

Usando o MATLABTM para Estimar Parâmetros de Sistemas Dinâmicos – Uma abordagem via Ajuste de Curvas –

LECI – Laboratório de Ensino de Controle e Instrumentação

Prof. Leonardo A. B. Tôrres

20 de março de 2005

1 Descrição do Problema

Cada um dos processos existentes no Laboratório de Ensino de Controle e Instrumentação – LECI, quando operado em malha aberta, pode ser representado pelo diagrama mostrado na Fig.1.

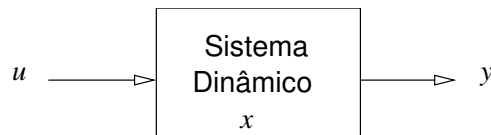


Figura 1:

As equações matemáticas que descrevem a interação das entradas $u(t)$ com os estados internos $x(t)$ ¹; e por sua vez a interação dos estados internos $x(t)$ com as saídas $y(t)$; podem ser escritas como:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u); \\ y &= h(x, u).\end{aligned}\tag{1}$$

em que $x \in \mathbb{R}^n$; $u \in \mathbb{R}^q$; $y \in \mathbb{R}^p$; e $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^p$ são funções genéricas. Alguns exemplos do LECI, admitindo-se modelos matemáticos simplificados, são:

¹Os estados x representam muitas vezes o estado atual de energia interna do sistema.

1. Processo Térmico Seco (Ferro de Solda): $u(t) \in \mathbb{R}$ é o comando para o gradador²; $x(t) \in \mathbb{R}$ é a temperatura do ferro de solda; e $y(t) \in \mathbb{R}$ é o sinal de tensão obtido do sensor de temperatura (termopar).
2. Sistema rectilinear: $u(t) \in \mathbb{R}$ é a posição da haste acionada pelo motor DC ligado ao computador; $x(t) \in \mathbb{R}^6$ são as posições e velocidades dos 3 carrinhos unidos por molas; e $y(t) \in \mathbb{R}$ é a tensão produzida por um dos sensores de posição (encoder).
3. Processo Térmico Úmido (Torneira Elétrica): $u(t) \in \mathbb{R}$ é o comando para o gradador; $x(t) \in \mathbb{R}$ é a temperatura da água no interior da torneira elétrica; e $y(t) \in \mathbb{R}$ é o sinal de tensão do sensor de temperatura (transistor bipolar ligado como diodo).
4. Sistema de Medição de Nível: $u(t) \in \mathbb{R}$ é a diferença de pressão a qual o sensor piezoresistivo está submetido; $x(t) \in \mathbb{R}$ é a deformação do diafragma de silício no interior do sensor piezoresistivo; $y(t) \in \mathbb{R}$ é o sinal de tensão produzido pelo sensor.

É importante notar que os casos acima são possibilidades de modelos simplificados, sendo que o número de estados pode variar dependendo do grau de detalhamento que usamos para obter as equações que descrevem a física de um dado processo específico. Por exemplo, se considerarmos o aquecimento da bainha isolante que existe no interior do ferro de solda, teríamos $x(t) \in \mathbb{R}^2$, sendo as temperaturas da parte externa do ferro de solda e a da própria bainha as variáveis de estado.

Embora todos processos sejam *não lineares*, é usual tentar prever o comportamento dos sistemas, para pequenas variações nas entradas $u(t)$ e nas saídas $y(t)$, em torno de uma condição de operação específica (condição de equilíbrio), por equações que descrevem sistemas lineares invariantes no tempo, isto é:

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta x}{dt} &= A\Delta x + B\Delta u; \\ \Delta y &= C\Delta x + D\Delta u. \end{aligned} \tag{2}$$

sendo Δu , Δx e Δy as variações dos sinais de entrada, dos estados e dos sinais de saída, respectivamente. A , B , C e D são matrizes de dimensões apropriadas.

Como se admite, por hipótese, que os processos estão em equilíbrio antes da variação do sinal de entrada, isto significa que $\Delta u(t) = 0$, $\Delta x(t) = 0$

²Placa de disparo dos tiristores.

e $\Delta y(t) = 0$, para $t < t_0$, sendo t_0 o instante inicial em que uma pequena variação no sinal de entrada $\Delta u \neq 0$ foi imposta ao sistema.

Neste caso, aplicando-se a transformada de Laplace ao sistema linearizado (2), e sabendo-se que a condição inicial $\Delta x(t_0) = 0$, podemos obter a seguinte relação entrada-saída geral:

$$\frac{\mathcal{L}\{\Delta y\}}{\mathcal{L}\{\Delta u\}} = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (3)$$

Algumas observações interessantes, particulares ao LECI, podem ser apresentadas:

- Os processos possuem somente 1 entrada ($u(t) \in \mathbb{R}$) e 1 saída ($y(t) \in \mathbb{R}$). Isto significa que a expressão (3) fornecerá uma única Função de Transferência – FT, que pode ser representada como:

$$\frac{\mathcal{L}\{\Delta y\}}{\mathcal{L}\{\Delta u\}} = G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}, \quad (4)$$

em que $N(s)$ é o polinômio numerador da FT; e $D(s)$ é o polinômio denominador, cujo grau será igual ao número n de estados do processo³.

- A maioria dos sistemas pode ser bem representada por modelos matemáticos de 1^a ou 2^a ordens (1 ou 2 estados internos)⁴. Ou seja, algumas possibilidades freqüentemente encontradas para $G(s)$ serão:

$$G(s) = \frac{G_{DC}}{\tau s + 1}; \quad \text{Ordem 1.}$$

$$G(s) = \frac{G_{DC} e^{-\theta s}}{\tau s + 1}; \quad \text{Ordem 1 com tempo morto.}$$

$$G(s) = \frac{G_{DC}}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}; \quad \text{Ordem 2 sobre-amortecido.}$$

$$G(s) = \frac{G_{DC} e^{-\theta s}}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}; \quad \text{Ordem 2 sobre-amortecido com tempo morto.}$$

³Se o sistema for controlável e observável.

⁴Uma exceção óbvia é o sistema retilinear.

$$G(s) = \frac{G_{\text{DC}}}{(\tau s + 1)^2}; \quad \text{Ordem 2 criticamente amortecido.}$$

$$G(s) = \frac{G_{\text{DC}} \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2}; \quad \text{Ordem 2 sub-amortecido.}$$

$$G(s) = \frac{G_{\text{DC}} \omega_n^2 e^{-\theta s}}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2}; \quad \text{Ordem 2 sub-amortecido com tempo morto.}$$

Nas equações acima, G_{DC} é o ganho DC da planta (razão entre $\Delta y(t)/\Delta u(t)$ para $t \rightarrow \infty$); τ_k , $k = 1, 2, \dots$ são constantes de tempo; ζ é o coeficiente de amortecimento; ω_n é a frequência natural não amortecida; e θ é o tempo morto.

Uma vez selecionada a estrutura do modelo matemático que irá representar o comportamento dinâmico da variação da saída $\Delta y(t)$ de um dado processo, devida a variação da entrada $\Delta u(t)$, surge a seguinte pergunta: como obter os parâmetros G_{DC} , τ , τ_1 , τ_2 , ζ , \dots ?

2 Obtenção de Parâmetros no Domínio do Tempo

Existem muitas técnicas diferentes para obtenção dos parâmetros de uma dada FT. Um método bem conhecido é a aproximação por assíntotas da curva do diagrama de resposta em frequência do sistema.

Entretanto, neste trabalho enfatizaremos o método de obtenção de parâmetros no domínio do tempo, através de comparações automáticas sucessivas entre as *respostas temporais esperadas*, obtidas a partir de estimativas para os parâmetros da planta, e as *respostas temporais medidas*, obtidas em experimentos reais no LECI.

A fim de ilustrar a técnica, observe a Fig.2, onde são mostrados alguns pontos obtidos em um experimento no LECI, para uma entrada degrau aplicada a um dos processos.

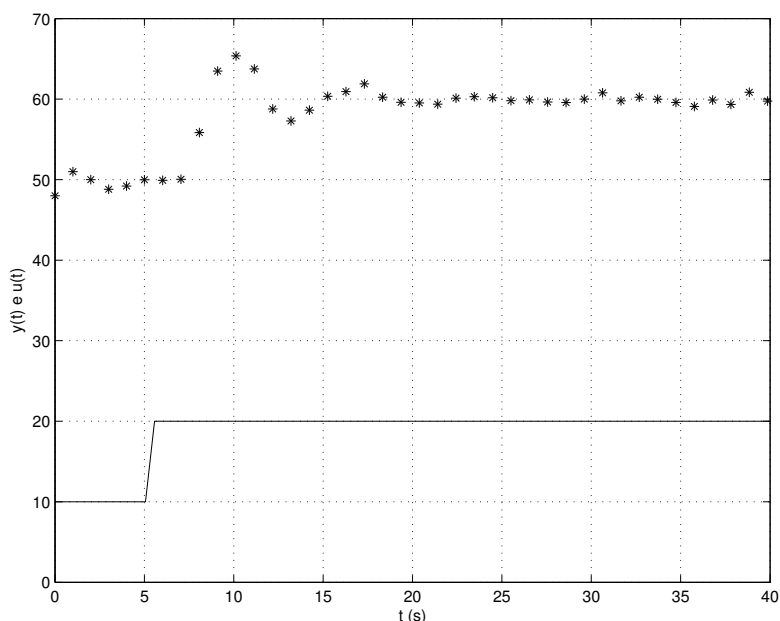


Figura 2: Dados obtidos para um experimento de pequena variação em degrau na entrada $u(t)$ (–) do processo, em $t = 5$ s, a partir de uma condição de equilíbrio, e observação da saída $y(t)$ (*). É importante notar que as curvas estão deslocadas, pois trata-se de 2 grandezas diferentes. Na modelagem linear importa apenas a *variação* $\Delta y(t)$ devida a *variação* $\Delta u(t)$.

A primeira providência é representar apenas a variação $\Delta y(t)$, conforme mostrado na Fig.3, a partir do instante $t_0 = 5$ s, em que o degrau de amplitude $\Delta u = 10$ foi aplicado.

A partir da Fig.3, nota-se que o processo tem um comportamento típico de um sistema de 2ª ordem sub-amortecido. Além disso, $\Delta y(t)$ parece permanecer razoavelmente constante até cerca de $t \approx t_0 + 2$ s, antes de se elevar abruptamente, o que parece indicar a presença de tempo morto. Tendo em vista estas observações preliminares, tentaremos aproximar o comportamento observado pela função temporal obtida da transformada de Laplace inversa da seguinte expressão:

$$\mathcal{L}\{\Delta y(t)\} \approx \left[\frac{G_{\text{DC}} \omega_n^2 e^{-\theta s}}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \right] \frac{10}{s}. \quad (5)$$

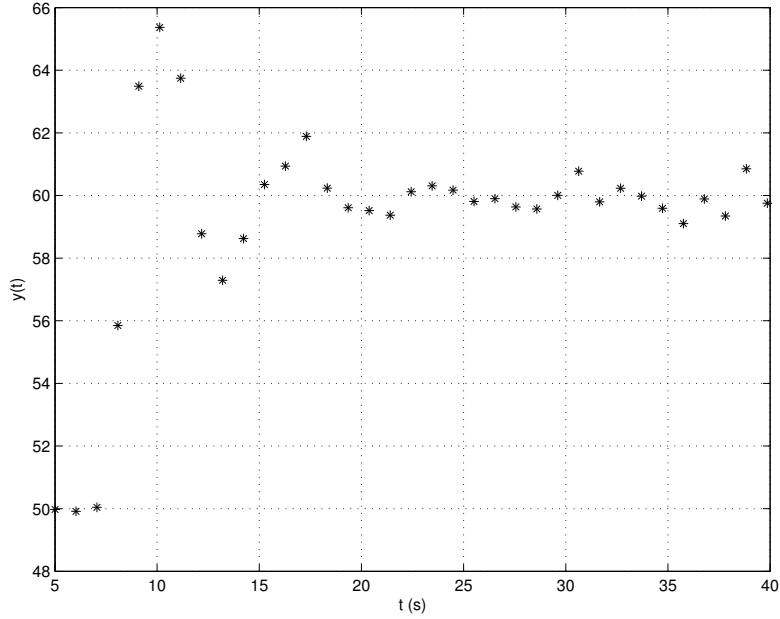


Figura 3: Representação de $\Delta y(t)$, a partir de $t = 5$ s.

Ou seja:

$$\Delta y(t)^e = \begin{cases} 0; & t < t_0 + \theta; \\ 10 \left(G_{\text{DC}} - \frac{G_{\text{DC}}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left[e^{-\zeta\omega_n \hat{t}} \text{sen}(\omega_d \hat{t} + \phi) \right] \right); & t \geq t_0 + \theta; \end{cases} \quad (6)$$

sendo que $\Delta y(t)^e$ é a variação esperada, se nosso modelo estiver correto; $\hat{t} = (t - t_0 - \theta)$; $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$; e $\phi = \arctan(\sqrt{1 - \zeta^2}/\zeta)$.

Mesmo sendo (6) uma expressão complicada, vê-se que ela depende fundamentalmente dos 4 parâmetros: G_{DC} , θ , ζ e ω_n . Estes parâmetros poderiam ser ajustados por tentativa e erro, mas existe um procedimento mais sistemático para a realização desta tarefa.

O que podemos perceber é que, caso desenhassemos uma curva aproximada que obedece a equação (6), tentando fazer com que ela passe sobre os pontos mostrados na Fig.3, verificaríamos se as estimativas dos parâmetros estão boas a partir da medição das *distâncias* entre os pontos reais medidos e os pontos correspondentes da curva aproximada. De fato, é precisamente isto que pode ser feito de forma automática no MATLABTM.

2.1 Formulação Matemática

A partir da equação (6), que descreve o comportamento temporal esperado $\Delta y(t)^e$, podemos imaginar a seguinte função, que mede “o quão boa é uma dada estimativa para os parâmetros”:

$$V(G_{\text{DC}}, \theta, \zeta, \omega_n) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [\Delta y^{\text{med.}}(t_k) - \Delta y^e(t_k)]^2; \quad (7)$$

sendo que $\Delta y^{\text{med.}}$ representa a variação $\Delta y(t)$ que realmente aconteceu, isto é, medida no LECI, nos instantes de tempo t_k , $k = 1, 2, \dots, N$; onde N é o número de pontos obtidos no experimento. A expressão acima quantifica, portanto, o *erro médio quadrático* entre os pontos medidos e a curva $\Delta y^e(t)$, obtida a partir de (6), admitindo-se valores tentativos para G_{DC} , θ , ζ e ω_n . Esta função é chamada de *Função de Custo*.

Ou seja, para cada conjunto de 4 parâmetros, temos um número real que quantifica a qualidade/custo do ajuste de curvas para aquele conjunto de parâmetros:

$$G_{\text{DC}}, \theta, \zeta, \omega_n \mapsto V \in \mathbb{R}.$$

Além disso, a função $V(G_{\text{DC}}, \theta, \zeta, \omega_n)$ é sempre positiva; ou zero para o caso especial em que acertamos os valores dos parâmetros e a curva passa exatamente sobre os pontos medidos. Isto significa que podemos obter um conjunto *ótimo* de parâmetros, buscando valores $G_{\text{DC}}^*, \theta^*, \zeta^*, \omega_n^*$ que conduzam a um *mínimo* de $V(G_{\text{DC}}, \theta, \zeta, \omega_n)$ (Fig.4):

$$[G_{\text{DC}}^*, \theta^*, \zeta^*, \omega_n^*] = \underset{G_{\text{DC}}, \theta, \zeta, \omega_n}{\text{argmin}} V(G_{\text{DC}}, \theta, \zeta, \omega_n). \quad (8)$$

Infelizmente a expressão analítica de $V(G_{\text{DC}}, \theta, \zeta, \omega_n)$ é difícil de ser obtida. Se soubéssemos esta expressão, poderíamos tentar encontrar o mínimo de V , calculando derivadas parciais e igualando-as a zero. Entretanto, neste caso, é preciso empregar uma estratégia numérica.

Dentre as muitas possíveis estratégias de otimização numéricas, usaremos o *Método de Descida Simplex Multi*, proposto por Nelder e Mead (Press et al., 1992; Nelder and Mead, 1965), implementado no MATLABTM pela função `fmins` ou `fminsearch` (Mathworks Inc., 2005).

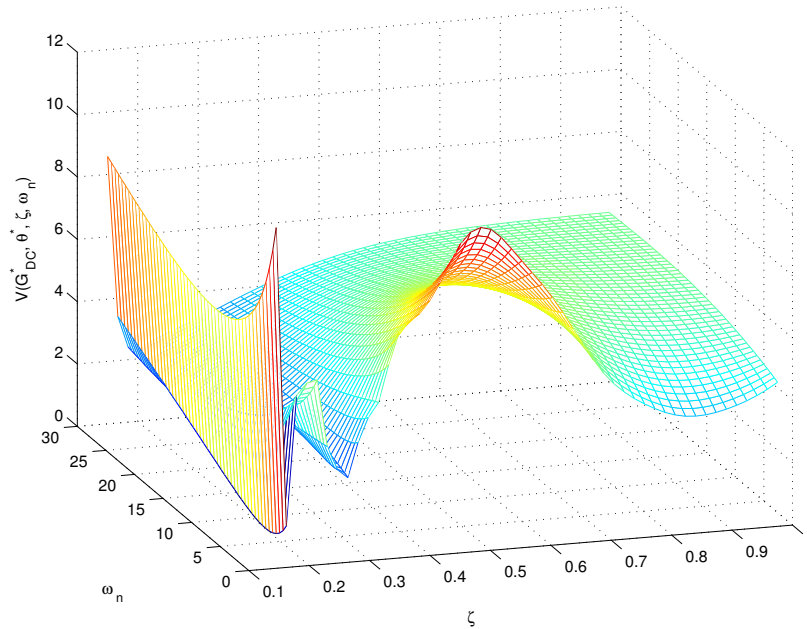


Figura 4: Função que mede o erro quadrático médio para um caso de sistema sub-amortecido com tempo morto, usando valores fixos de G_{DC} e θ , variando somente ζ e ω_n . É importante notar os vários mínimos locais.

3 Implementação MATLABTM

A implementação em MATLABTM é realizada através de um procedimento principal e duas funções, apresentadas abaixo. A primeira listagem corresponde aos comandos executados diretamente no ambiente MATLABTM:

PROCEDIMENTO PRINCIPAL

```

1 clear ;
2 clc ;
3
4 % Chute inicial
5 Gdc = 1.2;
6 theta = 2;
7 zeta = 0.5;
8 wn = 0.9;
9 p0 = [Gdc theta zeta wn];
10
11 % calcula o conjunto ótimo de parâmetros
12 p = fminsearch('erro_quad_med', p0)

```


O algoritmo necessita de uma estimativa inicial p_0 para tentar encontrar o mínimo da função $V(G_{DC}, \theta, \zeta, \omega_n)$. Esta estimativa inicial é muito importante e não deve estar muito distante da solução, pois caso contrário, podemos obter soluções espúrias que representam mínimos locais da função de custo, ao invés do mínimo global procurado (Fig.4).

A função abaixo é a implementação da função de custo $V(G_{DC}, \theta, \zeta, \omega_n)$, usada para calcular o erro quadrático médio entre uma curva tentativa e os dados reais coletados no LECI, para cada conjunto $p = [G_{DC} \theta \zeta \omega_n]$ de parâmetros:

```
                                erro_quad_med.m
1 function V = erro_quad(p)
2 % Função que mede a qualidade do ajuste de curvas
3 % para o caso de um modelo de 2a ordem, sub-amortecido
4 % com tempo morto.
5 %
6 % p = [Gdc, theta, zeta, wn]
7
8 % Parâmetros do modelo matemático
9 Gdc = p(1);
10 theta = p(2);
11 zeta = p(3);
12 wn = p(4);
13
14 % Dados obtidos no LECI
15 data = [
16     5.0000    49.9761;
17     6.0254    49.9126;
18     7.0508    50.0426;
19     8.0762    55.8463;
20     9.1017    63.4892;
21    10.1271    65.3662;
22    11.1525    63.7448;
23    12.1779    58.7773;
24    13.2033    57.2925;
25    14.2287    58.6264;
26    15.2541    60.3521;
27    16.2796    60.9387;
28    17.3050    61.8871;
29    18.3304    60.2329;
30    19.3558    59.6098;
31    20.3812    59.5187;
32    21.4066    59.3697;
```

```

33     22.4320    60.1206;
34 23.4575    60.3074;
35     24.4829    60.1714;
36     25.5083    59.8094;
37     26.5337    59.9000;
38     27.5591    59.6344;
39     28.5845    59.5702;
40     29.6099    60.0047;
41     30.6354    60.7743;
42     31.6608    59.7959;
43     32.6862    60.2289;
44     33.7116    59.9798;
45     34.7370    59.5907;
46     35.7624    59.1002;
47     36.7878    59.8903;
48     37.8133    59.3440;
49     38.8387    60.8542;
50     39.8641    59.7520];
51
52 % Instante inicial em que o degrau foi aplicado .
53 t0 = 5;
54
55 % Coluna tempo
56 tempo = data(:,1);
57
58 % Coluna variacão da saída
59     % y0 = 50  o valor aproximado da saída antes
60     % da aplicao do degrau .
61 y0 = 50;
62 delta_y = data(:,2) - y0;
63
64 % Amplitude do degrau de entrada .
65 delta_u = 10;
66
67 % Calcula a resposta temporal esperada
68 delta_y_esp = subamort_tmorto(tempo, t0, delta_u, Gdc, theta, zeta, wn);
69
70 % Calcula o erro quadrático médio
71 erro = delta_y - delta_y_esp;
72 V = mean(erro.^2);

```

A próxima funo fornece a resposta ao degrau de um sistema sub-amortecido com tempo morto:

subamort_tmorto.m

```

1 function delta_y = subamort_tmorto(tempo,t0,delta_u,Gdc,theta,zeta,wn)
2 % Função que calcula a resposta temporal de
3 % um sistema de 2a ordem, sub-amortecido com
4 % tempo morto:
5 %
6 % delta_y = subamort_tmorto(tempo,t0,delta_u,Gdc,theta,zeta,wn)
7 %
8 % tempo = vetor de instantes de tempo (s);
9 % t0 = instante em que o degrau é aplicado (s);
10 % delta_u = amplitude do degrau de entrada;
11 % Gdc = ganho estático da planta;
12 % theta = tempo morto (s);
13 % zeta = coeficiente de amortecimento (adimensional);
14 % wn = freq. natural não amortecida (rad/s).
15
16 % Calcula a resposta temporal esperada
17
18 wd = wn*sqrt(1-zeta^2);
19 phi = atan2(sqrt(1-zeta^2),zeta);
20
21 % Número de pontos em que a função será calculada
22 M = length(tempo);
23
24 % Cálculo da resposta temporal
25 delta_y = zeros(M,1);
26 for k=1:M,
27     t = tempo(k) - theta - t0;
28     if (t > 0),
29         delta_y(k) = delta_u * ...
30             (Gdc - Gdc/sqrt(1-zeta^2) * ...
31             (exp(-zeta*wn*t) * sin(wd*t+phi)));
32     else
33         delta_y(k) = 0;
34     end
35 end

```

Usando-se as rotinas descritas acima, obtém-se o resultado mostrado na Fig.5, que corresponde aos parâmetros ótimos:

$$\begin{aligned}
 G_{DC}^* &= 1,0021; \\
 \theta^* &= 1,759s; \\
 \zeta^* &= 0,1948; \\
 \omega_n^* &= 0,9659rad/s;
 \end{aligned}$$

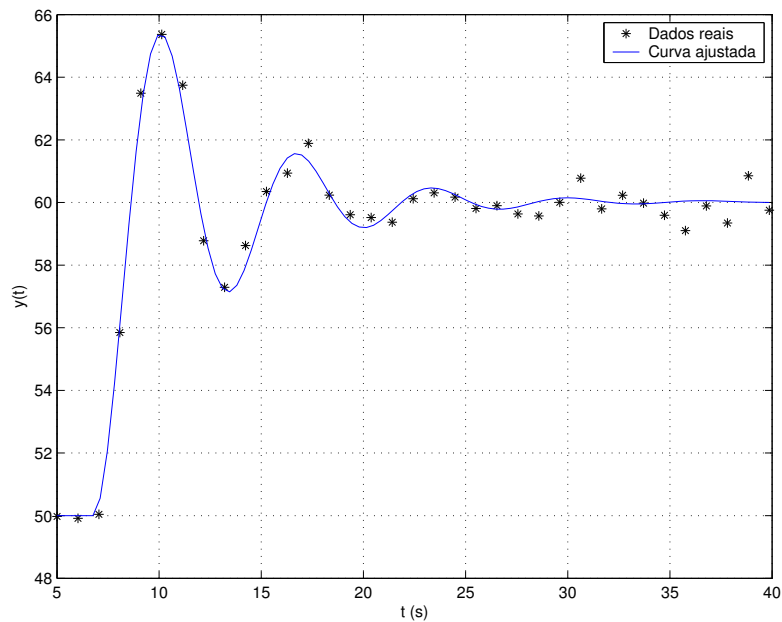


Figura 5: Resultado obtido para o caso mostrado na Fig.2.

Evidentemente, para usar esta técnica em outros casos (outros modelos matemáticos), basta escrever a função específica que fornece a variação temporal esperada, e modificar o conjunto de dados presentes na função `erro_quad_med`.

4 Considerações Finais

É preciso estar bastante atento às condições iniciais (parâmetros iniciais) do algoritmo de minimização, pois resultados espúrios podem ser facilmente obtidos.

Por exemplo, considere o seguinte caso:

PROCEDIMENTO PRINCIPAL

```

1 % Chute inicial ruim.
2 Gdc = 10;
3 theta = 1;
4 zeta = 0.1;
5 wn = 20;
6 p0 = [Gdc theta zeta wn];
7
8 p = fminsearch('erro_quad_med', p0)

```

```

9
10 p =
11
12      1.0022      1.5534      0.0070      25.4548
    
```

Neste caso, obteve-se um freqüência natural $\omega_n = 25,45\text{rad/s}$ extremamente alta e um coeficiente de amortecimento $\zeta = 0,007$ bastante baixo. Entretanto, observando-se a Fig.6, vê-se que os pontos amostrados da curva incorreta quase coincidem com os dados reais!

Isto ocorreu principalmente porque foi usada uma estimativa inicial muito distante da realidade para ω_n . Uma boa estimativa inicial pode ser facilmente obtida observando-se que a distância entre dois cruzamentos das oscilações na Fig.3 é de aproximadamente 7s. Ou seja, poderíamos usar a estimativa inicial $\omega_n \approx \omega_d = 2\pi/T \approx 2\pi/7 \approx 0,9 \text{ rad/s}$.

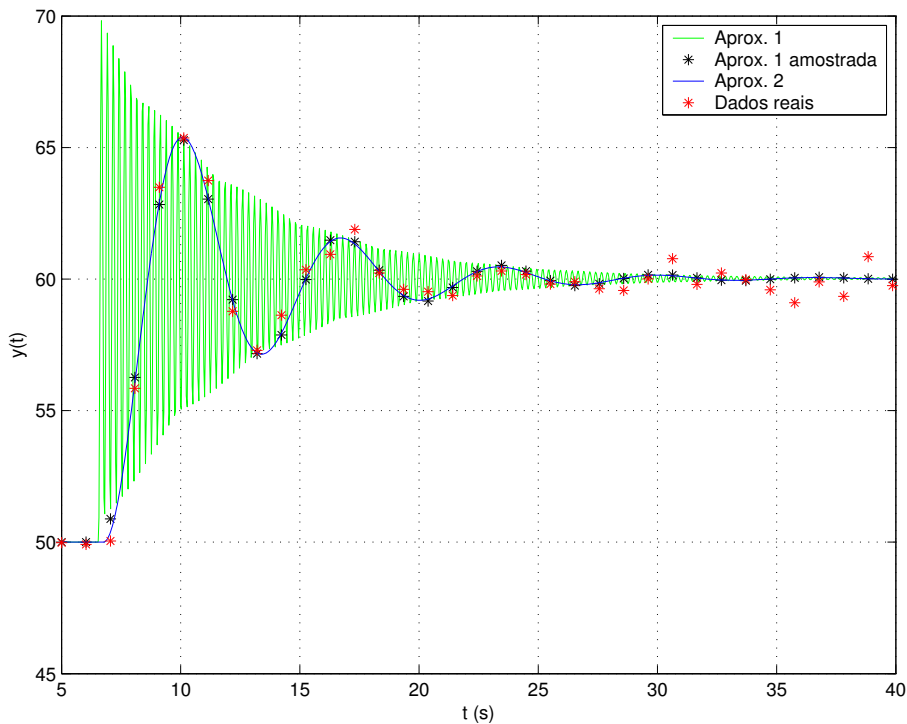


Figura 6: Caso em que uma estimativa inicial p_0 incorreta, conduziu a uma primeira aproximação incorreta. É importante notar que os pontos amostrados da curva em verde estão bem próximos dos dados reais.

Moral da estória: nada substitui um bom Engenheiro que domina o as-

sunto o suficiente para fazer boas estimativas iniciais, e que nunca deixa de conferir o resultado obtido.

Referências

- Mathworks Inc. (2005). Matlab online help desk. <http://www.mathworks.com>.
- Nelder, J. A. and Mead, R. (1965). A simplex method for function minimization. *Computer Journal*, 7:308–313.
- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., and Flannery, B. P. (1992). *Numerical Recipes in C – The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, second edition. disponível em <http://www.library.cornell.edu/nr/bookcpdf.html>.