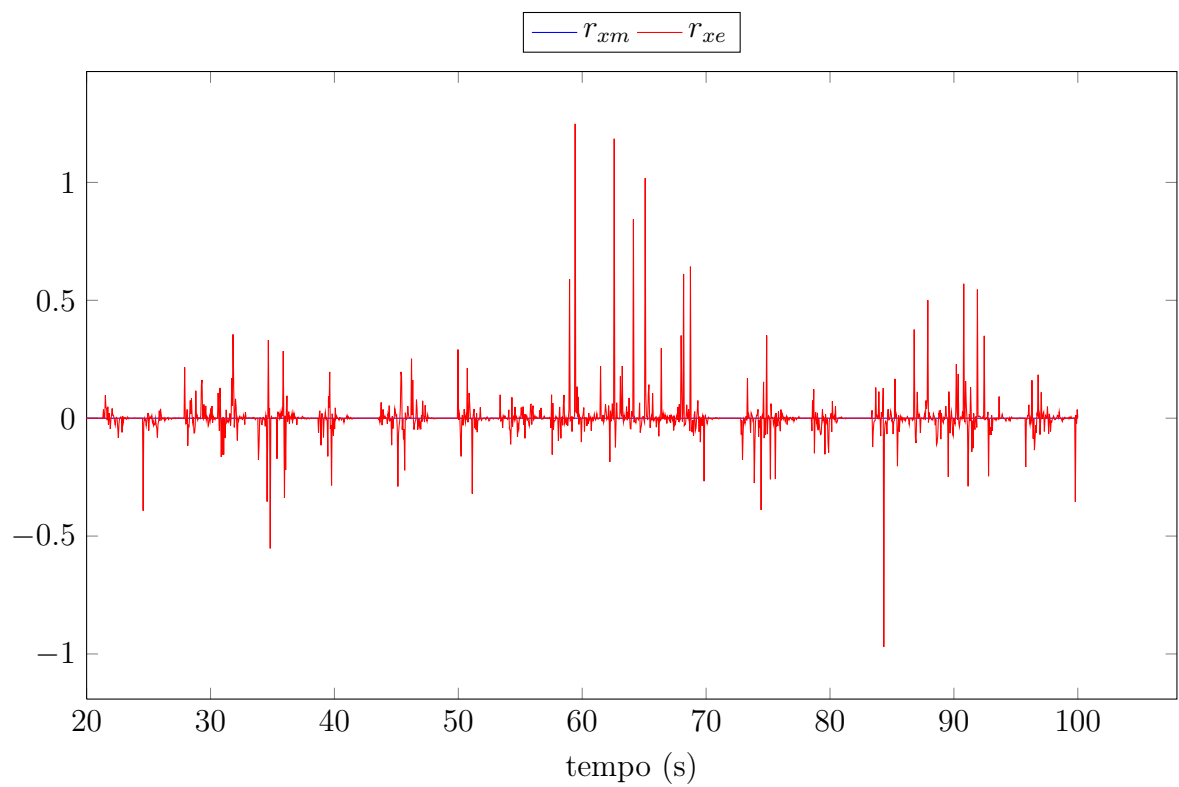
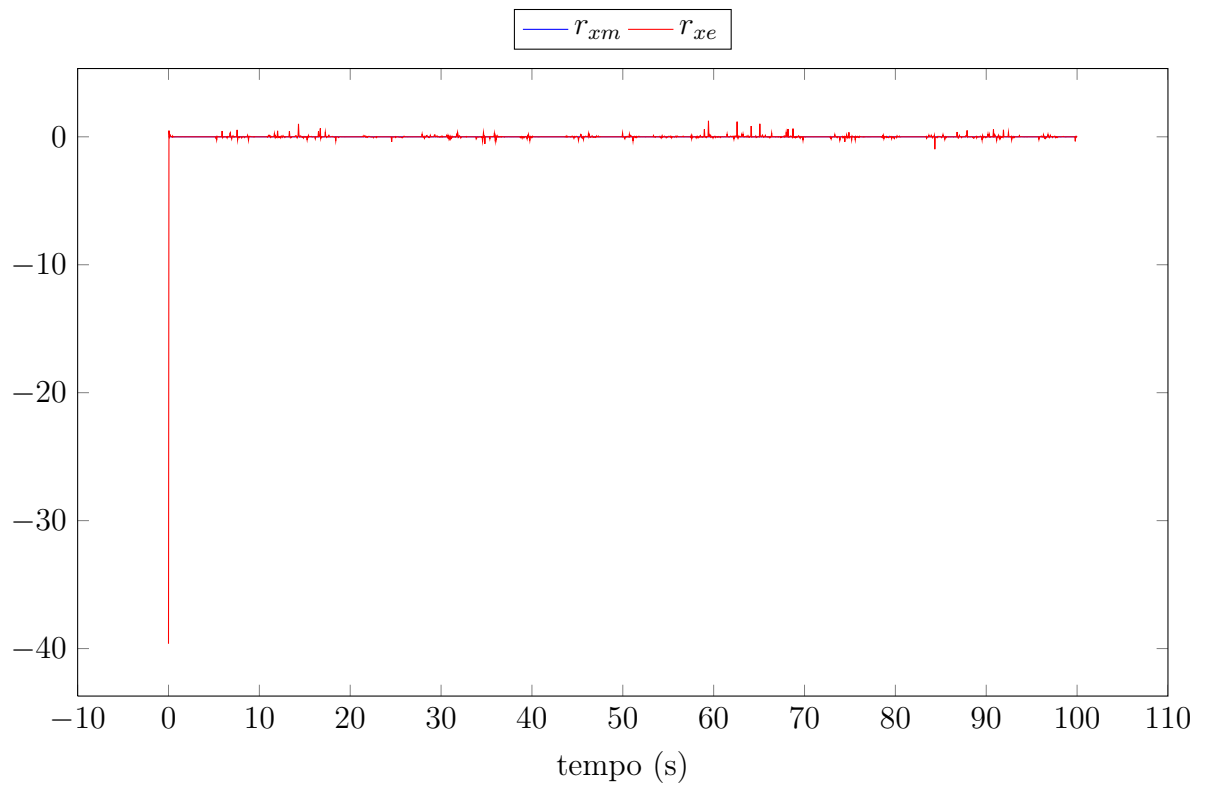


Figura 3.13: Ação de controle r_x . Simulação sem sinal de excitação no oscilador mestre.

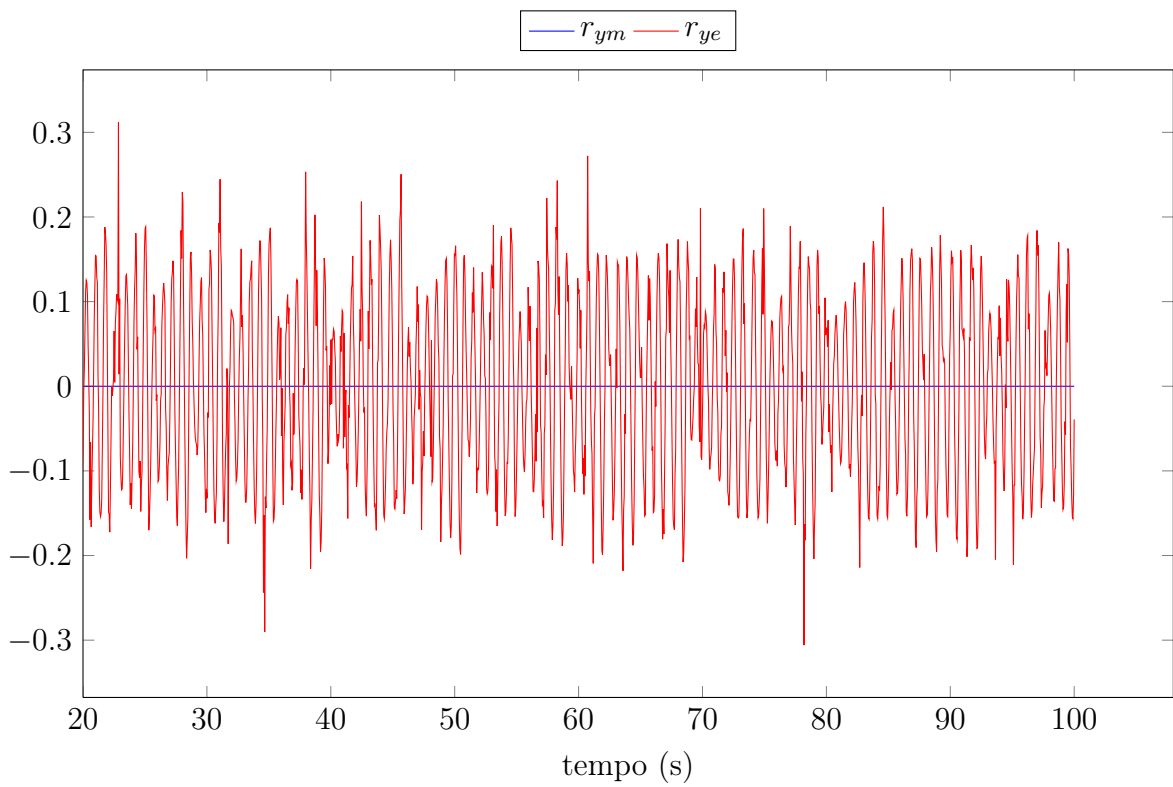
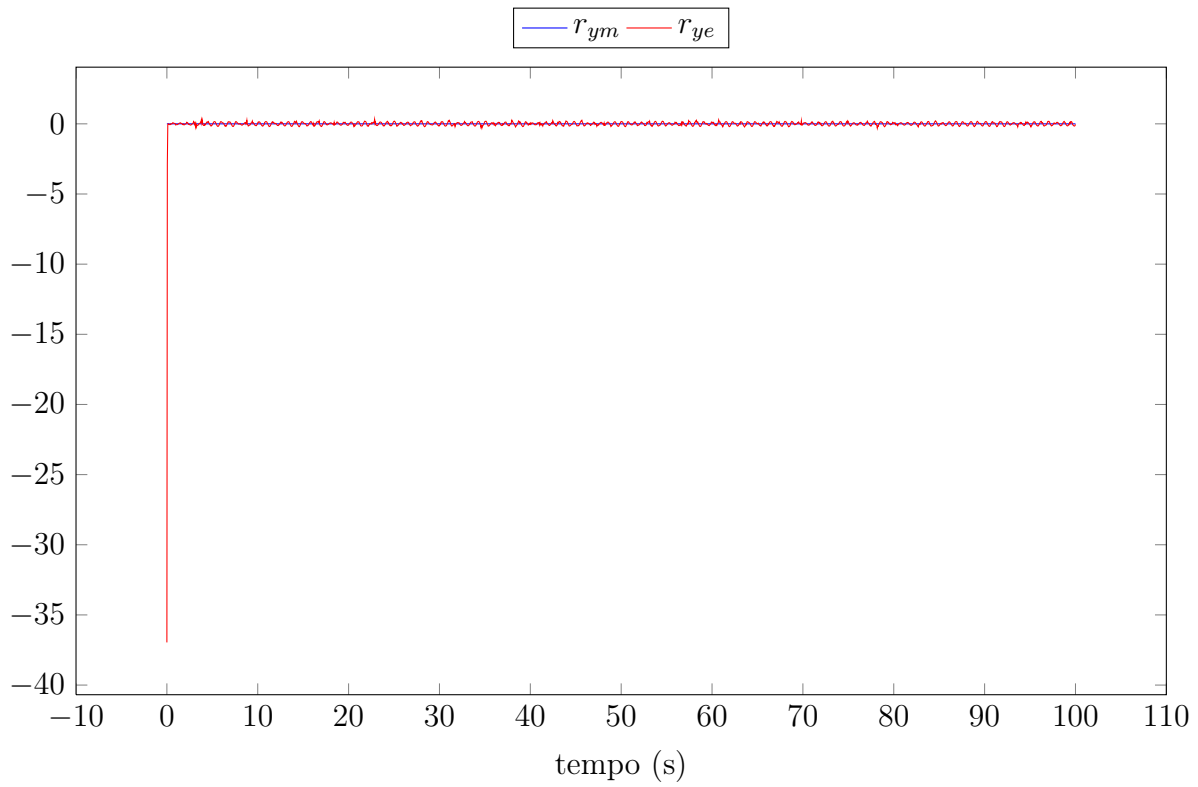


Figura 3.14: Ação de controle r_y . Simulação sem sinal de excitação no oscilador mestre.

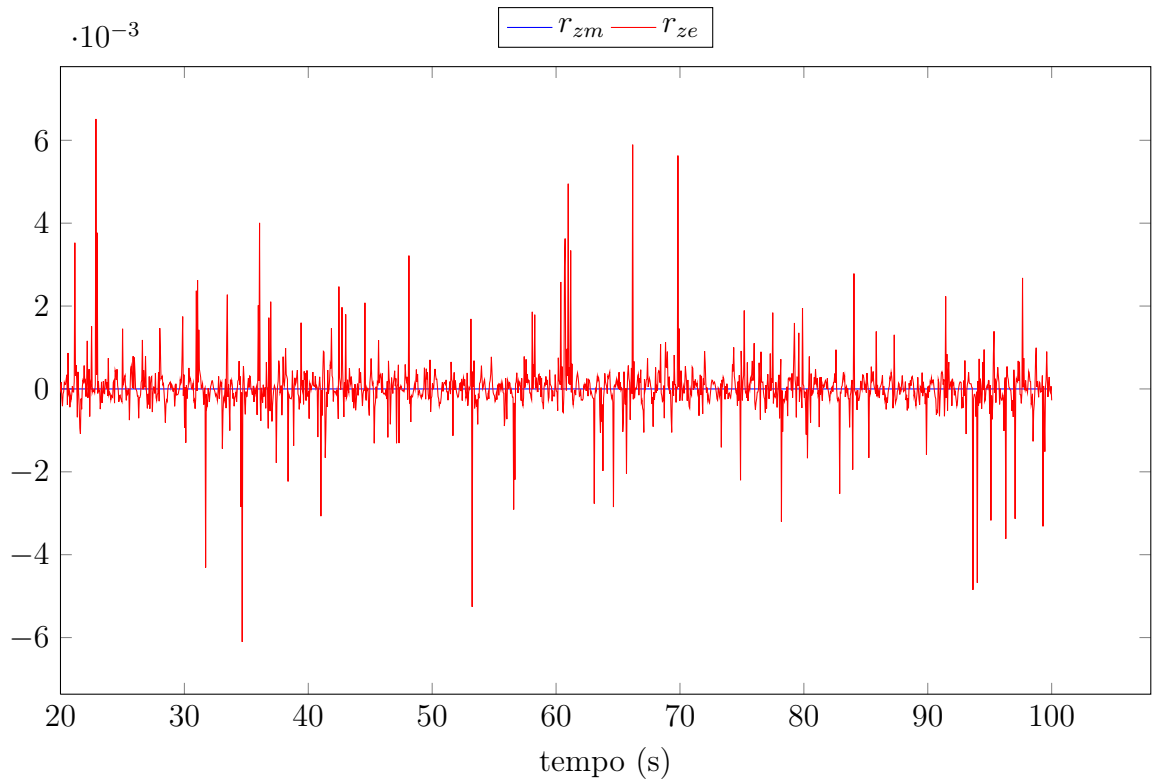
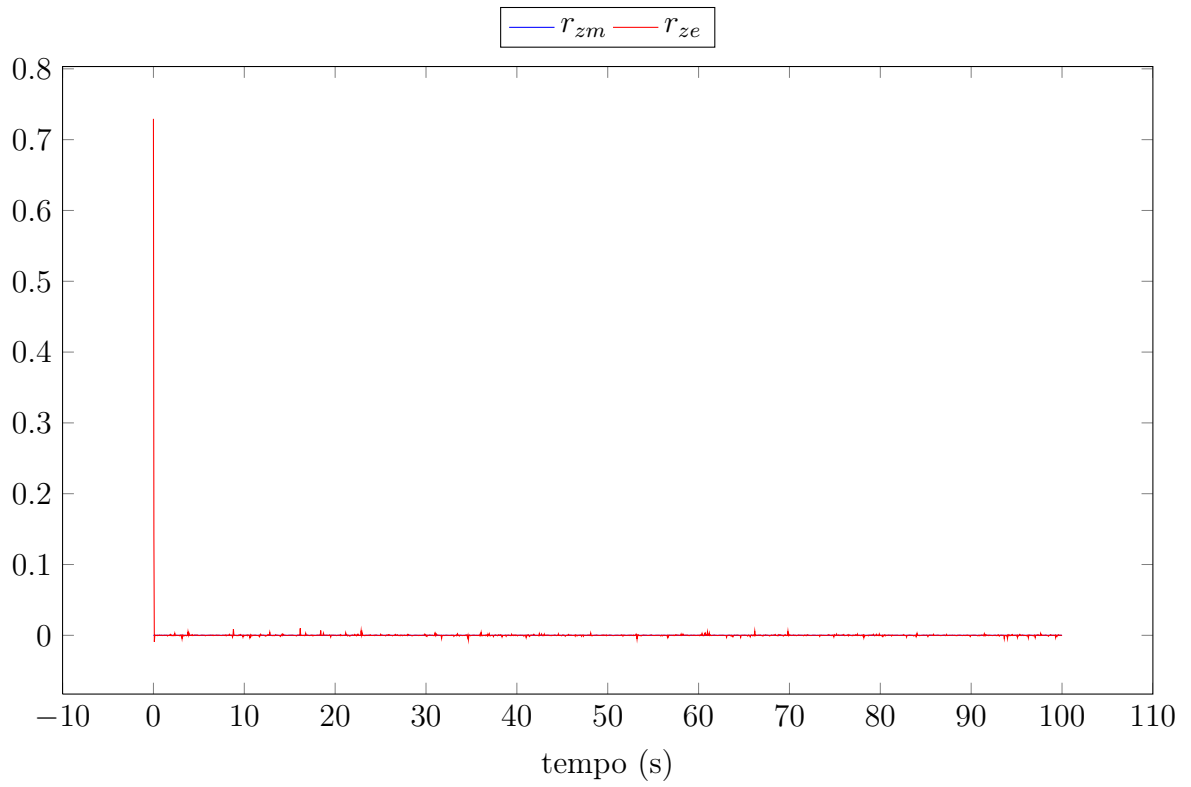


Figura 3.15: Ação de controle r_z . Simulação sem sinal de excitação no oscilador mestre.

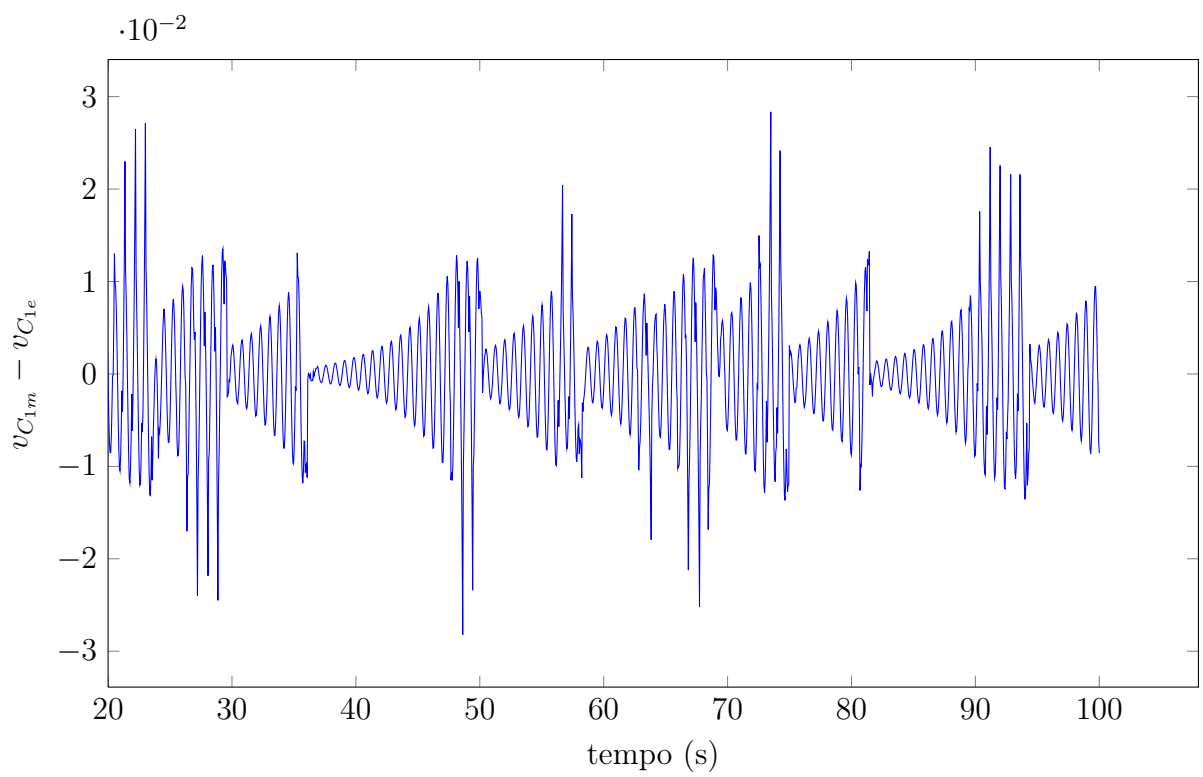
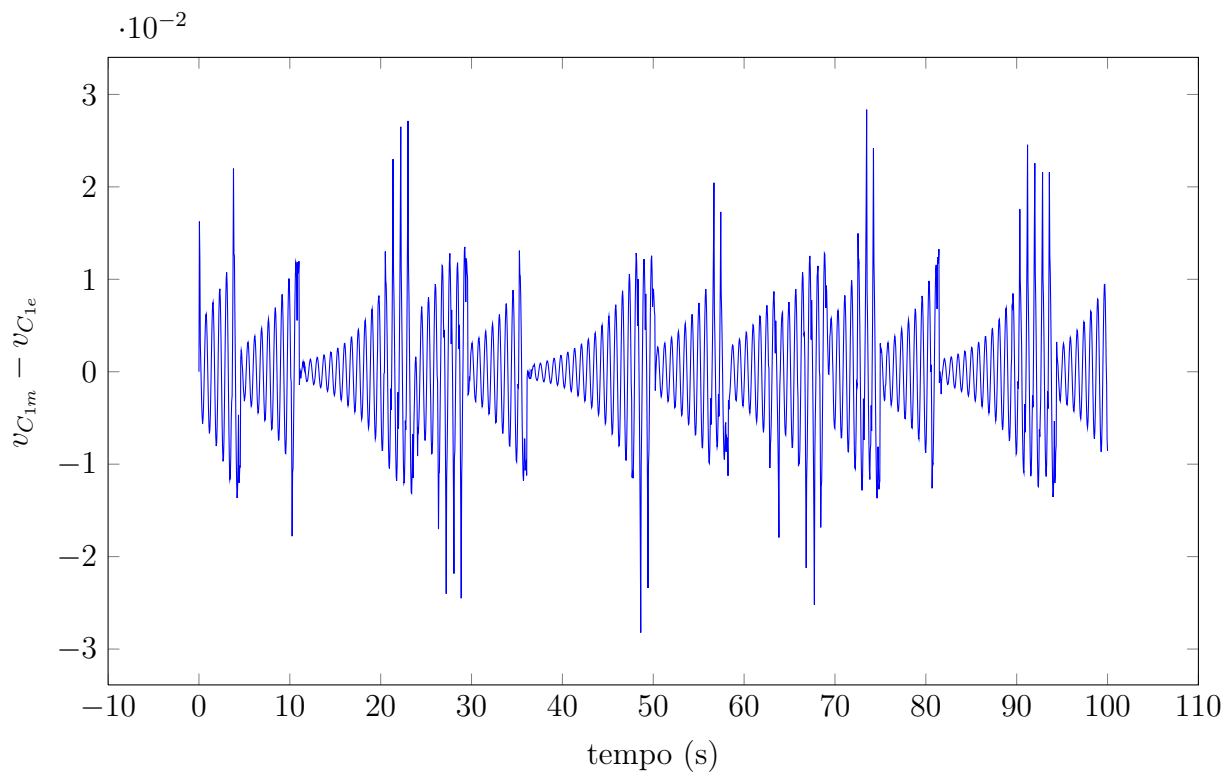


Figura 3.16: Erro de sincronismo da variável v_{C_1} . Simulação com sinal de excitação no oscilador mestre.

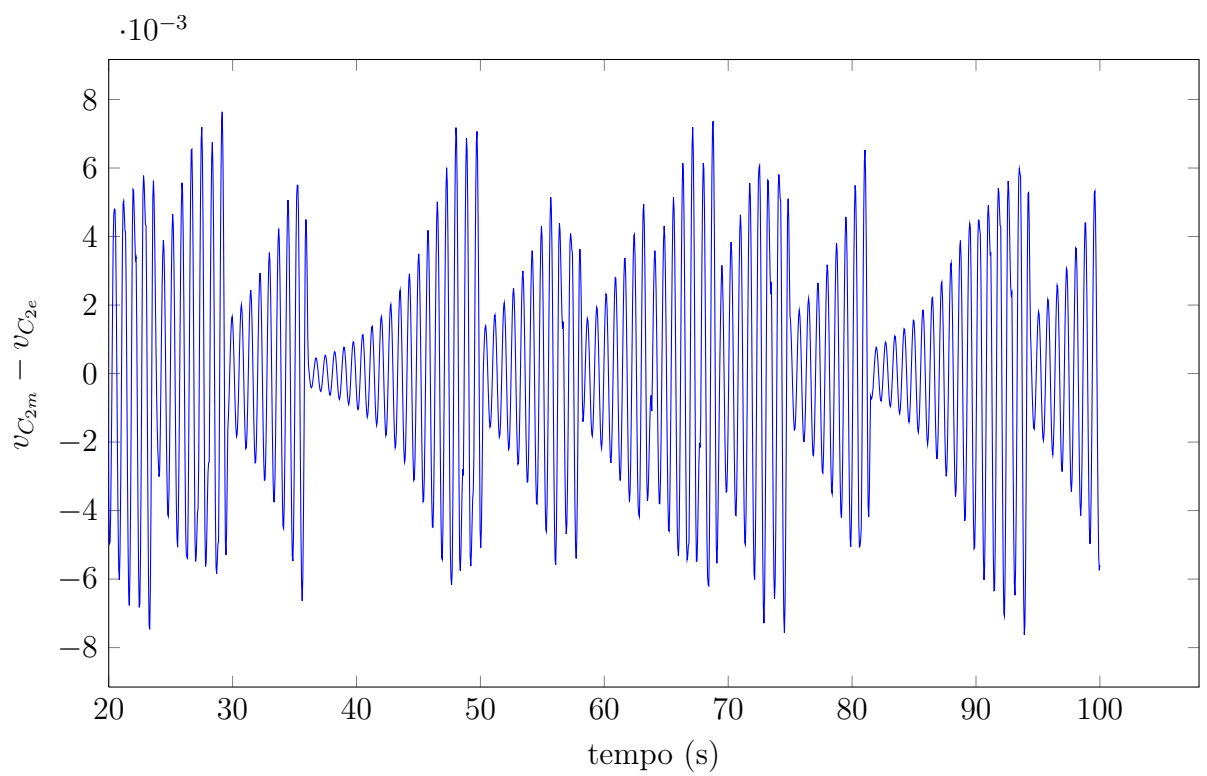
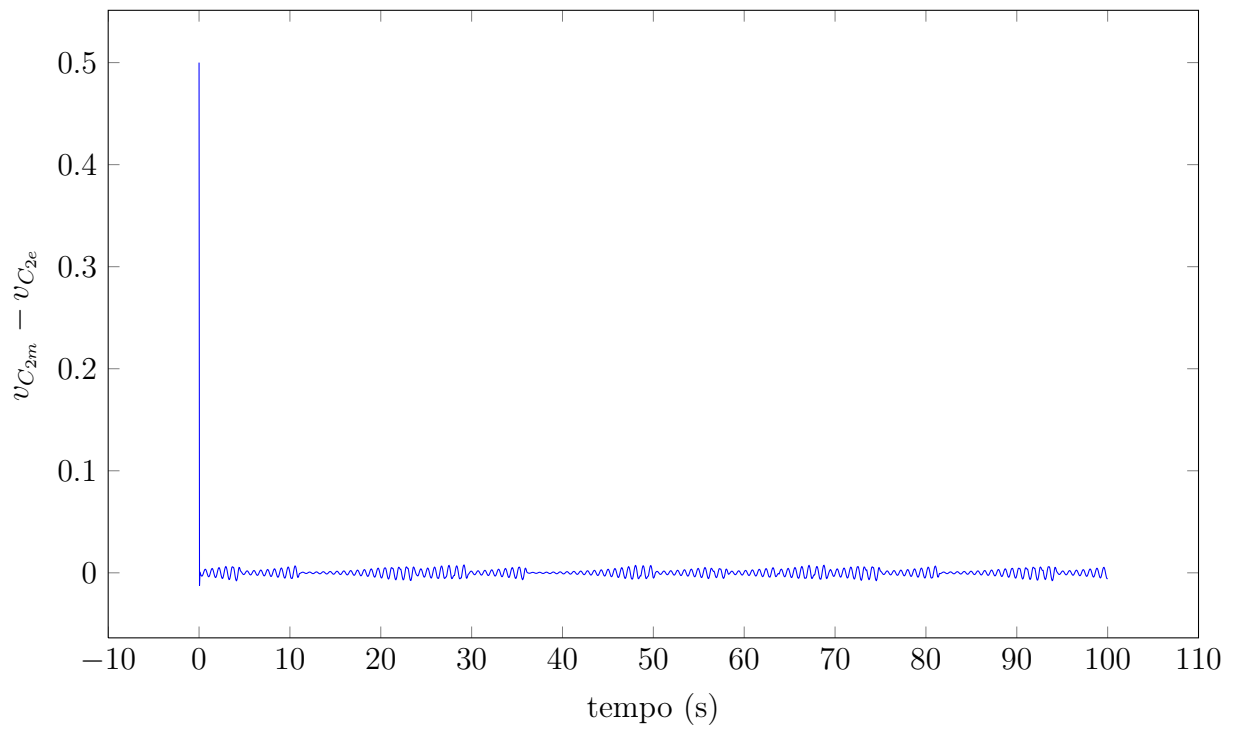


Figura 3.17: Erro de sincronismo da variável v_{C_2} . Simulação com sinal de excitação no oscilador mestre.

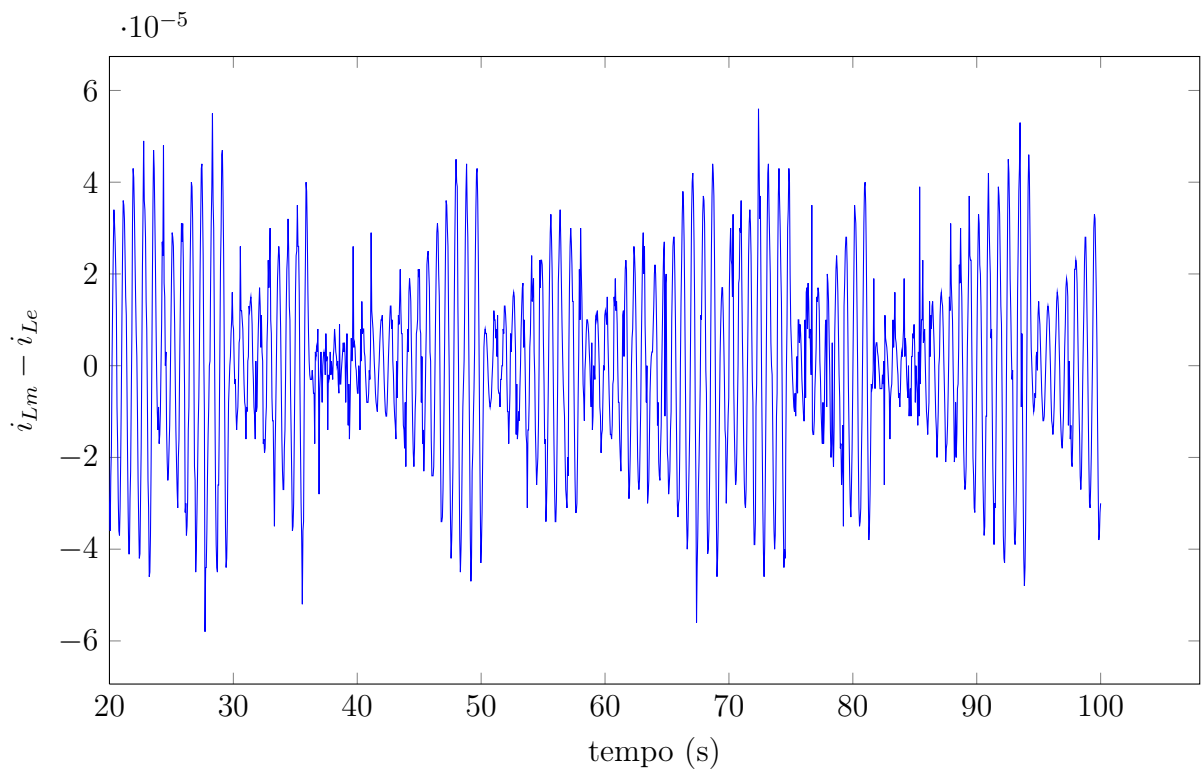
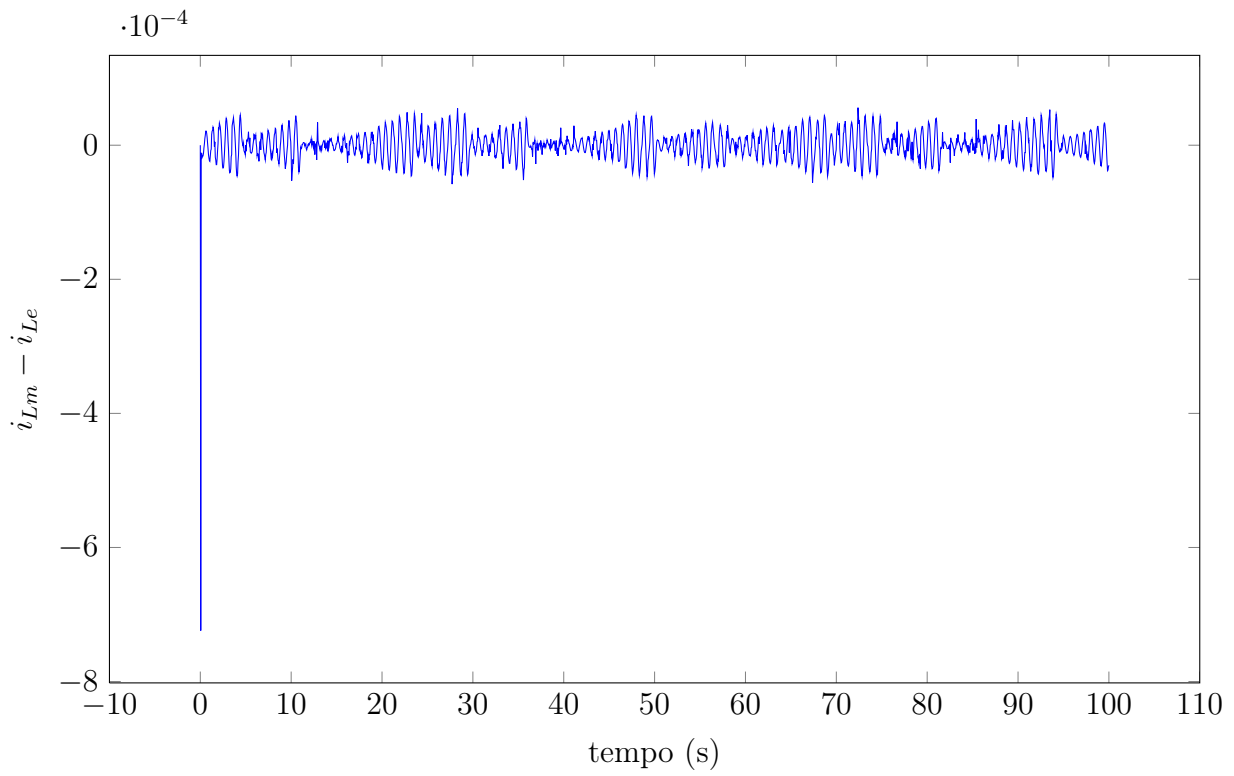


Figura 3.18: Erro de sincronismo da variável i_L . Simulação com sinal de excitação no oscilador mestre.

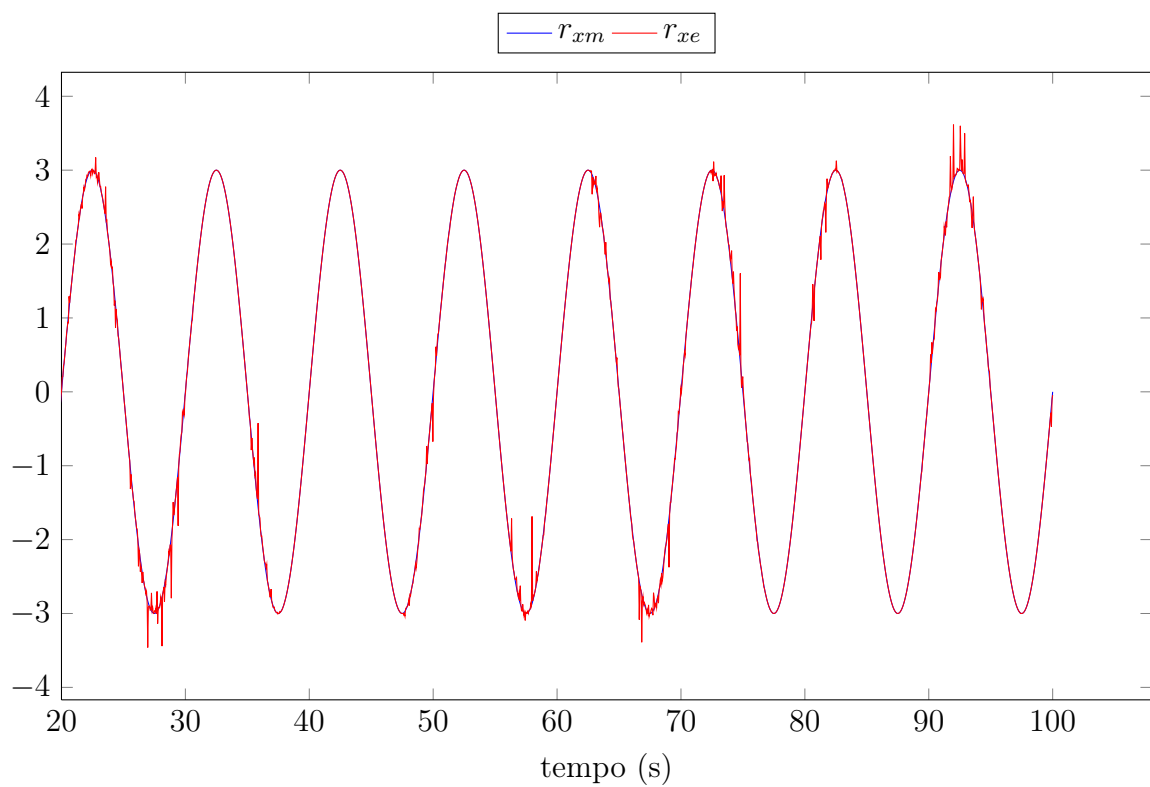
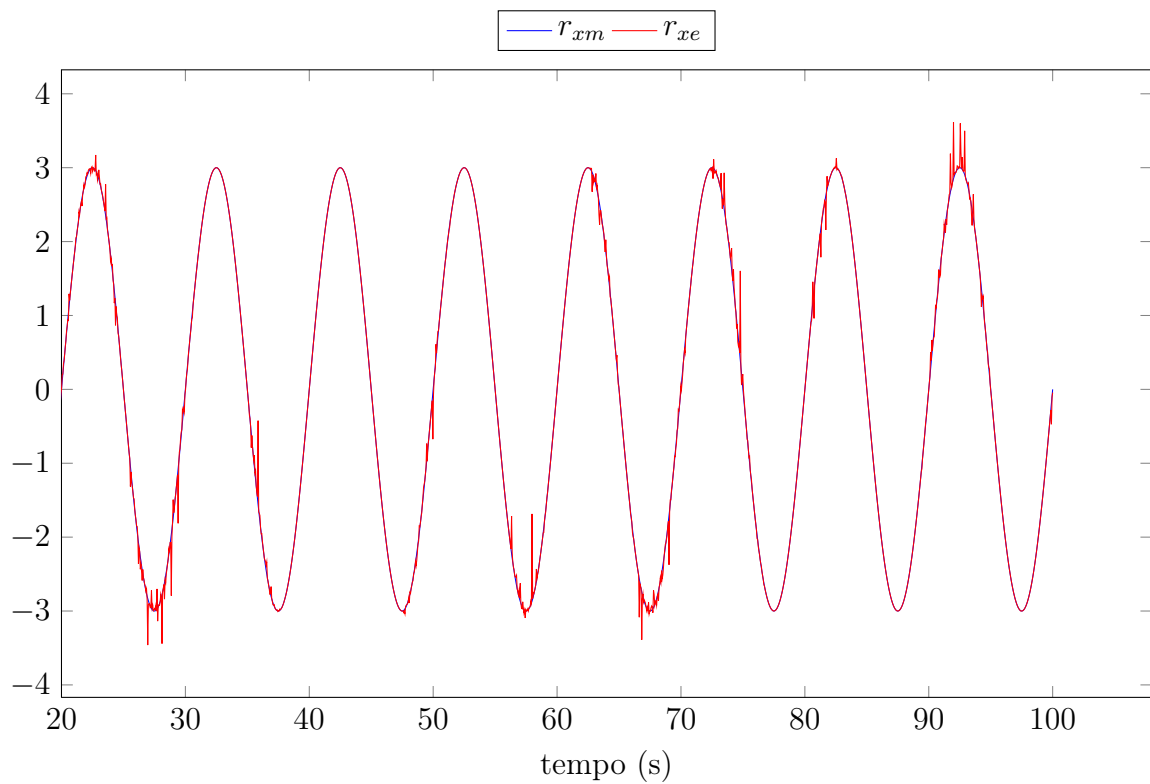


Figura 3.19: Ação de controle r_x . Simulação com sinal de excitação no oscilador mestre.

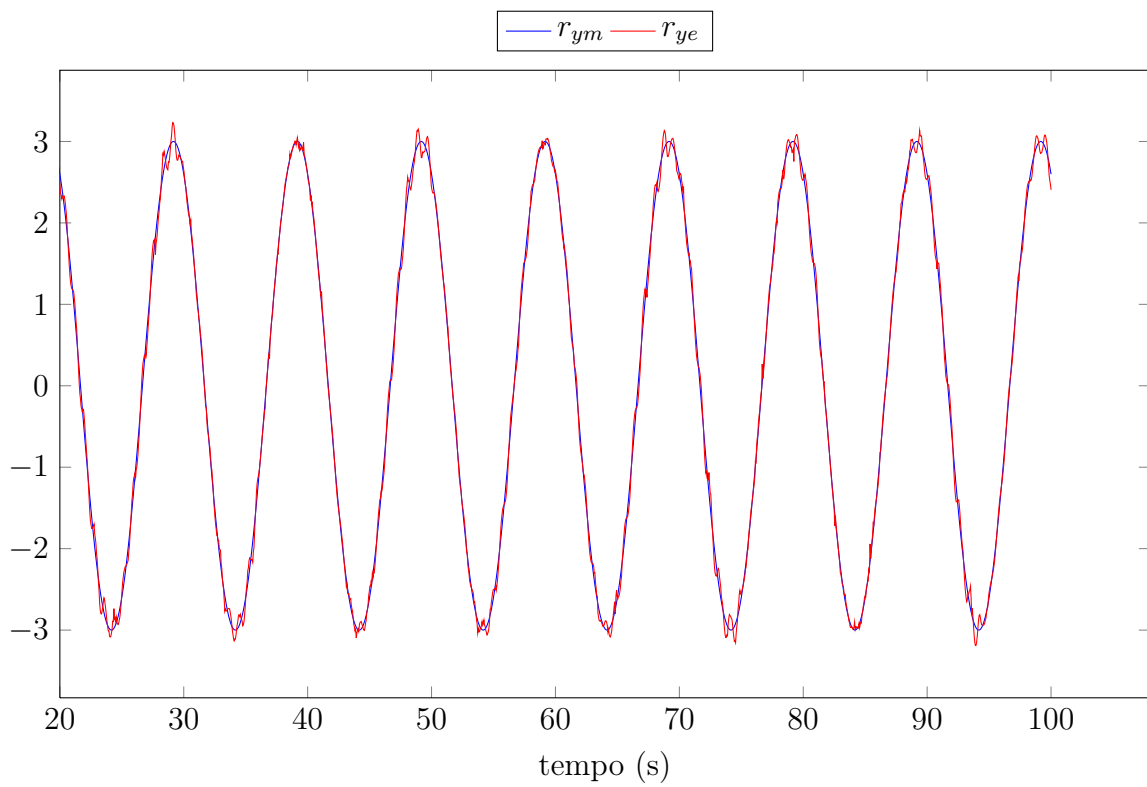
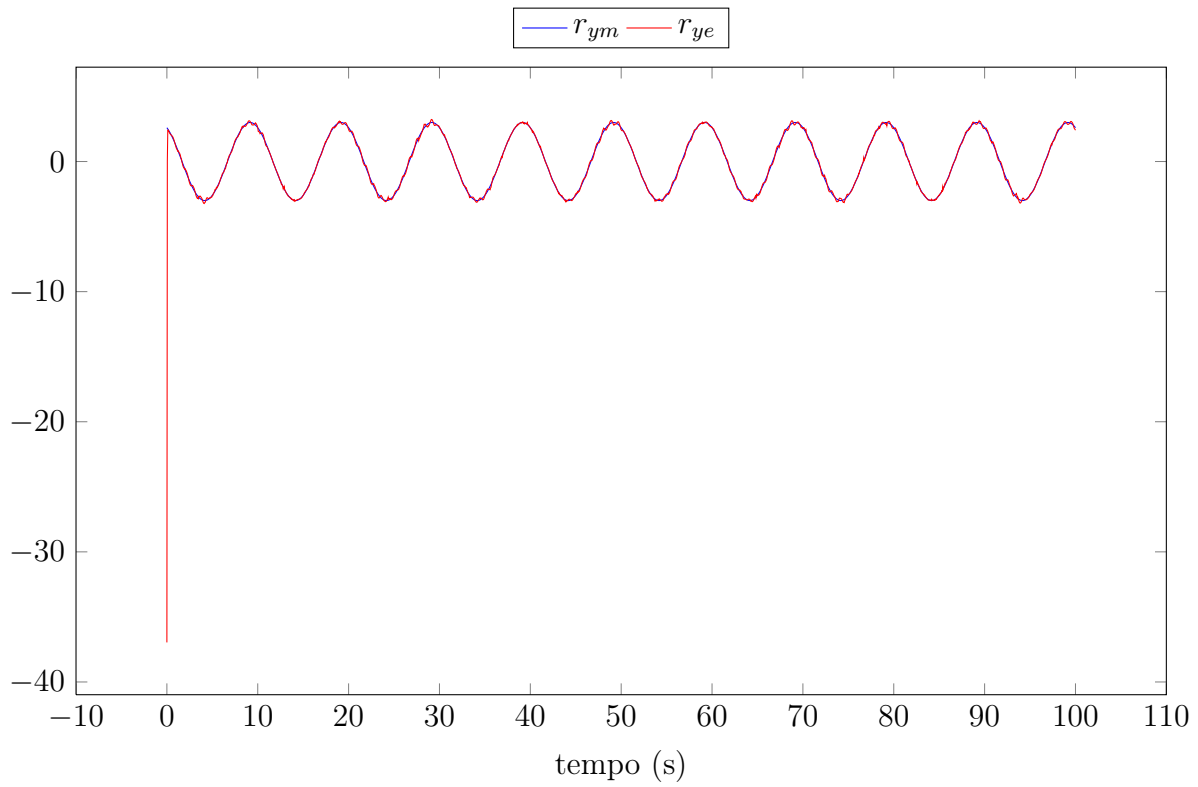


Figura 3.20: Ação de controle r_y . Simulação com sinal de excitação no oscilador mestre.

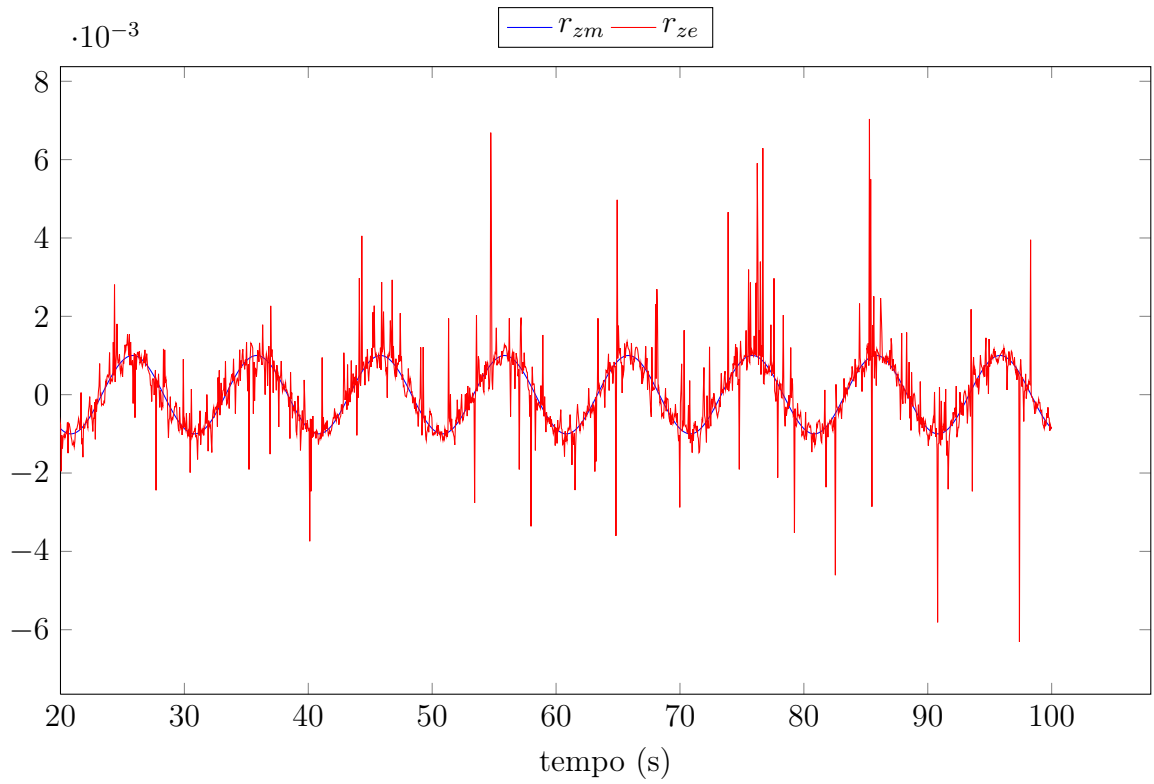
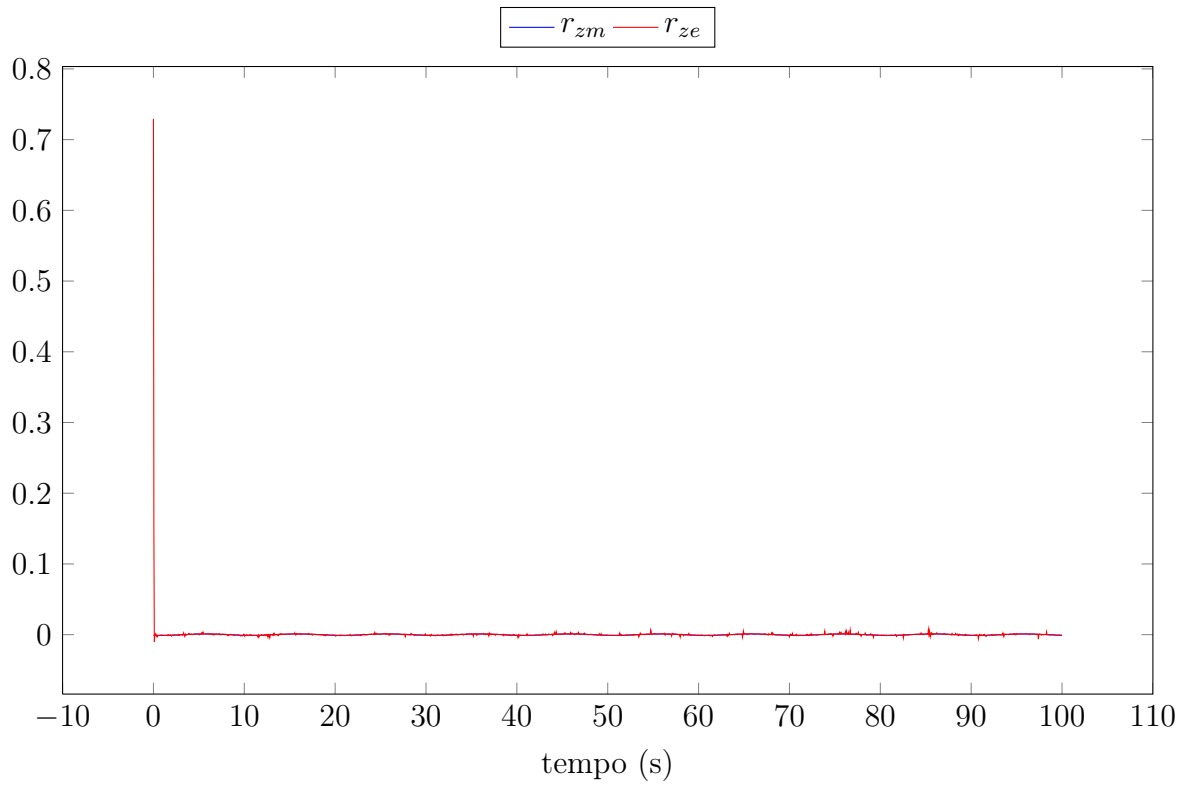


Figura 3.21: Ação de controle r_z . Simulação com sinal de excitação no oscilador mestre.

3.4 Análise dos Resultados

Como pode ser visto nas Figuras 3.8 a 3.21, a estratégia de sincronismo proposta não levou o sistema ao sincronismo completo (erro nulo). Entretanto, ela garantiu que o erro de sincronismo entre os dois sistemas fosse bem pequeno (conforme apresentado nas Tabelas 3.1 e 3.2) mesmo para o caso em que havia um sinal de excitação no oscilador mestre.

	v_{C_1}	v_{C_2}	i_L
Erro	0,0244 V	0,0065 V	$9,2941 \times 10^{-2}$ mA

Tabela 3.1: Erro absoluto máximo de sincronismo em “estado estacionário”. Oscilador mestre sem excitação.

	v_{C_1}	v_{C_2}	i_L
Erro	0,0291 V	0,0077 V	$1,0616 \times 10^{-1}$ mA

Tabela 3.2: Erro absoluto máximo de sincronismo em “estado estacionário”. Oscilador mestre com excitação.

É interessante ressaltar que a ação de controle do oscilador escravo foi bem próxima à ação de controle do oscilador mestre (como pode ser visto nas Figuras 3.13 a 3.15 e nas Figuras 3.19 a 3.21). Além disso, ela também apresentou picos de valores muito grandes no início das simulações. Isto era esperado, uma vez que não foi utilizado peso na ação de controle nesta aplicação e os estados iniciais dos osciladores não eram os mesmos.

Uma visão interessante para a estratégia de sincronismo proposta é que, como o oscilador escravo é igual ao oscilador mestre e o filtro utilizado para aumentar o sistema na estratégia de sincronismo é igual ao canal de transmissão, a estrutura final obtida pode ser comparada a de um observador não-linear dos estados do oscilador mestre e do canal de transmissão.

Capítulo 4

Controle do Movimento Longitudinal de Uma Aeronave Utilizando Modelo de Referência

O primeiro sistema de controle automático aplicado a uma aeronave foi apresentado ao mundo em 18 de Junho de 1914 às margens do Rio Sena por Lawrence Sperry e seu mecânico Emil Cachin. Sua apresentação na Concours de la Sécurité en Aéroplane¹, em que ambos ficaram de pé sobre as asas de um Curtiss C-2 e o avião permaneceu voando em linha reta, chocou o juiz e a plateia e lhes rendeu o primeiro lugar da competição (Scheck 2004)

O uso de leis de controle com ganho escalonado é uma prática frequente no controle de aeronaves, e muitas vezes feita de maneira heurística (Rugh e Shamma 2000). Por outro lado, as técnicas de controle fuzzy TS permitem a síntese de controladores de ganho escalonado de uma maneira sistemática e com certas margens de desempenho garantidas. Permitem ainda estender resultados de controle robusto de sistemas lineares para sistemas não-lineares e garantir o desempenho e a estabilidade de um sistema e também especificações em termos do tempo de resposta do sistema. Além disso, o uso de técnicas de controle por modelo de referência permite a especificação direta do comportamento desejado para a malha fechada do sistema.

Para a aplicação dessas técnicas faz-se necessário um modelo fuzzy Takagi-Sugeno do sistema. Em casos em que o sistema apresenta um número pequeno de não-linearidades é simples conseguir uma representação exata do sistema (Tanaka e Wang 2001). Porém, quando o número de não-linearidades e a ordem do sistema crescem a modelagem pode ser complexa e necessitar de um número desnecessariamente grande de modelos lineares.

No âmbito do projeto *Sistema para Assistência à Pilotagem de Aeronaves de Aviação Geral* do CNPq, este capítulo apresenta a aplicação das metodologias apresentadas no capítulo 2 para a modelagem TS e o controle do movimento longitudinal de uma aeronave de asa fixa. Inicialmente apresenta-se uma descrição mais formal do problema a ser resolvido e do modelo utilizado para a aeronave. Apresenta-se, em sequência, a modelagem fuzzy TS da aeronave de modo que as técnicas apresentadas possam ser utilizadas. Em seguida, é apresentado o controlador encontrado e seu desempenho para um certo cenário em simulação. Por fim, é realizada uma análise dos resultados obtidos.

¹Competição de Segurança em Aeronaves

4.1 Descrição do Problema

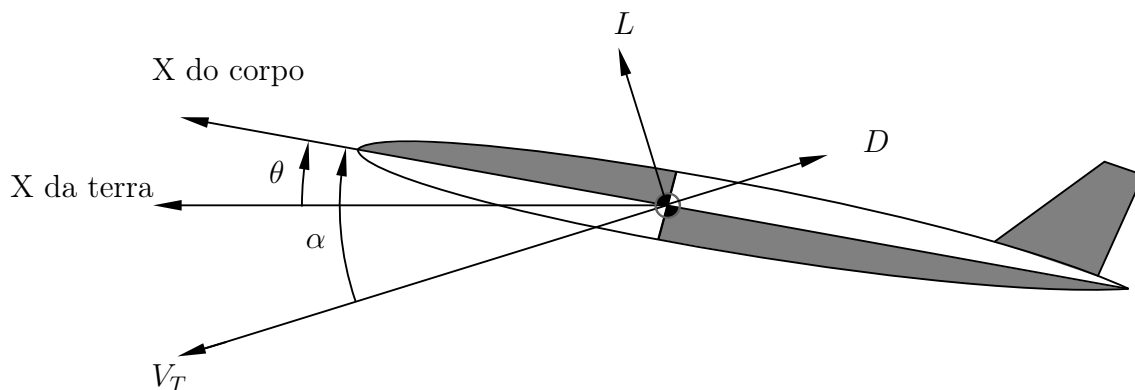
O problema proposto neste capítulo é o seguinte: dada uma aeronave de asa fixa e assumindo um desacoplamento entre os movimentos longitudinal e latero-direcional, encontrar um controlador para a altitude e a velocidade da aeronave (que atue no profundor e no comando de aceleração da aeronave) que leva as malhas a terem um comportamento próximo ao de duas malhas lineares de primeira ordem desacopladas.

Conforme apresentado em (Stevens e Lewis 2003), considerando o desacoplamento entre os movimentos latero-direcional e longitudinal de uma aeronave de asa fixa, o comportamento longitudinal pode ser descrito no eixo do vento como:

$$\begin{aligned}
 m\dot{V}_T &= F_T \cos(\alpha + \alpha_T) - D - mg \sin(\theta - \alpha), \\
 mV_T\dot{\alpha} &= -F_T \sin(\alpha + \alpha_T) - L + mg \cos(\theta - \alpha) + mV_Tq, \\
 I_{yy}\dot{q} &= M_Y, \\
 \dot{\theta} &= q, \\
 \dot{h} &= V_T \sin(\theta - \alpha)
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

em que V_T é o módulo da velocidade da aeronave em relação à atmosfera; α é o ângulo que o vento relativo faz com o eixo de simetria da aeronave (ângulo de ataque); θ é o ângulo de arfagem; q é a velocidade angular de arfagem; h é a altitude; F_T é a força de tração; α_T é o ângulo da força de tração da aeronave em relação ao eixo de simetria; D é a força de arrasto; L é a força de sustentação; M_Y é o torque total sobre a aeronave em torno do eixo y ; m é a massa da aeronave; g é a aceleração da gravidade e I_{yy} é o momento de inércia do corpo.

A Figura 4.1 apresenta um diagrama esquemático do movimento longitudinal da aeronave de modo a facilitar o entendimento de o que representam as variáveis apresentadas.



Adaptado de: <http://en.wikipedia.org/wiki/File:Longitudinal.svg>

Figura 4.1: Diagrama do movimento longitudinal de uma aeronave.

As forças e momentos apresentados na equação (4.1) podem ser escritos como:

$$\begin{aligned}
F_T &= \delta_t C_F(V_T, h), \\
D &= \frac{1}{2} \rho V_T^2 S_w C_D(\alpha, V_T, q, \delta_e), \\
L &= \frac{1}{2} \rho V_T^2 S_w C_L(\alpha, V_T, q, \delta_e), \\
M &= \frac{1}{2} \rho V_T^2 S_w c_w C_M(\alpha, V_T, q, \delta_e), \\
M_Y &= M_Y(D, L, M, F_T, \alpha),
\end{aligned}$$

sendo ρ a densidade do ar; S_w a área da asa da aeronave; c_w a corda média da asa; δ_e a deflexão do profundor da aeronave e δ_t é o comando de tração. C_F , C_D , C_L , C_M são coeficientes adimensionais que representam o cálculo das forças de tração, F_T , arrasto, D , sustentação, L , e o momento de arfagem, M . O torque total sobre o eixo y, M_Y , é representado como uma função das forças e momentos aerodinâmicos e da força de tração. Tal função representa a soma dos momentos aerodinâmicos, com os momentos gerados pelas forças aerodinâmicas (devido à diferença entre o ponto de referência aerodinâmico e o centro de gravidade da aeronave) e o momento gerado pela força de tração (devido à posição do motor da aeronave em relação ao centro de gravidade).

Para fim de exemplo, considerou-se para este trabalho que a aeronave a ser controlada é um caça militar *General Dynamics F-16A Block-32*. As características da aeronave (dimensões, massa, momento de inércia), as tabelas de coeficientes adimensionais e as posições do centro de gravidade, do ponto de referência aerodinâmico e do motor foram retiradas do simulador de voo de código livre *FlightGear* (*FlightGear Flight Simulator 2011*).

Considerou-se um modelo de referência da forma:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_m &= \frac{-V_m}{\tau_1} + \frac{V_r}{\tau_1}, \\
\dot{h}_m &= \frac{-h_m}{\tau_2} + \frac{h_r}{\tau_2},
\end{aligned} \tag{4.2}$$

com V_r e h_r sendo a velocidade e altitude de referência, e V_m e h_m a velocidade e altitude do modelo de referência, para o qual desejamos que $V_T = V_m$ e $h = h_m$.

4.2 Modelagem Fuzzy do F16

O modelo da aeronave, apresentado na equação (4.1), possui várias não-linearidades e não é facilmente representável como um sistema qLPV por não ser afim nas entradas de controle. Sendo assim, utilizou-se a Metodologia 2.2 (na página 18) para encontrar um modelo fuzzy para o sistema da forma apresentada na equação (2.46).

Considerou-se que apenas as variáveis V_T , α , θ e h influenciam a mudança de dinâmica da aeronave e discretizou-se o espaço formado por essas variáveis usando 11 subdivisões para cada uma. Considerou-se que $V_T \in [100, 160]$, $\alpha \in [-\pi/18, \pi/12]$, $\theta \in [-\pi/18, \pi/12]$ e $h \in [2000, 4100]$.

Utilizando as técnicas apresentadas, foi possível se encontrar um modelo fuzzy com 16 modelos lineares locais com as funções de pertinência apresentadas na Figura 4.2. São obtidas 16 regras, pois cada regra é dada pela combinação das pertinências apresentadas e $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$.

Utilizando o método de Monte Carlo com 1.000.000 de simulações para o cálculo do erro obtido com esse modelo em relação ao modelo original, verificou-se que o erro na derivada de V_T foi de 35,6%, o

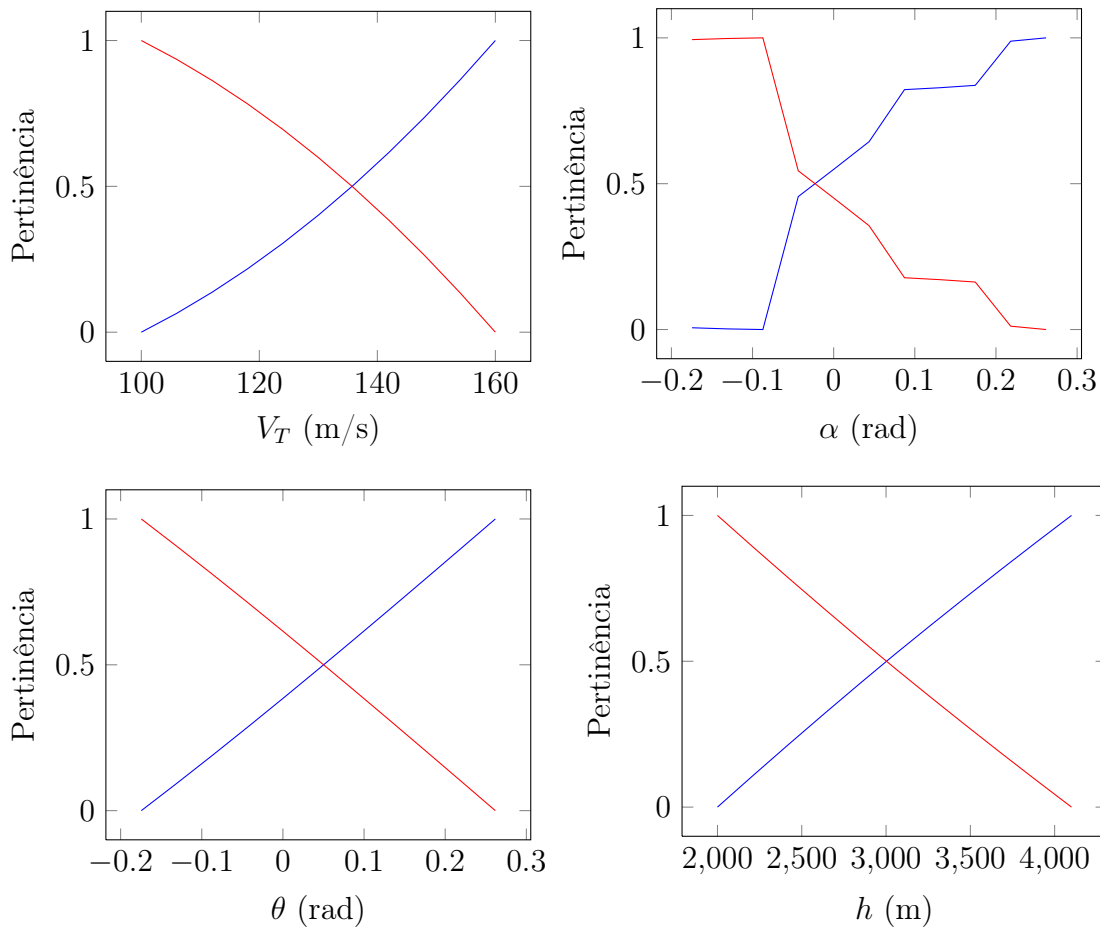


Figura 4.2: Funções de pertinência do modelo encontrado para o F16.

erro percentual RMS² na derivada de α foi de 2,5%, o erro na derivada de θ era aproximadamente zero (1×10^{-18}), o erro na derivada de q era de 16% e o erro na derivada de h era de 2,4%. Pode-se perceber que o erro em relação a α , θ e h podem ser considerados pequenos se comparados aos erros nas derivadas associadas aos estados V_T e q . Espera-se contudo que a ação integral do controlador seja capaz de tornar o controlador insensível a esses erros.

4.3 Obtenção do Controlador e Simulações

De posse de uma representação fuzzy TS da aeronave, o pacote YALMIP (Löfberg 2004) foi utilizado para encontrar os ganhos do controlador. As constantes do modelo de referência consideradas foram $\tau_1 = \tau_2 = 5s$. Além disso, para a síntese do controlador, considerou-se que uma matriz de pesos na entrada igual a $D_{zu} = 100\text{diag}(2, 1)$ (para refletir a excursão máxima de cada sinal) e um escalar $\mu = 0,4$ (escolhido arbitrariamente).

Os seguintes ganhos foram encontrados para o controlador:

²Porcentagem do valor RMS do erro em relação ao valor RMS da saída

$$K_{1_1} = \begin{bmatrix} -0.176012 & -45.8626 & 63.1598 & 3.96039 & 0.423321 \\ -1.46486 & -9.98336 & 9.03343 & -0.141847 & 0.0580117 \end{bmatrix}$$

$$K_{3_1} = \begin{bmatrix} -0.0388091 & 0.122617 \\ -0.282692 & 0.0292361 \end{bmatrix}$$

$$K_{2_1} = \begin{bmatrix} 0.183175 & -0.311438 \\ 1.28395 & -0.0572124 \end{bmatrix}$$

$$N_1 = \begin{bmatrix} -0.000965789 & -0.00280274 \\ 0.0250324 & -0.000701822 \end{bmatrix}$$

$$K_{1_2} = \begin{bmatrix} -0.159068 & -46.0438 & 63.518 & 3.94423 & 0.428445 \\ -1.46012 & -9.78283 & 8.7884 & -0.135646 & 0.0567591 \end{bmatrix}$$

$$K_{3_2} = \begin{bmatrix} -0.0368017 & 0.124158 \\ -0.281932 & 0.0288113 \end{bmatrix}$$

$$K_{2_2} = \begin{bmatrix} 0.174229 & -0.315213 \\ 1.28047 & -0.0562231 \end{bmatrix}$$

$$N_2 = \begin{bmatrix} -0.000880296 & -0.00309266 \\ 0.0249487 & -0.000631778 \end{bmatrix}$$

$$K_{1_3} = \begin{bmatrix} -0.14487 & -41.6987 & 56.9957 & 3.66429 & 0.383172 \\ -1.44187 & 0.889452 & 2.68368 & -0.167994 & 0.015397 \end{bmatrix}$$

$$K_{3_3} = \begin{bmatrix} -0.0315573 & 0.110823 \\ -0.278129 & 0.0167696 \end{bmatrix}$$

$$K_{2_3} = \begin{bmatrix} 0.149883 & -0.281685 \\ 1.26267 & -0.0257367 \end{bmatrix}$$

$$N_3 = \begin{bmatrix} 0.000220997 & -0.00279631 \\ 0.0260248 & -0.000455935 \end{bmatrix}$$

$$K_{1_4} = \begin{bmatrix} -0.110271 & -40.4291 & 55.3759 & 3.60073 & 0.369413 \\ -1.4367 & 0.57595 & 3.02596 & -0.150437 & 0.0167816 \end{bmatrix}$$

$$K_{3_4} = \begin{bmatrix} -0.0259437 & 0.106516 \\ -0.277292 & 0.0171238 \end{bmatrix}$$

$$K_{2_4} = \begin{bmatrix} 0.124235 & -0.271201 \\ 1.25891 & -0.0267017 \end{bmatrix}$$

$$N_4 = \begin{bmatrix} 0.000188804 & -0.00270429 \\ 0.0259123 & -0.000480404 \end{bmatrix}$$

$$K_{1_5} = \begin{bmatrix} -0.152401 & -51.5271 & 70.9695 & 4.55439 & 0.472457 \\ -1.7011 & -7.38626 & 6.33924 & -0.351242 & 0.0380518 \end{bmatrix}$$

$$K_{3_5} = \begin{bmatrix} -0.0348937 & 0.136122 \\ -0.327314 & 0.0253843 \end{bmatrix}$$

$$K_{2_5} = \begin{bmatrix} 0.166394 & -0.34683 \\ 1.48635 & -0.0448921 \end{bmatrix}$$

$$N_5 = \begin{bmatrix} -0.00130057 & -0.00327723 \\ 0.032469 & -0.000733592 \end{bmatrix}$$

$$K_{1_6} = \begin{bmatrix} -0.133986 & -53.3557 & 73.4512 & 4.66082 & 0.493329 \\ -1.69921 & -7.10738 & 6.04563 & -0.363089 & 0.0371088 \end{bmatrix}$$

$$K_{3_6} = \begin{bmatrix} -0.0327082 & 0.14231 \\ -0.327115 & 0.0251072 \end{bmatrix}$$

$$K_{2_6} = \begin{bmatrix} 0.156907 & -0.362244 \\ 1.48546 & -0.0441927 \end{bmatrix}$$

$$N_6 = \begin{bmatrix} -0.00142283 & -0.00374372 \\ 0.0325992 & -0.000809433 \end{bmatrix}$$

$$K_{1_7} = \begin{bmatrix} -0.128264 & -45.2865 & 62.189 & 4.06471 & 0.414968 \\ -1.67522 & 1.08743 & 1.70797 & -0.33156 & 0.00726751 \end{bmatrix}$$

$$K_{3_7} = \begin{bmatrix} -0.0286673 & 0.119432 \\ -0.32205 & 0.0163022 \end{bmatrix}$$

$$K_{2_7} = \begin{bmatrix} 0.137452 & -0.304459 \\ 1.46215 & -0.0220576 \end{bmatrix}$$

$$N_7 = \begin{bmatrix} -1.10411e-006 & -0.00320515 \\ 0.0336403 & -0.000682647 \end{bmatrix}$$

$$K_{1_8} = \begin{bmatrix} -0.156633 & -51.2234 & 70.0753 & 4.35708 & 0.467225 \\ -1.65526 & 2.04616 & 0.303134 & -0.461793 & -0.00183957 \end{bmatrix}$$

$$K_{3_8} = \begin{bmatrix} -0.0362527 & 0.135021 \\ -0.317521 & 0.0137526 \end{bmatrix}$$

$$K_{2_8} = \begin{bmatrix} 0.17281 & -0.343319 \\ 1.4416 & -0.0154483 \end{bmatrix}$$

$$N_8 = \begin{bmatrix} -0.000706228 & -0.00381015 \\ 0.035587 & -0.000944137 \end{bmatrix}$$

$$K_{1_9} = \begin{bmatrix} -0.100386 & -17.8307 & 25.5974 & 1.57559 & 0.167806 \\ -0.785298 & -20.0247 & 15.8052 & 0.500065 & 0.099877 \end{bmatrix}$$

$$K_{3_9} = \begin{bmatrix} -0.0208987 & 0.048749 \\ -0.150569 & 0.0352984 \end{bmatrix}$$

$$K_{2_9} = \begin{bmatrix} 0.0975028 & -0.123655 \\ 0.685438 & -0.0813242 \end{bmatrix}$$

$$N_9 = \begin{bmatrix} -0.000315076 & -0.00086277 \\ 0.0244357 & -0.00101822 \end{bmatrix}$$

$$K_{1_{10}} = \begin{bmatrix} -0.0836753 & -17.9989 & 25.9472 & 1.58862 & 0.170976 \\ -0.776035 & -19.029 & 14.5412 & 0.46367 & 0.0920902 \end{bmatrix}$$

$$K_{3_{10}} = \begin{bmatrix} -0.0186004 & 0.0496098 \\ -0.148874 & 0.0329282 \end{bmatrix}$$

$$K_{2_{10}} = \begin{bmatrix} 0.0871609 & -0.125887 \\ 0.677627 & -0.0754729 \end{bmatrix}$$

$$N_{10} = \begin{bmatrix} -0.000504339 & -0.0009919 \\ 0.0244325 & -0.000931458 \end{bmatrix}$$

$$K_{1_{11}} = \begin{bmatrix} -0.0510182 & -11.0266 & 15.0937 & 1.01731 & 0.0952333 \\ -0.716319 & 5.93378 & 1.06079 & 0.181612 & 0.00156437 \end{bmatrix}$$

$$K_{3_{11}} = \begin{bmatrix} -0.0102058 & 0.0272785 \\ -0.136283 & 0.00643659 \end{bmatrix}$$

$$K_{2_{11}} = \begin{bmatrix} 0.0479849 & -0.0698 \\ 0.619114 & -0.00860269 \end{bmatrix}$$

$$N_{11} = \begin{bmatrix} 0.000638654 & -0.000385284 \\ 0.0255955 & -0.000370321 \end{bmatrix}$$

$$K_{1_{12}} = \begin{bmatrix} -0.0300697 & -12.472 & 17.0289 & 1.10973 & 0.108794 \\ -0.713765 & 5.80524 & 1.20709 & 0.190539 & 0.00162006 \end{bmatrix}$$

$$K_{3_{12}} = \begin{bmatrix} -0.0072002 & 0.0311976 \\ -0.135963 & 0.00643745 \end{bmatrix}$$

$$K_{2_{12}} = \begin{bmatrix} 0.0346318 & -0.0797022 \\ 0.617668 & -0.00861979 \end{bmatrix}$$

$$N_{12} = \begin{bmatrix} 0.000511679 & -0.000681522 \\ 0.0255525 & -0.000389626 \end{bmatrix}$$

$$K_{1_{13}} = \begin{bmatrix} -0.098055 & -25.9545 & 36.6074 & 2.282 & 0.239214 \\ -0.957512 & -13.1107 & 8.08186 & 0.0688751 & 0.0459493 \end{bmatrix}$$

$$K_{3_{13}} = \begin{bmatrix} -0.0213888 & 0.0689585 \\ -0.181912 & 0.0210749 \end{bmatrix}$$

$$K_{2_{13}} = \begin{bmatrix} 0.101105 & -0.175678 \\ 0.827098 & -0.043452 \end{bmatrix}$$

$$N_{13} = \begin{bmatrix} -0.000580215 & -0.00157887 \\ 0.0328171 & -0.000881136 \end{bmatrix}$$

$$K_{1_{14}} = \begin{bmatrix} -0.0782438 & -25.2122 & 35.6897 & 2.24668 & 0.233715 \\ -0.961022 & -12.9397 & 7.88486 & 0.0674091 & 0.0462207 \end{bmatrix}$$

$$K_{3_{14}} = \begin{bmatrix} -0.0184174 & 0.0672513 \\ -0.182806 & 0.0212532 \end{bmatrix}$$

$$K_{2_{14}} = \begin{bmatrix} 0.0875721 & -0.17149 \\ 0.831154 & -0.0437519 \end{bmatrix}$$

$$N_{14} = \begin{bmatrix} -0.000555488 & -0.00163392 \\ 0.0329701 & -0.00085208 \end{bmatrix}$$

$$K_{1_{15}} = \begin{bmatrix} -0.0459496 & -21.4279 & 29.4112 & 1.92978 & 0.190994 \\ -0.914147 & 6.51393 & -1.2145 & -0.0429233 & -0.0159029 \end{bmatrix}$$

$$K_{3_{15}} = \begin{bmatrix} -0.0102769 & 0.0546081 \\ -0.173182 & 0.00292096 \end{bmatrix}$$

$$K_{2_{15}} = \begin{bmatrix} 0.0501075 & -0.139762 \\ 0.786618 & 0.00231075 \end{bmatrix}$$

$$N_{15} = \begin{bmatrix} 0.000223391 & -0.00140603 \\ 0.0337741 & -0.000480621 \end{bmatrix}$$

$$K_{1_{16}} = \begin{bmatrix} -0.0191039 & -20.6651 & 28.3901 & 1.8768 & 0.182662 \\ -0.912961 & 7.14641 & -2.08945 & -0.0968086 & -0.0223318 \end{bmatrix}$$

$$K_{3_{16}} = \begin{bmatrix} -0.00593543 & 0.0520128 \\ -0.172763 & 0.00108103 \end{bmatrix}$$

$$K_{2_{16}} = \begin{bmatrix} 0.0303063 & -0.133415 \\ 0.784658 & 0.00700527 \end{bmatrix}$$

$$N_{16} = \begin{bmatrix} 0.000172678 & -0.00144355 \\ 0.034423 & -0.000521977 \end{bmatrix}$$

A numeração utilizada para os ganhos do controlador é a seguinte: as matrizes apresentadas com índice 1 correspondem às pertinências (1, 1, 1, 1); as matrizes apresentadas com índice 2 correspondem às pertinências (1, 1, 1, 2); as matrizes apresentadas com índice 3 correspondem às pertinências (1, 1, 2, 1); as matrizes apresentadas com índice 4 correspondem às pertinências (1, 1, 2, 2); as matrizes apresentadas com índice 5 correspondem às pertinências (1, 2, 1, 1) e assim por diante.

Utilizando esses ganhos e definindo-se $\mathbf{x}_{m_0} = \mathbf{y}_0$ pode-se utilizar a ação de controle apresentada na equação (2.47).

Simulou-se a dinâmica da aeronave, descrito pela equação (4.1), em conjunto com o controlador obtido de modo a verificar seu comportamento em malha fechada. Tal simulação foi realizada no ambiente *Simulink/Matlab* e seu diagrama de simulação é apresentada na Figura 4.3. As condições iniciais utilizadas para a aeronave foram $V_T = 120\text{m/s}$, $\alpha = 0,1065$, $\theta = 0,1065$, $q = 0$ e $h = 2952,4$. As Figuras 4.4 a 4.7 apresentam os resultados dessa simulação.

De modo a reduzir a ocorrência de saturação nos atuadores, foram adicionados limites de taxa nos sinais de referência para a aeronave (razão pela qual os sinais de comando da aeronave se apresentam na forma de rampas e não de degraus).

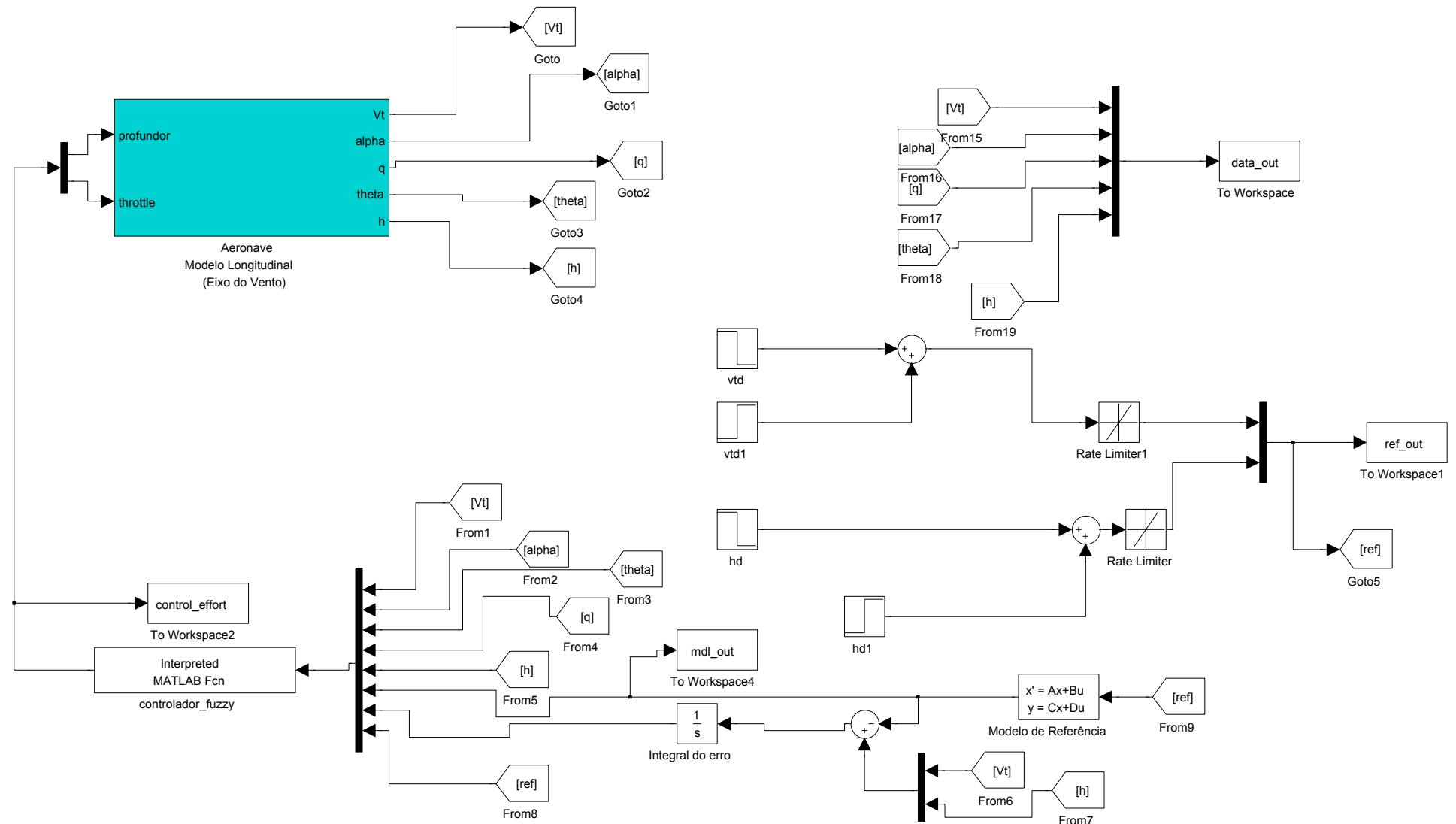


Figura 4.3: Diagrama de simulação do controle longitudinal de um F16.

4.4 Análise dos Resultados

Como pode ser visto nas Figuras 4.4 a 4.7, o controlador utilizado foi capaz de seguir o modelo de referência desejado. Prestando-se maior atenção às Figuras 4.6 e 4.7, percebe-se que sempre que ocorre uma mudança na derivada da altitude o controle da velocidade desvia-se um pouco do modelo de referência (o que faz sentido, tendo em vista que a derivada da altitude corresponde a uma parcela da velocidade da aeronave). Tal fato mostra que o controlador não foi capaz de desacoplar perfeitamente as malhas de altitude e velocidade e que talvez fosse uma boa ideia utilizar um modelo de referência que levasse em conta tal acoplamento. Porém, o acoplamento demonstrado pelo controlador nesse caso foi pequeno e decidiu-se por manter o modelo de referência com as malhas desacopladas.

É interessante notar que apesar de fazer uso conjunto dos comandos de deflexão do profundor e de tração, o controlador fez um uso maior do comando de tração. Tal uso pode ter ocorrido devido às referências de altitude e velocidade que foram dadas ao sistema. Pois, aparentemente, a exigência da aceleração imposta pelos sinais de referência de velocidade e altitude (que geralmente corresponde a comandos de tração) foi maior do que a exigência do ângulo de trajetória imposto (que geralmente corresponde a comandos de deflexão do profundor).

É importante ressaltar também que os sinais de referência utilizados levaram o comando de tração a saturar durante um curto intervalo de tempo, como pode ser visto na Figura 4.4. Comparando-a com a Figura 4.6, percebe-se que tal fato ocorreu pois a aeronave não foi capaz de manter a desaceleração desejada durante o tempo desejado. Apesar de o controlador ter sido capaz de suportar tal saturação, no projeto atual não existe garantia de que ele permanecerá estável com tal acontecimento (já que a síntese do controlador não leva em consideração esse fato).

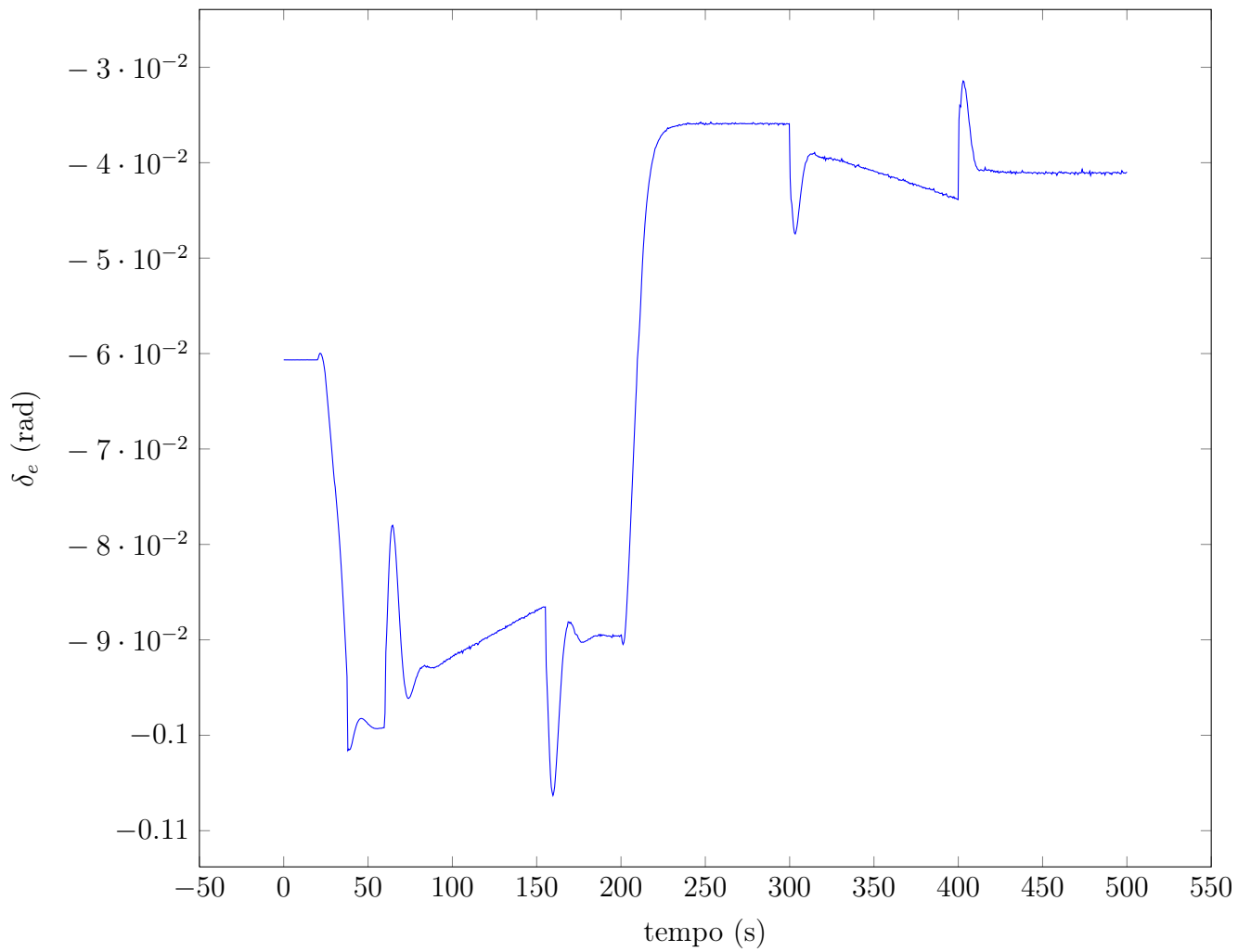


Figura 4.4: Resultados de simulação para controle de altitude e velocidade de um caça militar F-16. Ações de controle correspondentes a deflexão de profundor δ_e .

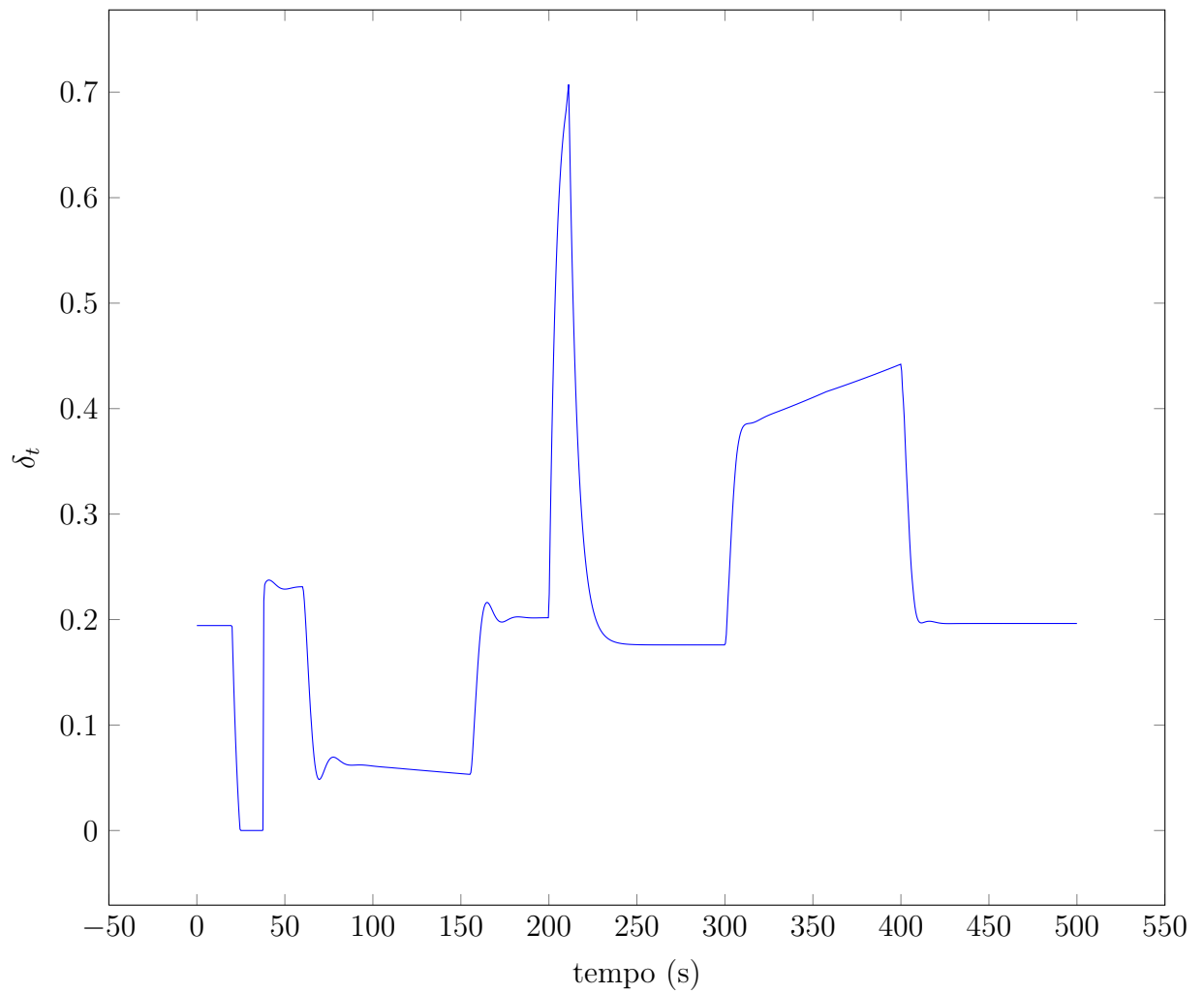


Figura 4.5: Resultados de simulação para controle de altitude e velocidade de um caça militar F-16. Ações de controle correspondentes ao comando de tração δ_t .

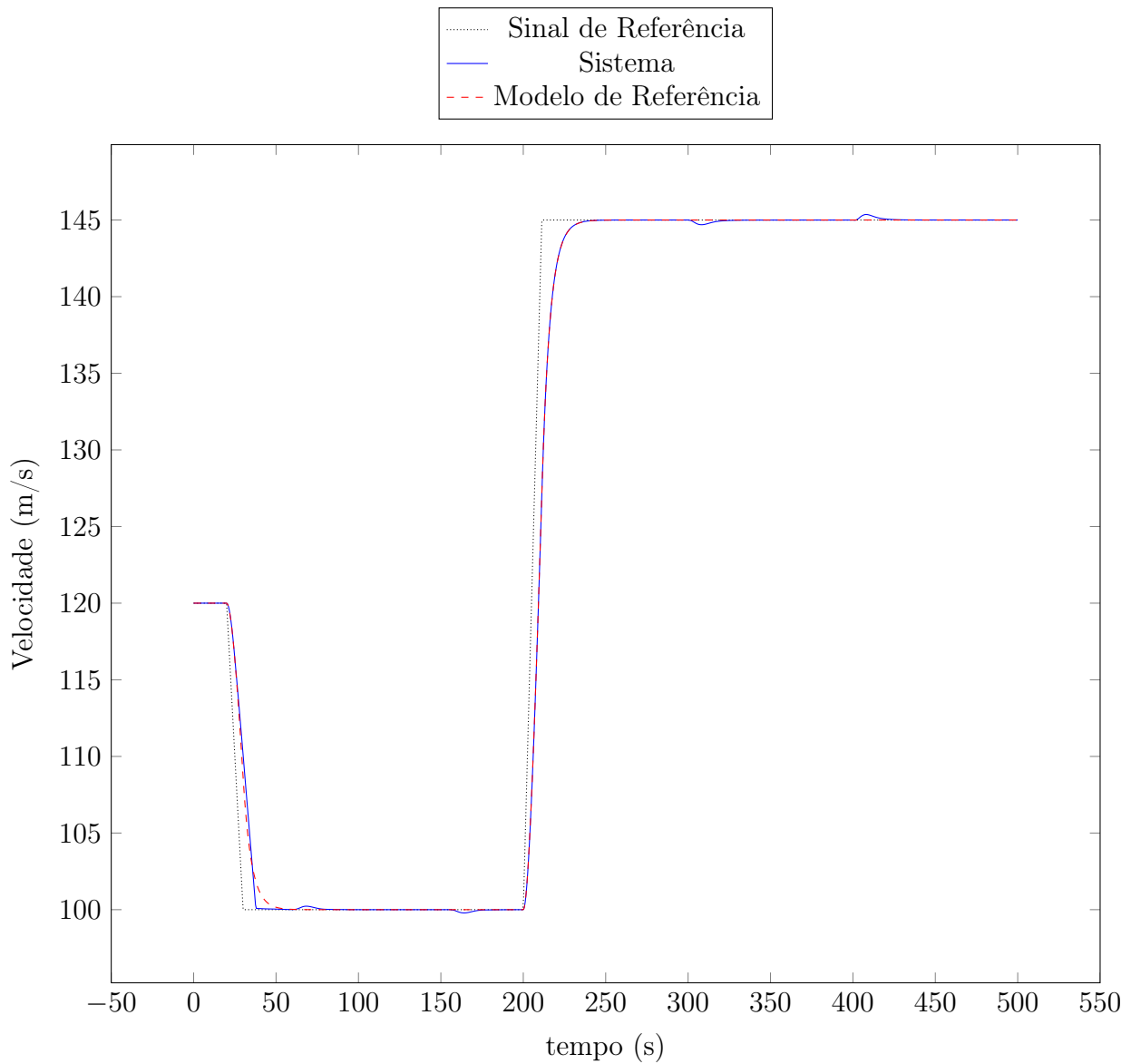


Figura 4.6: Resultados de simulação para controle de altitude e velocidade de um caça militar F-16. Controle de velocidade: (. . .) entrada para o modelo de referência; (- - -) saída do modelo de referência; (—) saída correspondente da aeronave.

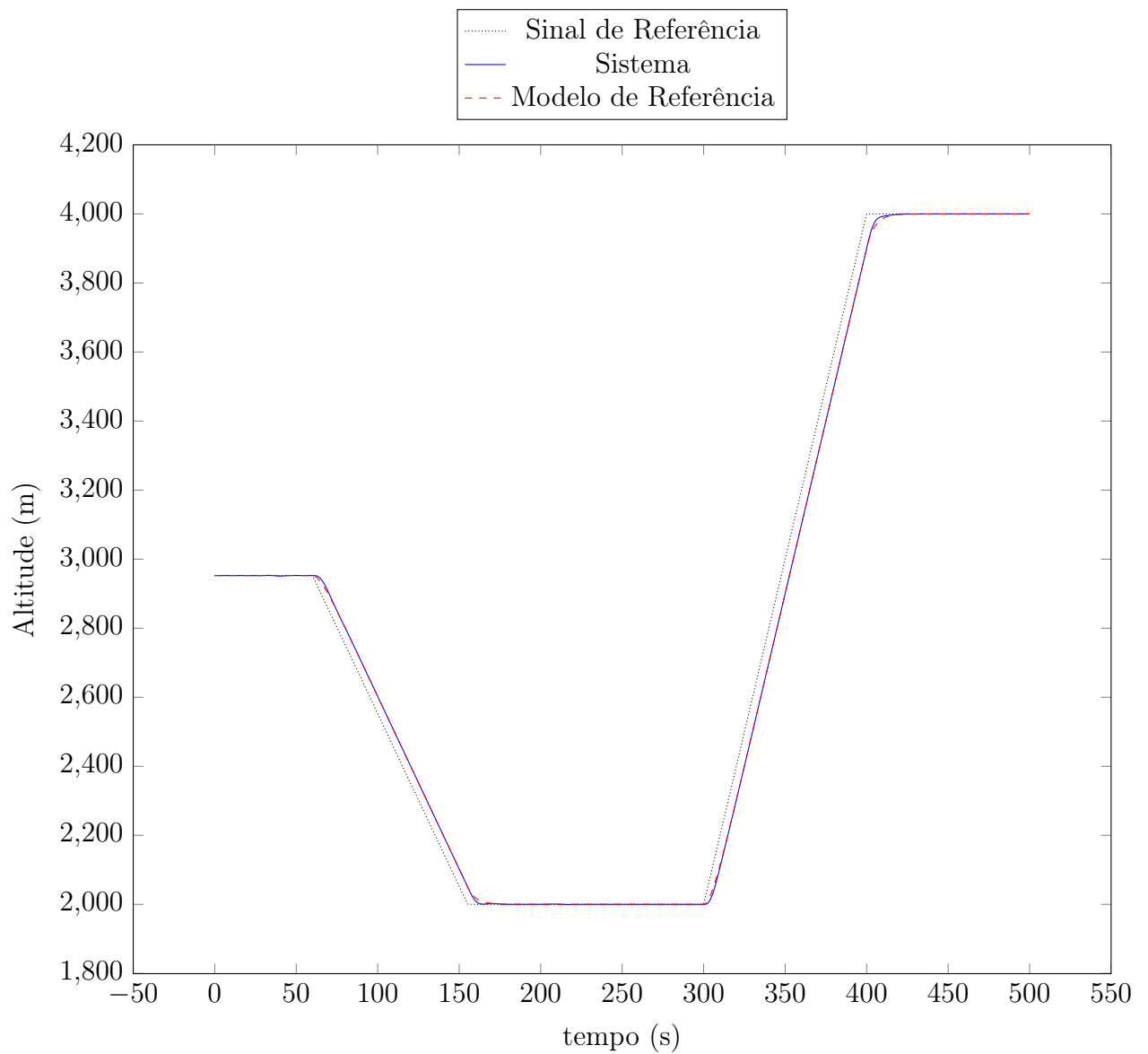


Figura 4.7: Resultados de simulação para controle de altitude e velocidade de um caça militar F-16. Controle de altitude: (. . .) entrada para o modelo de referência; (- - -) saída do modelo de referência; (—) saída correspondente da aeronave.

Capítulo 5

Conclusões e Trabalhos Futuros

Neste trabalho propôs-se uma metodologia para controle fuzzy TS baseado em um modelo de referência desejado para a malha fechada e uma modificação da metodologia de modelagem fuzzy TS baseada na HOSVD, de modo que ela se tornasse mais geral, acompanhada de uma modificação para a primeira metodologia, de modo que ela funcionasse com o modelo obtido. A primeira metodologia foi aplicada ao sincronismo de osciladores caóticos acoplados por um canal de transmissão, enquanto que a segunda metodologia (composta das modificações da metodologia de modelagem e de controle) foi aplicada ao controle do movimento longitudinal de uma aeronave de asa fixa. Este capítulo apresenta as conclusões retiradas do trabalho e algumas direções possíveis para trabalhos futuros.

5.1 Considerações Gerais

Ao longo deste trabalho foram propostas duas metodologias para uso em problemas de controle por modelo de referência. Tais metodologias foram aplicadas a dois problemas diferentes, os quais permitiram tirar algumas conclusões.

A primeira metodologia fez uso do teorema 2.3 para encontrar uma lei de controle fuzzy TS que minimizasse o limitante superior da norma \mathcal{H}_∞ das entradas de referência e perturbação do sistema para a ação de controle ponderada e a integral do erro entre a saída do sistema e a saída de um modelo de referência. Esse teorema, por sua vez, fez uso da função de Lyapunov fuzzy candidata proposta em (Rhee e Won 2006) e modificou as condições de estabilização apresentadas em (Mozelli et al. 2010) para o caso da norma \mathcal{H}_∞ .

A segunda metodologia propôs uma modificação à transformação do produto tensorial¹ (Baranyi 2004) de modo que o modelo qLPV utilizado fosse também obtido de maneira numérica a partir da expressão geral do sistema. Entretanto, tal modificação leva a transformação do produto tensorial a encontrar modelos da forma apresentada em (2.46) que por sua vez leva a uma modificação equivalente na lei de controle.

Um problema encontrado com ambas as metodologias propostas foi que ambas se mostraram bem restritivas para modelos com um número elevado de regras ($r > 30$) e não foram capazes de encontrar controladores nesses casos (devido principalmente ao número muito grandes de restrições que precisam ser atendidas nesses casos).

¹Apresentada no Apêndice A

5.2 Aplicação ao Sincronismo de Osciladores Caóticos

A primeira metodologia foi aplicada ao problema de sincronismo de dois circuitos de Chua acoplados por um canal de transmissão, que neste trabalho foi considerado como sendo um filtro de primeira ordem. Neste caso, o próprio canal de transmissão foi escolhido como modelo de referência para a malha fechada e o circuito escravo foi aumentado com um modelo exato do canal de transmissão. Espera-se que, fazendo com que a saída do filtro do sistema aumentado fique igual à saída do canal de transmissão, o oscilador escravo sincronize com o oscilador mestre (uma vez que eles possuem exatamente o mesmo modelo). Tal estratégia demonstrou eficácia na simulação apresentada neste trabalho e fez com que o erro de sincronismo entre o oscilador mestre e o oscilador escravo ficasse limitado e bem reduzido, mesmo no caso em que existe um sinal de excitação no oscilador mestre (vide Tabelas 3.1 e 3.2).

Entretanto, vale ressaltar que não foi considerado o ruído de transmissão introduzido durante a transmissão de informação e que, assim como outras estratégias que buscam equalizar a distorção introduzida pelo canal de transmissão, o sinal do ruído pode ser amplificado pela estratégia de controle proposta.

5.3 Aplicação ao Controle Longitudinal de uma Aeronave

A segunda metodologia foi aplicada ao problema de controle da altitude e velocidade de uma aeronave de asa fixa, considerando que seus movimentos longitudinal e latero-direcional são desacoplados. O uso da técnica de transformação do produto tensorial permitiu que fosse encontrada uma solução de compromisso entre o número de regras do modelo e sua precisão, de modo que foi possível encontrar um modelo para o qual o problema de otimização relacionado à síntese do controlador por modelo de referência fosse viável.

Inicialmente, tentou-se utilizar a primeira metodologia para este problema, obtendo-se o modelo TS por meio da transformação do produto tensorial tradicional. Entretanto, tal estratégia não resultou em controladores viáveis apesar de várias tentativas de estruturas do modelo qLPV utilizadas. Essa foi a principal motivação do desenvolvimento da segunda metodologia.

Ainda assim, o uso da segunda metodologia gera inicialmente um número restritivamente grande de modelos lineares locais, e o número de regras foi sendo reduzido até que fosse possível se obter um controlador por meio das condições de síntese apresentadas. Essa é a razão do baixo desempenho do modelo TS obtido em relação ao modelo original, e como a incerteza introduzida por essa redução de regras do modelo não foi considerada durante a síntese, o funcionamento do controlador obtido com o modelo original não era totalmente garantido. Entretanto, nas simulações realizadas com o controlador obtido, ele levou o sistema a exibir um comportamento bem próximo (visivelmente nos gráficos) ao desejado.

O uso de uma técnica baseada em modelo de referência permitiu que a malha fechada fosse especificada de maneira simples, incluindo o desacoplamento entre as malhas de altitude e velocidade. Como foi ressaltado no capítulo dessa aplicação, o controlador não foi capaz de desacoplar perfeitamente as malhas e talvez a escolha de um modelo de referência com um pequeno acoplamento entre elas demonstre um resultado um pouco melhor. Todavia, para a simulação apresentada, o controlador foi capaz de seguir bem próximo o modelo de referência desejado e não apresentou uma ação de controle de alta energia (no caso desse exemplo isso foi evitado pelo peso utilizado na ação de controle).

Apesar de as simulações realizadas para o controle da aeronave e a síntese do controlador terem sido feitas desconsiderando-se o efeito de perturbações atmosféricas, as LMIs apresentadas para a síntese do controlador permitem a inclusão do efeito de perturbações externas e a técnica de modelagem utilizada poderia ser facilmente modificada para encontrar também as matrizes B_{w_i} . O único problema associado

a considerar tal efeito para a síntese do controlador é o aumento do número de regras do modelo fuzzy TS que poderia acontecer.

Um problema real com o método de síntese atual, para sua aplicação ao controle de aeronaves, é que ele não leva em consideração, diretamente, a saturação das ações de controle e a maneira de lidar com esse efeito, no momento, é tornar o controlador mais conservador (piorando seu desempenho) por meio de um peso grande na ação de controle durante a síntese.

5.4 Artigo submetido

Um artigo sobre a aplicação da segunda metodologia ao problema de controle longitudinal de uma aeronave de asa fixa, chamado “Controle Fuzzy por Modelo de Referência Aplicado a um Caça Militar a Jato” foi submetido ao *Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI) 2011*.

5.5 Trabalhos Futuros

A pesquisa realizada nesta dissertação possui várias extensões possíveis que podem ser classificadas em quatro segmentos. Sendo eles a transformação do produto tensorial, o controle fuzzy TS por modelo de referência, o sincronismo de osciladores caóticos acoplados por um canal de transmissão e o controle do movimento longitudinal de uma aeronave.

5.5.1 Transformação do Produto Tensorial

Em relação a transformação do produto tensorial, seria interessante o desenvolvimento de uma métrica ou de uma metodologia que permita a classificação de quão bom um modelo (ou as características de suas matrizes de peso) são para certo objetivo, de modo que se saiba qual transformação das matrizes de peso (ou combinação de transformações) deve ser utilizada em cada caso. Uma outra linha de pensamento interessante seria o desenvolvimento de métodos de análise/síntese que levassem em conta alguma característica que possa ser imposta sobre as matrizes de peso de modo a reduzir o conservatismo.

Considerando as duas ideias propostas, é interessante ressaltar que as únicas características necessárias para as matrizes de peso de um modelo para que ele possa ser uma representação equivalente de um modelo TS são as características Normalizada em Soma (SN) e Não Negativa (NN). Além disso, a imposição de apenas essas duas características corresponde a restrições convexas no espaço de busca e, portanto, a imposição de uma outra característica por meio de uma função de custo convexa significa que a melhor matriz de peso (de acordo com a característica desejada) pode ser encontrada por meio de um problema de otimização convexo.

5.5.2 Controle Fuzzy Takagi-Sugeno por Modelo de Referência

No caso do controle fuzzy TS por modelo de referência, o uso de outro tipo de função de Lyapunov fuzzy candidata (cujas condições de estabilidade dependem da derivada temporal das funções de pertinência), como as que foram propostas em (Mozelli 2011), pode gerar resultados menos conservadores, ou mesmo tornar viáveis problemas com um número maior de regras. Outra maneira de generalizar os resultados obtidos neste trabalho seria a adaptação das condições utilizadas para levar em consideração a incerteza do modelo e as medições disponíveis do sistema para a síntese do controlador, como em (Mansouri et al. 2009), ou a investigação do uso de técnicas de controle TS adaptativas por modelo de referência,

adaptando, por exemplo, a técnica apresentada em (Park, Lee e Park 2002). Entretanto, a função de Lyapunov utilizada não parece permitir generalizações em relação à incerteza do modelo.

Outra direção de pesquisa interessante seria a investigação da redução de conservadorismo atingida ao se utilizar relaxações convergentes, como em (Montagner, Oliveira e Peres 2009, 2010; Sala e Arino 2007), e a busca por uma solução de compromisso, ou a incorporação de uma ação anti-windup ao controlador, levando em conta seu efeito na malha fechada durante a síntese.

Uma ideia ainda mais interessante seria a investigação da incorporação de técnicas de controle híbrido às metodologias propostas neste trabalho. Um uso possível para tais técnicas seria o seguinte: suponha que para um mesmo sistema existam vários modelos de referência desejados e que eventos externos sejam responsáveis pela escolha do modelo desejado. Deseja-se encontrar um controlador (que também possa ser chaveado por meio desse evento externo, de maneira similar ao conceito de um controlador PDC) que seja capaz de seguir tais modelos. Nota-se que técnicas de controle robusto também poderiam ser utilizadas nesse contexto (simplesmente utilizando-se um modelo incerto para o modelo de referência), entretanto espera-se que utilizando técnicas de controle híbrido encontre-se um controlador menos conservador.

Por fim, considerando o controle fuzzy por modelo de referência, um trabalho futuro mais direto seria a extensão das condições utilizadas para sistemas de tempo discreto, permitindo a síntese de controladores digitais.

5.5.3 Sincronismo de Osciladores Caóticos Acoplados por um Canal de Transmissão

Em relação ao osciladores caóticos acoplados por um canal de transmissão, uma direção de pesquisa possível seria a redução da sensibilidade ao ruído da estratégia de sincronismo atual. Uma ideia a ser investigada é o uso de um modelo de referência incerto associado ao modelo inverso para a síntese do controlador, de modo que o modelo de referência possa ser substituído por um filtro inverso adaptativo, ou um estimador de estados do oscilador mestre. Outra direção de pesquisa seria o estudo do uso da norma \mathcal{H}_∞ (ganho $\mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_2$ induzido) para evidenciar o efeito do canal de transmissão sobre o sincronismo.

Pretende-se ainda, escrever um artigo em inglês para o *International Journal of Bifurcation and Chaos* sobre a estratégia de sincronismo proposta no capítulo 3.

5.5.4 Controle do Movimento Longitudinal de uma Aeronave

No caso do controle do movimento longitudinal de uma aeronave as direções de pesquisa são mais diretas, como levar em consideração o efeito de perturbações atmosféricas sobre o controle e comparar o resultado obtido da técnica de modelagem proposta com outras técnicas, como a associação das técnicas apresentadas em (Marcos e Balas 2004) e a transformação do produto tensorial.

Bibliografia

- Baranyi, P. (1999). “Reduction of fuzzy rule base via singular value decomposition”. Em: *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 7.2, pp. 120–132. ISSN: 10636706. DOI: [10.1109/91.755394](https://doi.org/10.1109/91.755394).
- Baranyi, P. (2004). “TP model transformation as a way to LMI-based controller design”. Em: *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 51.2, pp. 387–400. ISSN: 0278-0046.
- Baranyi, P. et al. (2007). “Complexity relaxation of the tensor product model transformation for higher dimensional problems”. Em: *Asian Journal of Control* 9.2, pp. 195–200.
- Boyd, S. e L. Vandenberghe (2004). *Convex Optimization*. Cambridge University Press. ISBN: 978-0-521-83378-3.
- Boyd, S. et al. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Vol. 15. SIAM Studies in Applied Mathematics. SIAM. ISBN: 0-89871-334-X.
- De Lathauwer, L., B. De Moor e J. Vandewalle (2000). “A Multilinear Singular Value Decomposition”. Em: *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 21.4, p. 1253. ISSN: 08954798. DOI: [10.1137/S0895479896305696](https://doi.org/10.1137/S0895479896305696).
- FlightGear Flight Simulator* (fev. de 2011). URL: <http://www.flightgear.org/>.
- Koronovskii, A. A., O. I. Moskalenko e A. E. Hramov (dez. de 2009). “On the use of chaotic synchronization for secure communication”. Em: *Physics-Uspekhi* 52.12, pp. 1213–1238. ISSN: 1063-7869.
- Löfberg, J. (2004). “YALMIP : A Toolbox for Modeling and Optimization in MATLAB”. Em: *Proceedings of the CACSD Conference*. Taipei, Taiwan.
- Lyapunov, A. M. (1992). “General Problem Stability of Motion”. Em: *International Journal of Control* 55.3, pp. 531–534.
- Mansouri, B. et al. (out. de 2009). “Output feedback LMI tracking control conditions with H_∞ criterion for uncertain and disturbed T-S models”. Em: *Information Sciences* 179.4, pp. 446–457. ISSN: 00200255.
- Marcos, A. e G. Balas (mar. de 2004). “Development of Linear-Parameter-Varying Models for Aircraft”. Em: *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 27.2, pp. 218–228.
- Montagner, V. F., R. C. L. F. Oliveira e P. L. D. Peres (2009). “Convergent LMI Relaxations for Quadratic Fuzzy Systems”. Em: *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 17.4, pp. 863–873.

- Montagner, V. F., R. C. L. F. Oliveira e P. L. D. Peres (2010). “Relaxações convexas de convergencia garantida para o projeto de controladores para sistemas nebulosos de Takagi-Sugeno”. Em: *Revista Controle e Automação* 21.1, pp. 82–95.
- Mozelli, L. A. (2008). “Controle Fuzzy para Sistemas Takagi-Sugeno: Condições Aprimoradas e Aplicações”. Diss. de mestrado. Universidade Federal de Minas Gerais.
- Mozelli, L. A. (2011). “Novas Funções de Lyapunov Fuzzy e Soluções Numéricas para Análise de Estabilidade e Control via Modelagem Takagi-Sugeno: Aproximando os Controles Fuzzy e Não-Linear”. Tese de doutorado. Universidade Federal de Minas Gerais.
- Mozelli, L. A., R. M. Palhares e G. S. C. Avellar (2009). “A systematic approach to improve multiple Lyapunov function stability and stabilization conditions for fuzzy systems”. Em: *Information Sciences* 179.8, pp. 1149–1162.
- Mozelli, L. A., R. M. Palhares e E. M. A. M. Mendes (2010). “Equivalent Techniques, Extra Comparisons and Less Conservative Control Design for TS Fuzzy Systems”. Em: *IET Control Theory & Applications* 4.12, pp. 2813–2822.
- Mozelli, L. A. et al. (2007). “Chaotic Synchronization and Information Transmission Experiments: A Fuzzy Relaxed \mathcal{H}_∞ Control Approach”. Em: *Circuits, Systems, and Signal Processing* 26.4, pp. 427–449.
- Mozelli, L. A. et al. (2010). “Condições LMIs alternativas para sistemas Takagi-Sugeno via função de lyapunov fuzzy”. Em: *Revista Controle e Automação* 21.1, pp. 96–107.
- Nagy, S. et al. (2009). “Computational relaxed TP model transformation: restricting the computation to subspaces of the dynamic model”. Em: *Asian Journal of Control* 11.5, pp. 461–475.
- Palhares, R. M. e E. N. Gonçalves (2007). “Enciclopédia de Automática - Controle e Automação”. Em: ed. por Luis Antonio Aguirre. Vol. 1. Editora Blucher. Cap. 7 - Desigualdades matriciais lineares em controle, pp. 155–195.
- Park, C. W., C. H. Lee e M. Park (nov. de 2002). “Design of an adaptive fuzzy model based controller for chaotic dynamics in Lorenz systems with uncertainty”. Em: *Information Sciences* 147.1-4, pp. 245–266. ISSN: 00200255.
- Petres, Z. et al. (2005). “Approximation Trade-off by TP Model Transformation”. Em: *6th International Symposium of Hungarian Researchers on Computational Intelligence*. Qhull (abr. de 2011). URL: <http://www.qhull.org/>.
- Rhee, B. e S. Won (2006). “A new fuzzy Lyapunov function approach for a Takagi-Sugeno fuzzy control system design”. Em: *Fuzzy Sets and Systems* 157.9, pp. 1211–1228.
- Rugh, W. J. e J. S. Shamma (2000). “Research on gain scheduling”. Em: *Automatica* 36.10, pp. 1401–1425.
- Sala, A. e C. Arino (dez. de 2007). “Asymptotically necessary and sufficient conditions for stability and performance in fuzzy control: Applications of Polya’s theorem”. Em: *Fuzzy Sets and Systems* 158.24, pp. 2671–2686. ISSN: 01650114.

- Scheck, Lieutenant Colonel William (2004). “Lawrence Sperry: Autopilot Inventor and Aviation Innovator”. Em: *Aviation History*. URL: <http://www.historynet.com/lawrence-sperry-autopilot-inventor-and-aviation-innovator.htm>.
- Slotine, J. E. e W. Li (1991). *Applied Nonlinear Control*. Prentice-Hall International.
- Stevens, B. L. e F. L. Lewis (2003). *Aircraft Control and Simulation*. Second. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.
- Takagi, T. e M. Sugeno (1985). “Fuzzy identification of systems and its application to modeling and control”. Em: *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* SMC-15.1, pp. 116–132.
- Tanaka, K. e H.O. Wang (2001). *Fuzzy control systems design and analysis: a linear matrix inequality approach*. Wiley-Interscience. ISBN: 0471323241.
- Teixeira, M. C. M. e E. Assunção (2007). “Enciclopédia de Automática - Controle e Automação”. Em: ed. por Luis Antonio Aguirre. Vol. 1. Editora Blucher. Cap. 9 - Extensões para sistemas não-lineares, pp. 218–231.
- Torres, L. A. B. e L. A. Aguirre (2004). “Transmitting information by controlling nonlinear oscillators”. Em: *Physica D - Nonlinear Phenomena* 196.3-4, pp. 387–406.
- Varkonyi, P. et al. (2005). “A new algorithm for RNO-INO type tensor product model representation”. Em: *2005 IEEE International Conference on Intelligent Engineering Systems, INES '05*. IEEE, pp. 263–266. ISBN: 0-7803-9474-7. DOI: [10.1109/INES.2005.1555170](https://doi.org/10.1109/INES.2005.1555170).

Apêndice A

Transformação do Produto Tensorial

A transformação do produto tensorial (Baranyi 2004), do inglês Tensor Product model transformation, é uma técnica numérica que permite, dada uma representação quase-LPV (qLPV) de um sistema, encontrar uma representação convexa equivalente.

Este apêndice tem o intuito de apresentar a técnica da transformação do produto tensorial. Para facilitar a exposição, inicialmente são apresentados alguns conceitos de álgebra multilinear e a generalização da decomposição de valores singulares para tensores, Decomposição de Valores Singulares de Alta Ordem (HOSVD). Após essa apresentação preliminar, a técnica da transformação do produto tensorial é apresentada. Por fim, é apresentado um exemplo de aplicação da técnica para sistemas dinâmicos.

A apresentação utilizada neste apêndice foi baseada nos trabalhos (Baranyi 2004; De Lathauwer, De Moor e Vandewalle 2000).

A.1 Conceitos Preliminares

O principal resultado apresentado nesta seção é a decomposição de valores singulares de alta ordem, que é uma generalização para tensores de alta ordem da decomposição de valores singulares. Para que seja possível enunciar o teorema que define a decomposição e, em seguida, apresentar maneiras possíveis de calcular a decomposição, algumas definições são necessárias.

A primeira dessas definições é de uma representação matricial para tensores de alta ordem, chamada de *matriz modo- n* ou *matriz de desdobramento* do tensor, que permite que algumas operações tensoriais sejam representadas como operações matriciais.

Definição A.1. Considere um tensor $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$ de ordem N . A *matriz modo- n* $A_{(n)} \in \mathbb{R}^{I_n \times J}$,

com $J = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^N I_k$, é uma representação matricial possível para o tensor. Tal matriz contém o elemento $a_{i_1 i_2 \dots i_N}$ do tensor na linha i_n e na coluna

$$(i_{n+1} - 1)I_{n+2}I_{n+3} \dots I_N I_1 I_2 \dots I_{n-1} + (i_{n+2} - 1)I_{n+3}I_{n+4} \dots I_N I_1 I_2 \dots I_{n-1} + \dots \\ + (i_N - 1)I_1 I_2 \dots I_{n-1} + (i_1 - 1)I_2 I_3 \dots I_{n-1} + (i_2 - 1)I_3 I_4 \dots I_{n-1} + \dots + i_{n-1}.$$

Tal definição indica que o desdobramento de *modo-n* é feito da seguinte maneira:

- O n -ésimo índice de cada elemento indica em qual linha ele estará na *matriz modo-n*.
- As colunas são “desdobradas” na seguinte ordem: primeiro o $(n - 1)$ -ésimo elemento, seguido do $(n - 2)$ -ésimo elemento e assim por diante de forma circular.

Exemplo A.1. Dado um tensor $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2 \times 2}$, seu desdobramento é feito como apresentado acima.

No caso da *matriz modo-1*, o primeiro índice indica a linha do elemento e as colunas são “desdobradas” primeiro pelo terceiro índice e em seguida pelo segundo.

No caso da *matriz modo-2*, o segundo índice indica a linha do elemento e as colunas são “desdobradas” primeiro pelo primeiro índice e em seguida pelo terceiro.

No caso da *matriz modo-3*, o terceiro índice indica a linha do elemento e as colunas são “desdobradas” primeiro pelo segundo índice e em seguida pelo primeiro.

Suas matrizes de desdobramento, então, são dadas por:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{(1)} &= \left[\begin{array}{cc|cc} a_{111} & a_{112} & a_{121} & a_{122} \\ a_{211} & a_{212} & a_{221} & a_{222} \end{array} \right], \\ \mathcal{A}_{(2)} &= \left[\begin{array}{cc|cc} a_{111} & a_{211} & a_{112} & a_{212} \\ a_{121} & a_{221} & a_{122} & a_{222} \end{array} \right], \\ \mathcal{A}_{(3)} &= \left[\begin{array}{cc|cc} a_{111} & a_{121} & a_{211} & a_{221} \\ a_{112} & a_{122} & a_{212} & a_{222} \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Além dessa representação a definição do produto interno entre dois tensores também se faz necessária, pois permite a definição de uma norma para o tensor e a definição de ortogonalidade entre tensores.

Definição A.2. O produto escalar $\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle$ de dois tensores $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$ é definido como

$$\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle = \sum_{i_1} \sum_{i_2} \dots \sum_{i_N} b_{i_1 i_2 \dots i_N} a_{i_1 i_2 \dots i_N}.$$

Tendo definido o produto interno entre dois tensores, pode-se então definir a ortogonalidade entre dois tensores e a norma de Frobenius de um tensor. Duas definições que serão importantes para o enunciado das propriedades da HOSVD.

Definição A.3. Dois tensores são ditos ortogonais se seu produto escalar é igual a 0.

Definição A.4. A norma de Frobenius de um tensor \mathcal{A} é dada por

$$\|\mathcal{A}\| = \sqrt{\langle \mathcal{A}, \mathcal{A} \rangle}.$$

Por fim, define-se o produto modo-n entre um tensor e uma matriz. Tal produto pode ser visto como uma generalização do produto esquerdo e produto direito de uma matriz (equivalentes ao produto modo-1 e produto modo-2 nessa notação).

Definição A.5. O produto modo-n de um tensor $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$ por uma matriz $U \in \mathbb{R}^{J_n \times I_n}$, representado por $\mathcal{A} \times_n U$, é um tensor pertencente a $\mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_{n-1} \times J_n \times I_{n+1} \times \dots \times I_N}$ cujos elementos são dados por

$$(\mathcal{A} \times_n U)_{i_1 i_2 \dots i_{n-1} j_n i_{n+1} \dots i_N} = \sum_{i_n} a_{i_1 i_2 \dots i_{n-1} i_n i_{n+1} \dots i_N} u_{j_n i_n}.$$

Tal operação pode também ser descrita em termos das matrizes de modo- n do tensor \mathcal{A} e do tensor resultado da operação como

$$(\mathcal{A} \times_n U)_{(n)} = U \mathcal{A}_{(n)}.$$

Propriedade A.1. Dado um tensor $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$ e as matrizes $F \in \mathbb{R}^{J_n \times I_n}$ e $G \in \mathbb{R}^{J_m \times I_m}$, com $n \neq m$, tem-se que

$$(\mathcal{A} \times_n F) \times_m G = (\mathcal{A} \times_m G) \times_n F = \mathcal{A} \times_n F \times_m G.$$

Propriedade A.2. Dado um tensor $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$ e as matrizes $F \in \mathbb{R}^{J_n \times I_n}$ e $G \in \mathbb{R}^{K_n \times J_n}$, tem-se que

$$(\mathcal{A} \times_n F) \times_n G = \mathcal{A} \times_n (GF).$$

Com estas definições pode-se então enunciar o principal resultado dessa seção, que será essencial para a técnica da transformação do produto tensorial.

Teorema A.1. (HOSVD - De Lathauwer, De Moor e Vandewalle 2000). *Todo tensor $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$ pode ser escrito como o produto*

$$\mathcal{A} = \mathcal{S} \times_1 U^{(1)} \times_2 U^{(2)} \dots \times_N U^{(N)},$$

representado de maneira curta como

$$\mathcal{A} = \mathcal{S} \bigotimes_{n=1}^N U^{(n)},$$

em que

1. $U^{(n)} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^{(n)} & \mathbf{u}_2^{(n)} & \dots & \mathbf{u}_{I_n}^{(n)} \end{bmatrix}$ é uma matriz unitária de dimensões $I_n \times I_n$ chamada de matriz singular de modo- n ;
2. $\mathcal{S} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$, chamado de tensor de núcleo, é um tensor cujos subtensores $\mathcal{S}_{i_n=\alpha}$, obtidos fixando-se o n -ésimo índice em α , têm as seguintes propriedades:

(a) *toda-ortogonalidade:* dois subtensores $\mathcal{S}_{i_n=\alpha}$ e $\mathcal{S}_{i_n=\beta}$ são ortogonais para todos os valores possíveis de n , α e β sujeitos a $\alpha \neq \beta$:

$$\langle \mathcal{S}_{i_n=\alpha}, \mathcal{S}_{i_n=\beta} \rangle = 0 \quad \forall \quad \alpha \neq \beta;$$

(b) *ordenação:*

$$\|\mathcal{S}_{i_n=1}\| \geq \|\mathcal{S}_{i_n=2}\| \geq \dots \geq \|\mathcal{S}_{i_n=I_n}\| \geq 0$$

para todos os valores possíveis de n .

As normas de Frobenius $\|\mathcal{S}_{i_n=i}\|$, simbolizadas como $\sigma_i^{(n)}$, são os valores singulares de modo- n de \mathcal{A} e o vetor $\mathbf{u}_i^{(n)}$ é o vetor singular de modo- n correspondente.

O cômputo dessa decomposição é realizado em dois passos¹. Inicialmente são calculadas as matrizes singulares de modo- n e em seguida é calculado o tensor de núcleo.

As matrizes singulares de modo- n são as matrizes de vetores singulares esquerdos das matrizes de desdobramento do tensor. Sendo assim, cada matriz (e os respectivos valores singulares de modo- n) é encontrada a partir de uma decomposição de valores singulares de cada matriz de desdobramento do tensor.

Tendo as matrizes singulares, o tensor de núcleo pode ser encontrado fazendo-se

$$\mathcal{S} = \mathcal{A} \times_1 U^{(1)T} \times_2 U^{(2)T} \dots \times_N U^{(N)T}.$$

¹Para mais detalhes, vide (De Lathauwer, De Moor e Vandewalle 2000)

A.2 Transformação do Produto Tensorial

A transformação do produto tensorial é uma técnica numérica que fornece aproximações convexas para funções, válidas dentro de um subespaço limitado do domínio da função a ser aproximada. Tais aproximações convexas podem ser representadas através de um polítopo de valores (não necessariamente pertencentes ao espaço imagem da função) cuja combinação convexa é capaz de representar o comportamento da função. Tal representação é equivalente a um modelo fuzzy Takagi-Sugeno (TS) da função.

Quando aplicada sobre um modelo qLPV de um sistema dinâmico, tal técnica é então capaz de encontrar uma representação fuzzy TS do sistema. Neste caso, temos um polítopo de sistemas lineares, pois fixando os valores dos parâmetros do modelo qLPV, este se torna um modelo linear. Tal representação permite o uso de Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs) para a síntese de controladores, ou para análise do sistema.

Nesta seção, apresenta-se a técnica da transformação do produto tensorial e seu uso de uma forma geral. Na seção seguinte é apresentado um exemplo de seu uso específico para a obtenção de um modelo TS de um sistema.

A.2.1 Amostragem e Representação Tensorial

O primeiro passo para a aplicação da transformação do produto tensorial é, dada a função a ser aproximada, amostrá-la dentro de um espaço hiperretangular (que corresponde ao domínio de validade da aproximação) e armazenar tais amostras em um tensor.

Dada uma função $f : [x_1, \bar{x}_1] \times \dots \times [x_N, \bar{x}_N] \rightarrow \mathbb{R}^{M_1 \times \dots \times M_m}$, em que $[x_1, \bar{x}_1] \times \dots \times [x_N, \bar{x}_N]$ é um subespaço hiperretangular pertencente ao \mathbb{R}^N , define-se um grid de amostragem de tamanho $I_1 \times \dots \times I_N$ sobre o domínio da função.

Define-se um tensor, $\mathcal{S}_d \in \mathbb{R}^{I_1 \times \dots \times I_N \times M_1 \times \dots \times M_m}$, que guarda os valores amostrados de f para cada ponto do grid.

Exemplo A.2. Considere a função $f(x, y) = xy(1 + \sin(x) \cos(y))$, com $x \in [-10, 10]$ e $y \in [-10, 10]$, apresentada na Figura A.1. Tem-se que $f : [-10, 10] \times [-10, 10] \rightarrow \mathbb{R}$.

Definindo um passo de amostragem do grid de 0,1 em x e em y , tem-se um grid de amostragem de tamanho 201×201 . Avaliando a função em cada ponto do grid e guardando no tensor \mathcal{S}_d , obtêm-se na verdade uma matriz de tamanho 201×201 .

A.2.2 Decomposição de Valores Singulares de Alta Ordem

Tendo definido o tensor $\mathcal{S}_d \in \mathbb{R}^{I_1 \times \dots \times I_N \times M_1 \times \dots \times M_m}$ que armazena as amostras da função a ser aproximada, utiliza-se a HOSVD apresentada na seção anterior para decompor o tensor.

A ideia aqui é apresentar o tensor de amostras como uma soma ponderada, onde os pesos variam de acordo com as variáveis da função. Sendo assim, percebe-se que para esse fim não é interessante decompor o tensor nas $N + m$ dimensões diferentes. Neste caso, ele é decomposto apenas nas N primeiras dimensões que representam as variáveis da função a ser aproximada.

Pode-se então escrevê-lo como:

$$\mathcal{S}_d = \mathcal{S} \underset{n=1}{\overset{N}{\otimes}} U^{(n)}.$$

Nessa notação podemos entender que o tensor de amostras pode ser representado como uma soma ponderada, em que cada matriz $U^{(n)}$ representa os pesos relativos a variável n do grid de amostras. Cada vetor coluna $\mathbf{u}_i^{(n)}$ representa uma função de peso diferente para essa variável.

Conforme apresentado na seção anterior desse apêndice, o cálculo da HOSVD ocorre em dois passos. Durante o primeiro passo é realizada uma decomposição de valores singulares de cada matriz de

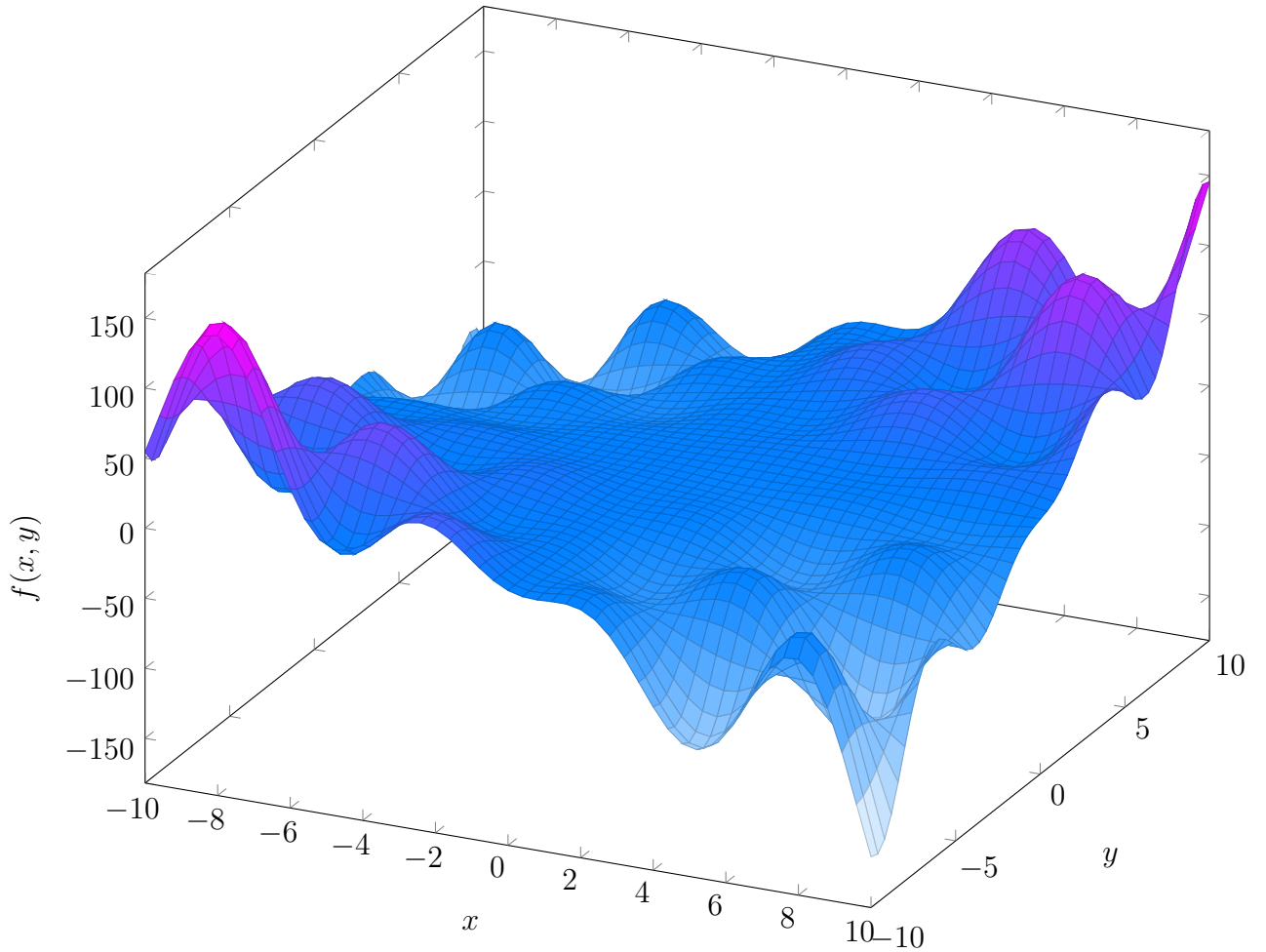


Figura A.1: $f(x, y) = xy(1 + \text{sen}(x) \cos(y))$, utilizada no exemplo A.2.

desdobramento do tensor de modo a encontrar as matrizes $U^{(n)}$ e os valores singulares de modo- n . Nesta etapa, cada coluna $\mathbf{u}_i^{(n)}$ encontrada corresponde a um valor singular de modo- n .

Mantendo apenas as colunas de valores singulares não-nulos encontra-se uma representação exata para o tensor. Retirando-se colunas com valores singulares não-nulos, chega-se em uma representação de menor complexidade, porém com certo erro. Tal representação reduzida não têm a propriedade de ser a melhor representação reduzida (em termos de minimização do erro), como é o caso quando se utiliza tal redução para matrizes através da decomposição de valores singulares. Todavia, é possível mostrar que o erro de aproximação cometido por se retirar uma coluna com um valor singular de modo- n não nulo é limitado (De Lathauwer, De Moor e Vandewalle 2000).

Essa é, portanto, a etapa da técnica da transformação do produto tensorial que permite fazer uma escolha entre a complexidade final da representação (número de funções de peso para cada variável, que é equivalente ao número de colunas das matrizes $U^{(n)}$) e a precisão da aproximação (Baranyi 2004).

Exemplo A.3. Considerando ainda a função utilizada no exemplo A.2 e o tensor (matriz) \mathcal{S}_d . Mantendo-se apenas as colunas $\mathbf{u}_i^{(n)}$ que possuem valores singulares maiores do que 1×10^{-5} o maior valor singular daquele modo, chega-se em uma representação com $U^{(1)} \in \mathbb{R}^{201 \times 2}$, $U^{(2)} \in \mathbb{R}^{201 \times 2}$ e $\mathcal{S} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

Pensando nas matrizes $U^{(n)}$, apresentadas na Figura A.2, como representando funções de peso da variável n do grid, temos que, dentro do intervalo de aproximação, a função $f(x, y) = xy(1 + \text{sen}(x) \cos(y))$ pode ser representada pela soma dos termos do tensor de núcleo \mathcal{S} ponderada pelas funções de peso.

No caso deste exemplo, podemos escrever:

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \mathbf{u}_i^{(1)} \mathbf{u}_j^{(2)} \mathcal{S}_{ij}.$$

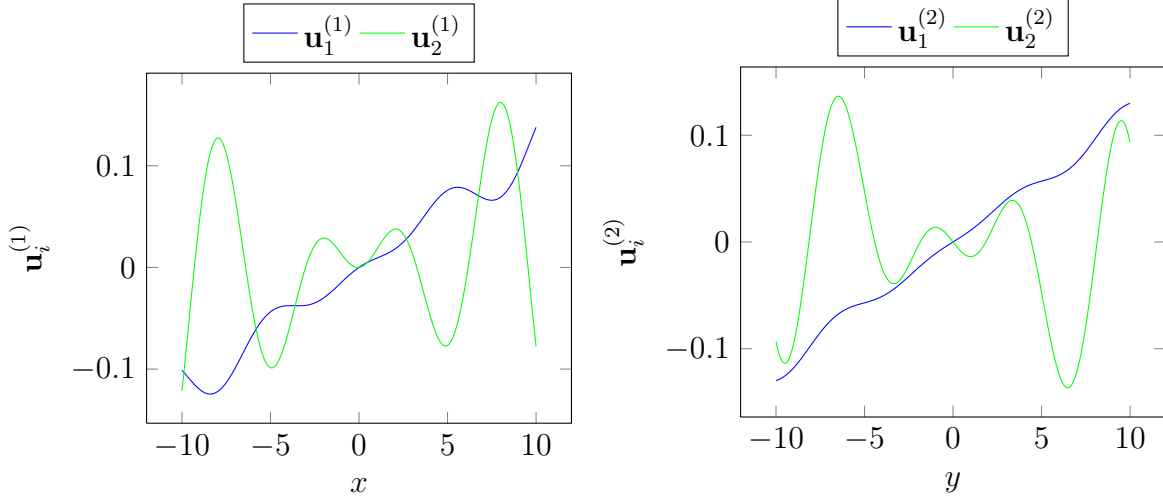


Figura A.2: funções de peso obtidas no exemplo A.3.

A.2.3 Representações convexas

O uso da HOSVD permitiu a decomposição da função como uma soma ponderada de um produto de termos dependentes de apenas uma variável. Entretanto, em alguns casos, busca-se uma representação com características adicionais.

Para que a representação obtida seja semelhante a um modelo TS da função é necessário que as funções de peso tenham características semelhantes às de funções de pertinência de um conjunto fuzzy. No caso da técnica da transformação do produto tensorial, as características das funções de peso são exigidas na forma de características das matrizes de peso $U^{(n)}$, que por sua vez podem ser vistas como características do tensor de núcleo \mathcal{S} .

Para se impor características sobre uma determinada matriz de peso, esta é multiplicada a direita por uma matriz de transformação quadrada. Para que tal transformação seja válida, é necessário que a matriz de transformação possua inversa.

Considerando que $\tilde{U}^{(n)} = U^{(n)}T_n$, tem-se que $U^{(n)} = \tilde{U}^{(n)}T_n^{-1}$. Utilizando as propriedades A.1 e A.2 é possível mostrar que

$$\mathcal{S} \underset{n=1}{\otimes}^N U^{(n)} = \tilde{\mathcal{S}} \underset{n=1}{\otimes}^N \tilde{U}^{(n)},$$

com $\tilde{\mathcal{S}}$ dado por

$$\tilde{\mathcal{S}} = \mathcal{S} \underset{n=1}{\otimes}^N T_n^{-1}.$$

Na literatura, as características normalmente são definidas em relação às funções de peso (obtidas após a interpolação das colunas das matrizes de peso). Entretanto, como as transformações utilizadas para se obter as características desejadas são realizadas sobre as matrizes de peso, neste trabalho as definições são feitas a partir das matrizes de peso.

A seguir são apresentadas as características normalmente utilizadas na literatura (Petres et al. 2005) e o porquê elas são desejáveis.

Normalizada em Soma e Não Negativa

Definição A.6. Normalizada em Soma (SN) - Uma matriz $U^{(n)}$ é dita normalizada em soma se a soma de suas colunas, $\mathbf{u}_i^{(n)}$, resulta em um vetor cujos componentes são todos iguais a um (representado por $\mathbf{1}$). Escrevendo de outra maneira, uma matriz $U^{(n)}$ com r colunas é dita normalizada em soma se

$$\sum_{i=1}^r \mathbf{u}_i^{(n)} = \mathbf{1}.$$

Definição A.7. Não Negativa (NN) - Uma matriz $U^{(n)}$ é dita não negativa se nenhum de seus elementos é negativo. Escrevendo de outra maneira, uma matriz $U^{(n)}$ é dita não negativa se

$$u_{ij}^{(n)} \geq 0, \quad \forall i, j.$$

Quando todas as matrizes de peso são SN e NN, o modelo obtido equivale a um modelo TS e as funções de peso (correspondentes às colunas das matrizes de peso) são equivalentes a funções de pertinência de um modelo TS. Sendo assim, sempre que se é desejável encontrar uma aproximação fuzzy TS deseja-se que todas as matrizes de peso sejam SN e NN. Um algoritmo para o cálculo da transformação (separadamente) das matrizes de peso em SN e NN é apresentado em (Baranyi 1999).

Exemplo A.4. Considerando as matrizes de peso obtidas no exemplo A.3 e aplicando uma transformação de modo a torná-las SN e NN obtêm-se as funções de peso apresentadas na Figura A.3. É interessante notar que em ambos os casos não foi possível obter as transformações mantendo-se o número de colunas das matrizes de peso (como pode-se perceber que uma nova função foi acrescentada a cada gráfico, comparando as Figuras A.2 e A.3).

Para que a transformação seja possível, sem alterar o número de colunas, é necessário que o vetor $\mathbf{1}$ pertença ao espaço imagem da matriz de peso que se deseja transformar. Quando ele não pertence, é necessária a inclusão de uma nova coluna na matriz de modo que passe a pertencer. Nesse caso, a transformação SN tem uma resposta trivial que é dada pelo acréscimo de uma nova coluna dada por $\mathbf{1} - \sum_{i=1}^r \mathbf{u}_i^{(n)}$.

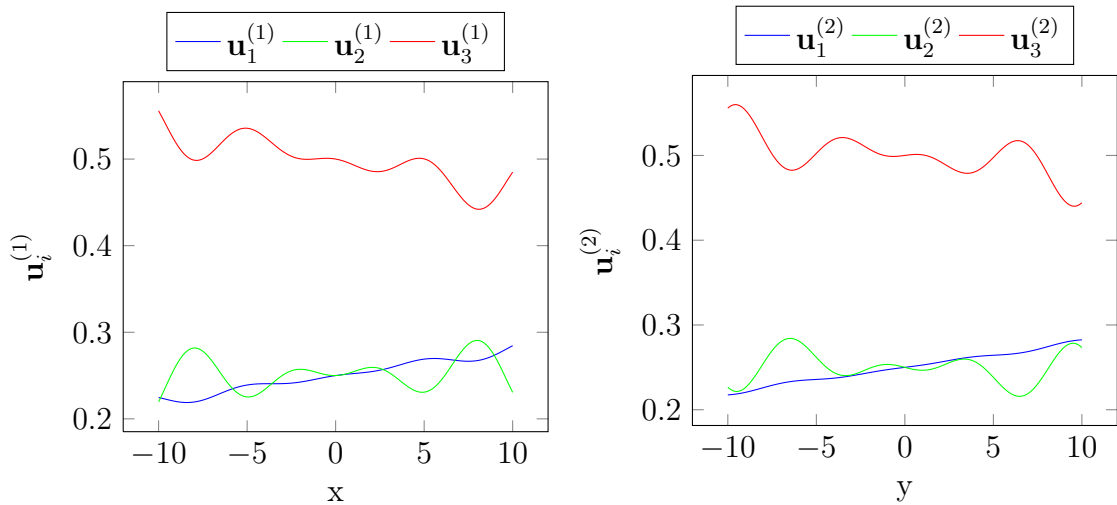


Figura A.3: funções de peso SN-NN obtidas no exemplo A.4.

Normalizada e Próxima a Normalizada

Definição A.8. Normalizada (NO) - Uma matriz $U^{(n)}$ é dita normalizada se ela é SN e NN e além disso os valores máximos de cada coluna, $\mathbf{u}_i^{(n)}$, são os mesmos e iguais a um. Escrevendo de outra maneira, uma matriz $U^{(n)}$ é dita normalizada se ela é SN, NN e

$$\max(\mathbf{u}_i^{(n)}) = 1, \quad \forall i.$$

Definição A.9. Próxima a Normalizada (CNO) - Uma matriz $U^{(n)}$ é dita próxima a normalizada se ela é SN e NN e além disso os valores máximos de cada coluna são próximos de um.

Quando as matrizes de peso do sistema são NO, o conjunto representado pelo politopo formado pelos vértices armazenados no tensor de núcleo equivale ao fecho convexo dos pontos amostrados utilizados para a técnica da transformação do produto tensorial. Entretanto, na maior parte dos casos, essa exigência pode tornar necessário um número muito grande de colunas, aumentando muito a complexidade da aproximação.

No caso da representação CNO, o conjunto representado pelo politopo não equivale mais ao fecho convexo. Porém nesse caso, busca-se por uma representação com um número certo de regras (colunas das matrizes de peso), que seja próxima a representação NO, de modo que o politopo seja próximo ao fecho convexo. Por isso, na maior parte dos casos, busca-se uma representação CNO ao invés de NO, pois normalmente buscam-se representação de complexidade reduzida.

Um algoritmo para o cálculo da transformação das matrizes de peso em NO ou CNO, dado que elas já são SN e NN é apresentado em (Baranyi 1999). Como apresentado no artigo, o problema da transformação se reduz a encontrar os vértices do fecho convexo dos pontos formados pelas linhas da matriz de peso (para a característica NO), ou os vértices do menor $(r - 1)$ -simplex que cobre estes pontos (para a características NO), onde r é o número de colunas da matriz de peso.

Existem vários pacotes disponíveis na internet (e.g.: [Qhull 2011](#)) para o cálculo dos vértices do fecho convexo de uma nuvem de pontos. Entretanto o mesmo não é verdade para o cálculo dos vértices do menor $(r - 1)$ -simplex que contém uma nuvem de pontos.

Uma outra maneira de se calcular a matriz de transformação para a característica CNO é a seguinte: prestando-se atenção às características SN e NN elas ditam que os pontos (dados pelas linhas da matriz de peso) que constituem uma matriz com essas característica estão contidos dentro do $(r - 1)$ -simplex cujos vértices são dados pelos pontos $[1 \ 0 \ \dots \ 0]$, $[0 \ 1 \ \dots \ 0]$, \dots , $[0 \ 0 \ \dots \ 1]$. Sendo assim, a característica CNO é uma transformação desse espaço de modo que os pontos estejam bem espalhados dentro desse simplex e ele seja próximo (em termos de tamanho de conjunto) do fecho convexo da nuvem de pontos. Pode-se então escrever um programa de otimização, que busque uma matriz de transformação que obedeça as características SN e NN e maximize a dispersão dos pontos transformados.

Exemplo A.5. Considerando ainda as matrizes de peso obtidas no exemplo A.3 e aplicando a transformação explicada acima para o cálculo da matriz de transformação CNO utilizando otimização, obtêm-se as funções de peso apresentadas na Figura A.4.

É interessante notar que em ambos os casos encontraram-se funções cujos valores chegam bem próximos de um. Entretanto, ao mesmo tempo, em ambos os casos encontrou-se uma função cujos valores ficaram sempre próximos de zero, sugerindo que os vértices correspondentes a tal função possuem uma importância menor em relação ao valor final (considerando que os valores dos vértices para cada função possuem ordem de grandeza similares).

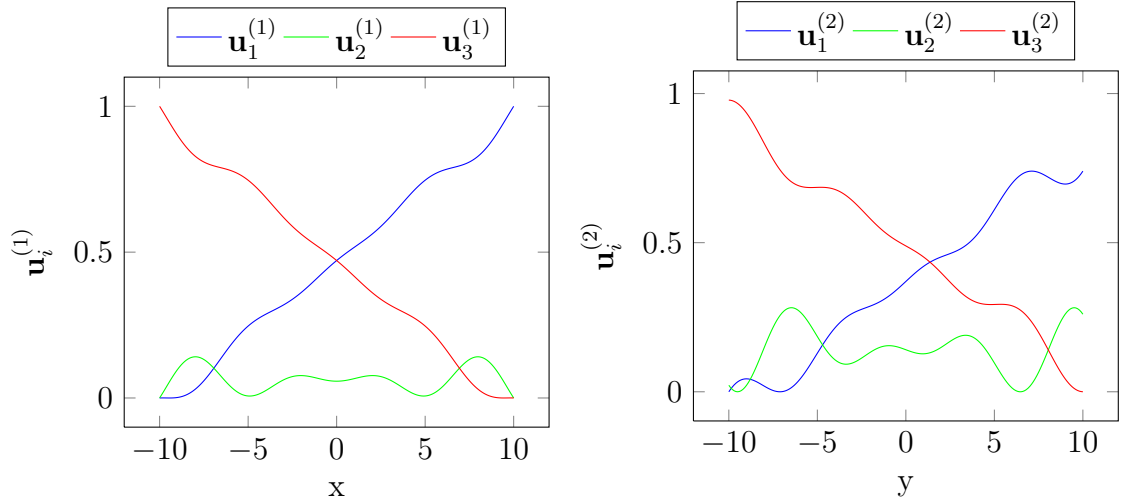


Figura A.4: funções de peso CNO obtidas no exemplo A.5.

Normalizada Relaxada e Normalizada Inversa

Definição A.10. Normalizada Relaxada (RNO) - Uma matriz $U^{(n)}$ é dita normalizada relaxada se ela é SN e NN e além disso os valores máximos de cada coluna, $\mathbf{u}_i^{(n)}$, são os mesmos. Escrevendo de outra maneira, uma matriz $U^{(n)}$ é dita normalizada relaxada se ela é SN, NN e

$$\max(\mathbf{u}_i^{(n)}) = \max(\mathbf{u}_j^{(n)}), \quad \forall i, j.$$

Definição A.11. Normalizada Inversa (INO) - Uma matriz $U^{(n)}$ é dita normalizada inversa se ela é SN e NN e além disso os valores mínimos de cada coluna, $\mathbf{u}_i^{(n)}$, são os mesmos e iguais a zero. Escrevendo de outra maneira, uma matriz $U^{(n)}$ é dita normalizada se ela é SN, NN e

$$\min(\mathbf{u}_i^{(n)}) = 0, \quad \forall i.$$

Assim como a característica CNO, as características RNO e INO são formas relaxadas de se impor características sobre o politopo de modo que ele represente um conjunto menor do que quando se impõe apenas as características de SN e NN sobre as matrizes de peso.

É interessante notar que para matrizes de duas colunas, a condição INO é equivalente a condição NO. Além disso, a imposição de que todas as colunas da matriz de peso possuam o mesmo valor máximo (RNO) em conjunto com a imposição de que todas as colunas possuam um mínimo igual a zero (INO) faz com que as funções de peso tenham uma distribuição melhor, sendo que nenhuma função de peso causará uma importância maior para seu vértice correspondente.

Um algoritmo para encontrar uma matriz de peso que seja RNO e INO ao mesmo tempo, dada uma matriz SN e NN é apresentado em (Varkonyi et al. 2005).

Exemplo A.6. Considerando agora as matrizes de peso obtidas no exemplo A.4, pois a transformação utilizada nesta etapa exige que as matrizes de entrada sejam SN e NN, e aplicando a transformação RNO-INO obtêm-se as funções de peso apresentadas na Figura A.5.

É interessante notar que, conforme comentado acima, encontraram-se funções que parecem levar a uma representatividade similar para os vértices correspondentes a todas as colunas. Bem diferente do que ocorre comumente com a transformação CNO e justificando o uso da transformação RNO-INO para certos casos.

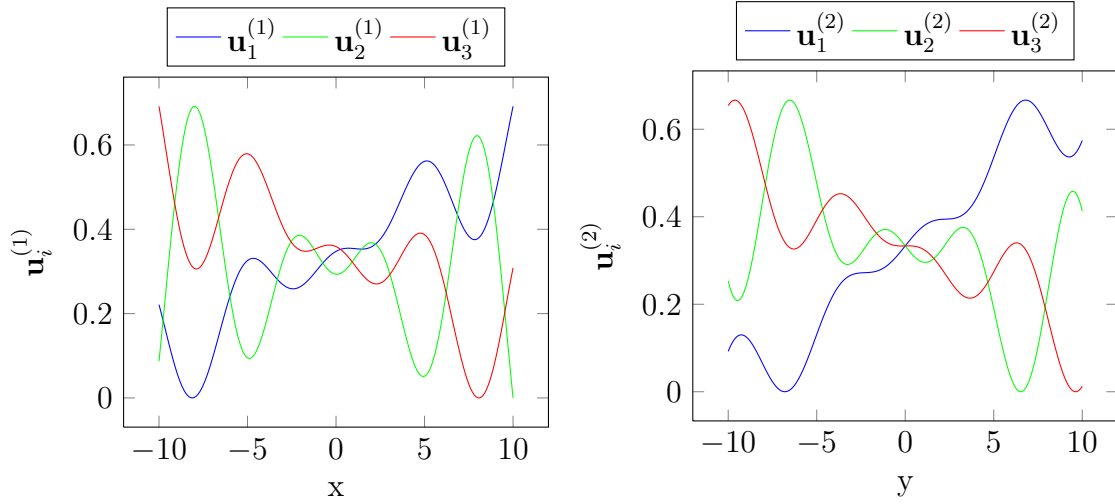


Figura A.5: funções de peso RNO-INO obtidas no exemplo A.6.

É interessante notar que todas essas representações são equivalentes, e portanto geram a mesma aproximação para a função $f(x, y)$. Para fins de informação a Figura A.6 apresenta o erro quadrático de aproximação obtido ao se utilizar as matrizes de peso RNO-INO (que é o mesmo de se utilizando as outras representações).

A.2.4 Aproximações para as matrizes de peso

Tendo as matrizes de peso com as características desejadas é necessário que se encontre funções que substituam as colunas de cada matriz de peso, de modo que a aproximação encontrada possa ser utilizada para pontos que não pertençam ao grid. Para fins de simplificação, neste trabalho são utilizadas funções lineares por partes para cada coluna das matrizes de peso, de modo que tais funções podem ser implementadas como uma tabela de interpolação linear, com os pontos do domínio dados pelos pontos do grid na direção correspondente ao modo da matriz de peso, e os pontos da imagem dados pelos valores da coluna da matriz de peso.

Após a interpolação, podemos escrever:

$$f(\mathbf{x}) \approx \mathcal{S} \otimes_{n=1}^N \mathbf{u}^{(n)}(\mathbf{x}),$$

em que $\mathbf{u}^{(n)}(\mathbf{x})$ é um vetor linha cujos elementos são dados pelas funções de interpolação encontradas para as colunas de $U^{(n)}$.

É possível reescrever essa expressão como:

$$f(\mathbf{x}) \approx \sum_{i_1=1}^{I_1} \dots \sum_{i_N=1}^{I_N} \mathbf{u}_{i_1}^{(1)}(\mathbf{x}) \dots \mathbf{u}_{i_N}^{(N)}(\mathbf{x}) \mathcal{S}_{i_1 \dots i_N},$$

em que $\mathcal{S}_{i_1 \dots i_N}$, assim como $f(\mathbf{x})$ pertence a $\mathbb{R}^{M_1 \times \dots \times M_m}$. Se as matrizes de peso utilizadas para a interpolação possuírem as características SN e NN, essa expressão mostra que $f(\mathbf{x})$ pode ser aproximada como uma combinação convexa dos pontos $\mathcal{S}_{i_1 \dots i_N}$. Nesse caso, tais pontos são chamados vértices da representação convexa.

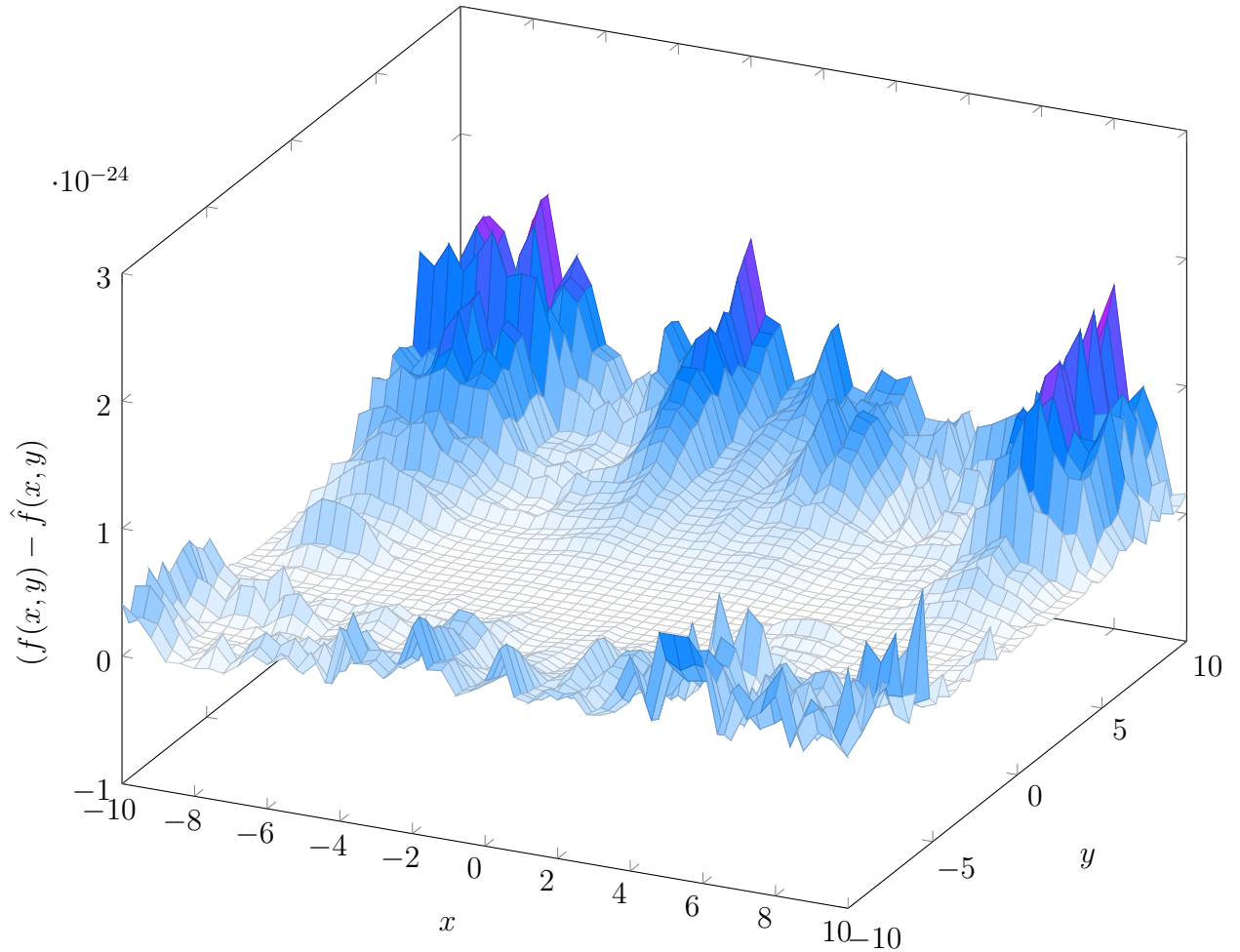


Figura A.6: Erro quadrático de aproximação ao se utilizar as matrizes de peso do exemplo A.6.

A.3 Exemplo de Aplicação a Sistemas Dinâmicos

No caso de aplicação da técnica da transformação do produto tensorial à sistemas dinâmicos, normalmente tem-se a seguinte situação: dado um modelo qLPV de um sistema dinâmico não-linear, encontrar uma representação fuzzy TS do sistema.

Considere o modelo qLPV de um sistema dado por:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= A(\mathbf{x})\mathbf{x} + B(\mathbf{x})\mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= C(\mathbf{x})\mathbf{x} + D(\mathbf{x})\mathbf{u},\end{aligned}$$

em que $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^k$, $A(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{k \times n}$ e $D(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{k \times m}$.

Uma abordagem possível para a aplicação da técnica seria criar uma função

$$f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} A(\mathbf{x}) & B(\mathbf{x}) \\ C(\mathbf{x}) & D(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

e dentro de um espaço hiperretangular definido com limites nos valores de \mathbf{x} , encontrar uma aproximação para ela assim como se fez na seção anterior. Dessa maneira encontra-se uma representação fuzzy TS para o sistema.

Nesse caso, $\mathcal{S}_{i_1 \dots i_N}$ representam as matrizes dos sistemas lineares vértices que compõem o modelo fuzzy TS do sistema.

Entretanto, na maioria das vezes, não são todos os estados em \mathbf{x} que afetam os valores das matrizes A , B , C e D e em alguns casos algumas das matrizes podem ser constantes.

Sendo assim, na maioria dos casos, é útil encontrar o subconjunto de estados $\check{\mathbf{x}}$ que influenciam as matrizes do sistema e encontrar uma aproximação para uma função $f(\check{\mathbf{x}})$ reduzindo o tamanho final do grid de amostragem. Além disso, para fins de redução da computação, formar tal função contendo apenas as matrizes que não são constantes.

Quando não se incluem todas as matrizes para formar a função $f(\check{\mathbf{x}})$, $\mathcal{S}_{i_1 \dots i_N}$ contém apenas as matrizes que foram incluídas. Porém, como as outras matrizes do sistema são constantes, elas são as mesmas para todos os sistemas vértice.

Alguns trabalhos mais recentes apresentam outras maneiras de se reduzir o esforço computacional dessa técnica (Baranyi et al. 2007; Nagy et al. 2009). Entretanto, tal redução de esforço foge do escopo desse trabalho e portanto não é tratada aqui.

Exemplo A.7. Considere as equações cinemáticas de um robô móvel com movimento restringido ao plano xy :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \cos(\theta), \\ \dot{y} &= v \sin(\theta), \\ \dot{\theta} &= w.\end{aligned}$$

Em que x é a posição do robô na direção x , y é a posição do robô na direção y , θ é o ângulo de guinada do robô, v é a velocidade de translação e w é a velocidade de rotação. Considerando que o vetor de estados do sistema é dado por $\mathbf{z} = [x \ y \ \theta]^T$, que o vetor de entradas é dado por $\mathbf{u} = [v \ w]^T$, e que o vetor de saídas é dado por $\mathbf{p} = [x \ y]^T$, pode-se escrever:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}} &= B(\mathbf{z})\mathbf{u} \\ \mathbf{p} &= C\mathbf{z} \\ B(\mathbf{z}) &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

No caso deste exemplo pode-se ver o que foi comentado acima. Das três variáveis que compõem o vetor de estados, apenas uma delas, θ , influencia as matrizes do sistema. Além disso, temos também que apenas a matriz B varia com este estado. As matrizes A e D são matrizes de zeros e por isso não aparecem nas equações acima, e a matriz C é uma matriz constante.

Sendo assim, a função que devemos aproximar nesse exemplo é $B(\theta)$ e sabemos que as outras matrizes serão as mesmas para os todos os sistemas vértices que forem encontrados no modelo final.

Como θ é o ângulo de guinada do robô móvel, sabe-se que $\theta \in [-\pi, \pi]$. Decidiu-se então por se utilizar um grid de 101 pontos para $\theta \in [-\pi, \pi]$. No caso deste exemplo, temos que $B(\theta) \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ e, portanto, com 101 amostras teremos um tensor $\mathcal{S}_d \in \mathbb{R}^{101 \times 3 \times 2}$.

Executando os mesmos passos da técnica explicados na seção anterior, é possível chegar em várias representações para o modelo. As funções de peso encontradas em cada representação estão apresentadas na Figura A.7.

Como todas as representações obtidas são equivalentes, elas possuem o mesmo erro de representação para os pontos pertencentes ao grid. Nesse exemplo, tal erro é de $1,2321 \times 10^{-25}$.

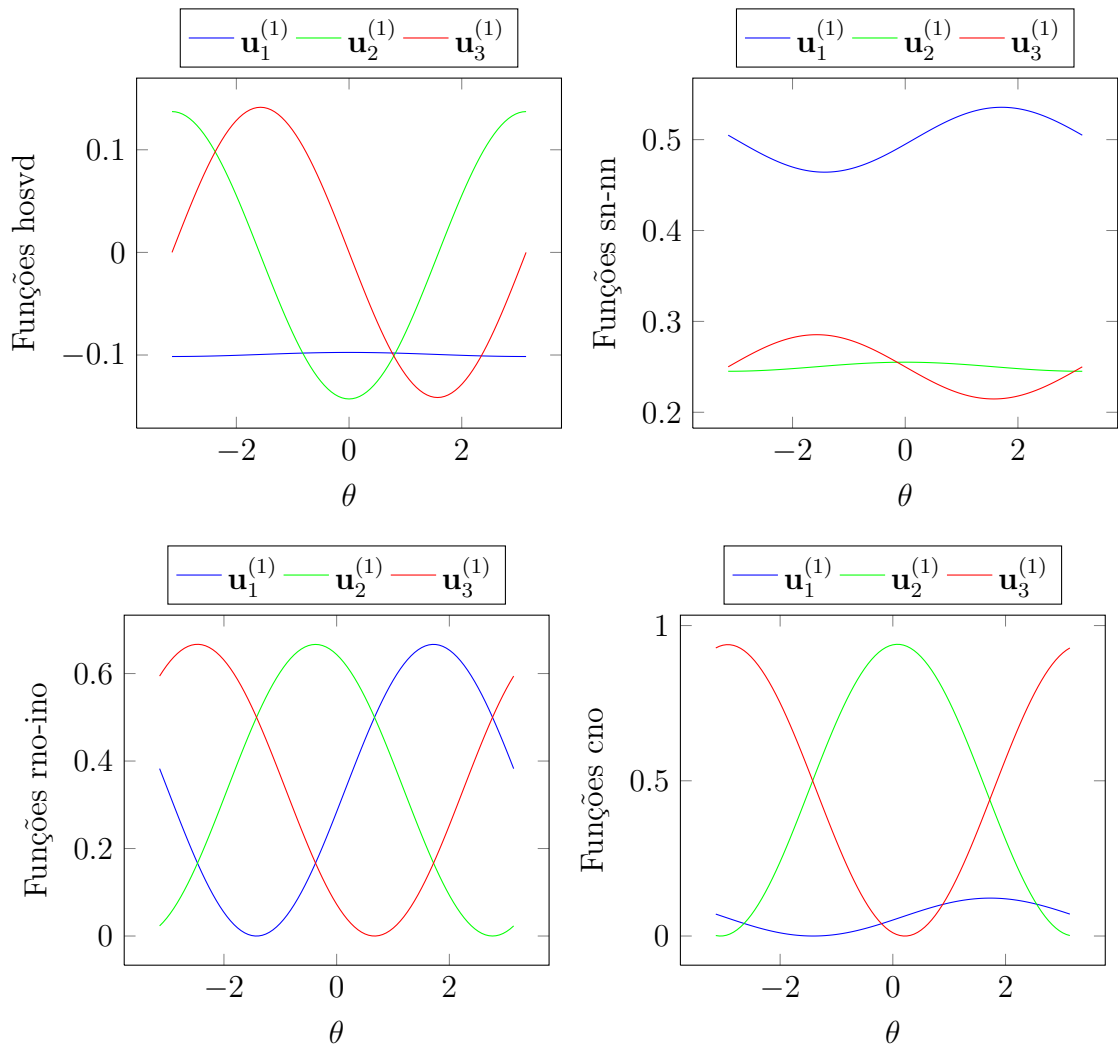


Figura A.7: diferentes funções de peso obtidas no exemplo A.7.