

**Estabilidade e Síntese de**  
**Controladores e Filtros Robustos para**  
**Sistemas com Retardo no Tempo: Novas Fronteiras**

Tese de doutorado submetida à banca examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

por

**Fernando de Oliveira Souza**

Engenheiro de Controle e Automação – PUC/MG

Mestre em Engenharia Elétrica – UFMG

**Orientador:** Prof. Dr. Reinaldo Martinez Palhares

**Co-orientador:** Prof. Dr. Maurício Carvalho de Oliveira

Novembro – 2008

# Resumo

Esta tese é dedicada ao estudo de alguns problemas inerentes a sistemas a tempo contínuo com retardo no tempo. A tese é dividida em duas partes; na primeira mostra-se que estudar a estabilidade de um sistema linear autônomo com retardo constante no tempo é equivalente a avaliar as raízes de uma função racional de grau apropriado. Na segunda parte aborda-se um conjunto de métodos de análise de estabilidade, baseados em desigualdades matriciais lineares (LMIs), para sistemas a tempo contínuo, incertos, lineares e não-lineares, sujeitos a retardo no tempo. Propõe-se ainda uma forma sistemática para estender os novos testes de estabilidade para a síntese de controladores e filtros robustos, podendo incluir desempenho  $\mathcal{H}_\infty$ . A metodologia utilizada nesta segunda parte faz uso de seleções apropriadas de funcionais de Lyapunov-Krasovskii, uma estratégia de discretização e relaxações matriciais. Várias simulações computacionais são apresentadas ao longo da tese e comparadas com outras abordagens recentes na literatura, que corroboram a eficiência dos resultados propostos.

**Palavras-chave:** Desigualdade matricial linear, teoria de Lyapunov-Krasovskii, sistemas sujeitos a retardo no tempo, análise de estabilidade, controle robusto.

# Abstract

This thesis is dedicated to the study of some inherent problems in continuous-time systems with time delay. The thesis is divided into two parts; the first one shows that to study the stability of an autonomous linear system with constant time delay is equivalent to assess the roots of a rational function of appropriate degree. The second part deals with a set of stability analysis methods, based on linear matrix inequalities (LMIs), for continuous-time systems, uncertain, linear and non-linear, subject to time delay. It is also proposed a systematic way to extend the new stability tests for synthesis of robust controllers and filters, which can include  $\mathcal{H}_\infty$  performance. The methodology used in this second part makes use of appropriate selections of Lyapunov-Krasovskii functionals, a strategy of discretization and matrix relaxations. Several computer simulations are presented throughout the thesis and compared with other recent approaches in the literature, which corroborate the efficiency of the proposed results.

**Keywords:** Linear matrix inequality (LMI), Lyapunov-Krasovskii theory, time-delay systems, stability analysis, robust control.

À TIA LILI

# Agradecimentos

Agradeço,

- aos orientadores, prof. Reinaldo Martinez Palhares e prof. Maurício Carvalho de Oliveira, pelo: apoio, paciência, dispor, competência e amizade;
- à toda minha família e aos amigos, por propiciar-me momentos de conforto e colaboração;
- à minha namorada Karina, por sua ajuda e por compreender minha ausência;
- ao corpo docente e funcionários do PPGEE, pela colaboração e atenção;
- ao MAE (Department of Mechanical and Aerospace Engineering) por me receber durante o período de doutorado sanduíche;
- aos demais membros das bancas examinadoras da Qualificação e da Tese de Doutorado, Prof. Eduardo Mazoni Andrade Marçal Mendes, Prof. Eugênio de Bona Castelan Neto, Prof. João Manoel Gomes da Silva Jr., Karina Acosta Barbosa, Prof. Ricardo Hiroshi Caldeira Takahashi e Prof. Valter Júnior de Souza Leite, por suas valiosas contribuições para o aprimoramento do trabalho realizado e do texto final desta tese;
- aos professores e colega de pós-graduação: Prof. Leonardo Antônio Borges Tôrres, Prof. Petr Ya. Ekel. e Leonardo Amaral Mozelli, com os quais partilhei a elaboração de artigos com resultados apresentados nesta tese; e aos colegas: prof. Eduardo Nunes Gonçalves e prof. Marcos Flávio Silveira Vasconcelos D'Angelo, que, sempre que solicitado, prontamente me prestaram o apoio necessário;
- à Prof. Rose Mary Cosso Schuttenberg, minha orientadora durante monitorias na graduação, pelo: dispor, competência, amizade e intermediar o meu contato com o Prof. Reinaldo Martinez Palhares;
- à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo fomento.

# Sumário

<b>Notações e Definições</b>	<b>vi</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Apresentação . . . . .	3
1.2 Comentários gerais . . . . .	5
<b>I Teste de Estabilidade via Função Racional</b>	<b>7</b>
<b>2 Novo teste de análise de estabilidade</b>	<b>9</b>
2.1 Preliminares . . . . .	10
2.2 Resultados principais . . . . .	16
2.2.1 Estabilidade para um $T$ pequeno . . . . .	17
2.2.2 Condição para conjuntos ordenados . . . . .	18
2.2.3 Condições de ordenamento . . . . .	19
2.2.4 Condição de equivalência entre $\Delta_\tau(s)$ e $\Delta_T^k(s)$ . . . . .	22
2.3 Exemplos numéricos . . . . .	22
2.4 Conclusões do capítulo . . . . .	24
<b>II Condições via Teoria de Lyapunov-Krasovskii</b>	<b>26</b>
<b>3 Análise de estabilidade de sistemas lineares</b>	<b>28</b>
3.1 Sistemas lineares sujeitos a retardo no tempo constante . . . . .	30
3.2 Sistemas lineares sujeitos a retardo no tempo incerto . . . . .	32
3.3 Sistemas lineares sujeitos a retardos aditivos e incertos . . . . .	34
3.4 Sistemas do tipo neutro sujeitos a retardos no tempo iguais . . . . .	36
3.5 Sistemas do tipo neutro sujeitos a retardos no tempo mistos . . . . .	38
3.6 Exemplos numéricos . . . . .	40
3.6.1 Sistemas lineares sujeitos a retardo no tempo . . . . .	40
3.6.2 Sistemas do tipo neutro . . . . .	42
3.7 Conclusões do capítulo . . . . .	45

<b>4</b>	<b>Análise de estabilidade de sistemas do tipo neutro incertos</b>	<b>47</b>
4.1	Sistemas com incertezas poliedrais . . . . .	47
4.2	Funcional de Lyapunov-Krasovskii dependente de parâmetros . . . . .	48
4.3	Sistemas do tipo neutro incertos sujeitos a retardos no tempo iguais e constantes . . . . .	49
4.4	Sistemas do tipo neutro incertos e sujeitos a retardos no tempo mistos . . . . .	51
4.5	Exemplo numérico . . . . .	54
4.6	Conclusões do capítulo . . . . .	55
<b>5</b>	<b>Projeto de controladores e filtros para sistemas do tipo neutro</b>	<b>56</b>
5.1	Controladores $\mathcal{H}_\infty$ por realimentação de estados . . . . .	57
5.2	Filtros do tipo Kalman/Luenberger $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas precisamente conhecidos . . . . .	61
5.3	Filtros $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas incertos . . . . .	63
5.4	Exemplos numéricos . . . . .	66
5.4.1	Projeto de controladores $\mathcal{H}_\infty$ por realimentação de estados . . . . .	67
5.4.2	Projeto de filtros do tipo Kalman/Luenberger com índice $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	68
5.4.3	Projeto de filtros robustos com índice de desempenho $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	69
5.5	Conclusões do capítulo . . . . .	72
<b>6</b>	<b>Extensões para sistemas não-lineares</b>	<b>74</b>
6.1	Redes neurais artificiais analógicas . . . . .	74
6.2	Sincronismo de osciladores caóticos por meio de controladores com memória . . . . .	77
6.3	Sistemas não-lineares representados via o modelo nebuloso Takagi-Sugeno . . . . .	80
6.4	Exemplos numéricos . . . . .	84
6.4.1	Redes neurais artificiais . . . . .	84
6.4.2	Sincronismo de osciladores caóticos do tipo Lur'e . . . . .	86
6.4.3	Sistemas não-lineares modelados via abordagem Takagi-Sugeno . . . . .	87
6.5	Conclusões do capítulo . . . . .	91
<b>7</b>	<b>Conclusões e perspectivas</b>	<b>92</b>
	<b>Referências bibliográficas</b>	<b>94</b>

# Notações e Definições

$\mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times m}$	- conjunto dos números reais, dos números reais positivos e o zero, dos vetores reais de $n$ componentes e das matrizes reais de dimensão $n \times m$
$\mathbb{C}, \mathbb{C}_+, \mathbb{C}^n, \mathbb{C}^{n \times m}$	- conjunto dos números complexos, dos números complexos com parte real positiva, dos vetores complexos de $n$ componentes e das matrizes complexas de dimensão $n \times m$
$j$	- unidade imaginária, $j = \sqrt{-1}$
$j\mathbb{R}$	- eixo imaginário
$Re(\cdot), Im(\cdot)$	- parte real e parte imaginária de um número complexo
$\omega$	- frequência, parte imaginária de um auto-valor
$\ \cdot\ $	- norma vetorial ou matricial
$\mathcal{C}_\tau^n, \dot{\mathcal{C}}_\tau^n$	- conjunto de funções contínuas no $\mathbb{R}^n$ em todo intervalo $[-\tau, 0]$ e $\mathcal{C}_\tau^n$ diferenciáveis ao menos uma vez
$\mathcal{L}_2$	- denota o espaço de Lebesgue das funções de quadrado integrável no intervalo $[0, \infty)$
$\mathcal{H}_\infty$	- representa todas as matrizes de transferência $H(s)$ racionais com coeficientes reais, estáveis e próprias, com $\ H\ _\infty < \infty$
$\gamma$	- nível de atenuação de ruídos para um sistema representado pela matriz de transferência $H(s)$ satisfazendo $\ H\ _\infty < \gamma$ , com $\gamma \in \mathbb{R}_+$
$I$	- denota uma matriz identidade de dimensão apropriada
$0$	- denota uma matriz nula de dimensão apropriada
$\det(\cdot)$	- determinante de uma matriz
$*$	- denota os termos matriciais simétricos em relação a diagonal principal
$\mathcal{M}^T, \mathcal{M}^{-1}, \mathcal{M}^{-T}$	- denota transposto, inverso e transposto inverso da matriz $\mathcal{M}$
$\lambda(\mathcal{M}), \lambda_i(\mathcal{M})$	- denota auto-valor e o $i$ -ésimo auto-valor da matriz $\mathcal{M}$
$\mathcal{M} > 0$ ( $\mathcal{M} \geq 0$ )	- $\mathcal{M}$ é definida (semi-definida) positiva
$\mathcal{M} < 0$ ( $\mathcal{M} \leq 0$ )	- $\mathcal{M}$ é definida (semi-definida) negativa
$\text{diag}\{\cdot\}$	- denota uma matriz diagonal
$\text{Co}\{\cdot\}$	- casca convexa
$\text{sm}\{\mathcal{M}\}$	- forma compacta que representa: $\mathcal{M} + \mathcal{M}^T$
$\sum_{i < j}^3 \mathcal{M}_{i,j}$	- forma compacta que representa: $\mathcal{M}_{1,2} + \mathcal{M}_{1,3} + \mathcal{M}_{2,3}$

## **Acrônimos**

- LMI - “Linear matrix inequality”
- EQ - “Estabilidade quadrática”
- RNA - “Redes neurais artificiais”
- TS - “Takagi-Sugeno”
- PDC - “Parallel distributed compensation”



# Capítulo 1

## Introdução

Os problemas de análise de estabilidade, controle e filtragem de sistemas físicos são de grande importância na literatura. Para a solução desses problemas os métodos empíricos baseados na aplicação de sinais de testes, podem apresentar resultados insatisfatórios ou até mesmo inviáveis, em plantas complexas, perigosas ou que envolvam um grande custo. Portanto, os métodos usualmente utilizados são baseados em modelos analíticos dos sistemas físicos, que apesar de poderem apresentar características não-lineares, geralmente são representados por modelos lineares em torno de pontos de operação, principalmente no meio industrial. Logo, esses modelos precisam se comportar o mais próximo dos processos reais, o que torna necessário uma melhor caracterização da presença de incertezas nos modelos, provenientes de dinâmicas negligenciadas da planta, de não-linearidades, de distúrbios externos e de incertezas sobre parâmetros do sistema, que não são precisamente conhecidos ou que podem sofrer variações aleatórias.

Ademais, reações de grande parte de sistemas físicos, relativas a sinais e ações externas, não são instantâneas. Esta característica envolve, principalmente, uma grande classe de sistemas físicos relacionados com propagação e/ou transporte de energia, matéria ou informação. Nesse sentido, não só as incertezas nos modelos que descrevem esses sistemas podem ocorrer, como também a dependência de informações com histórico temporal. Em outras palavras, haverá dependência em relação ao retardo no tempo. De acordo com Shinskey [64]:

*Retardo no tempo é a propriedade de um sistema físico, na qual a resposta a uma força aplicada tem efeito atrasado.*<sup>1</sup>

Portanto, uma ampla gama de sistemas físicos para serem modelados de forma mais realista, necessitam de modelos matemáticos que levem em conta, tanto incertezas paramétricas quanto o retardo no tempo.

Para ilustrar de maneira simples como se dá a presença do retardo em um sistema real, considere o exemplo a seguir.

**Exemplo 1.1** O chuveiro, descrito na Figura 1.1, é um exemplo simples de sistema sujeito a retardo no tempo [100]. Neste sistema quando se abre ou fecha as torneiras quente ou frio é necessário esperar um tempo para que a mistura da água, na temperatura desejada, percorra a tubulação do

---

<sup>1</sup>Tradução livre de: *Time delay is the property of a physical system by which the response to an applied force is delayed in its effect.*

chuveiro. Este intervalo de tempo, que muitas vezes leva uma pessoa a gastar um tempo maior para ajustar a temperatura do chuveiro, é conhecido como retardo no tempo. Portanto, neste exemplo, o retardo no tempo depende da pressão e do comprimento da tubulação.

Para este sistema, considerando-se que a água não seja comprimível e seja um fluido estacionário, é possível obter uma expressão analítica para calcular o valor do retardo no tempo. De acordo com a Lei de Poiseuille, a vazão da água é:

$$F = \frac{\pi R^4}{8\nu l} \Delta p,$$

sendo  $\nu = 0.01$  coeficiente de viscosidade da água,  $R$  o raio da tubulação,  $l$  o comprimento da tubulação e  $\Delta p$  o “gradiente de pressão”, diferença de pressão do fluido entre o início e o fim da tubulação. Assim, o retardo no tempo,  $\tau$ , pode ser obtido como:

$$\tau = \frac{8\nu}{\Delta p} \left( \frac{l}{R} \right)^2.$$

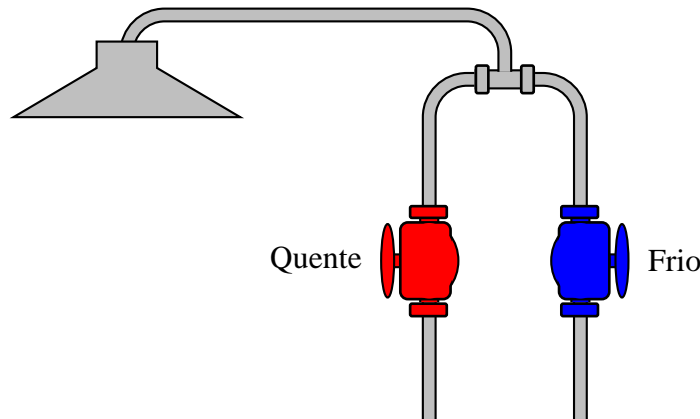


Figura 1.1: Diagrama esquemático de um chuveiro.

Apesar da simplicidade desse exemplo, sistemas que sofrem influência do retardo no tempo podem apresentar dinâmica muito complicada. Alguns deles podem apresentar desempenho insatisfatório ou até mesmo instabilidade, tais como: processos de fresamento de metais [51], combustão interna [9, 38], amortecedores de vibração [65, 86], redes neurais artificiais analógicas [2, 3], processos de britagem e mixagem [61]. Além desses, há também sistemas em: biologia, química, economia, fisiologia e dinâmica de população, como em [41, 53]. Por outro lado, o retardo no tempo pode ser aplicado intencionalmente em sistemas de forma a beneficiar a estabilidade, desempenho ou até mesmo com o objetivo de forçar que sistemas apresentem dinâmicas mais sofisticadas. Por exemplo, pode-se utilizar o retardo no tempo para aproximar diferenciação por meio de diferença finita, como ilustrado a seguir.

**Exemplo 1.2** Considere o sistema [27]:

$$\ddot{x}(t) - 0.1\dot{x}(t) + x(t) = u(t). \quad (1.1)$$

Se a entrada de controle for imposta como nula, i.e.  $u(t) = 0$ , esse sistema é instável. Entretanto, ele pode ser controlado utilizando-se a derivada do estado como realimentação, i.e.  $u(t) = k\dot{x}(t)$ , simplesmente ao escolher  $k > 0.1$ . Mas, caso a derivada do estado  $\dot{x}(t)$  não esteja disponível para o controle, ela pode ser aproximada por meio da seguinte relação:

$$u(t) = x(t - \tau) - x(t) = -\tau \frac{x(t) - x(t - \tau)}{\tau},$$

aproximando-se  $\tau\dot{x}(t)$ .

Em [10] utiliza-se da técnica ilustrada acima para o controle de robôs, no qual a aceleração angular é acessada, aproximando a derivada da velocidade angular. Outro exemplo, no qual o retardo no tempo é aplicado intencionalmente, é encontrado em problemas de transmissão de informação por meio de sincronismo de lasers caóticos, os quais não exibem naturalmente comportamento caótico, mas este pode ser induzido por realimentação com memória [48].

Portanto, devido ao vasto grupo de sistemas no qual incertezas paramétricas e o retardo no tempo podem ocorrer, esta tese abordará os problemas de análise de estabilidade, síntese de controladores e filtros para sistemas sujeitos a retardo no tempo e incertezas paramétricas. Essa classe de sistemas pode ser representada da seguinte forma:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t - \tau), \alpha(t), u(t))$$

sendo  $x(t)$  o vetor de estado,  $x(t - \tau)$  o vetor de estados atrasados,  $\tau$  o valor do retardo no tempo,  $\alpha(t)$  representa as incertezas associadas ao modelo,  $u(t)$  é o sinal de controle e  $f(\cdot)$  é uma função possivelmente não-linear. Note que para determinar os estados da evolução dessa classe de sistemas é necessário especificar condições iniciais para os vetores de estados  $x(t)$  e  $x(t - \tau)$ .

Apesar desta tese abordar o estudo de sistemas lineares e não-lineares, o foco de interesse principal está relacionado com as propriedades inerentes do retardo no tempo em sistemas lineares. Para uma introdução mais detalhada sobre sistemas lineares com atrasos no tempo veja [23].

## 1.1 Apresentação

Inicialmente, nesta tese, mostra-se que estudar a estabilidade de um sistema linear autônomo com retardo constante no tempo é equivalente a avaliar as raízes de uma função racional de grau apropriado. Este resultado se fez possível devido ao emprego de uma simples *transformação bilinear* e aprimoramento de métodos da literatura. Além disso, é importante salientar que o resultado obtido apresenta grande possibilidade de extensão, principalmente no sentido de obter condições que sejam computacionalmente eficientes.

Em um segundo momento, utilizar-se-á a teoria de *Lyapunov-Krasovskii* e *desigualdades matriciais lineares* (LMIs), para obter condições suficientes para análise de estabilidade e síntese de controladores e filtros. Mostra-se que os métodos propostos sempre obtêm resultados melhores ou no mínimo iguais em relação a resultados obtidos via métodos similares da literatura. Nessa parte, são estudados tanto sistemas lineares, quanto algumas classes de sistemas não-lineares. Vale ressaltar, que estes resultados são dependentes do retardo no tempo, ou seja, dependem explicitamente do

tamanho do retardo. A título de informação, condições independentes do retardo no tempo, podem ser encontradas na literatura como em [45, 46] e referências neles citadas.

Os resultados aqui apresentados são parte do que foi construído durante o curso de doutoramento deste candidato no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica na Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), com período de estágio no Departamento de Engenharia Mecânica e Aeroespacial na Universidade da Califórnia San Diego (UCSD). Parte destes resultados foram publicados, aceitos, ou se encontram em processo de submissão/revisão, em periódicos ou em anais de congressos [11, 66, 69, 71, 72, 73, 74, 76, 79, 81]. Resultados obtidos que não fazem parte desta tese, estão registrados em [67, 70, 77, 78, 80].

Este texto está dividido em duas partes; a primeira parte foi estruturada em um capítulo e a segunda em quatro capítulos. A sistematização da elaboração desta tese se deu da seguinte maneira:

**Parte I:** Discute como a análise de estabilidade de um sistema linear autônomo com retardo constante no tempo pode ser feita avaliando as raízes de uma função racional de grau apropriado. Para obter a função racional associada a um sistema sujeito a retardo no tempo, basta substituir o termo transcendental da equação característica do sistema sujeito a retardo no tempo por uma *transformação bilinear de grau suficientemente grande*.

**Capítulo 2:** Nesse capítulo é apresentado o resultado da Parte I, bem como todas as demonstrações matemáticas que suportam tal resultado e alguns exemplos numéricos.

**Parte II:** Nessa parte utiliza-se a teoria de *Lyapunov-Krasovskii e desigualdades matriciais lineares* para se obter condições suficientes, menos conservadoras, para a análise de estabilidade e projeto de controladores/filtros para sistemas sujeitos a retardo no tempo, tanto lineares quanto algumas classes de sistemas não-lineares. A peça chave, proposta nessa seção, é a utilização de relaxações associadas ao modelo do sistema. O uso dessas relaxações permite desacoplar as matrizes do sistema das matrizes do funcional de Lyapunov-Krasovskii, obtendo-se formulações LMIs

**Capítulo 3:** Nesse capítulo, o método proposto é aplicado a problemas de análise de estabilidade de diferentes classes de sistemas lineares sujeitos a retardo no tempo e alguns exemplos numéricos são apresentados para ilustrar a eficiência dos resultados.

**Capítulo 4:** O intuito desse capítulo é apresentar como os resultados do capítulo anterior podem ser estendidos para sistemas incertos, sendo utilizados os conceitos relacionados a funcionais de Lyapunov-Krasovskii independente e dependente dos parâmetros incertos.

**Capítulo 5:** Nesse capítulo, discute-se como obter métodos de projeto de controladores e filtros com índice de desempenho  $\mathcal{H}_\infty$ , via LMIs. São propostos métodos de projeto de controladores por realimentação de estados, projeto de filtros do tipo Kalman/Luenberger para sistemas precisamente conhecidos e filtros robustos para sistemas com incertezas paramétricas. Ao final, são apresentados exemplos numéricos que ilustram a eficiência dos métodos propostos.

**Capítulo 6:** Nesse capítulo são apresentados alguns resultados relacionados a sistemas não-lineares. Inicialmente, é estudado o problema de análise de estabilidade de redes neurais artificiais analógicas, em seguida aborda-se o problema de sincronismo de osciladores caóticos, sendo propostos resultados de análise de estabilidade e projeto de controladores. Por fim, são apresentadas

condições de análise de estabilidade e projeto de controladores para sistemas não-lineares sujeitos a retardo no tempo modelados via abordagem nebulosa Takagi-Sugeno.

## 1.2 Comentários gerais

Apesar da extensão dos resultados apresentados nesta dissertação, inicialmente é considerado como objeto de estudo a classe de sistemas lineares contínuos sujeitos a retardo no tempo,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - \tau), \quad (1.2)$$

com a condição inicial  $\phi(t) \in \mathcal{C}_\tau^{n_x}$ ,  $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$  o estado e  $\tau \geq 0$  o retardo no tempo constante. As matrizes do sistema  $A$  e  $A_d$  possuem dimensões apropriadas.

Note que um sistema como em (1.2), para  $\tau = 0$ , se reduz a:  $\dot{x}(t) = [A + A_d]x(t)$ , tratando-se de uma simples equação diferencial ordinária. Entretanto, para  $\tau > 0$ , este sistema se torna uma equação diferencial retardada, a qual tem dimensão infinita. Portanto, considerando também o que foi apresentado anteriormente, verifica-se a relevância do estudo desta classe de sistemas em ambos os campos: teórico e prático.

Ademais, em termos práticos, o retardo no tempo pode ser incerto [14, 63, 93]. Então, será apresentado no Capítulo 3 como parte dos resultados obtidos podem ser estendidos para lidar com sistemas sujeitos a retardo no tempo *incerto*:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - d(t)), \quad (1.3)$$

com  $d(t) = \tau + \eta(t)$  um retardo variante no tempo, sendo  $\tau$  um valor nominal e  $\eta(t)$  uma perturbação, possivelmente variante no tempo, podendo assumir valores positivos e negativos; satisfazendo:  $|\eta(t)| \leq \mu < \tau$ , sendo  $\mu$  conhecido. Portanto, o retardo no tempo é definido no intervalo,  $d(t) \in [\tau - \mu, \tau + \mu]$ . Neste caso a condição inicial  $\phi(t)$  deve ser definida no intervalo  $[-\max\{d(t)\}, 0]$ , ou seja,  $\phi(t) \in \mathcal{C}_{\max\{d(t)\}}^{n_x}$ .

Além disso, ainda no Capítulo 3 serão apresentadas condições de análise de estabilidade para sistemas sujeitos a retardos no tempo incertos e aditivos:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - d_1(t) - d_2(t)), \quad (1.4)$$

sendo que os retardos  $d_1(t)$  e  $d_2(t)$  têm a mesma forma do retardo  $d(t)$  em (1.3). Para este sistema, a condição inicial deve ser definida no intervalo  $[-\max\{d_1(t) + d_2(t)\}, 0]$ . Este modelo tem grande relevância em sistemas com controle por redes. Para mais detalhes veja [43].

Note que, fazendo  $d(t) = d_1(t) + d_2(t)$  o sistema em (1.4) se reduz ao sistema em (1.3). Entretanto, existem situações em que o sinal transmitido de um ponto para outro pode estar sujeito a diferentes propriedades para diferentes segmentos de uma determinada rede. Para ilustração, considere a Figura 1.2 que apresenta um esquema de controle por realimentação de estados.

Portanto, considerando que o sistema físico na Figura 1.2 possa ser representado por  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ , este sistema em malha fechada, segundo a Figura 1.2, é dado por:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BKx(t - d_1(t) - d_2(t)). \quad (1.5)$$

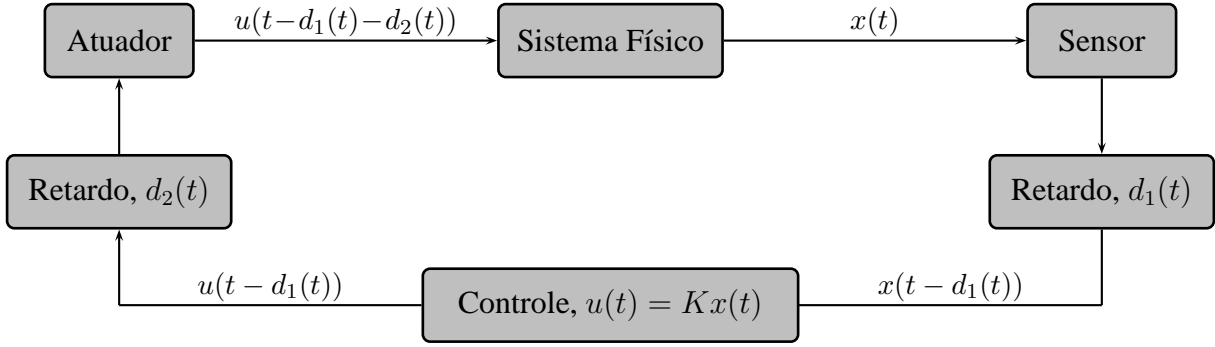


Figura 1.2: Rede de controle por realimentação de estados

Note que, fazendo  $A_d = BK$ , obtém-se o sistema em (1.4). Apesar do resultado a ser apresentado no Capítulo 3 considerar apenas dois retardos aditivos, o método proposto tem extensão direta para qualquer número de retardos.

Além de retardo variante no tempo, há sistemas que podem ser sujeitos a retardos tanto no estado quanto na derivada do estado. Tal fato pode ocorrer por exemplo como resultado de simplificação de equações diferenciais parciais, veja e.g. [6]. Este tipo de sistema é conhecido como sistema do tipo neutro:

$$\dot{x}(t) + E\dot{x}(t - \tau) = Ax(t) + A_d x(t - \tau), \quad (1.6)$$

com  $\phi(t) \in \mathcal{C}_\tau^{n_x}$  a condição inicial, a qual deve ser diferenciável ao menos uma vez para que a solução do sistema seja bem definida. Uma peculiaridade de sistemas do tipo neutro é o fato deste poder ser sujeito a retardos no tempo diferentes:

$$\dot{x}(t) + E\dot{x}(t - r) = Ax(t) + A_d x(t - d(t)). \quad (1.7)$$

Portanto, no Capítulo 3 são apresentadas condições para lidar com sistemas do tipo neutro das formas em (1.6) e (1.7). Ademais, possíveis extensões relacionadas aos resultados obtidos serão discutidas, mas não detalhadas. Por exemplo, não são apresentados resultados relativos a sistemas sujeitos a múltiplos retardos no tempo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^k A_d x(t - \tau_i), \quad (1.8)$$

tal que  $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_k$ , e resultados relativos a sistemas sujeitos a retardos distribuídos:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \int_{-\tau}^0 A_d(t, \theta)x(t + \theta)d\theta, \quad (1.9)$$

neste caso, imposições particulares a cerca da função matricial  $A_d(t, \theta)$  tornam-se necessárias. Entretanto, parte dos resultados obtidos podem ser estendidos para abordarem esses sistemas, veja [27].

## **Parte I**

# **Teste de Estabilidade via Função Racional**

Nesta parte é abordado o problema de análise de estabilidade de sistemas lineares sujeitos a retardo no tempo. A complexidade do problema é em razão da equação característica transcendental de um sistema com retardo, ter infinitas raízes. A transcendentalidade nesta equação é devido ao termo exponencial  $e^{-s\tau}$ , sendo  $s$  uma variável complexa e  $\tau$  o retardo no tempo. Portanto, utilizar-se-á a seguinte substituição:

$$e^{-s\tau} \rightarrow \left( \frac{1 - Ts}{1 + Ts} \right)^k, \quad \tau \in \mathbb{R}_+, T \in \mathbb{R}, \quad (1.10)$$

com  $k \geq 1$  um inteiro. Assim, por meio da substituição descrita acima é possível acessar de forma indireta as raízes da equação característica de um sistema sujeito a retardo no tempo.

De forma mais específica, o principal resultado é mostrar que, considerando um intervalo finito para o retardo no tempo  $\tau \in [0, \bar{\tau})$ , a equação característica transcendental de um sistema sujeito a retardo no tempo tem equivalência em termos de estabilidade, com uma equação característica racional associada obtida por meio da substituição em (1.10), para um determinado valor de  $k$  e um intervalo finito para  $T \in [0, \bar{T})$ .

Ademais, vale salientar que os resultados a serem apresentados têm grandes diferenças em relação aos resultados apresentados em [55, 60, 84, 85] e em [27, Cap. 2]. Tais resultados são baseados na substituição em (1.10), mas consideram apenas  $k = 1$ , proposto por Rekasius [60] e também utilizado em Olgac e Sipahi [55], ou  $k = 2$  proposto por Thowsen [84, 85].



# Capítulo 2

## Novo teste de análise de estabilidade

Neste capítulo é estudado o problema de análise de estabilidade do sistema linear sujeito a retardo no tempo descrito por:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - \tau), \quad (2.1)$$

com condição inicial  $\phi(t) \in \mathcal{C}_\tau^{n_x}$ , sendo que  $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ ,  $\tau \geq 0$  e  $A, A_d \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ . Portanto, o estudo da estabilidade do sistema (2.1) pode ser feito avaliando a localização das raízes da função transcendental:

$$\Delta_\tau(s) \triangleq \det(sI - A - A_d e^{-s\tau}). \quad (2.2)$$

Diz-se que o sistema (2.1) é estável (assintoticamente estável), se todas as raízes da função  $\Delta_\tau(s)$  estão no semi-plano esquerdo (aberto) do plano complexo. Neste caso, diz-se que as raízes de  $\Delta_\tau(s)$  são estáveis. A complexidade em avaliar as raízes desta função é devido ao termo exponencial, mas especificamente, se um par de raízes de  $\Delta_\tau(s)$  cruzar o eixo imaginário no ponto  $s = j\omega_i$ , então, outras raízes de  $\Delta_\tau(s)$  irão cruzar o eixo imaginário nesse mesmo ponto um número infinito de vezes [27, 30, 61], para todo:

$$\tau_{i,\ell} = \tau_i + 2\ell \omega_i^{-1} \pi, \quad \ell = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

Este fato é devido a função exponencial complexa ser periódica como ilustrado na Figura 2.1.

Como o cômputo de todas as raízes de  $\Delta_\tau(s)$  não é viável, a literatura apresenta uma variada gama de métodos que tentam, indiretamente, acessar a localização destas raízes. Veja por exemplo [27, Cap. 2]. Aqui, será proposto um novo método, baseado na seguinte substituição:

$$e^{-s\tau} \longrightarrow \left( \frac{1 - Ts}{1 + Ts} \right)^k, \quad (2.4)$$

com  $k \geq 1$  um inteiro, sendo que, para  $s = j\omega_i$  tem-se a relação entre  $\tau_i$  e  $T_i$ :

$$\tau_i = 2k \omega_i^{-1} \arctan(\omega_i T_i). \quad (2.5)$$

Para  $k = 1$  e  $T \in \mathbb{R}$  esta transformação mapeia o eixo imaginário em um círculo unitário. Entretanto, neste trabalho tem-se o interesse em considerar apenas  $T \geq 0$ , sendo que o motivo disto tornará mais claro ao decorrer deste capítulo. Então, considerando  $T \in \mathbb{R}_+$  esta transformação mapeia o eixo

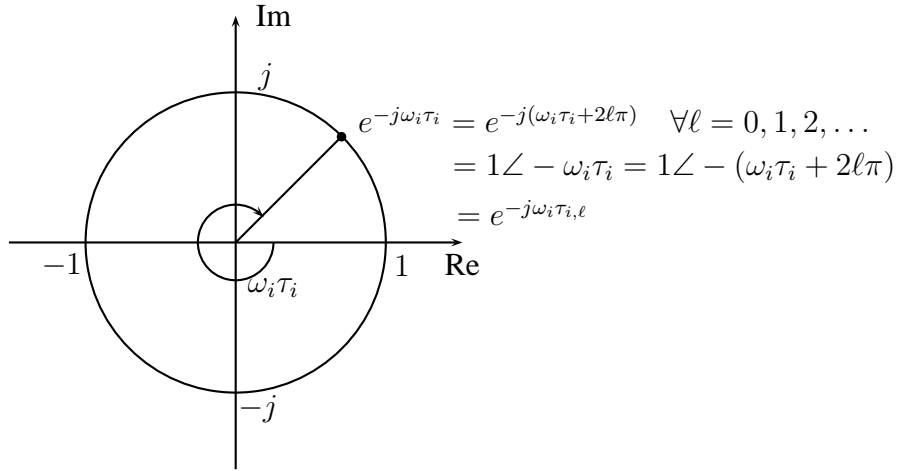


Figura 2.1: Função  $e^{-j\omega_i\tau_{i,\ell}}$  com  $\tau_{i,\ell} = \tau_i + 2\ell\omega_i^{-1}\pi$  para  $\ell = 0, 1, 2, \dots$

imaginário em: um semi-círculo unitário para  $k = 1$ , um círculo unitário para  $k = 2$ , um círculo unitário e meio para  $k = 3$  e assim sucessivamente, para uma ilustração deste mapeamento veja Figura 2.2.

Portanto, o principal resultado a ser apresentado nesta parte do trabalho é fundamentado em uma idéia alternativa, que estabelece uma equivalência entre a estabilidade das raízes da função transcendental  $\Delta_\tau(s)$ , com as raízes da função racional

$$\Delta_T^k(s) \triangleq \det \left[ sI - A - A_d \left( \frac{1 - Ts}{1 + Ts} \right)^k \right]. \quad (2.6)$$

A razão pela qual é interessante estudar a equivalência das equações características  $\Delta_\tau(s)$  e  $\Delta_T^k(s)$ , para um intervalo finito do retardo no tempo  $\tau \in [0, \bar{\tau})$  sendo  $\bar{\tau}$  finito, é justamente devido ao fato da equação  $\Delta_\tau(s)$  ter infinitas raízes para valores periódicos do retardo no tempo, como apresentado em (2.3). Mais especificamente, é demonstrado que considerando  $0 \leq \tau \leq \bar{\tau}$ , existe um inteiro  $k$  suficientemente grande, tal que estudar a estabilidade de  $\Delta_T^k(s)$  para  $0 \leq T \leq \bar{T}$ , sendo  $\bar{T}$  finito, é equivalente a estudar a estabilidade de  $\Delta_\tau(s)$ .

A seguir, antes de apresentar os resultados propostos são discutidos alguns resultados auxiliares.

## 2.1 Preliminares

Inicialmente, para valores fixos de  $\tau$ ,  $k$  e  $T$ , são definidos os seguintes conjuntos  $(n_p, z_p, p_p)_\tau$  e  $(n_p, z_p, p_p)_T^k$ , sendo, respectivamente, o números de raízes de  $\Delta_\tau(s)$  e  $\Delta_T^k(s)$ , com parte real negativa ( $n_p$ ), puramente imaginárias ( $z_p$ ) e com parte real positiva ( $p_p$ ).

Agora da equação característica em (2.6), tem-se que:

$$\Delta_T^k(s) = \frac{\det [(1 + Ts)^k (sI - A) - A_d(1 - Ts)^k]}{(1 + Ts)^{kn_x}} \quad (2.7)$$

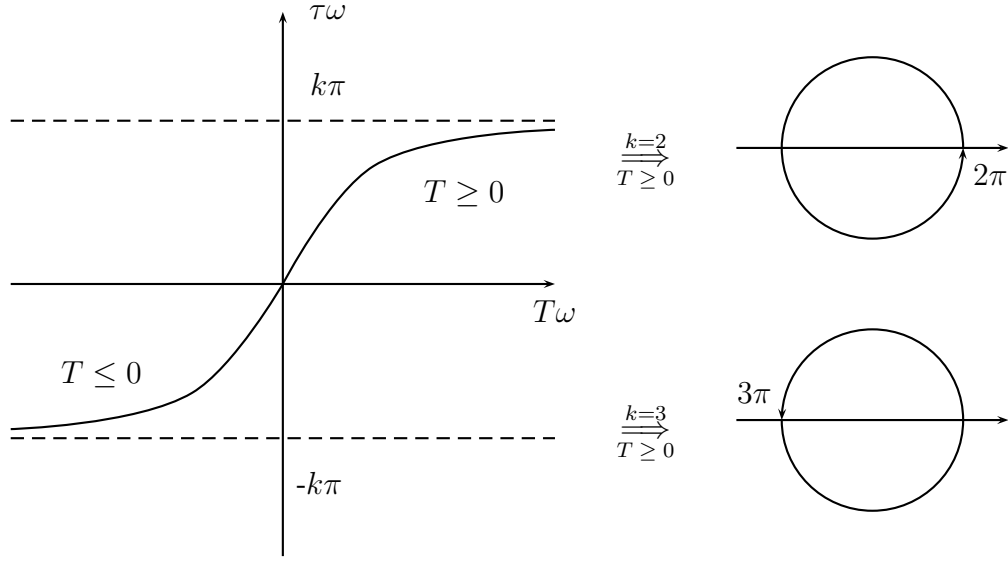


Figura 2.2: Relação entre  $\tau\omega$  e  $T\omega$  usando (2.5) para  $T \in \mathbb{R}_+$ .

é uma função racional em  $s$  para qualquer  $T \neq 0$ . Note que  $\Delta_T^k(s)$  nunca será própria, pois o numerador

$$\det [(1 + Ts)^k (sI - A) - A_d(1 - Ts)^k]$$

é um polinômio de grau  $(k + 1)n_x$  para  $T \neq 0$ , o que implica que

$$(n_p)_T^k + (z_p)_T^k + (p_p)_T^k = (k + 1)n_x, \quad T \neq 0.$$

A seguir, são apresentados alguns importantes resultados da literatura.

**Lema 2.1** *Seja  $k \geq 1$  um número inteiro finito. O número imaginário  $s = j\omega_i$  é uma raiz de  $\Delta_\tau(s)$  para  $\tau = \tau_i \geq 0$ , i.e.  $\Delta_{\tau_i}(j\omega_i) = 0$ , se, e somente se,  $s = j\omega_i$  também é raiz de  $\Delta_T^k(s)$ , para  $T = T_i \in \mathbb{R}$  ( $T_i \in \mathbb{R}_+$  se  $k \geq 2$ ), i.e.  $\Delta_{T_i}^k(j\omega_i) = 0$ .*

A demonstração para o caso  $k = 1$  é encontrada em [55] e para  $k = 2$  em [84]. Além disso, os argumentos utilizados em [84] podem ser estendidos para qualquer  $k > 2$  finito.

O lema a seguir apresenta uma pequena generalização da Proposição I em [55].

**Lema 2.2** *Para qualquer  $\tau_i \geq 0$  finito  $(z_p)_{\tau=\tau_i} \leq 2n_x$ . Se o número imaginário  $s = j\omega_i$  é uma raiz de  $\Delta_\tau(s)$  para  $\tau = \tau_i$ , então,  $\omega_i$  também é finito.*

**Demonstração:** A primeira parte do lema segue diretamente do Lema 2.1 e da equivalência entre as raízes imaginárias de  $\Delta_\tau(s)$  e  $\Delta_T^k(s)$ , os quais podem ter apenas um número finito de raízes no eixo imaginário [27, 30]. Além disso,  $\Delta_T^k(s)$  tem exatamente  $(k + 1)n_x$  raízes para qualquer  $T \geq 0$ . Portanto, o limitante  $(z_p)_{\tau_i} \leq 2n_x$  é obtido fazendo  $k = 1$  em  $\Delta_T^k(s)$ .

A segunda parte do lema é uma extensão do argumento utilizado em [30] para sistemas escalares. Note que,  $\Delta_\tau(s) = 0$  para algum  $s = \lambda + j\omega$  se, e somente se, existir  $x \in \mathbb{C}^{n_x} \neq 0$  tal que

$$[(\lambda + j\omega)I - A]x = A_d e^{-(\lambda + j\omega)\tau} x.$$

Então, sem perda de generalidade, pode-se assumir  $\|x\| = 1$ , sendo que  $\|\cdot\|$  denota a norma Euclidiana. Portanto, aplicando a norma em ambos os lados, tem-se:

$$\|[(\lambda + j\omega)I - A]x\| = \|A_d e^{-\lambda\tau} e^{-j\omega\tau} x\| \leq |e^{-\lambda\tau}| \|A_d\|.$$

Assim, para raízes puramente imaginárias,  $\lambda = 0$ ,

$$\|(j\omega I - A)x\| \leq \|A_d\| < \infty.$$

Portanto, se  $j\omega$  não é um autovalor de  $A$ , então  $\omega$  deve ser finito. Se  $j\omega$  é um autovalor de  $A$ , então, a desigualdade acima deve ser satisfeita independente de  $\omega$ , se  $x$  também é um autovetor de  $A$ . Mas, neste caso,  $\omega$  também é finito, pois  $A$  é finito. ■

Note que, baseado nos resultados apresentados nos lemas 2.1 e 2.2, nada pode ser dito a respeito das raízes que não são puramente imaginárias. Assim, apenas estes lemas não são suficientes para fazer o estudo da estabilidade de  $\Delta_\tau(s)$ . Portanto, um resultado de suma importância para se realizar este estudo é proposto em [55], no qual é apresentada a relação entre as tendências das raízes de  $\Delta_\tau(s)$  e  $\Delta_T^k(s)$ . Mas, antes de apresentar tal resultado, serão consideradas algumas definições. Inicialmente, é definido o *lugar das raízes*:

$$\psi_\tau(\tau) = \{s \in \mathbb{C} : \Delta_\tau(s) = 0, \quad \tau \geq 0\}.$$

Sendo que,  $\psi_\tau(\tau)$  é a coleção de curvas parametrizadas em  $\tau$ . Qualquer ponto  $s_1 \in \psi_\tau(\tau)$  é *regular* se a curva passando por  $s_1$  é uma função diferenciável em  $\tau$ . Uma curva específica em  $\psi_\tau(\tau)$ , passando por  $s_1$  e  $\tau_1$ , é identificada por  $\psi_\tau(\tau, \tau_1, s_1)$  e um ponto particular da curva identificado como  $\psi_\tau(\tau_1)$ . Uma condição suficiente para a regularidade é que  $s_1$  seja uma raiz de  $\Delta_\tau(s)$  não repetida. Portanto, considerando um ponto regular, define-se a quantidade:

$$RT_\tau(\omega_i, \tau_i) \triangleq \text{sign} \left( \text{Re} \left\{ \left. \frac{d\psi_\tau(\tau, \tau_i, j\omega_i)}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_i} \right\} \right), \quad (2.8)$$

a qual é um indicador da direção de cruzamento no eixo imaginário na raiz  $j\omega_i$ . Se  $RT_\tau(\omega_i, \tau_i) = 1$ , as raízes de  $\Delta_\tau(s)$  cruzam o eixo imaginário em  $j\omega_i$  da esquerda (estável) para a direita (instável); alternativamente, se  $RT_\tau(\omega_i, \tau_i) = -1$  as raízes de  $\Delta_\tau(s)$  cruzam o eixo imaginário na raiz  $j\omega_i$  da direita para a esquerda. De maneira similar também é definido  $RT_T^k(\omega_i, T_i)$ , substituindo  $\psi_\tau(\tau)$  por

$$\psi_T^k(T) = \{s \in \mathbb{C} : \Delta_T^k(s) = 0, \quad T \geq 0\} \quad (2.9)$$

e, neste caso, considerando a derivada em relação a  $T$ .

O resultado a seguir é encontrado em [55, Prop. II].

**Lema 2.3** *Seja  $s = j\omega_i \in \psi_\tau(\tau_i)$ . Então,  $s = j\omega_i \in \psi_T^k(T_i)$  para algum  $T_i \in \mathbb{R}$  ( $T_i \in \mathbb{R}_+$  para  $k \geq 2$ ). Como a raiz  $j\omega_i$  é associada a um determinado  $\tau_i$ , ou a qualquer um dos infinitos  $\tau_{i,\ell}$  como em (2.3), a função  $RT_\tau(\omega_i, \tau_i) = RT_\tau(\omega_i, \tau_{i,\ell})$  para qualquer  $\ell = 0, 1, 2, \dots$ . Além disso,  $RT_\tau(\omega_i, \tau_{i,\ell}) = RT_T^k(\omega_i, T_i)$ , para qualquer  $k \geq 2$ .*

Em suma, o lema acima estabelece que a tendência das raízes, cruzando o eixo imaginário em  $s = j\omega_i$ , é a mesma para  $\Delta_\tau(s)$  e  $\Delta_T^k(s)$ , independente de qualquer  $\tau_{i,\ell}$  ou  $T_i$  associados a  $j\omega_i$ .

O exemplo a seguir mostra como o Lema 2.3 pode ser usado para estudar a estabilidade de um sistema sujeito a retardo no tempo.

**Exemplo 2.1** Considere o sistema apresentado em [84]:

$$\dot{x}(t) = -x(t) - 2x(t - \tau). \quad (2.10)$$

Para  $\tau = 0$  o sistema acima é estável. Quando  $\tau$  aumenta, as raízes da função transcendental  $\Delta_\tau(s)$  cruzam o eixo imaginário pela primeira vez em

$$s = \pm j\omega_1 = \pm j\sqrt{3}, \quad \tau_1 = 2\sqrt{3}\pi/9.$$

Portanto,  $RT_\tau(\omega_1, \tau_1) = 1$ . Pela continuidade das raízes de  $\Delta_\tau(s)$  em  $\tau$ , o sistema permanece estável no intervalo  $\tau \in [0, \tau_1)$ . Para  $\tau \geq \tau_1$ , de acordo com (2.3), as raízes da função transcendental  $\Delta_\tau(s)$  irão cruzar o eixo imaginário em  $j\omega_1$  infinitas vezes, sempre na mesma direção  $RT_\tau(\omega_1, \tau_{1,\ell}) = 1$ ,  $\ell = 0, 1, 2, \dots$  (veja Lema 2.3). Sendo que, o segundo cruzamento acontece em  $\tau_{1,1} = \tau_1 + 2\pi/\omega_1$ . Note que, o sistema nunca retornará a estabilidade para  $\tau \geq \tau_1$ , pois as raízes sempre cruzam o eixo imaginário da esquerda para a direita.

Agora, será mostrado como analisar a estabilidade do sistema em (2.10), considerando a função associada  $\Delta_T^1(s)$  para  $T \in [0, \infty)$ . Neste exemplo, observando que  $\Delta_T^1(s)$  é estável para  $T = 0$  e suas raízes cruzam o eixo imaginário em

$$s = \pm j\omega_1 = \pm j\sqrt{3}, \quad T_1 = 1,$$

e, do Lema 2.3,  $RT_T^1(\omega_1, T_1) = RT_\tau(\omega_1, \tau_1) = 1$ , portanto utilizando (2.5) é possível calcular

$$\tau_1 = 2\omega_1^{-1} \arctan(\omega_1) = 2\sqrt{3}\pi/9,$$

concluindo que as raízes de  $\Delta_\tau(s)$  são estáveis apenas no intervalo  $\tau \in [0, \tau_1)$ .

Em relação ao exemplo acima, os resultados que serão apresentados permitem concluir que  $\Delta_T^1(s)$  tem ao menos uma raiz instável para  $T \geq 1$  e que o sistema em (2.10) permanece instável no intervalo  $\tau \in [\tau_1, \tau_{1,1})$ , com  $\tau_{1,1}$  dado por (2.3). Além disso, mostram que o estudo da estabilidade do sistema acima em um intervalo  $\tau \in [0, \tau_{1,\ell})$  para  $\ell > 2$ , pode ser feito por meio da análise das raízes de  $\Delta_T^k(s)$  com  $k \geq \ell$ . De forma geral, o resultado proposto estabelece que: estudar a estabilidade de  $\Delta_\tau(s)$  em um grande domínio do retardo no tempo é equivalente a estudar a estabilidade de  $\Delta_T^k(s)$ , para  $k$  assumindo um valor suficientemente grande.

Apesar do exemplo anterior ser bastante simples, há sistemas bem mais complexos, como o exemplo a seguir.

Tabela 2.1: Zeros de  $\Delta_T^1(s)$  cruzando o eixo imaginário

$i$	$\omega_i$	$T_i$	tendência	$\tau_i$	$\ell$	$\tau_{i,\ell}$
1	3.0352	0.0829	ED	0.1624	0	0.1624
2	2.9124	0.0953	DE	0.1859	0	0.1859
3	2.1109	0.6233	ED	0.8725	0	0.8725
4	15.5032	-0.4269	ED	-0.1833	1	0.2220
5	0.8407	-0.1332	ED	-0.2653	1	7.2105

**Exemplo 2.2** Considere o seguinte sistema dado em [55]:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 13.5 & -1 \\ -3 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & -4 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} -5.9 & 7.1 & -70.3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} x(t - \tau). \quad (2.11)$$

Note que, para este sistema a função racional  $\Delta_T^k(s)$  com  $k = 1$  é de ordem  $(k + 1) n_x = 6$ .

Para estudar a estabilidade deste sistema, inicialmente, listam-se todos os valores de  $T_i$  e  $\omega_i$  para os quais as raízes da função  $\Delta_T^1(s)$  cruzam o eixo imaginário. Veja Tabela 2.1. Além disso, também são apresentadas as tendências dos cruzamentos das raízes, esquerda para direita (ED) e direita para esquerda (DE), sendo estes valores obtidos utilizando o passo **A**) em [55] que consiste basicamente no computo de (2.8), e os valores de  $\tau_{i,\ell}$ , que são obtidos utilizando (2.3). O passo **B**) em [55] é a construção da Tabela 2.2 apresentado todos os valores positivos de  $\tau$ , utilizando (2.3), para que todas as frequências de cruzamento  $\omega_i$  apareçam ao menos uma vez. O índice  $i$ , na segunda coluna, refere-se a coluna  $i$  na Tabela 2.1, na qual são obtidos os valores para as tendências e as frequências de cruzamento  $\omega_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 5$ . Alternativamente, as colunas  $\tau_{i,\ell}$  e  $\ell$  na Tabela 2.1 correspondem ao primeiro valor de  $\ell$  e  $\tau_{i,\ell}$ , para os quais alguma raiz  $\omega_i$  apareça na Tabela 2.2.

Portanto, é por meio da Tabela 2.2 que a estabilidade do sistema (2.11) pode ser analisada. Note que, como no exemplo anterior, as raízes de  $\Delta_\tau(s)$  são estáveis para  $\tau = 0$ , e, portanto, devido a continuidade das raízes de  $\Delta_\tau(s)$  em  $\tau$ , pode-se concluir que este sistema é estável para

$$\tau \in [0, 0.1624) \cup (0.1859, 0.2220)$$

e instável para qualquer outro valor de  $\tau$ , porque para  $\tau > 0.2220$  sempre existirá mais raízes cruzando o eixo imaginário da esquerda para a direita (ED), que da direita para esquerda (DE), o que garante que o sistema não volte a ser estável.

No exemplo acima, apenas analisando-se as raízes de  $\Delta_T^1(s)$ , listadas na Tabela 2.1, não é possível concluir com exatidão acerca da estabilidade das raízes de  $\Delta_\tau(s)$  (Tabela 2.2). Ao menos considerando todo o intervalo  $[0, 7.2105)$  apresentado na Tabela 2.2. Os fatores que dificultam tal análise são:

- Muitos valores para  $\tau$  apresentados na Tabela 2.2 são gerados devido a repetições obtidas pela fórmula (2.3) e não são apresentados na Tabela 2.1;
- O argumento utilizado no Exemplo 2.1 é baseado na continuidade das raízes de  $\Delta_\tau(s)$  em relação a  $\tau$  e das raízes de  $\Delta_T^k(s)$  em relação a  $T$ , quando os valores de  $\tau$  e  $T$  são incrementados a partir de

Tabela 2.2: Zeros de  $\Delta_T^1(s)$  cruzando o eixo imaginário

$i$	$\ell$	$\tau_{i,\ell}$	tendência
1	0	0.1624	ED
2	0	0.1859	DE
4	1	0.2220	ED
4	2	0.6272	ED
3	0	0.8725	ED
4	3	1.0326	ED
4	4	1.4378	ED
4	5	1.8431	ED
1	1	2.2325	ED
4	6	2.2484	ED
2	1	2.3433	DE
4	7	2.6537	ED
4	8	3.0590	ED
4	9	3.4642	ED
3	1	3.8489	ED
4	10	3.8695	ED
4	11	4.2748	ED
1	2	4.3026	ED
2	2	4.5007	DE
4	12	4.6801	ED
4	13	5.0854	ED
4	14	5.4907	ED
4	15	5.8959	ED
4	16	6.3012	ED
1	3	6.3727	ED
2	3	6.6581	DE
4	17	6.7065	ED
3	3	6.8253	ED
4	18	7.1118	ED
5	1	7.2105	ED

0. Entretanto, note que, um ponto de especial atenção em relação às raízes de  $\Delta_T^k(s)$  é quando o valor de  $T$  sai de 0, pois este é um ponto de descontinuidade. Além disso, note que, as tendências das cinco primeiras raízes nas tabelas 2.1 e 2.2 são as mesmas, mas por mera coincidência.
- c) O lugar das raízes  $\psi_T^1(T)$  na Tabela 2.1 não pode ser analisado em uma simples direção com  $T \geq 0$ , pois nesta tabela existem valores negativos de  $T$ , na qual o valor negativo de  $T$ , para  $i = 4$ , é responsável por gerar grande parte dos valores apresentados na Tabela 2.2. Portanto, os valores negativos de  $T$  não podem ser simplesmente ignorados. Além disso, note que, utilizar a fórmula em (2.5), com valores negativos de  $T$ , irá gerar valores negativos para  $\tau$ .

Portanto, na próxima seção é mostrado que, incrementando  $k$ , é possível resolver todos os problemas listados acima.

## 2.2 Resultados principais

O principal ponto necessário para apresentar os resultados nesta seção é limitar a análise de estabilidade para  $\tau \in [0, \bar{\tau})$  sendo  $\bar{\tau}$  finito. Na Seção 2.2.1 é mostrado que se  $\Delta_T^k(s)$  é estável para  $T = 0$ , então  $\Delta_T^k(s)$  também é estável para  $T \in [0, T^*)$  com  $T^* > 0$  suficientemente pequeno. Ademais, são apresentadas condições que garantem o ordenamento das raízes puramente imaginárias de  $\Delta_\tau(s)$ , com as raízes puramente imaginárias de  $\Delta_T^k(s)$ , em relação a  $\tau$  e  $T$ , respectivamente, para  $T \geq 0$  e um inteiro  $k$  suficientemente grande. Note que, o ordenamento das raízes de  $\Delta_\tau(s)$  e  $\Delta_T^k(s)$  é de suma importância para viabilizar a equivalência em termos de estabilidade entre  $\Delta_\tau(s)$  e  $\Delta_T^k(s)$ , veja Exemplo 2.2 e a Figura 2.3 que ilustra uma possível situação de desordenamento das raízes de  $\Delta_\tau(s)$  e  $\Delta_T^k(s)$  para  $k = 1$ , nesta, a raiz puramente imaginária de  $\Delta_\tau(s)$  para o menor valor de  $\tau$  é  $\omega_1$ , entretanto, a raiz puramente imaginária de  $\Delta_T^1(s)$  para o menor valor de  $T$  é  $\omega_3$ .

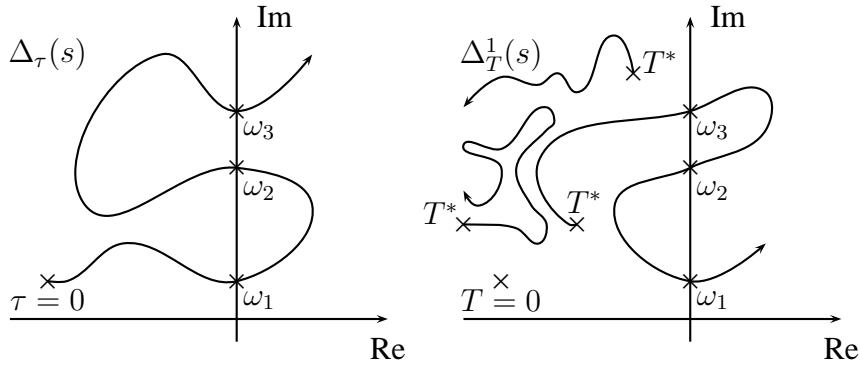


Figura 2.3: Lugar das raízes de  $\Delta_\tau(s)$  e  $\Delta_T^1(s)$ , os quais não são equivalentes, sendo que  $T^*$  é um valor suficientemente pequeno para  $T$ .

Ao final desta seção, é mostrado que, para garantir o ordenamento das raízes puramente imaginárias de  $\Delta_\tau(s)$  com as raízes puramente imaginárias de  $\Delta_T^k(s)$ , para  $T \geq 0$ , é necessário garantir o ordenamento entre os  $\tau_i$ 's e  $T_i$ 's.



### 2.2.1 Estabilidade para um $T$ pequeno

Nesta seção, são estudadas as raízes de  $\Delta_T^k(s)$  no ponto de descontinuidade  $T = 0$ , ou seja, quando  $T$  sai de  $T = 0$  para  $T = T^*$ , sendo  $T^* > 0$  suficientemente pequeno. Para tanto, mostra-se que, se  $\Delta_\tau(s)$  é estável para  $\tau = 0$ , então,  $\Delta_T^k(s)$  é estável para todo  $T \in [0, T^*)$ . Para isto, considere o seguinte resultado auxiliar.

**Lema 2.4** *Considere a função de transferência*

$$G^k(s) \triangleq 1 - \left( \frac{\sigma - s}{\sigma + s} \right)^k.$$

Então,  $s^{-1}G^k(s) \in \mathcal{H}_\infty$  e

$$\|s^{-1}G^k(s)\|_\infty = 2k\sigma^{-1}$$

para todo  $0 < \sigma < \infty$ .

**Demonstração:** O fato que  $s^{-1}G^k(s)$  pertence ao  $\mathcal{H}_\infty$  para todo  $\sigma > 0$  é consequência de que todos os pólos de  $G^k(s)$  estão em  $\lambda_i = -\sigma < 0$  e que  $G^k(0) = 0$ , então,  $s^{-1}G^k(s)$  tem exatamente os mesmos pólos que  $G^k(s)$ . Agora note que

$$s^{-1}G^k(s) = -s^{-1}[1 - z^k(s)], \quad z(s) \triangleq \frac{\sigma - s}{\sigma + s},$$

sendo  $\|z^i(s)\|_\infty = 1$  para qualquer inteiro  $i$ . Usando a identidade

$$1 - z^k = (1 - z)(1 + z + \dots + z^{k-1})$$

segue que

$$\begin{aligned} \|s^{-1}G^k(s)\|_\infty &\leq \|s^{-1}[1 - z(s)]\|_\infty (1 + \dots + \|z^{k-1}(s)\|_\infty), \\ &\leq k \left\| \frac{1}{s} \left( 1 - \frac{\sigma - s}{\sigma + s} \right) \right\|_\infty = 2k\sigma^{-1}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\lim_{s \rightarrow 0} -s^{-1}G^k(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2k\sigma}{(\sigma + s)^2} \left( \frac{\sigma - s}{\sigma + s} \right)^{k-1} = 2k\sigma^{-1},$$

então,

$$\|s^{-1}G^k(s)\|_\infty \geq \lim_{\omega \rightarrow 0} \|(j\omega)^{-1}G^k(j\omega)\|_\infty = 2k\sigma^{-1}.$$

Isto prova que a igualdade é mantida. ■

Agora, o lema exposto acima é utilizado para provar o resultado no próximo lema.

**Lema 2.5** *Assuma que  $(A + A_d)$  é Hurwitz, i.e. todas as raízes de  $\Delta_\tau(s)$  são estáveis para  $\tau = 0$ . Então, existe um escalar suficientemente pequeno  $T^* > 0$ , tal que as raízes de  $\Delta_T^k(s)$  são estáveis para todo  $T \in [0, T^*)$  e qualquer  $k \geq 1$ .*

**Demonstração:** Se as raízes de  $\Delta_\tau(s)$  são estáveis para  $\tau = 0$ , então, as raízes de  $\Delta_T(s)$  são estáveis para  $T = 0$ , porque  $\Delta_\tau(s) = \Delta_T^k(s)$ , quando  $\tau = T = 0$ . Além disso, como a matriz  $(A + A_d)$  é Hurwitz, então, a função de transferência  $H(s) = s(sI - A - A_d)^{-1}A_d$  pertence ao  $\mathcal{H}_\infty$ . Portanto,  $\mu \triangleq \|H(s)\|_\infty < \infty$ . Então, do teorema do ganho pequeno [101], a conexão de realimentação de  $H(s)$  com qualquer  $F(s) \in \mathcal{H}_\infty$ , também é estável. Por exemplo, com

$$F(s) = s^{-1}G_k(s), \quad G_k(s) \triangleq 1 - [(\sigma - s)/(\sigma + s)]^k.$$

Então, do Lema 2.4 a igualdade é mantida  $\|s^{-1}G_k(s)\|_\infty = 2k\sigma^{-1}$  para todo  $0 < \sigma < \infty$  e qualquer inteiro  $k \geq 1$ . Assim, com  $\sigma > 2k\mu$  tem-se que  $\|s^{-1}G_k(s)\|_\infty < \mu^{-1}$ . Portanto a conexão de realimentação

$$y(s) = H(s)w(s) \quad w(s) = s^{-1}G_k(s)[r(s) - y(s)]$$

é estável. Eliminando  $w(s)$  tem-se

$$(sI - A - A_d[1 - G_k(s)])y(s) = A_dG_k(s)r(s),$$

o que revela que

$$y(s) = \left[ sI - A - A_d \left( \frac{\sigma - s}{\sigma + s} \right)^k \right]^{-1} A_dG_k(s)r(s),$$

então, as raízes de  $\Delta_T^k(s)$  são estáveis para todo  $\sigma \in (2k\mu, \infty)$ , ou seja, para todo  $T = \sigma^{-1} \in (0, T^*)$  com  $T^* = (2k\mu)^{-1} > 0$ . ■

## 2.2.2 Condição para conjuntos ordenados

Antes de apresentar as condições de ordenamento, são definidos os conjuntos:

$$\Psi_{\bar{\tau}} \triangleq \{(\tau_i) : j\omega_i \in \psi(\tau_i), 0 \leq \tau_i < \tau_{i+1} \leq \bar{\tau}\}, \quad (2.12)$$

$$\Psi_k \triangleq \{(2k\omega_i^{-1} \arctan(\omega_i T_i)) : j\omega_i \in \psi_k(T_i), 0 \leq T_i < T_{i+1}, 1 \leq i \leq k\}. \quad (2.13)$$

Note que os conjuntos acima têm um número finito de elementos, quando  $k$  e  $\bar{\tau}$  são finitos. Além disso,  $\Psi_{\bar{\tau}}$  é um *conjunto totalmente ordenado em  $\tau$* , no qual os elementos são arranjados pela desigualdade ‘ $\leq$ ’ de números reais. Diferentemente de  $\Psi_{\bar{\tau}}$ , o conjunto  $\Psi_k$  pode não ser um conjunto ordenado. Portanto, agora é definido  $\bar{\Psi}_k$ , que corresponde ao maior subconjunto ordenado de  $\Psi_k$ . Também são definidos os conjuntos:

$$\Omega_{\bar{\tau}} \triangleq \{(\tau_i, \omega_i) : j\omega_i \in \psi(\tau_i), 0 \leq \tau_i < \tau_{i+1} \leq \bar{\tau}\}, \quad (2.14)$$

$$\Omega_k \triangleq \{(T_i, \omega_i) : j\omega_i \in \psi_k(T_i), 0 \leq T_i < T_{i+1}, 1 \leq i \leq k\}, \quad (2.15)$$

com pares  $(\tau, \omega)$  e  $(T, \omega)$ .

O lema a seguir utiliza os conjuntos acima para estabelecer condições de equivalência de estabilidade entre as raízes de  $\Delta_\tau(s)$  com as raízes de  $\Delta_T^k(s)$ .

**Lema 2.6** *Seja dado  $0 < \bar{\tau} < \infty$ . Considere a função transcendental  $\Delta_\tau(s)$  e a função racional  $\Delta_T^k(s)$  para algum inteiro finito  $k \geq 1$  como definido em (2.2) e (2.7). Assuma que as raízes de  $\Delta_\tau(s)$  para  $\tau = 0$  sejam estáveis. Defina os conjuntos associados  $\Psi_{\bar{\tau}}$  e  $\Psi_k$ , como em (2.12) e (2.13). Seja  $\bar{\Psi}_k \subseteq \Psi_k$  o maior subconjunto ordenado de  $\Psi_k$ . Então, existe  $\bar{T} > 0$  e uma função contínua e monotonicamente crescente  $\phi_k : [0, \bar{\tau}) \rightarrow [0, \bar{T})$ , tal que:  $(p_p)_\tau = (p_p)_T^k$  e  $(z_p)_\tau = (z_p)_T^k$ ; com  $T = \phi_k(\tau)$  para todo  $\tau \in [0, \bar{\tau})$  se, e somente se,  $\Psi_{\bar{\tau}} \subseteq \bar{\Psi}_k$ .*

**Demonstração:** Inicialmente, considere o caso em que  $\Psi_{\bar{\tau}}$  é vazio. Então, é trivial concluir que  $\Psi_{\bar{\tau}} \subseteq \bar{\Psi}_k$ . Além disso, as raízes de  $\Delta_\tau(s)$  nunca cruzam o eixo imaginário. Pelo Lema 2.1, as raízes de  $\Delta_T^k(s)$  também nunca irão cruzar o eixo imaginário. Portanto,  $(z_p)_\tau = (z_p)_T^k$  e  $(p_p)_\tau = (p_p)_T^k$  para todo  $\tau, T \geq 0$ . Assim, o caso de interesse é quando  $\Psi_{\bar{\tau}}$  não é vazio.

Devido ao Lema 2.1, tem-se que  $(z_p)_\tau = (z_p)_T^k$ . Se  $\emptyset \neq \Psi_{\bar{\tau}} \subseteq \bar{\Psi}_k$ , então, cada vez que as raízes de  $\Delta_\tau(s)$  cruzarem o eixo imaginário em  $(\tau_i, \omega_i) \in \Omega_{\bar{\tau}}$  as raízes de  $\Delta_T^k(s)$  cruzam o eixo imaginário em  $(T_i, \omega_i) \in \Omega_k$  para o mesmo índice  $i$ . Isto é a consequência do ordenamento entre  $\Psi_{\bar{\tau}}$  e  $\bar{\Psi}_k$ .

Usando o Lema 2.5, as raízes de  $\Delta_T^k(s)$  são estáveis para todo  $T \in [0, T^*)$ , para  $T^* > 0$  suficientemente pequeno. Desta forma,  $(z_p)_T^k = 0$  para todo  $T \in [0, T^*)$ . Portanto, pode-se incrementar continuamente e monotonicamente o valor de  $T$ , a partir de 0 passando por  $T^*$  até que as raízes de  $\Delta_T^k(s)$  cruzem o eixo imaginário em  $\omega_1, T_1 > 0$ . Então, devido o Lema 2.1, as raízes de  $\Delta_\tau(s)$  devem cruzar o eixo imaginário, simultaneamente, em  $\omega_1, \tau_1 = 2k\omega_1^{-1} \arctan(\omega_1 T_1) > 0$ . Como  $T$  incrementa continuamente e monotonicamente, as raízes de  $\Delta_\tau(s)$  e  $\Delta_T^k(s)$  cruzam o eixo imaginário em todo  $\omega_i, T_i, \tau_i = 2k\omega_i^{-1} \arctan(\omega_i T_i) < \bar{\tau}$ . Isto assegura a existência de um mapa contínuo e monotônico  $\phi_k$  de  $\tau \in [0, \bar{\tau})$  para  $T \in [0, \bar{T})$ . Sem perda de generalidade o valor de  $\bar{T}$  pode ser escolhido como  $\bar{T} = T_\iota + \epsilon$  para algum  $\epsilon > 0$ , suficientemente pequeno, sendo

$$\iota = \arg \max_i \{T_i : (T_i, \omega_i) \in \Omega_k, 2k \arctan(\omega_i T_i) \leq \omega_i \bar{\tau}\}.$$

Portanto, o ordenamento dos cruzamentos no eixo imaginário nos permite concluir que para  $T \in [T_i, T_{i+1})$  e  $\tau \in [\tau_i, \tau_{i+1})$ , sendo  $i \leq \iota$ , tal que  $\tau_i \leq \bar{\tau}$ , o número de raízes com parte real positiva de  $\Delta_T^k(s)$  e  $\Delta_\tau(s)$  são iguais, então,  $(p_p)_\tau = (p_p)_T^k$ .

Para provar que a condição  $\Psi_{\bar{\tau}} \subseteq \bar{\Psi}_k$  também é necessária, basta invocar o Lema 2.1 para mostrar que se  $\Psi_{\bar{\tau}} \not\subseteq \bar{\Psi}_k$ , então, existe necessariamente  $\tau_i, T_i > 0$  para o qual  $\Delta_T^k(s)$  cruza o eixo imaginário em  $\omega_i \neq \omega_j$ , então,  $\tau_i \neq 2k\omega_j^{-1} \arctan(\omega_j T_j)$  e o mapa  $\phi_k$  não pode ser contínuo e monotônico. ■

As condições de ordenamento acima são ilustradas no Exemplo 2.3 na Seção 2.3.

### 2.2.3 Condições de ordenamento

Nesta seção, discute-se que, com o incremento do valor de  $k$ , é possível assegurar o ordenamento dos conjuntos requerido no Lema 2.6. A idéia básica deste processo pode ser entendida verificando que

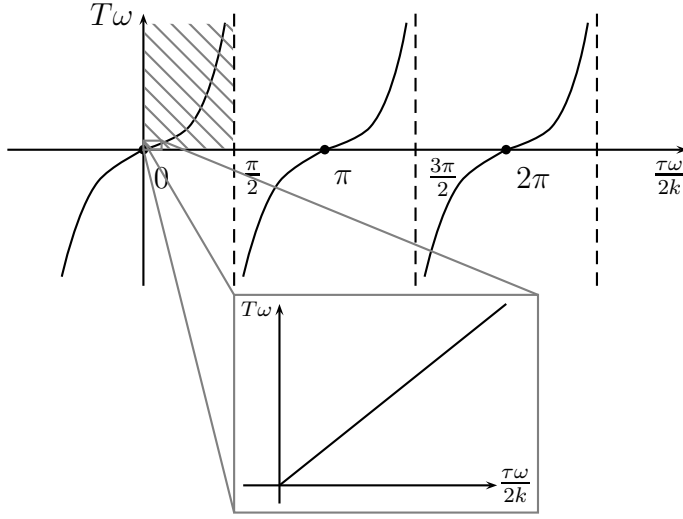


Figura 2.4: Relação entre  $\tau\omega/2k$  e  $T\omega$  dada por meio da função tangente.

devido a substituição em (2.4), a relação entre  $T\omega_i$  e  $\tau\omega_i/2k$  é dada por meio da função tangente:

$$jT\omega = \frac{1 - e^{j\frac{\tau\omega}{k}}}{1 + e^{j\frac{\tau\omega}{k}}} = \frac{e^{-j\frac{\tau\omega}{2k}} (e^{j\frac{\tau\omega}{2k}} - e^{-j\frac{\tau\omega}{2k}})}{e^{-j\frac{\tau\omega}{2k}} (e^{j\frac{\tau\omega}{2k}} + e^{-j\frac{\tau\omega}{2k}})} = \frac{2j\text{sen}\left(\frac{\tau\omega}{2k}\right)}{2\cos\left(\frac{\tau\omega}{2k}\right)} = j \tan\left(\frac{\tau\omega}{2k}\right).$$

Então, é fácil observar que uma condição *necessária* para o ordenamento entre as raízes de  $\Delta_\tau(s)$  e  $\Delta_T^k(s)$  em relação aos valores de  $\tau_i$ 's e  $T_i$ 's, é que  $\max_i\{\tau_i\omega_i\}/2k \leq \pi/2$ , veja Figura 2.4. Note que, para que esta condição seja satisfeita basta escolher o valor de  $k$  suficientemente grande. Ademais, tem-se uma intuição de como obter uma condição *suficiente* para garantir o ordenamento. Neste caso é necessário considerar o valor de  $k$  suficientemente grande, tal que  $\max\{\tau_i\omega_i\}/2k \ll \pi/2$ , pois assim a função tangente pode ser aproximada por uma função linear, veja Figura 2.4. A seguir esta idéia é formalmente demonstrada.

Nesta seção demonstra-se que, para um dado  $0 < \bar{\tau} < \infty$ , existe um  $k^*$  suficientemente grande, tal que, para qualquer  $k > k^*$  a condição de ordenamento  $\Psi_{\bar{\tau}} \subseteq \Psi_k$ , veja Lema 2.6, é sempre satisfeita. Note que os resultados nesta seção não requerem a hipótese que as raízes de  $\Delta_\tau(s)$  sejam estáveis para  $\tau = 0$ .

**Lema 2.7** *Seja dado  $0 < \bar{\tau} < \infty$ . Considere a função transcendental  $\Delta_\tau(s)$  e a função racional  $\Delta_T^k(s)$  para algum inteiro  $k \geq 1$ , como definido em (2.2) e (2.7). Defina os conjuntos associados  $\Psi_{\bar{\tau}}$  e  $\Omega_{\bar{\tau}}$  como em (2.12) e (2.14). Calcule*

$$\bar{k} \triangleq \pi^{-1} \max\{(\omega_i\tau_i) : (\tau_i, \omega_i) \in \Omega_{\bar{\tau}}\}. \quad (2.16)$$

*Se  $k \geq \bar{k}$ , então,  $\Psi_{\bar{\tau}} \subseteq \Psi_k$  sendo  $\Psi_k$  dado em (2.13).*

**Demonstração:** A condição  $\Psi_{\bar{\tau}} \subseteq \Psi_k$  essencialmente garante que a relação

$$f : \Omega_k \rightarrow \Psi_{\bar{\tau}}, \quad f(T, \omega) = 2k\omega^{-1} \arctan(\omega T)$$

seja sobrejetiva, isto é, cada momento de cruzamento  $\tau_i \in \Omega_{\bar{\tau}}$  seja mapeado por algum  $(T_j, \omega_j) \in \Omega_k$ , correspondentemente em  $\Psi_{\bar{\tau}}$  e  $\Psi_k$ . Sob a ótica do Lema 2.1, basta que a seguinte condição seja satisfeita:

$$0 \leq \max\{(\omega_i \tau_i) : (\tau_i, \omega_i) \in \Omega_{\bar{\tau}}\} \leq 2k \arctan(\omega_i T).$$

Desde que  $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$  é suficiente que  $k \geq \bar{k}$  para que  $f$  seja sobrejetiva.  $\blacksquare$

A condição  $k \geq \bar{k}$  assegura que  $\Psi_{\bar{\tau}} \subseteq \Psi_k$ . Esta é uma condição necessária para assegurar que  $\Psi_{\bar{\tau}} \subseteq \bar{\Psi}_k$  no Lema 2.6, pois  $\bar{\Psi}_k \subseteq \Psi_k$ . O lema a seguir provê uma condição suficiente para  $\Psi_{\bar{\tau}} \subseteq \bar{\Psi}_k$ .

**Lema 2.8** *Seja dado  $0 < \bar{\tau} < \infty$ . Considere a função transcendental  $\Delta_{\bar{\tau}}(s)$  e a função racional  $\Delta_{\bar{T}}^k(s)$  para algum inteiro  $k \geq \bar{k}$  como definido em (2.2), (2.7) e (2.16). Defina os conjuntos  $\Psi_{\bar{\tau}}$  e  $\Omega_{\bar{\tau}}$  como em (2.12) e (2.14). Compute:*

$$k^* = \max \left\{ \frac{\omega_j \tau_j}{2 \arccos \left( \sqrt{\tau_j / \tau_i} \right)} : (\omega_i, \tau_i), (\omega_j, \tau_j) \in \Omega_{\bar{\tau}} \right\}.$$

Se  $k > k^*$  então  $\Psi_{\bar{\tau}} \subseteq \bar{\Psi}_k$ , sendo  $\bar{\Psi}_k$  o maior subconjunto ordenado de  $\Psi_k$  definido em (2.13).

**Demonstração:** Como  $k \geq \bar{k}$ , então, cada cruzamento  $\tau_i \in \Omega_{\bar{\tau}}$  é mapeado por algum  $T_i \in \Omega_k$ . O objetivo é mostrar que, se  $k > k^*$ , então,  $\Psi_{\bar{\tau}} \subseteq \bar{\Psi}_k$ . Portanto, assumamos que  $k > k^*$ , mas  $\Psi_{\bar{\tau}} \not\subseteq \bar{\Psi}_k$ . Isto implica que existe ao menos um par de índices  $i$  e  $j$ , para que  $0 < \tau_j < \tau_i < \bar{\tau}$ , mas com  $T_j > T_i$ . Então, devido à função trigonométrica tangente ser contínua e diferenciável no intervalo  $(-\pi/2, \pi/2)$ , e utilizando a fórmula de Taylor [4], tem-se:

$$\tan(x) = \frac{1}{\cos^2(\xi)} x, \quad 0 \leq \xi \leq x < \pi/2.$$

Esta igualdade se mantém para algum  $\xi \in [0, x]$ . Isto ocorre devido à função tangente ser também bijetora (invertível) no intervalo  $(-\pi/2, \pi/2)$ , tem-se que

$$T_i = \frac{1}{\omega_i} \tan \left( \frac{\omega_i \tau_i}{2k} \right) = \frac{\tau_i}{2k \cos^2(\xi_i)}, \quad 0 \leq \xi_i \leq \frac{\omega_i \tau_i}{2k}.$$

Devido o Lema 2.7, se  $k \geq \bar{k}$ , então  $\omega_i \tau_i / (2k) \in [0, \pi/2)$ . Da mesma forma:

$$T_j = \frac{\tau_j}{2k \cos^2(\xi_j)}, \quad 0 \leq \xi_j \leq \frac{\omega_j \tau_j}{2k},$$

e

$$T_i - T_j = \frac{\tau_i - \rho_{ij}^2 \tau_j}{2k \cos^2(\xi_i)}, \quad \rho_{ij} \triangleq \frac{\cos(\xi_i)}{\cos(\xi_j)}. \quad (2.17)$$

Então, para

$$k > k^* \geq \frac{\omega_j \tau_j}{2 \arccos \left( \sqrt{\tau_j / \tau_i} \right)},$$

tem-se que

$$\cos \left( \frac{\omega_j \tau_j}{2k} \right) > \left( \frac{\tau_j}{\tau_i} \right)^{1/2}.$$

Observando que

$$\rho_{ij} \leq \left[ \cos \left( \frac{\omega_j \tau_j}{2k} \right) \right]^{-1},$$

então,  $\rho_{ij}^2 < \tau_i / \tau_j$ . Mas, de (2.17) tem-se que

$$T_i - T_j = \frac{\tau_i - \rho_{ij}^2 \tau_j}{2k \cos^2(\xi_i)} > 0$$

o que contradiz a hipótese que  $T_j > T_i$ . ■

### 2.2.4 Condição de equivalência entre $\Delta_\tau(s)$ e $\Delta_T^k(s)$

Nesta seção é apresentado o principal resultado deste capítulo. É mostrado que para  $0 \leq \tau < \bar{\tau}$ , sendo  $\bar{\tau}$  finito, então existe  $k$  suficientemente grande, de forma que estudar a estabilidade de  $\Delta_T^k(s)$  é equivalente a estudar a estabilidade de  $\Delta_\tau(s)$ .

**Teorema 2.1** *Seja dado  $0 < \bar{\tau} < \infty$ . Sejam  $(n_p, z_p, p_p)_\tau$  e  $(n_p, z_p, p_p)_T^k$ , respectivamente, as raízes de  $\Delta_\tau(s)$  e  $\Delta_T^k(s)$  para algum  $\tau$ ,  $k$  e  $T$ . Então, existe um número inteiro  $0 < k^* < \infty$  e um número real  $0 < \bar{T} < \infty$  tal que para qualquer  $k > k^*$  existe uma função contínua e monotonicamente crescente  $\phi_k : [0, \bar{\tau}] \rightarrow [0, \bar{T}]$  então:  $(p_p)_\tau = (p_p)_T^k$  e  $(z_p)_\tau = (z_p)_T^k$ , sendo  $T = \phi_k(\tau)$ .*

**Demonstração:** A demonstração deste teorema pode ser construída, por meio da combinação dos lemas 2.6, 2.7 e 2.8. ■

O teorema acima estabelece essencialmente que, limitando um domínio de interesse para o retardo no tempo,  $\tau \in [0, \bar{\tau})$ , no qual se deseja analisar a estabilidade de  $\Delta_\tau(s)$ , pode-se, alternativamente, estudar a estabilidade da função racional  $\Delta_T^k$ , para qualquer  $k > k^*$ , sendo  $k^*$  um inteiro suficientemente grande. A vantagem deste resultado é que analisar a estabilidade de  $\Delta_T^k(s)$ , mesmo para valores grandes de  $k$ , é significamente mais simples que estudar a estabilidade da função transcendental  $\Delta_\tau(s)$ .

## 2.3 Exemplos numéricos

Inicialmente, utiliza-se o Exemplo 2.2 apresentado anteriormente para ilustrar as condições de ordenamento apresentadas no Lema 2.6.

Tabela 2.3: Zeros de  $\Delta_T^2(s)$  cruzando o eixo imaginário

$i$	$\omega_i$	$T_i$	tendência	$\ell$	$\tau_{i,\ell}$
1	3.0352	0.0408	ED	0	0.1624
2	2.9124	0.0468	DE	0	0.1859
3	15.5032	0.0750	ED	0	0.2220
4	2.1109	0.2350	ED	0	0.8725
5	0.8407	21.3076	ED	0	7.2105

**Exemplo 2.3** Considere novamente o Exemplo 2.2 na página 14. Escolhendo,  $\bar{\tau} = 0.2$  e por meio da Tabela 2.2 (pag. 15) tem-se o seguinte conjunto ordenado  $\Psi_{\bar{\tau}}$  definido em (2.12):

$$\Psi_{\bar{\tau}=0.2} = \{0.1624, 0.1859\}.$$

Para  $k = 1$ , da Tabela 2.1 (pag. 14) tem-se o seguinte conjunto ordenado  $\Psi_{k=1}$  definido em (2.13):

$$\Psi_{k=1} = \{0.1624, 0.1859, 0.8725\}. \quad (2.18)$$

Note que  $\bar{\Psi}_{k=1} = \Psi_{k=1}$ , sendo  $\bar{\Psi}_{k=1}$  o maior subconjunto ordenado de  $\Psi_{k=1}$ . Agora note que  $\Psi_{\bar{\tau}=0.2} \subset \bar{\Psi}_{k=1}$ , então graças ao Lema 2.6 tem-se que  $(p_p)_\tau = (p_p)_T^{k=1}$  e  $(z_p)_\tau = (z_p)_T^{k=1}$  para todo  $\tau \in [0, 0.2)$  e todo  $T \in [0, \bar{T})$ , neste caso para algum  $\bar{T}$ , tal que  $0.0953 = T_2 < \bar{T} < T_3 = 0.6233$ .

Agora, considerando  $\bar{\tau} = 1.0$ , tem-se da Tabela 2.2 o seguinte conjunto ordenado:

$$\Psi_{\bar{\tau}=1.0} = \{0.1624, 0.1859, 0.2220, 0.6272, 0.8725\}.$$

Para  $k = 1$  os conjuntos  $\Psi_{k=1} = \bar{\Psi}_{k=1}$  são os mesmos dados em (2.18). Entretanto,  $\Psi_{\bar{\tau}=1.0} \not\subseteq \bar{\Psi}_{k=1}$ , ademais,  $(p_p)_\tau = 4$ , enquanto da Tabela 2.1 tem-se que  $(p_p)_T^{k=1} \leq 2$  para todo  $T \geq 0$ .

Ainda considerando  $\bar{\tau} = 1.0$ , mas agora escolhendo  $k = 2$ , a Tabela 2.3 é construída, e apresenta os resultados referentes apenas para  $T \geq 0$ . Observando que para  $k \geq 2$  não é necessário considerar  $T < 0$ , como apontado por Thowsen [84, 85]. Então da Tabela 2.3,

$$\Psi_{k=2} = \{0.1624, 0.1859, 0.2220, 0.8725, 7.2105\}.$$

Como no caso anterior  $k = 1$  tem-se que  $\bar{\Psi}_{k=2} = \Psi_{k=2}$ . Note que,  $\Psi_{\bar{\tau}=0.2} \subset \bar{\Psi}_{k=1} \subset \bar{\Psi}_{k=2}$ , mas  $\Psi_{\bar{\tau}=1.0} \not\subseteq \bar{\Psi}_{k=2}$ . Portanto, pelo Lema 2.6 não existe o mapeamento contínuo e monotonicamente crescente  $\phi_k$  entre  $\tau \in [0, 1.0)$  e  $T$ .

Apesar de  $\Psi_{\bar{\tau}=1.0} \not\subseteq \bar{\Psi}_{k=2}$ , é interessante observar que escolhendo  $\bar{\tau} = 0.3$  tem-se que  $\Psi_{\bar{\tau}=0.3} \not\subseteq \bar{\Psi}_{k=1}$  ao passo que  $\Psi_{\bar{\tau}=0.3} \subseteq \bar{\Psi}_{k=2}$ . Apesar de não ser apresentado, para que  $\Psi_{\bar{\tau}=1.0} \subseteq \bar{\Psi}_k$  é necessário escolher  $k \geq 6$ .

No próximo exemplo os lemas 2.7 e 2.8 são utilizados para computar, respectivamente, os valores  $\bar{k}$  e  $k^*$ , sendo que o Lema 2.7 apresenta uma condição necessária e o Lema 2.8 uma condição suficiente para  $\Psi_{\bar{\tau}} \subseteq \bar{\Psi}_k$ .

**Exemplo 2.4** Considerando o exemplo anterior, a Tabela 2.4 é obtida, na qual os valores de  $\bar{k}$  e  $k^*$  são encontrados como apresentado nos lemas 2.7 e 2.8 para diferentes valores de  $\bar{\tau}$ . O valor  $k^{*\dagger}$  foi

$\bar{\tau}$	Tabela 2.4:		
	$\bar{k}$	$k^*$	$k^{*\dagger}$
0.20	0.2	0.7	—
1.00	3.0	13.4	8.7
2.24	9.0	39.3	33.2
5.00	23.0	496.5	412.1
7.22	35.0	754.4	470.0

computado essencialmente como  $k^*$  exceto que os índices  $i, j$  foram tomados apenas nos subconjuntos com entradas desordenadas em  $k = \bar{k}$ . A demonstração do Lema 2.8 permanece inalterada se esta restrição for adicionada.

Em seguida, a Tabela 2.5 é obtida depois de se encontrar todas as raízes de  $\Delta_T^k(s)$  para  $k = \bar{k} + 1$ , sendo  $\bar{k}$  apresentado na Tabela (2.4).

Na Tabela 2.5 o índice  $i$  corresponde ao  $i$ -ésimo valor na coluna com os valores de  $\tau$ 's. A condição  $\Psi_{\bar{\tau}} \subseteq \bar{\Psi}_k$  no Lema 2.6 é satisfeita quando uma determinada coluna na Tabela 2.5 aparece completamente ordenada, sendo que os índices em negrito correspondem ao máximo subconjunto ordenado  $\bar{\Psi}_k$ .

Por meio da Tabela 2.5 pode-se observar o quanto são conservadores os valores de  $k^*$  apresentados na Tabela 2.4. Por exemplo, o ordenamento total dos cruzamentos de  $\tau < \bar{\tau} = 2.24$  já acontece para  $k = 24$ , valor muito menor do que  $k^{*\dagger} = 34$ .

## 2.4 Conclusões do capítulo

Neste capítulo, mostrou-se que, supondo o sistema (2.1) estável, para  $\tau = 0$ , e que as raízes de  $\Delta_\tau(s)$  não cruzem o eixo imaginário simultaneamente, então existe um inteiro  $k$  suficientemente grande, tal que estudar a estabilidade de  $\Delta_T^k(s)$  é exatamente equivalente a estudar a estabilidade de  $\Delta_\tau(s)$ , em um intervalo específico  $\tau \in [0, \bar{\tau})$ , com  $\bar{\tau}$  finito.

Portanto, foi mostrado que a análise de estabilidade de um sistema sujeito a retardo no tempo contínuo, pode ser significativamente simplificado. Conseqüentemente, o resultado obtido apresenta grande possibilidade de extensões, principalmente no sentido de se obter condições que sejam computacionalmente eficientes.

Nota-se que este tipo de resultado é único na literatura, sendo que o resultado mais próximo a este parece ser apresentado em [98]. Nesta referência, mostra-se a existência de dois sistemas lineares de dimensão finita, obtidos via aproximação Padé, sendo um deles uma condição suficiente para a estabilidade e o outro, uma condição necessária.

É importante ressaltar que os resultados apresentados foram divulgados em [11]. Além disso, como uma observação, salienta-se que os resultados apresentados neste capítulo foram desenvolvidos durante o período de estágio de doutorado realizado na Universidade da Califórnia em San Diego.



Tabela 2.5: Zeros de  $\Delta_{\tau}(s)$  cruzando o eixo imaginário

$i$				$\tau$ 's
$\bar{\tau} = 0.20$	$\bar{\tau} = 1.00$	$\bar{\tau} = 2.24$	$\bar{\tau} = 5.00$	
$k = 1$	$k = 4$	$k = 10$	$k = 24$	
<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	0.1624
<b>2</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	0.1859
	<b>3</b>	<b>3</b>	<b>3</b>	0.2220
	5	<b>4</b>	<b>4</b>	0.6272
	4	<b>5</b>	<b>5</b>	0.8725
		<b>6</b>	<b>6</b>	1.0326
		9	<b>7</b>	1.4378
		15	<b>8</b>	1.8431
		7	<b>9</b>	2.2325
			11	2.2484
			10	2.3433
			12	2.6537
			16	3.0590
			17	3.4642
			13	3.8489
			22	3.8695
			30	4.2748
			14	4.3026
			15	4.5007
			46	4.6801

## **Parte II**

# **Condições via Teoria de Lyapunov-Krasovskii**

Nesta segunda parte do trabalho, são apresentados resultados fundamentados na teoria de Lyapunov-Krasovskii, que corresponde à extensão da teoria de Lyapunov para lidar com sistemas sujeitos a retardo no tempo. Esta extensão foi proposta por Krasovskii no final da década de 50, em seu trabalho pioneiro [42]. Para uma sistemática apresentação desta teoria indica-se a referência [30]. Além disso, os resultados propostos são formulados em termos de desigualdades matriciais lineares (LMIs) [58].

Na área do controle robusto, direcionada ao estudo de sistemas sujeitos a retardo no tempo via formulação LMI, algumas estratégias são usualmente adotadas para se obter condições menos conservadoras, tais como: limitantes superiores [20, 22, 44, 52, 56, 57, 59], diferentes formas de transformações de modelos<sup>1</sup> [40], manipulações da fórmula de Newton-Leibniz [68, 78, 89, 90] e algoritmos auxiliares [44, 56, 57, 78]. No entanto, mesmo esses métodos podem ainda ser conservadores. Veja que esta breve lista, não esgota o grande número de trabalhos nas últimas décadas.

Há trabalhos na literatura que apresentam escolhas de funcionais de Lyapunov-Krasovskii com caráter *necessário e suficiente*, veja [17, 18, 39]. Entretanto, este tipo de funcional é formulado por meio de funções matriciais, o que torna necessário a utilização de técnicas/escolhas linearizantes conservadoras, a fim de se obter condições formuladas em termos de LMIs. Portanto, os resultados da literatura baseados na teoria de Lyapunov-Krasovskii e em LMIs são de caráter suficiente.

Na literatura, uma técnica bastante oportuna para lidar com um funcional de Lyapunov-Krasovskii definido por meio de funções matriciais foi proposta por Gu em [24], para maiores detalhes veja [27]. Essa técnica consiste, basicamente, em discretizar o intervalo de integração do funcional de Lyapunov-Krasovskii  $[-\tau, 0]$ , sendo  $\tau$  o retardo no tempo, em  $N$  segmentos de comprimentos iguais. Além disso, cada função matricial é escolhida como  $N + 1$  matrizes lineares por partes. Portanto, pode-se esperar que quando o número de discretizações  $N$  tende para infinito, condições necessárias e suficientes podem ser obtidas. Entretanto, isto não pode ser garantido, pois para se obter as condições formuladas em termos de LMIs, torna-se necessário a utilização de limitantes superiores, que fatalmente adicionam conservadorismo ao método. De toda forma, neste contexto, as condições da literatura aparentemente menos conservadoras são obtidas por meio da aplicação da referida técnica de discretização.

---

<sup>1</sup>Existem transformações de modelos que podem não ser equivalentes ao sistema original, veja [28, 87].

# Capítulo 3

## Análise de estabilidade de sistemas lineares

Neste capítulo, o problema de análise de estabilidade de sistemas lineares sujeitos a retardo no tempo é considerado. Como ponto de partida utilizar-se-á a teoria de Lyapunov-Krasovskii aliada a uma técnica de discretização do funcional selecionado. Espera-se obter novas condições LMIs de análise de estabilidade de sistemas sujeitos a retardo no tempo que possam ser estendidas para tratar: sistemas incertos, retardo no tempo incerto, sistemas do tipo neutro com *todas* as matrizes do sistema incertas, sistemas do tipo neutro sujeitos a retardos mistos, algumas classes de sistemas não-lineares, projeto de controladores e projeto de filtros.

O ponto principal, que torna possível obter métodos de grande versabilidade, é a utilização de uma técnica simples, que permite desacoplar as matrizes do sistema das matrizes do funcional de Lyapunov-Krasovskii. Essa técnica corresponde em se obter um apropriado termo nulo relacionado com a dinâmica do sistema.

Antes de apresentar os resultados propostos, são apresentados alguns resultados auxiliares.

### Estabilidade de Lyapunov-Krasovskii

O método de estabilidade de Lyapunov-Krasovskii<sup>1</sup> corresponde a extensão do método de Lyapunov para tratar sistemas sujeitos a retardo no tempo. Basicamente, esse método requer a construção de um apropriado funcional de Lyapunov-Krasovskii, que leve em conta não só a evolução temporal do sistema em questão, como também seu histórico temporal.

O teorema a seguir, apresenta as condições impostas pela teoria de Lyapunov-Krasovskii.

**Teorema 3.1** *Um sistema sujeito a retardo no tempo é assintoticamente estável se existir um funcional de Lyapunov-Krasovskii quadrático e limitado  $V(x_t)$ , tal que para algum  $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ , satisfaz:*

$$V(x_t) \geq \epsilon \|x(t)\|^2 \quad (3.1)$$

*e sua derivada ao longo das trajetórias do sistema satisfaz*

$$\dot{V}(x_t) \leq -\epsilon \|x(t)\|^2 . \quad (3.2)$$

---

<sup>1</sup>O teorema de estabilidade de Lyapunov-Krasovskii pode ser encontrado em [27, pag. 12]

Sendo que  $x_t$  corresponde ao valor de  $x(t)$  no intervalo  $[t - \tau, t]$ , para  $\tau \in \mathbb{R}_+$ .

**Demonstração:** A demonstração deste teorema é encontrada em [27, pág. 150]. ■

Neste trabalho o funcional de Lyapunov-Krasovskii selecionado tem a seguinte forma básica<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned} V(x_t) = & f^T(x(t))P f(x(t)) + 2f^T(x(t)) \int_{-\tau}^0 Q(\xi)x(t + \xi)d\xi \\ & + \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 x^T(t + s)R(s, \xi)dsx(t + \xi)d\xi + \int_{-\tau}^0 x^T(t + \xi)S(\xi)x(t + \xi)d\xi, \end{aligned} \quad (3.3)$$

com

$$\begin{aligned} P \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}, \quad P = P^T, \quad Q : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^{n_x \times n_x}, \quad S : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^{n_x \times n_x}, \quad S^T(\xi) = S(\xi), \\ R : [-\tau, 0] \times [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^{n_x \times n_x}, \quad R(s, \xi) = R^T(\xi, s), \end{aligned}$$

sendo  $\tau$  o retardo no tempo. Além disso,  $f(x(t))$  pode assumir alguma das formas:  $f(x(t)) = x(t)$ ,  $f(x(t)) = x(t) - Ex(t - \tau)$  ou  $f(x(t)) = x(t) - Ex(t - r)$ . Sendo que a escolha de  $f(x(t))$  depende do caso particular em questão. Como o funcional anterior é definido por meio de funções matriciais, isto limita a obtenção de condições formuladas em termos de LMIs. Uma forma de instrumentalizar o uso deste funcional, é discretizá-lo da forma proposta por Gu, como apresentado inicialmente em [24], e em seguida, aprimorada em [25, 27].

## Técnica de discretização de Gu

A técnica de discretização proposta por Gu em [24] consiste em dividir o intervalo do retardo no tempo  $[-\tau, 0]$  em  $N$  segmentos  $[\theta_n, \theta_{n-1}]$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ , de comprimentos iguais a  $h = \tau/N$ , com  $\theta_n = -nh$ . Assim, os quadrados  $[-\tau, 0] \times [-\tau, 0]$  serão divididos em  $N \times N$  pequenos quadrados  $[\theta_n, \theta_{n-1}] \times [\theta_m, \theta_{m-1}]$ . Posteriormente, cada quadrado será dividido em dois triângulos.

Além disso, as matrizes do funcional em (3.3),  $Q(\xi)$  e  $S(\xi)$ , são escolhidas como funções lineares em cada segmento e a matriz  $R(s, \xi)$  é escolhida como função linear em cada triângulo. Portanto, essas matrizes são lineares por partes e podem ser representadas utilizando a fórmula de interpolação,

$$\begin{aligned} Q(\theta_n + \alpha h) &= (1 - \alpha)Q_n + \alpha Q_{n-1} \\ S(\theta_n + \alpha h) &= (1 - \alpha)S_n + \alpha S_{n-1} \\ R(\theta_n + \alpha h, \theta_m + \beta h) &= \begin{cases} (1 - \alpha)R_{n,m} + \beta R_{n-1,m-1} + (\alpha - \beta)R_{n-1,m}, & \alpha \geq \beta \\ (1 - \beta)R_{n,m} + \alpha R_{n-1,m-1} + (\beta - \alpha)R_{n,m-1}, & \alpha < \beta \end{cases} \end{aligned} \quad (3.4)$$

para  $0 \leq \alpha \leq 1, 0 \leq \beta \leq 1$  e  $n, m = 1, \dots, N$ .

Assim, o funcional de Lyapunov-Krasovskii em (3.3) pode ser completamente determinado por meio das matrizes constantes  $P, Q_n, S_n$  e  $R_{n,m}$  ( $n, m = 0, 1, \dots, N$ ).

A seguir é apresentado o primeiro resultado deste capítulo.

<sup>2</sup>Corresponde a um funcional de Lyapunov-Krasovskii *quadrático e completo*, para mais detalhes veja [27, pág. 175].

### 3.1 Sistemas lineares sujeitos a retardo no tempo constante

Considere o sistema linear sujeito a retardo no tempo constante:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - \tau) \quad (3.5)$$

com  $\phi(t) = \mathcal{C}_\tau^{n_x}$  a condição inicial, sendo que  $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$  representa o estado,  $\tau > 0$  é um escalar que representa o retardo no tempo constante. As matrizes do sistema  $A$  e  $A_d$  são constantes e possuem dimensões apropriadas.

O teorema a seguir apresenta condições suficientes para se verificar a estabilidade do sistema em (3.5) para um dado retardo no tempo fixo  $\tau$ .

**Teorema 3.2** *Considere o sistema sujeito a retardo no tempo em (3.5). Sejam dados  $\tau > 0$ , um escalar referente ao retardo no tempo, e  $N$ , um inteiro positivo referente ao número de discretizações desejado. Então, o sistema em (3.5) é assintoticamente estável se existirem matrizes de dimensão  $n_x \times n_x$ :  $F, G, P = P^T, S_n = S_n^T, Q_n, R_{n,m} = R_{m,n}^T$  ( $n, m = 0, 1, \dots, N$ ), tais que as LMIs abaixo sejam satisfeitas:*

$$\begin{bmatrix} P & Q_s \\ * & R_s + S_s \end{bmatrix} > 0 \quad (3.6)$$

e

$$\begin{bmatrix} \Upsilon & D^{pa} & D^{pb} \\ * & -R_d - S_d & 0 \\ * & * & -3S_d \end{bmatrix} < 0, \quad (3.7)$$

com

$$Q_s = [Q_0 \ Q_1 \ \dots \ Q_N], \quad (3.8)$$

$$R_s = \begin{bmatrix} R_{0,0} & R_{0,1} & \dots & R_{0,N} \\ * & R_{1,1} & \dots & R_{1,N} \\ * & * & \ddots & \vdots \\ * & * & * & R_{N,N} \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

$$S_s = \text{diag}\left\{\frac{1}{h}S_0 \ \frac{1}{h}S_1 \ \dots \ \frac{1}{h}S_N\right\}, \quad (3.10)$$

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} FA + A^T F^T + Q_0 + Q_0^T + S_0 & P - F + A^T G^T & FA_d - Q_N \\ * & -G - G^T & GA_d \\ * & * & -S_N \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

$$D^{pa} = [D_n^{pa}], \quad D^{pb} = [D_n^{pb}], \quad 1 \leq n \leq N, \text{ sendo} \quad (3.12)$$

$$D_n^{pa} = \begin{bmatrix} \frac{h}{2}[R_{0,n-1} + R_{0,n}] - [Q_{n-1} - Q_n] \\ \frac{h}{2}[Q_{n-1} + Q_n] \\ -\frac{h}{2}[R_{n-1,N}^T + R_{n,N}^T] \end{bmatrix}, \quad D_n^{pb} = \begin{bmatrix} -\frac{h}{2}[R_{0,n-1} - R_{0,n}] \\ -\frac{h}{2}[Q_{n-1} - Q_n] \\ \frac{h}{2}[R_{n-1,N}^T - R_{n,N}^T] \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

$$R_d = [R_{dn,m}], \quad 1 \leq n, m \leq N,$$

com  $R_{dn,m} = h[R_{n-1,m-1} - R_{n,m}] e$

$$S_d = \text{diag} \{S_0 - S_1, S_1 - S_2, \dots, S_{N-1} - S_N\}, \quad (3.14)$$

sendo  $h = \tau/N$ . □

**Demonstração:** Para demonstrar este teorema é selecionado o funcional de Lyapunov-Krasovskii em (3.3) sendo  $f(x(t)) = x(t)$  e definido por meio das funções matriciais lineares por partes em (3.4). Então, é demonstrado a seguir que se as LMIs em (3.6) e (3.7) são satisfeitas, o funcional em (3.3-3.4) com  $f(x(t)) = x(t)$ , satisfaz as condições em (3.1) e (3.2).

Inicialmente, note que se (3.7) é satisfeita, então,  $S_N > 0$ , o que implica que  $S_0 > S_1 > \dots > S_N > 0$ , veja detalhes em [27, Prop. 5.22]. Seguindo os mesmos argumentos em [27], tem-se que se (3.6) é satisfeita e  $S_0 > S_1 > \dots > S_N > 0$  então o funcional em (3.3-3.4), com  $f(x(t)) = x(t)$ , satisfaz a condição  $V(x_t) \geq \epsilon \|x(t)\|^2$  ( $\epsilon > 0$ ).

Agora é demonstrado que a condição em (3.2) também é satisfeita. Inicialmente, considera-se o sistema sujeito a retardo no tempo em (3.5) e duas matrizes quaisquer de dimensões apropriadas,  $F$  e  $G$ . Assim, tem-se o seguinte termo nulo:

$$2[x^T(t)F + \dot{x}^T(t)G]\{-\dot{x}(t) + Ax(t) + A_d x(t - \tau)\} = 0. \quad (3.15)$$

A derivada temporal do funcional de Lyapunov-Krasovskii em (3.3), com  $f(x(t)) = x(t)$ , é dada por:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) &= 2\dot{x}^T(t) \left[ Px(t) + \int_{-\tau}^0 Q(\xi)x(t + \xi)d\xi \right] + 2x^T(t) \int_{-\tau}^0 Q(\xi)\dot{x}(t + \xi)d\xi \\ &+ 2 \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \dot{x}^T(t + s)R(s, \xi)ds x(t + \xi)d\xi + 2 \int_{-\tau}^0 x^T(t + \xi)S(\xi)\dot{x}(t + \xi)d\xi. \end{aligned}$$

Integrando por parte, tem-se

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) &= 2\dot{x}^T(t)Px(t) + 2\dot{x}^T(t) \int_{-\tau}^0 Q(\xi)x(t + \xi)d\xi + 2x^T(t)Q(0)x(t) \\ &- 2x^T(t)Q(-\tau)x(t - \tau) - 2x^T(t) \int_{-\tau}^0 \dot{Q}(\xi)x(t + \xi)d\xi \\ &+ 2 \int_{-\tau}^0 x^T(t)R(0, \xi)x(t + \xi)d\xi - 2 \int_{-\tau}^0 x^T(t - \tau)R(-\tau, \xi)x(t + \xi)d\xi \\ &- \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 x^T(t + \xi) \left( \frac{\partial R(\xi, s)}{\partial \xi} + \frac{\partial R(\xi, s)}{\partial s} \right) x(t + s)dsd\xi + x^T(t)S(0)x(t) \\ &- x^T(t - \tau)S(-\tau)x(t - \tau) - \int_{-\tau}^0 x^T(t + \xi)\dot{S}(\xi)x(t + \xi)d\xi. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Então adicionando a (3.16) o termo nulo em (3.15), e seguindo os mesmos passos em [27, pág.

188] (aplicando a técnica de discretização), tem-se

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) = & \zeta^T \Upsilon \zeta - \int_0^1 \varphi(\alpha)^T S_d \varphi(\alpha) d\alpha + 2\zeta^T \int_0^1 [D^{pa} + (1 - 2\alpha)D^{pb}] \varphi(\alpha) d\alpha \\ & - \int_0^1 \left[ \int_0^1 \varphi^T(\alpha) R_d \varphi(\beta) d\alpha \right] d\beta, \end{aligned} \quad (3.17)$$

sendo  $\zeta^T = [x^T(t) \ \dot{x}^T(t) \ x^T(t - \tau)]$ ,  $\Upsilon$  definido em (3.11),  $D^{pa}$  e  $D^{pb}$  são dados ambos em (3.12),  $R_d, S_d$  são definidos em (3.13) e (3.14), respectivamente, e  $\varphi^T(\alpha) = [x^T(t - h + \alpha h) \ x^T(t - 2h + \alpha h) \ \dots \ x^T(t - Nh + \alpha h)]$ .

Por fim, aplicando [27, Prop. 5.21] em (3.17), conclui-se que se a LMI em (3.7) for satisfeita, então  $\dot{V}(x_t) \leq -\epsilon_0 \|x(t)\|^2 - \epsilon_1 \|\dot{x}(t)\|^2$  ( $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ ), garantindo que a condição (3.2) seja satisfeita. Completando a demonstração. ■

Note que a grande vantagem das condições apresentadas no teorema anterior é o fato de não existirem produtos entre as matrizes do sistema e as matrizes do funcional, sendo que estas podem ser numerosas, dependendo do número de partições. Isto ocorre, devido ao uso do termo nulo em (3.15), o qual evitou que a *restrição dinâmica* em (3.5) substituísse a derivada do estado  $\dot{x}(t)$  em (3.16).

A seguir são apresentadas condições para a análise de estabilidade de sistemas sujeitos a retardo no tempo incerto, sendo que para a obtenção destas, o termo nulo é de suma importância.

## 3.2 Sistemas lineares sujeitos a retardo no tempo incerto

Considere o sistema linear sujeito a retardo no tempo em (3.5) reescrito da seguinte forma:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - d(t)) \quad (3.18)$$

com  $\phi(t) \in \mathcal{C}_{\max\{d(t)\}}^{n_x}$  a condição inicial e o retardo no tempo *incerto* da seguinte forma:

$$d(t) = \tau + \eta(t)$$

sendo  $\tau$  um valor nominal e  $\eta(t)$  uma perturbação, possivelmente variante no tempo, podendo assumir valores positivos e negativos; satisfazendo:  $|\eta(t)| \leq \mu < \tau$ , sendo  $\mu$  conhecido. Portanto, o retardo no tempo é definido no intervalo,  $d(t) \in [\tau - \mu, \tau + \mu]$ .

Os resultados nesta seção baseam-se no seguinte funcional de Lyapunov-Krasovskii:

$$V_{total}(x_t) = V(x_t) + V_\eta(x_t), \quad (3.19)$$

no qual  $V(x_t)$  é dado em (3.3-3.4), com  $f(x(t)) = x(t)$  e considera o valor nominal para o retardo no tempo, i.e.,  $\tau$ , e  $V_\eta(x_t)$  leva em conta a perturbação variante no tempo,  $\eta(t)$ . Sendo que  $V_\eta(x_t)$  é dado por:

$$V_\eta(x_t) = \int_{-\mu}^{\mu} \int_{t+\xi-\tau}^t \dot{x}^T(s) U \dot{x}(s) d\xi ds, \quad (3.20)$$

sendo  $U = U^T$ , como em [15].



Então, considerando o funcional acima o próximo teorema apresenta condições para se verificar a estabilidade de um sistema sujeito a retardo no tempo incerto como em (3.18).

**Teorema 3.3** *Considere o sistema sujeito a retardo no tempo em (3.18). Sejam dados  $\tau > 0$ , um escalar referente ao valor nominal do retardo no tempo,  $\mu \geq 0$ , um limitante superior para a perturbação no retardo no tempo, e  $N$ , um inteiro positivo referente ao número de discretizações desejado. Então, o sistema em (3.18) é assintoticamente estável se existirem matrizes de dimensão  $n_x \times n_x$ :  $F$ ,  $G$ ,  $P = P^T$ ,  $S_n = S_n^T$ ,  $Q_n$ ,  $R_{n,m} = R_{m,n}^T$  ( $n, m = 0, 1, \dots, N$ ),  $U = U^T$ , tais que a LMI em (3.6) e a LMI abaixo sejam satisfeitas:*

$$\begin{bmatrix} \Upsilon^\eta & \begin{pmatrix} D^{pa} \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} D^{pb} \\ 0 \end{pmatrix} \\ * & -R_d - S_d & 0 \\ * & * & -3S_d \end{bmatrix} < 0, \quad (3.21)$$

com

$$\Upsilon^\eta = \begin{bmatrix} FA + A^T F^T + Q_0 + Q_0^T + S_0 & P - F + A^T G^T & FA_d - Q_N & \mu FA_d \\ * & -G - G^T + 2\mu U & GA_d & \mu GA_d \\ * & * & -S_N & 0 \\ * & * & * & -\mu U \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

$D^{pa}$  e  $D^{pb}$  são ambos definidos em (3.12), e os termos  $R_d$  e  $S_d$  são definidos em (3.13) e (3.14), respectivamente.  $\square$

**Demonstração:** Inicialmente, com base nos mesmos argumentos na demonstração do Teorema 3.2, se  $U > 0$ ,  $S_N > 0$  e se a LMI em (3.6) for satisfeita, então, o funcional em (3.19) satisfaz a condição  $V_{total}(x_t) \geq \epsilon \|x(t)\|^2$  ( $\epsilon > 0$ ). Note que se a LMI (3.21) é satisfeita, então,  $U > 0$ .

Agora é demonstrado que a condição em (3.2) é satisfeita. Inicialmente, considerando o sistema sujeito a retardo no tempo em (3.18) e duas matrizes quaisquer de dimensões apropriadas,  $F$  e  $G$ , tem-se o seguinte termo nulo:

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \begin{bmatrix} x^T(t)F + \dot{x}^T(t)G \end{bmatrix} \{-\dot{x}(t) + Ax(t) + A_d x(t - d(t))\} \\ &= 2 \begin{bmatrix} x^T(t)F + \dot{x}^T(t)G \end{bmatrix} \{-\dot{x}(t) + Ax(t) + A_d x(t - \tau) + A_d [x(t - d(t)) - x(t - \tau)]\} \\ &= 2 \begin{bmatrix} x^T(t)F + \dot{x}^T(t)G \end{bmatrix} \{-\dot{x}(t) + Ax(t) + A_d x(t - \tau)\} + v(t), \end{aligned} \quad (3.23)$$

com

$$v(t) = -2[x^T(t)F + \dot{x}^T(t)G]A_d \int_{t-\tau-\eta(t)}^{t-\tau} \dot{x}(s)ds.$$

Para o termo  $v(t)$  é considerado o limitante superior<sup>3</sup> dado por:

$$\begin{aligned} v(t) &\leq \left| \int_{t-\tau-\eta(t)}^{t-\tau} [x^T(t)F + \dot{x}^T(t)G]A_d U^{-1} A_d^T [F^T x(t) + G^T \dot{x}(t)] ds \right| + \left| \int_{t-\tau-\eta(t)}^{t-\tau} \dot{x}^T(s)U\dot{x}(s)ds \right| \\ &\leq \mu[x^T(t)F + \dot{x}^T(t)G]A_d U^{-1} A_d^T [F^T x(t) + G^T \dot{x}(t)] + \int_{t-\tau-\mu}^{t-\tau+\mu} \dot{x}^T(s)U\dot{x}(s)ds. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Então, a derivada temporal do funcional de Lyapunov-Krasovskii (3.19), é dada por:

$$\dot{V}_{total}(x_t) = \dot{V}(x_t) + 2\dot{x}^T(t)\mu U\dot{x}(t) - \int_{t-\tau-\mu}^{t-\tau+\mu} \dot{x}^T(s)U\dot{x}(s)ds. \quad (3.25)$$

com  $\dot{V}(x_t)$  dado em (3.16).

Em seguida, adicionando a (3.25) o termo nulo em (3.23), considerando o limitante superior para  $v(t)$  dado em (3.24), tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{total}(x_t) &\leq \dot{V}(x_t) + 2\dot{x}^T(t)\mu U\dot{x}(t) + 2[x^T(t)F + \dot{x}^T(t)G] \{-\dot{x}(t) + Ax(t) + A_d x(t-\tau)\} \\ &\quad + \mu[x^T(t)F + \dot{x}^T(t)G]A_d U^{-1} A_d^T [F^T x(t) + G^T \dot{x}(t)]. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Agora, seguindo os mesmos passos em [27, pág. 188] (aplicando a técnica de discretização), em seguida aplicando [27, Prop. 5.21] e finalmente o complemento de Schur, conclui-se que se a LMI em (3.21) for satisfeita, então,  $\dot{V}_{total}(x_t) \leq -\epsilon_0 \|x(t)\|^2 - \epsilon_1 \|\dot{x}(t)\|^2$  ( $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ ). Completando a demonstração. ■

Note que o Teorema 3.2 é um caso particular do teorema acima, pois considerando o caso em que o retardo no tempo é invariante em (3.18), é necessário fazer  $\mu = 0$  nas condições do teorema acima, recuperando as condições do Teorema 3.2.

### 3.3 Sistemas lineares sujeitos a retardos aditivos e incertos

Considere o sistema linear sujeito a retardo no tempo em (3.18) reescrito da seguinte forma:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - d_1(t) - d_2(t)) \quad (3.27)$$

com  $\phi(t) \in \mathcal{C}_{\max\{d_1(t)+d_2(t)\}}^{n_x}$  a condição inicial e os retardos no tempo *incertos*:

$$d_1(t) = \tau_1 + \eta_1(t) \quad e \quad d_2(t) = \tau_2 + \eta_2(t),$$

sendo  $\tau_1$  e  $\tau_2$  valores nominais e  $\eta_1(t)$  e  $\eta_2(t)$  perturbações, possivelmente variantes no tempo, podendo assumir valores positivos e negativos; satisfazendo:  $|\eta_1(t)| \leq \mu_1 < \tau_1$  e  $|\eta_2(t)| \leq \mu_2 < \tau_2$ , sendo  $\mu_1$  e  $\mu_2$  conhecidos. Portanto, os retardos no tempo são definidos nos intervalos,  $d_1(t) \in [\tau_1 - \mu_1, \tau_1 + \mu_1]$  e  $d_2(t) \in [\tau_2 - \mu_2, \tau_2 + \mu_2]$ .

<sup>3</sup>Considerando a seguinte identidade:  $2a^T b \leq a^T X a + b^T X^{-1} b$  se, e somente se  $X > 0$  para  $a, b \in \mathbb{R}^n$ .

Os resultados nesta seção utilizam o seguinte funcional de Lyapunov-Krasovskii:

$$V_{total}^{aditivo}(x_t) = V(x_t) + V_{\eta_1}(x_t) + V_{\eta_2}(x_t), \quad (3.28)$$

no qual  $V(x_t)$  é dado em (3.3-3.4), com  $f(x(t)) = x(t)$  e considera o valor total nominal para os retardos no tempo, i.e.,  $\tau = \tau_1 + \tau_2$ , e  $V_{\eta_1}(x_t)$  e  $V_{\eta_2}(x_t)$  levam em conta as perturbações variantes no tempo,  $\eta_1(t)$  e  $\eta_2(t)$ , respectivamente, sendo:

$$V_{\eta_1}(x_t) = \int_{-\mu_1}^{\mu_1} \int_{t+\xi-\tau}^t \dot{x}^T(s) U_1 \dot{x}(s) d\xi ds \quad e \quad V_{\eta_2}(x_t) = \int_{-\mu_1-\mu_2}^{\mu_1+\mu_2} \int_{t+\xi-\tau}^t \dot{x}^T(s) U_2 \dot{x}(s) d\xi ds \quad (3.29)$$

com  $U_1 = U_1^T$  e  $U_2 = U_2^T$ .

Então, considerando o funcional acima o teorema a seguir apresenta condições para se verificar a estabilidade de um sistema sujeito a retardos incertos e aditivos, como em (3.27).

**Teorema 3.4** *Considere o sistema sujeito a retardo no tempo em (3.27). Sejam dados  $\tau_1 > 0$  e  $\tau_2 > 0$ , escalares referentes aos valores nominais dos retardos no tempo,  $\mu_1 \geq 0$  e  $\mu_2 \geq 0$ , limitantes superiores das perturbações dos retardos no tempo, e  $N$ , um inteiro positivo referente ao número de discretizações desejado. Então, o sistema em (3.27) é assintoticamente estável se existirem matrizes de dimensão  $n_x \times n_x$ :  $F, G, P = P^T, S_n = S_n^T, Q_n, R_{n,m} = R_{m,n}^T$  ( $n, m = 0, 1, \dots, N$ ),  $U_1 = U_1^T$  e  $U_2 = U_2^T$ , tais que a LMI em (3.6) e a LMI abaixo sejam satisfeitas:*

$$\begin{bmatrix} \Upsilon^{\eta(1,2)} & \begin{pmatrix} D^{pa} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} D^{pb} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ * & -R_d - S_d & 0 \\ * & * & -3S_d \end{bmatrix} < 0, \quad (3.30)$$

com

$$\Upsilon^{\eta(1,2)} = \begin{bmatrix} FA + A^T F^T + Q_0 + Q_0^T + S_0 & P - F + A^T G^T & FA_d - Q_N & \mu_1 FA_d & \mu_2 FA_d \\ * & -sm[G - \mu_1(U_1 + U_2) - \mu_2 U_2] & GA_d & \mu_1 GA_d & \mu_2 GA_d \\ * & * & -S_N & 0 & 0 \\ * & * & * & -\mu_1 U_1 & 0 \\ * & * & * & * & -\mu_2 U_2 \end{bmatrix}, \quad (3.31)$$

$D^{pa}$  e  $D^{pb}$  são ambos definidos em (3.12), e os termos  $R_d$  e  $S_d$  são definidos em (3.13) e (3.14), respectivamente. Além disso, defina  $\tau = \tau_1 + \tau_2$ .  $\square$

**Demonstração:** Inicialmente, com base nos mesmos argumentos na demonstração do Teorema 3.2, se  $U_1 > 0, U_2 > 0, S_N > 0$  e se a LMI em (3.6) for satisfeita, então, o funcional em (3.28) satisfaz a condição  $V_{total}^{aditivo}(x_t) \geq \epsilon \|x(t)\|^2$  ( $\epsilon > 0$ ). Note que se a LMI (3.30) é satisfeita, então,  $U_1 > 0$  e  $U_2 > 0$ .

Agora é demonstrado que a condição em (3.2) é satisfeita. Inicialmente, considerando o sistema sujeito a retardo no tempo em (3.27) e duas matrizes quaisquer de dimensões apropriadas,  $F$  e  $G$ ,

tem-se o seguinte termo nulo:

$$\begin{aligned} 0 &= 2 [x^T(t)F + \dot{x}^T(t)G] \{-\dot{x}(t) + Ax(t) + A_d x(t - d_1(t) - d_2(t))\} \\ &= 2 [x^T(t)F + \dot{x}^T(t)G] \{-\dot{x}(t) + Ax(t) + A_d x(t - \tau)\} + v(t), \end{aligned}$$

com

$$v(t) = -2[x^T(t)F + \dot{x}^T(t)G]A_d \left[ \int_{t-\tau-\eta_1(t)}^{t-\tau} \dot{x}(s)ds + \int_{t-\tau-\eta_1(t)-\eta_2(t)}^{t-\tau-\eta_1(t)} \dot{x}(s)ds \right],$$

sendo  $\tau = \tau_1 + \tau_2$ . Então, para  $v(t)$  tem-se o limitante superior:

$$\begin{aligned} v(t) &\leq \left| \int_{t-\tau-\eta_1(t)}^{t-\tau} [x^T(t)F + \dot{x}^T(t)G]A_d U_1^{-1} A_d^T [F^T x(t) + G^T \dot{x}(t)] ds \right| + \left| \int_{t-\tau-\eta_1(t)}^{t-\tau} \dot{x}^T(s) U_1 \dot{x}(s) ds \right| \\ &+ \left| \int_{t-\tau-\eta_1(t)-\eta_2(t)}^{t-\tau-\eta_1(t)} [x^T(t)F + \dot{x}^T(t)G]A_d U_2^{-1} A_d^T [F^T x(t) + G^T \dot{x}(t)] ds \right| + \left| \int_{t-\tau-\eta_1(t)-\eta_2(t)}^{t-\tau-\eta_1(t)} \dot{x}^T(s) U_2 \dot{x}(s) ds \right| \\ &\leq \mu_1 [x^T(t)F + \dot{x}^T(t)G]A_d U_1^{-1} A_d^T [F^T x(t) + G^T \dot{x}(t)] + \int_{t-\tau+\mu_1}^{t-\tau-\mu_1} \dot{x}^T(s) U_1 \dot{x}(s) ds \\ &+ \mu_2 [x^T(t)F + \dot{x}^T(t)G]A_d U_2^{-1} A_d^T [F^T x(t) + G^T \dot{x}(t)] + \int_{t-\tau-\mu_1-\mu_2}^{t-\tau+\mu_1+\mu_2} \dot{x}^T(s) U_2 \dot{x}(s) ds. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Portanto, a partir deste ponto para mostrar que a condição  $\dot{V}_{total}(x_t) \leq -\epsilon_0 \|x(t)\|^2 - \epsilon_1 \|\dot{x}(t)\|^2$  ( $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ ) é satisfeita se a LMI em (3.31) for satisfeita, basta seguir os mesmos passos apresentados na demonstração do Teorema 3.3. ■

Note que os teoremas 3.2 e 3.3 são casos particulares do teorema acima.

### 3.4 Sistemas do tipo neutro sujeitos a retardos no tempo iguais

Considere o seguinte sistema do tipo neutro<sup>4</sup>:

$$\dot{x}(t) + E\dot{x}(t - \tau) = Ax(t) + A_d x(t - \tau) \quad (3.33)$$

com  $\phi(t) \in \mathcal{C}_\tau^{n_x}$  a condição inicial<sup>5</sup>, a qual deve ser diferenciável, sendo  $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$  representa o estado,  $\tau > 0$  é um escalar que representa o retardo no tempo constante. As matrizes do sistema  $A$ ,  $A_d$  e  $E$  são constantes e possuem dimensões apropriadas.

A análise da estabilidade de sistemas do tipo neutro pode ser uma tarefa bastante complexa, de forma que, uma exigência necessária para a estabilidade dessa classe de sistemas é que a equação abaixo seja estável

$$x(t) - Ex(t - \tau) = 0, \quad (3.34)$$

<sup>4</sup>O comportamento dinâmico de sistemas do tipo neutro (3.33) e sistemas sujeitos a retardo no tempo como em (3.5) são fundamentalmente diferentes, veja mais detalhes em [30, Seção 1.7].

<sup>5</sup>Esta condição inicial é assumida satisfazer condições de existência e unicidade da solução do sistema em (3.33), para detalhes veja [29, Cap. 12, Teor. 2.3].

ou de forma similar, o operador  $\mathcal{D}(x_\tau)$ , definido como:

$$\mathcal{D}(x_\tau) = x(t) - Ex(t - \tau), \quad (3.35)$$

deve ser estável. Sabe-se que uma condição necessária e suficiente para que o operador  $\mathcal{D}(x_\tau)$  seja estável, é que a matriz  $E$  seja Schur-Cohn estável, i.e  $\max |\lambda_i(E)| < 1$ , [30, Cap. 1, Cor. 7.1]. Portanto, considera-se neste trabalho que todos os autovalores da matriz  $E$  estão dentro de um círculo unitário.

Então, no teorema a seguir são apresentadas condições suficientes para verificar a estabilidade do sistema de tipo neutro em (3.33), supondo-se que o operador  $\mathcal{D}(x_\tau)$  é estável.

**Teorema 3.5** *Considere o sistema do tipo neutro em (3.33) sendo o operador  $\mathcal{D}(x_\tau)$  estável. Sejam dados  $\tau > 0$ , um escalar referente ao retardo no tempo, e  $N$ , um inteiro positivo referente ao número de discretizações desejado. Então, o sistema em (3.33) é assintoticamente estável se existirem matrizes de dimensão  $n_x \times n_x$ :  $F, G, X, Y, P = P^T, S_n = S_n^T, Q_n, R_{n,m} = R_{m,n}^T$  ( $n, m = 0, 1, \dots, N$ ), tais que a LMI em (3.6) e a LMI abaixo sejam satisfeitas:*

$$\begin{bmatrix} \Xi & D^{na} & D^{nb} \\ * & -R_d - S_d & 0 \\ * & * & -3S_d \end{bmatrix} < 0, \quad (3.36)$$

com

$$\Xi = \begin{bmatrix} FA + A^T F^T + X + X^T + S_0 & Y^T - X + Q_0^T & -F + A^T G^T & FA_d - XE \\ * & -Y - Y^T & P & -Q_N - YE \\ * & * & -G - G^T & GA_d \\ * & * & * & -S_N \end{bmatrix}, \quad (3.37)$$

$$D^{na} = [D_n^{na}], \quad D^{nb} = [D_n^{nb}], \quad 1 \leq n \leq N, \quad \text{sendo} \quad (3.38)$$

$$D_n^{na} = \begin{bmatrix} \frac{h}{2}[R_{0,n-1} + R_{0,n}] \\ -[Q_{n-1} - Q_n] \\ \frac{h}{2}[Q_{n-1} + Q_n] \\ -\frac{h}{2}[R_{n-1,N}^T + R_{n,N}^T] \end{bmatrix}, \quad D_n^{nb} = \begin{bmatrix} -\frac{h}{2}[R_{0,n-1} - R_{0,n}] \\ 0 \\ -\frac{h}{2}[Q_{n-1} - Q_n] \\ \frac{h}{2}[R_{n-1,N}^T - R_{n,N}^T] \end{bmatrix},$$

e com os termos  $R_d$  e  $S_d$  definidos em (3.13) e (3.14), respectivamente.  $\square$

**Demonstração:** Para demonstrar este teorema é selecionado o funcional de Lyapunov-Krasovskii em (3.3) sendo  $f(x(t)) = \mathcal{D}(x_\tau)$  e definido pelas funções matriciais lineares por partes em (3.4). Então, é demonstrado a seguir que se as LMIs em (3.6) e (3.36) são satisfeitas, o funcional em (3.3-3.4) com  $f(x(t)) = \mathcal{D}(x_\tau)$ , satisfaz as condições em (3.1) e (3.2).

Inicialmente, note que se (3.36) é satisfeita, então,  $S_N > 0$ , o que implica que  $S_0 > S_1 > \dots > S_N > 0$ , veja detalhes em [27, Prop. 5.22]. Seguindo os mesmos argumentos em [27], temos que se (3.6) é satisfeita e  $S_0 > S_1 > \dots > S_N > 0$ , então, o funcional em (3.3-3.4), com  $f(x(t)) = \mathcal{D}(x_\tau)$ , satisfaz a condição  $V(x_t) \geq \epsilon \|x(t)\|^2$  ( $\epsilon > 0$ ).

Agora é demonstrado que a condição em (3.2) é satisfeita. Inicialmente, considerando o sistema do tipo neutro em (3.33) e quatro matrizes quaisquer de dimensões apropriadas,  $F, G, X$  e  $Y$ , tem-se

o seguinte termo nulo:

$$0 = 2[x^T(t)F + \dot{\mathcal{D}}(x_\tau)^T(t)G]\{-\dot{\mathcal{D}}(x_\tau) + Ax(t) + A_dx(t - \tau)\} + 2[x^T(t)X + \mathcal{D}^T(x_\tau)Y]\{-\mathcal{D}(x_\tau) + x(t) - Ex(t - \tau)\}. \quad (3.39)$$

Então, considerando o termo nulo acima e seguindo o mesmo procedimento apresentado na demonstração do Teorema 3.2, conclui-se que se a LMI em (3.36) for satisfeita, implica que  $\dot{V}(x_t) \leq -\epsilon_0 \|x(t)\|^2 - \epsilon_1 \|\mathcal{D}(x_\tau)\|^2 - \epsilon_2 \|\dot{\mathcal{D}}(x_\tau)\|^2$  ( $\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ ), garantindo que a condição (3.2) seja satisfeita. Completando a demonstração. ■

Note que a novidade obtida no teorema anterior é que utilizando o termo nulo em (3.39) a condição de derivada do funcional leva em conta em sua formulação o estado  $x(t)$ , o operador  $\mathcal{D}(x_\tau)$  e a derivada do operador  $\dot{\mathcal{D}}(x_\tau)$ , o que resulta na condição para a derivada do funcional

$$\dot{V}(x_t) \leq -\epsilon_0 \|x(t)\|^2 - \epsilon_1 \|\mathcal{D}(x_\tau)\|^2 - \epsilon_2 \|\dot{\mathcal{D}}(x_\tau)\|^2, \quad (3.40)$$

com  $\epsilon_0, \epsilon_1$  e  $\epsilon_2 \in \mathbb{R}_+$  escalares. Portanto, levando em conta que a estabilidade do operador  $\mathcal{D}(x_\tau)$  é uma condição necessária para a estabilidade do sistema do tipo neutro em (3.33), a condição de estabilidade (3.40) se mostra adequada para essa classe de sistemas. Note que, nas condições usualmente consideradas na literatura os termos  $\epsilon_1 \|\mathcal{D}(x_\tau)\|^2$  e  $\epsilon_2 \|\dot{\mathcal{D}}(x_\tau)\|^2$  em (3.40) são usualmente desprezados, como em [32, 33]. Vale ressaltar que, em [54] também foi considerado o operador  $\mathcal{D}(x_\tau)$  na condição de derivada do funcional, mas não por meio da utilização da mesma técnica.

Além disso, quando são utilizadas técnicas para desacoplar as matrizes do sistema das matrizes do funcional de Lyapunov-Krasovskii, a seguinte condição de estabilidade é normalmente obtida, veja [16]:

$$\dot{V}(x_t) \leq -\epsilon_4 \|x(t)\|^2 - \epsilon_5 \|\dot{x}(t)\|^2, \quad (3.41)$$

com  $\epsilon_4, \epsilon_5 \in \mathbb{R}_+$ . Na qual, o operador  $\mathcal{D}(x_\tau)$  não é levado em conta, além de ser um caso particular da condição (3.40), obtido com  $E = 0$ .

Portanto, a condição de estabilidade (3.40) é mais geral que a condição (3.41).

### 3.5 Sistemas do tipo neutro sujeitos a retardos no tempo mistos

Considere o sistema linear do tipo neutro com retardos mistos:

$$\dot{x}(t) + E\dot{x}(t - r) = Ax(t) + A_dx(t - d(t)), \quad (3.42)$$

com  $\phi(t) \in \mathcal{C}_{\max\{r, d(t)\}}^{n_x}$  a condição inicial. Nesta seção supõe-se que o retardo no tempo  $r$  pode assumir qualquer valor constante no intervalo  $r \in [0, \infty)$  e o retardo incerto  $d(t)$  tem a forma  $d(t) = \tau + \eta(t)$  sendo  $\tau$  um valor nominal e  $\eta(t)$  uma perturbação, possivelmente variante no tempo, podendo assumir valores positivos e negativos; satisfazendo:  $|\eta(t)| \leq \mu < \tau$ , sendo  $\mu$  conhecido. Os outros termos (3.42) são apresentados em (3.33).

De maneira similar, como feito na seção anterior, supõe-se a estabilidade do operador:

$$\mathcal{D}(x_r) = x(t) - Ex(t - r), \quad (3.43)$$

isto é, a matriz  $E$  é Schur-Cohn estável. Garantindo a estabilidade do operador  $\mathcal{D}(x_r)$ , independente do retardo no tempo  $r$ . Assim, será apresentada uma condição suficiente para verificar a estabilidade do sistema do tipo neutro em (3.42), que é independente do retardo no tempo  $r$ .

Os resultados nesta seção utilizam o funcional de Lyapunov-Krasovskii da forma:

$$V_{total}^{neutro}(x_{\bar{t}}) = V(x_t) + V_r(x_r) + V_\eta(x_t), \quad (3.44)$$

no qual,  $x_{\bar{t}}$  corresponde ao valor de  $x(t)$  no intervalo  $[t - \max\{r, d(t)\}, t]$ , para  $r, d(t) \in \mathbb{R}_+$ ,  $V(x_t)$  é dado como (3.3), com  $f(x(t)) = x(t)$ ,  $V_\eta(x_t)$  é dado em (3.20) e  $V_r(x_r)$  que leva em conta apenas o retardo no tempo  $r$ , é dado por:

$$V_r(x_r) = \int_{-r}^0 \dot{x}^T(t + \xi) Z \dot{x}(t + \xi) d\xi, \quad (3.45)$$

sendo  $Z = Z^T$ .

O resultado desta seção é apresentado no próximo teorema.

**Teorema 3.6** *Considere o sistema do tipo neutro em (3.42) sendo o operador  $\mathcal{D}(x_r)$  estável. Sejam dados  $\tau > 0$ , um escalar referente ao valor nominal do retardo no tempo,  $\mu \geq 0$ , um limitante superior para a perturbação no retardo  $d(t)$  no tempo, e  $N$ , um inteiro positivo referente ao número de discretizações desejado. Então, o sistema em (3.42) é assintoticamente estável, independente do retardo  $r$ , se existirem matrizes de dimensão  $n_x \times n_x$ :  $F, G, P = P^T, S_n = S_n^T, Q_n, R_{n,m} = R_{m,n}^T$  ( $n, m = 0, 1, \dots, N$ ),  $U = U^T, Z = Z^T$ , tais que a LMI em (3.6) e a LMI abaixo sejam satisfeitas:*

$$\begin{bmatrix} \Xi^r & \begin{pmatrix} D^{pa} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} D^{pb} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ * & -R_d - S_d & 0 \\ * & * & -3S_d \end{bmatrix} < 0, \quad (3.46)$$

com

$$\Xi^r = \begin{bmatrix} FA + A^T F^T + Q_0 + Q_0^T + S_0 & P - F + A^T G^T & FA_d - Q_N & \mu FA_d & \mu FE \\ * & -G - G^T + 2\mu U + Z & GA_d & \mu GA_d & \mu GE \\ * & * & -S_N & 0 & 0 \\ * & * & * & -\mu U & 0 \\ * & * & * & * & -Z \end{bmatrix}, \quad (3.47)$$

os termos  $D^{pa}$  e  $D^{pb}$  são dados ambos em (3.12) e os termos  $R_d$  e  $S_d$  dados em (3.13) e (3.14), respectivamente.  $\square$

**Demonstração:** Será provado que se (3.6) e (3.46) são satisfeitas, então, o funcional em (3.44) satisfaz as condições em (3.1) e (3.2).

Inicialmente, note que se (3.46) é satisfeita, então,  $U > 0, Z > 0$  e  $S_N > 0$  o que implica que  $S_0 > S_1 > \dots > S_N > 0$ , veja detalhes em [27, Prop. 5.22]. Seguindo os mesmos argumentos

em [27], tem-se que se (3.6) é satisfeita e  $S_0 > S_1 > \dots > S_N > 0$ , então, o funcional em (3.44), satisfaz a condição  $V(x_{\bar{t}}) \geq \epsilon \|x(t)\|^2$  ( $\epsilon > 0$ ).

Agora é demonstrado que a condição em (3.2) também é satisfeita. Inicialmente, considera-se o sistema do tipo neutro em (3.42) e duas matrizes quaisquer de dimensões apropriadas,  $F$  e  $G$ , tem-se o seguinte termo nulo:

$$2[x^T(t)F + \dot{x}^T(t)G]\{-\dot{x}(t) + Ax(t) + A_d x(t-d(t)) + Ex(t-r)\} = 0. \quad (3.48)$$

Então, considerando o termo nulo acima e seguindo o mesmo procedimento apresentado na demonstração do Teorema 3.3, conclui-se que se a LMI em (3.46) for satisfeita, então,  $\dot{V}(x_{\bar{t}}) \leq -\epsilon_0 \|x(t)\|^2 - \epsilon_1 \|\dot{x}(t)\|^2$  ( $\epsilon_0, \epsilon_1 > 0$ ), garantindo que a condição (3.2) é satisfeita. Completando a demonstração. ■

Note que o resultado apresentado no teorema anterior é mais robusto que o resultado apresentado no Teorema 3.5, pois no resultado acima é garantido a estabilidade do sistema do tipo neutro independente do retardo no tempo  $r$ , ou seja  $r$  e  $\tau$  podem ser diferentes. Entretanto, se for conhecido a priori que  $r = \tau$ , a utilização do resultado no Teorema 3.5 é mais adequado, proporcionando soluções menos conservadoras.

Na próxima seção serão apresentados alguns exemplos numéricos para ilustrar a eficiência dos resultados apresentados neste capítulo.

## 3.6 Exemplos numéricos

Nesta seção é verificada a eficiência dos métodos propostos neste capítulo, como meio de referência são utilizados cálculos analíticos e outras condições disponíveis na literatura.

### 3.6.1 Sistemas lineares sujeitos a retardo no tempo

A seguir são considerados dois sistemas sujeitos a retardo no tempo, sendo estudados os casos em que o retardo no tempo é constante, incerto e aditivo. Nesta seção são utilizados os teoremas 3.2, 3.3 e 3.4.

**Exemplo 3.1** Considere o sistema:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x(t-d(t)).$$

Inicialmente, considerando o retardo no tempo  $d(t) = \tau$ , i.e., invariante no tempo, pode-se concluir que este sistema é estável no primeiro intervalo do retardo no tempo, i.e.,  $\tau \in [0, \tau_{max}]$ . Então, utilizando o método proposto no Teorema 3.2 são obtidos os resultados apresentados na Tabela 3.1, considerando diferentes valores para  $N$ .

Agora, considerando o contexto em que  $d(t)$  é incerto da forma  $d(t) = \tau + \eta(t)$  e que pertença ao domínio  $[\tau - \mu, \tau + \mu]$ , tal que  $|\eta(t)| \leq \mu$ . Então, aplicando o Teorema 3.3 com  $N = 3$  e considerando diferentes valores de  $\mu$  são obtidos os valores máximos para  $\tau$ , como apresentado na Tabela 3.2.



Tabela 3.1: Limites máximos para o retardo no tempo, obtidos via o Teorema 3.2, com  $N = 1, 2, \dots, 5$ . Exemplo 3.1.

$N$	1	2	3	4	5	Analítico
$\tau_{max}$	6.0593	6.1655	6.1711	6.1721	6.1725	6.1725

Tabela 3.2: Limites máximos para o retardo no tempo, obtidos via o Teorema 3.3, com  $N = 3$  e diferentes valores para  $\mu$ . Exemplo 3.1.

$\mu$	0.001	0.01	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\tau_{max}$	6.1482	5.9445	4.1863	2.7673	1.7767	1.0825	0.5906

**Exemplo 3.2** Considere o sistema:

$$\ddot{x} - 0.1\dot{x}(t) + 2x(t) - x(t - d(t)) = 0,$$

que é obtido do sistema (1.1) utilizando a lei de controle:  $u(t) = x(t) - x(t - d(t))$ . Portanto, esse sistema pode ser reescrito na seguinte forma:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t - d(t)) \\ \dot{x}(t - d(t)) \end{bmatrix}. \quad (3.49)$$

Como no exemplo anterior, inicialmente, é considerado que o retardo no tempo é constante,  $d(t) = \tau$ . Este sistema é estável para uma faixa de valores para o retardo no tempo  $\tau \in [\tau_{min}, \tau_{max}]$ . Então, utilizando o método proposto no Teorema 3.2 é obtido a Tabela 3.3, considerando diferentes valores para  $N$ .

Tabela 3.3: Limites máximos e mínimos para o retardo no tempo, obtidos via o Teorema 3.2, com  $N = 1, 2, \dots, 6$ . Exemplo 3.2.

$N$	1	2	3	4	5	6	Analítico
$\tau_{min}$	0.1006	0.1003	0.1003	0.1002	0.1002	0.1002	0.1002
$\tau_{max}$	1.3523	1.6509	1.7094	1.7176	1.7177	1.7178	1.7178

Finalmente, considerando o contexto em que  $d(t)$  seja incerto, mas que pertença ao domínio  $[\tau - \mu, \tau + \mu]$ , e aplicando o Teorema 3.3 com  $N = 3$  e considerando diferentes valores de  $\mu$ , são obtidos os valores máximos e mínimos para  $\tau$ , apresentados na Tabela 3.4.

**Exemplo 3.3** Considere o sistema do exemplo anterior sujeito a retardos aditivos:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0.1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t - d_1(t) - d_2(t)). \quad (3.50)$$

Para o sistema acima o método de análise proposto em [43, Teor. 1] não é factível, mesmo considerando os retardos no tempo constantes.

Tabela 3.4: Limites máximos e mínimos para o retardo no tempo, tal que  $d(t) \in [\tau - \mu, \tau + \mu]$ , obtidos via o Teorema 3.3, com  $N = 3$  e diferentes valores para  $\mu$ . Exemplo 3.1.

$\mu$	0.001	0.01	0.02	0.04	0.06	0.08	0.1
$\tau_{min}$	0.1017	0.1145	0.1288	0.1574	0.1862	0.2153	0.2445
$\tau_{max}$	1.7078	1.6937	1.6780	1.6467	1.6157	1.5848	1.5540

Assumindo que  $d_1(t) \in [\tau_1 - \mu_1, \tau_1 + \mu_1]$  e  $d_2(t) \in [\tau_2 - \mu_2, \tau_2 + \mu_2]$ , é considerado o problema de encontrar os valores máximos de  $\tau_1$  para diferentes valores fixos de  $\tau_2$ ,  $\mu_1$  e  $\mu_2$ , tal que o sistema seja estável. Então, aplicando o Teorema 3.4 com  $N = 3$  são obtidos os resultados apresentados na Tabela 3.5.

Tabela 3.5: Limites máximos para  $\tau_2$ , obtidos por meio do Teorema 3.4, com  $N = 3$  e diferentes valores para  $\tau_1$ ,  $\mu_1$  e  $\mu_2$ . Exemplo 3.3.

$\tau_{1,max}$ para $\tau_2 = 1$ e			
$\mu_1 \backslash \mu_2$	0.001	0.01	0.1
0.001	0.7056	0.6913	0.5517
0.01	0.6884	0.6715	0.5312
0.1	0.5386	0.5031	0.3338

### 3.6.2 Sistemas do tipo neutro

A seguir são estudados dois sistemas do tipo neutro. Inicialmente, é considerado um sistema escalar, em que os retardos no tempo são iguais, no qual será ilustrado que as condições apresentadas no Teorema 3.5 tendem para a solução analítica. Em seguida, será estudada a estabilidade de outro sistema do tipo neutro, sendo considerado o caso em que os retardos no tempo são iguais e diferentes. Para verificar a estabilidade desses sistemas são utilizados os teoremas 3.5 e 3.6.

**Exemplo 3.4** Considere o sistema:

$$\dot{x}(t) - c\dot{x}(t - \tau) = -bx(t - \tau) \quad (3.51)$$

sendo  $b$  e  $c$  escalares, com  $|c| < 1$  e  $b > 0$ . Em [54], foi mostrado que este sistema é assintoticamente estável para

$$\tau < \tau_{max}^{Niculescu(2001), [54]} = \frac{1 - |c|}{b}. \quad (3.52)$$

Além disso, o valor exato do máximo retardo no tempo que permite a estabilidade assintótica desse sistema pode ser calculado da seguinte forma, veja [54],

$$\tau_{max}^{analítico} = \frac{\sqrt{1 - c^2}}{b} \arctan \sqrt{\frac{1}{c^2} - 1}. \quad (3.53)$$

Considerando  $c = 0.2$  e  $b = 1$ , a Tabela 3.6 apresenta os resultados obtidos utilizando o resultado em [54], ou seja, por meio da equação (3.52) e os resultados obtidos utilizando o método proposto no Teorema 3.5 para diferentes valores de  $N$ . Note que, pode ser observado que a solução obtida por meio do método proposto tende para a solução analítica quando  $N$  aumenta. A Tabela 3.7 apresenta os resultados obtidos utilizando o método proposto para diferentes valores de  $c$  e  $b$ , com  $N = 3$ .

Tabela 3.6: Máximos retardos no tempo, obtidos via o Teorema 3.5, com  $N = 1$  e  $N = 3$ . Exemplo 3.4.

$\tau_{max}^{Niculescu (2001), [54]}$	$\tau_{max}^{Teorema 3.5, N = 1}$	$\tau_{max}^{Teorema 3.5, N = 3}$	$\tau_{max}^{analítico}$
0.8	1.3401	1.3417	1.3418

Tabela 3.7: Máximos retardos no tempo, obtidos via o Teorema 3.5 com  $N = 3$  e analiticamente. Exemplo 3.4.

b	1				
c	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
$\tau_{max}^{Teorema 3.5}$	1.4632	1.2077	0.9068	0.5680	0.1965
$\tau_{max}^{analítico}$	1.4633	1.2078	0.9069	0.5680	0.1966
b	3				
$\tau_{max}^{Teorema 3.5}$	0.4877	0.4025	0.3022	0.1893	0.0655
$\tau_{max}^{analítico}$	0.4878	0.4026	0.3023	0.1893	0.0655
b	5				
$\tau_{max}^{Teorema 3.5}$	0.2926	0.2415	0.1813	0.1136	0.0393
$\tau_{max}^{analítico}$	0.2927	0.2416	0.1814	0.1136	0.0393
b	7				
$\tau_{max}^{Teorema 3.5}$	0.2090	0.1725	0.1295	0.0811	0.0280
$\tau_{max}^{analítico}$	0.2090	0.1725	0.1296	0.0811	0.0281
b	9				
$\tau_{max}^{Teorema 3.5}$	0.1625	0.1341	0.1007	0.0631	0.0218
$\tau_{max}^{analítico}$	0.1626	0.1342	0.1008	0.0631	0.0218

**Exemplo 3.5** Considere o sistema:

$$\dot{x}(t) - E\dot{x}(t - r) = Ax(t) + A_d x(t - \tau) \quad (3.54)$$

com

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix}, \quad |\varepsilon| < 1.$$

Inicialmente, é considerado que os retardos no tempo são iguais, i.e.,  $r = \tau$ . Então, o máximo retardo no tempo possível para que esse sistema permaneça estável pode ser calculado analiticamente da seguinte forma

$$\tau_{max}^{analítico} = \frac{1}{w} \arccos \left( \frac{\varepsilon w^2 - 0.9}{1 + \varepsilon^2 w^2} \right) \quad (3.55)$$

com

$$w = \sqrt{\frac{-1 + 1.19\varepsilon^2 + \sqrt{1 - 1.62\varepsilon^2 + 0.6561\varepsilon^4}}{2(\varepsilon^2 - \varepsilon^4)}},$$

para  $\varepsilon \neq 0$  e  $|\varepsilon| < 1$ . Para  $\varepsilon = 0$ ,  $\tau_{max}^{analítico} = 6.17258$ , como no Exemplo 3.1.

Considerando diferentes valores para  $\varepsilon$ , a Tabela 3.8 apresenta os resultados obtidos utilizando o método proposto no Teorema 3.5, além de valores calculados analiticamente e utilizando os métodos apresentados em [31, 34, 95].

Tabela 3.8: Máximos retardos no tempo permissíveis, obtidos por meio de métodos na literatura e do Teorema 3.5. Exemplo 3.5.

$\varepsilon$	0	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
$\tau_{max}^{Han (2002), [31]}$	4.35	4.33	4.10	3.62	2.73	0.99
$\tau_{max}^{He et al (2004), [34]}$	4.47	4.35	4.13	3.67	2.87	1.41
$\tau_{max}^{Yue e Han (2004), [95]}$	4.47	4.42	4.17	3.69	2.87	1.41
$\tau_{max}^{Teorema 3.5, N=3}$	6.1711	6.0359	5.5480	4.7385	3.5088	1.5707
$\tau_{max}^{analítico}$	6.1726	6.0372	5.5491	4.7388	3.5092	1.5708

Por outro lado, assumindo os retardos no tempo diferentes e utilizando o Teorema 3.6, pode-se verificar a estabilidade do sistema (3.54), independente do valor do retardo  $r$ .

Então, considerando o problema de encontrar o máximo retardo no tempo  $\tau$  para qualquer  $r \in [0, \infty)$  em que o sistema do tipo neutro em (3.54) permaneça estável é aplicado o Teorema 3.6, com  $N = 3$  e diferentes valores para  $\varepsilon$ , os resultados obtidos são apresentados na Tabela 3.9.

Tabela 3.9: Máximos retardos no tempo, obtidos via o Teorema 3.6 com  $N = 3$ . Exemplo 3.5.

$\varepsilon$	0	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
$\tau_{max}^{Teorema 3.6}$	6.1711	4.7041	2.6272	1.3750	0.6115	0.1335

### 3.7 Conclusões do capítulo

Neste capítulo foram apresentados resultados de análise de estabilidade de sistemas lineares sujeitos a retardo no tempo. A eficiência desses resultados foi verificada por meio de exemplos numéricos. No caso em que o retardo no tempo é constante, os métodos propostos obtêm soluções que tendem para valores analíticos. É importante ressaltar, que esta qualidade é devido a seleção de um funcional apropriado e do uso da técnica de discretização de Gu. Assim, existem outros métodos na literatura com tal qualidade, veja [26, 27]. Como o método de discretização proposto por Gu é fundamentado em um retardo no tempo constante  $\tau$ , neste capítulo foi apresentada uma forma de estender o uso dessa técnica de discretização para tratar sistemas sujeitos a retardo no tempo incerto.

No entanto, a característica principal dos métodos propostos é que as matrizes do sistema estão desacopladas das matrizes do funcional de Lyapunov-Krasovskii, e, é válido ressaltar, que nos próximos capítulos serão apresentadas algumas vantagens desse desacoplamento. Neste capítulo, esse desacoplamento é utilizado para a obtenção de condições de análise de estabilidade para sistemas sujeitos a retardo no tempo incerto e/ou retardo no tempo incerto com componentes aditivas, teoremas 3.3 e 3.4.

Outro importante ponto que merece ser salientado, é que os resultados apresentados podem ser facilmente estendidos para lidar com uma classe de sistemas mais geral:

$$\dot{x}(t) - E\dot{x}(t - r) = Ax(t) + A_d x(t - \sum_{i=1}^{n_d} d_i(t))$$

na qual, o retardo no tempo  $r \in [0, \infty)$  e o retardo incerto com componentes aditivas tem a forma  $d_i(t) = \tau_i + \eta_i(t)$  para  $1 \leq i \leq n_d$ . Sendo que, para obter condições de análise de estabilidade para esta classe de sistemas, seguindo o procedimento utilizado neste capítulo, é necessário utilizar um termo nulo apropriado proveniente do seguinte sistema:

$$\dot{x}(t) - E\dot{x}(t - r) = Ax(t) + A_d x(t - \tau) - A_d \sum_{i=1}^{n_d} \int_{t-\tau-\sum_{j=1}^i \eta_j(t)}^{t-\tau-\eta_i(t)-\sum_{j=1}^i \eta_j(t)} \dot{x}(s) ds,$$

com  $\tau = \sum_{i=1}^{n_d} \tau_i$ . Além disso, o funcional em (3.44) deve ser reescrito de forma mais geral:

$$V(x_{\hat{t}}) = V(x_t) + V_r(x_r) + \sum_{i=1}^{n_d} V_{\eta_i}(x_t),$$

no qual,  $x_{\hat{t}}$  corresponde ao valor de  $x(t)$  no intervalo  $[-\max\{\sum_{i=1}^{n_d} d_i(t), r\}, 0]$ ,  $V(x_t)$  é definido em (3.3) com  $f(x(t)) = x(t)$ ,  $V_r(x_r)$  é definido em (3.45) e

$$V_{\eta_i}(x_t) = \int_{-\sum_{j=1}^i \mu_j}^{\sum_{j=1}^i \mu_j} \int_{t+\xi-\tau}^t \dot{x}^T(s) U_i \dot{x}(s) d\xi ds,$$

com  $|\eta_i(t)| \leq \mu_i$  e  $U_i = U_i^T$ .

Note que, a utilização da técnica do termo nulo adiciona um simples passo na obtenção de condições de análise de estabilidade em relação aos resultados apresentados em [27]. Portanto, considerando-se um termo nulo apropriado e seguindo-se as diretrizes básicas apresentadas em [27], pode-se obter condições de análise de estabilidade para sistemas sujeitos a múltiplos retardos no tempo e sistemas sujeitos a retardos distribuídos.

# Capítulo 4

## Análise de estabilidade de sistemas do tipo neutro incertos

Neste capítulo, as condições de análise de estabilidade de sistemas do tipo neutro obtidos no capítulo anterior são estendidas para o caso em que os parâmetros do sistema não são precisamente conhecidos.

Inicialmente, é considerado o conceito de estabilidade quadrática, ou seja, utiliza-se um funcional de Lyapunov-Krasovskii, que é independente dos parâmetros do sistema. Portanto, este funcional é apropriado ao caso em que não são disponíveis informações sobre possíveis formas de variações destes parâmetros. Em seguida, é aplicado o conceito baseado na utilização de um funcional de Lyapunov-Krasovskii dependente de parâmetros, obtendo-se condições apropriadas, quando se tem o conhecimento de que as incertezas do sistema são invariantes no tempo.

A segunda vantagem que se destaca neste capítulo, devido ao emprego da técnica do termo nulo, é poder considerar sistemas do tipo neutro totalmente incertos. Como pode ser observado nos trabalhos em [32] e [33] é imposta uma restrição para que, a matriz associada com a derivada do estado sujeito a retardo no tempo seja precisamente conhecida.

### 4.1 Sistemas com incertezas poliedrais

Nesta parte do trabalho, usa-se a variável  $\sigma$  para representar os parâmetros incertos em um sistema. A classe de sistemas lineares do tipo neutro na forma (3.42), mas com incertezas paramétricas, é representada da seguinte forma:

$$\dot{x}(t) + E(\sigma)\dot{x}(t - \tau) = A(\sigma)x(t) + A_d(\sigma)x(t - \tau).$$

Assume-se que os sistemas incertos podem ser descritos por meio de modelos paramétricos inscritos em poliedros. Então, considerando-se a classe de sistemas apresentada acima, pode-se definir uma matriz do sistema  $\mathcal{G}(\sigma)$ , que agrega todas as matrizes do sistema:

$$\mathcal{G}(\sigma) \triangleq \begin{bmatrix} A(\sigma) & A_d(\sigma) & E(\sigma) \end{bmatrix}, \in \mathbb{R}^{n_x \times 3n_x}. \quad (4.1)$$

Esta matriz não é precisamente conhecida, mas pertencente a um conjunto politópico:  $\mathcal{G}(\sigma) \in \mathcal{P}$ . O

conjunto  $\mathcal{P}$  é um politopo no espaço de matrizes definido pelo conjunto de todas as matrizes obtidas pela combinação convexa de seus  $\kappa$  vértices:

$$\mathcal{P} \triangleq \text{Co} \{ \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_\kappa \} = \left\{ \mathcal{G}(\sigma) : \mathcal{G}(\sigma) = \sum_{v=1}^{\kappa} \sigma_v \mathcal{G}_v, \sigma \in \Theta \right\} \quad (4.2)$$

em que

$$\mathcal{G}_v \triangleq \begin{pmatrix} A_v & A_{d,v} & E_v \end{pmatrix}, \quad v = 1, \dots, \kappa, \quad (4.3)$$

são os vértices do politopo. O vetor de coordenadas do politopo,  $\sigma = [\sigma_1 \dots \sigma_\kappa]^T$ , pertence ao conjunto definido como

$$\Theta \triangleq \left\{ \sigma \in \mathbb{R}^\kappa : \sigma_v \geq 0, v = 1, \dots, \kappa, \sum_{v=1}^{\kappa} \sigma_v = 1 \right\}. \quad (4.4)$$

Portanto, para o estudo de sistemas com incertezas poliedrais o conceito de estabilidade quadrática, amplamente utilizado na literatura, tem como principal característica ser independente dos parâmetros incertos, ou seja, o conceito de estabilidade quadrática garante a estabilidade do sistema para todo domínio de incerteza independente de qualquer tipo de variação dos parâmetros incertos.

Entretanto, esse conceito pode adicionar um determinado grau de conservadorismo nas soluções obtidas, principalmente quando aplicado a sistemas com incertezas invariantes no tempo. Sendo assim, afim de obter métodos menos conservadores, neste trabalho é considerado também um funcional de Lyapunov-Krasovskii dependente de parâmetros, que é apresentado a seguir.

## 4.2 Funcional de Lyapunov-Krasovskii dependente de parâmetros

Com o objetivo de evitar um possível conservadorismo geralmente encontrado quando se utiliza o conceito de estabilidade quadrática, adota-se a seguinte forma básica do funcional de Lyapunov-Krasovskii dependente de parâmetros:

$$\begin{aligned} V(x_t, \sigma) &= \mathcal{D}^T(x_\tau, \sigma) P(\sigma) \mathcal{D}(x_\tau, \sigma) + 2\mathcal{D}^T(x_\tau, \sigma) \int_{-\tau}^0 Q(\xi, \sigma) x(t + \xi) d\xi \\ &\quad + \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 x^T(t + s) R(s, \xi, \sigma) ds x(t + \xi) d\xi + \int_{-\tau}^0 x^T(t + \xi) S(\xi, \sigma) x(t + \xi) d\xi, \end{aligned} \quad (4.5)$$

com  $\mathcal{D}^T(x_\tau, \sigma)$  dado em (4.8),

$$P(\sigma) = \sum_{v=1}^{\kappa} \sigma_v P^v, \quad Q(\xi, \sigma) = \sum_{v=1}^{\kappa} \sigma_v Q^v(\xi), \quad S(\xi, \sigma) = \sum_{v=1}^{\kappa} \sigma_v S^v(\xi), \quad R(s, \xi, \sigma) = \sum_{v=1}^{\kappa} \sigma_v R^v(s, \xi), \quad (4.6)$$



sendo

$$\begin{aligned} Q^v(\theta_n + \alpha h) &= (1 - \alpha)Q_n^v + \alpha Q_{n-1}^v \\ S^v(\theta_n + \alpha h) &= (1 - \alpha)S_n^v + \alpha S_{n-1}^v \\ R^v(\theta_n + \alpha h, \theta_m + \beta h) &= \begin{cases} (1 - \alpha)R_{n,m}^v + \beta R_{n-1,m-1}^v + (\alpha - \beta)R_{n-1,m}^v, & \alpha \geq \beta \\ (1 - \beta)R_{n,m}^v + \alpha R_{n-1,m-1}^v + (\beta - \alpha)R_{n,m-1}^v, & \alpha < \beta \end{cases} \end{aligned}$$

para  $0 \leq \alpha \leq 1$ ,  $0 \leq \beta \leq 1$ , com  $n, m = 1, 2, \dots, N$ , o número de partições do funcional,  $\sigma$  é o parâmetro que define o politopo de incerteza (4.4) e  $\kappa$  representa o número de vértices do politopo  $\mathcal{P}$  (4.2). Assim, este funcional é completamente determinado pelas matrizes constantes  $P^v$ ,  $Q_n^v$ ,  $S_n^v$  e  $R_{n,m}^v$ .

Observe que, são definidas diferentes matrizes do funcional para os diferentes vértices, atribuindo graus extra de liberdade, o que justifica os resultados obtidos por meio desse funcional serem geralmente menos conservadores que os resultados obtidos aplicando o conceito de estabilidade quadrática.

### 4.3 Sistemas do tipo neutro incertos sujeitos a retardos no tempo iguais e constantes

Os resultados apresentados nesta seção consideram o sistema do tipo neutro em (3.33) incerto, o qual é reescrito da seguinte forma:

$$\dot{x}(t) + E(\sigma)\dot{x}(t - \tau) = A(\sigma)x(t) + A_d(\sigma)x(t - \tau) \quad (4.7)$$

com  $\phi(t) \in \mathcal{C}_\tau^{n_x}$  a condição inicial, sendo que  $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$  representa o estado,  $\tau > 0$  um escalar que representa o retardo no tempo constante. As matrizes do sistema  $A(\sigma)$ ,  $A_d(\sigma)$  e  $E(\sigma)$  são incertas e pertencem a um domínio politópico  $\mathcal{P}$ . Também defina o operador linear:

$$\mathcal{D}(x_\tau, \sigma) = x(t) - E(\sigma)x(t - \tau). \quad (4.8)$$

Então, considerando o sistema do tipo neutro em (4.7), é apresentado o primeiro resultado deste capítulo.

**Teorema 4.1** *Considere o sistema do tipo neutro incerto em (4.7) com o operador  $\mathcal{D}(x_\tau, \sigma)$  estável para todo domínio de incertezas e suponha que as matrizes deste sistemas sejam partições da matriz  $\mathcal{G}(\sigma)$  definida em (4.1) com  $\mathcal{G}(\sigma) \in \mathcal{P}$  (4.2). Sejam dados  $\tau > 0$ , um escalar referente ao retardo no tempo, e  $N$ , um inteiro positivo referente ao número de discretizações desejado. Então, o sistema em (4.7) é assintoticamente estável se existirem matrizes de dimensão  $n_x \times n_x$ :  $F, G, X, Y, P = P^T, S_n = S_n^T, Q_n, R_{n,m} = R_{m,n}^T$  ( $n, m = 0, 1, \dots, N$ ), tais que a LMI em (3.6) e a LMI abaixo sejam satisfeitas:*

$$\begin{bmatrix} \Xi_{q,v} & D^{na} & D^{nb} \\ * & -R_d - S_d & 0 \\ * & * & -3S_d \end{bmatrix} < 0, \quad (4.9)$$

na qual  $v$  representa os vértices do politopo  $\mathcal{P}$ , com  $v = 1, 2, \dots, \kappa$ ,

$$\Xi_{q,v} = \begin{bmatrix} FA_v + A_v^T F^T + X + X^T + S_0 & Y^T - X + Q_0^T & -F + A_v^T G^T & FA_{d,v} - XE_v \\ * & -Y - Y^T & P & -Q_N - YE_v \\ * & * & -G - G^T & GA_{d,v} \\ * & * & * & -S_N \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

$D^{na}$  e  $D^{nb}$  são ambos definidos em (3.38) e os termos  $R_d$  e  $S_d$  definidos em (3.13) e (3.14), respectivamente.  $\square$

**Demonstração:** Esta demonstração segue exatamente os mesmos passos da demonstração do Teorema 3.5, considere o sistema do tipo neutro incerto em (4.7), obtendo-se a LMI em (3.6) e a seguinte LMI

$$\begin{bmatrix} \Xi_q(\sigma) & D^{ns} & D^{na} \\ * & -R_d - S_d & 0 \\ * & * & -3S_d \end{bmatrix} < 0, \quad (4.11)$$

com  $D^{na}$  e  $D^{nb}$  ambos definidos em (3.38), os termos  $R_d$  e  $S_d$  definidos em (3.13) e (3.14), respectivamente, e  $\Xi_q(\sigma)$  é definida como  $\Xi$  em (3.37) substituindo  $A$  por  $A(\sigma)$ ,  $A_d$  por  $A_d(\sigma)$  e  $E$  por  $E(\sigma)$ .

Portanto, sendo as matrizes do sistema incerto pertencentes ao politopo  $\mathcal{P}$  (4.2). Note que a LMI em (4.11) pode ser obtida multiplicando a LMI em (4.9) por  $\sigma_v$ , e somando para  $v = 1, \dots, \kappa$ , sendo  $\sum_{v=1}^{\kappa} \sigma_v = 1$ . Então, se verificado a LMI em (4.9) para  $v = 1, \dots, \kappa$ , tem-se uma condição suficiente para que a LMI em (4.11) seja satisfeita. Completando a demonstração.  $\blacksquare$

O teorema acima é formulado com um conjunto fixo de matrizes de Lyapunov-Krasovskii independente das incertezas do sistema, ou do número de vértices que definem o domínio politópico no qual as matrizes do sistema pertencem. Então, apesar das condições acima serem apropriadas para tratar sistemas incertos variantes no tempo, essas podem ser bastante conservadoras quando se tem conhecimento que as incertezas do sistema são invariantes no tempo. Portanto, com o objetivo de superar o possível conservadorismo do teorema acima, a seguir são apresentadas condições formuladas tendo como base o funcional de Lyapunov-Krasovskii dependente de parâmetros em (4.5).

**Teorema 4.2** *Considere o sistema do tipo neutro incerto em (4.7) invariante no tempo com o operador  $\mathcal{D}(x_\tau, \sigma)$  estável para todo domínio de incertezas e suponha que as matrizes deste sistema sejam partições da matriz  $\mathcal{G}(\sigma)$  definida em (4.1) com  $\mathcal{G}(\sigma) \in \mathcal{P}$  (4.2). Sejam dados  $\tau > 0$ , um escalar referente ao retardo no tempo, e  $N$ , um inteiro positivo referente ao número de discretizações desejado. Então, o sistema em (4.7) é assintoticamente estável se existirem matrizes de dimensão  $n_x \times n_x$ :  $F$ ,  $G$ ,  $X$ ,  $Y$ ,  $P^v = P^{T,v}$ ,  $S_n^v = S_n^{T,v}$ ,  $Q_n^v$ ,  $R_{n,m}^v = R_{m,n}^{T,v}$  ( $v = 1, \dots, \kappa$  e  $n, m = 0, 1, \dots, N$ ), tais que as seguintes LMIs sejam satisfeitas:*

$$\begin{bmatrix} P^v & Q_s^v \\ * & R_s^v + S_s^v \end{bmatrix} > 0 \quad (4.12)$$

e

$$\begin{bmatrix} \Xi_v & D^{na,v} & D^{nb,v} \\ * & -R_d^v - S_d^v & 0 \\ * & * & -3S_d^v \end{bmatrix} < 0, \quad (4.13)$$

nas quais  $v$  representa os vértices do politopo  $\mathcal{P}$  ( $v = 1, 2, \dots, \kappa$ ). Os termos  $Q_s^v$ ,  $R_s^v$  e  $S_s^v$  são definidos como  $Q_s$ ,  $R_s$  e  $S_s$  em (3.8), (3.9) e (3.10), respectivamente, adicionando o índice sobrescrito  $v$  em todos as matrizes desses termos,

$$\Xi_v = \begin{bmatrix} FA_v + A_v^T F^T + X + X^T + S_0^v & Y^T - X + Q_0^{T,v} & -F + A_v^T G^T & FA_{d,v} - XE_v \\ * & -Y - Y^T & P^v & -Q_N^v - YE_v \\ * & * & -G - G^T & GA_{d,v} \\ * & * & * & -S_N^v \end{bmatrix}, \quad (4.14)$$

$D^{na,v}$  e  $D^{nb,v}$  são definidos como  $D^{na}$  e  $D^{nb}$ , ambos em (3.38), e os termos  $R_d^v$  e  $S_d^v$  definidos como  $R_d$  e  $S_d$  em (3.13) e (3.14), respectivamente, adicionando o índice sobrescrito  $v$  em todas as matrizes.  $\square$

**Demonstração:** Esta demonstração segue exatamente os mesmos passos da demonstração do Teorema 3.5, considerando o sistema do tipo neutro incerto em (4.7) e o funcional de Lyapunov-Krasovskii dependente de parâmetros em (4.5), obtendo-se as LMIs:

$$\begin{bmatrix} P(\sigma) & Q_s(\sigma) \\ * & R_s(\sigma) + S_s(\sigma) \end{bmatrix} = \sum_{v=1}^{\kappa} \sigma_v \begin{bmatrix} P^v & Q_s^v \\ * & R_s^v + S_s^v \end{bmatrix} > 0 \quad (4.15)$$

e

$$\begin{bmatrix} \Xi(\sigma) & D^{na}(\sigma) & D^{nb}(\sigma) \\ * & -R_d(\sigma) - S_d(\sigma) & 0 \\ * & * & -3S_d(\sigma) \end{bmatrix} = \sum_{v=1}^{\kappa} \sigma_v \begin{bmatrix} \Xi_v & D^{na,v} & D^{nb,v} \\ * & -R_d^v - S_d^v & 0 \\ * & * & -3S_d^v \end{bmatrix} < 0, \quad (4.16)$$

com os termos  $Q_s(\sigma)$ ,  $R_s(\sigma)$ ,  $S_s(\sigma)$ ,  $\Xi(\sigma)$ ,  $R_d(\sigma)$  e  $S_d(\sigma)$  definidos como  $Q_s$ ,  $R_s$ ,  $S_s$ ,  $\Xi$ ,  $R_d$  e  $S_d$ , em (3.8), (3.9), (3.10), (3.37), (3.13) e (3.14), respectivamente, com todas as matrizes nesses termos em função de  $\sigma$ , exceto  $F$ ,  $G$ ,  $X$  e  $Y$ . Da mesma forma os termos  $D^{na}(\sigma)$  e  $D^{nb}(\sigma)$  são definidos como  $D^{na}$  e  $D^{nb}$ , ambos em (3.38), fazendo todas as matrizes nesses termos em função de  $\sigma$ . Os termos à direita das igualdades nas LMIs acima são obtidos devido as matrizes do sistema incerto pertencerem ao politopo  $\mathcal{P}$  (4.2) e a forma como as matrizes do funcional de Lyapunov-Krasovskii são definidas em (4.6).

Portanto, verificar se as LMIs em (4.12) e (4.13) para  $v = 1, \dots, \kappa$ , são satisfeitas é uma condição suficiente para que as LMIs em (4.15) e (4.16) sejam satisfeitas. Completando a demonstração.  $\blacksquare$

## 4.4 Sistemas do tipo neutro incertos e sujeitos a retardos no tempo mistos

Considere o seguinte sistema:

$$\dot{x}(t) + E(\sigma)\dot{x}(t-r) = A(\sigma)x(t) + A_d(\sigma)x(t-d(t)) \quad (4.17)$$

com  $\phi(t) \in \dot{\mathcal{C}}_{\max\{r, d(t)\}}^{n_x}$  a condição inicial, sendo que  $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$  representa o vetor de estados, o retardo no tempo *incerto* tem a forma  $d(t) = \tau + \eta(t)$  sendo  $\tau$  um valor nominal e  $\eta(t)$  uma perturbação, possivelmente variante no tempo, satisfazendo:  $|\eta(t)| \leq \mu < \tau$ , sendo  $\mu$  conhecido. As matrizes do sistema  $A(\sigma)$ ,  $A_d(\sigma)$  e  $E(\sigma)$  são incertas e pertencem a um domínio politópico  $\mathcal{P}$ . Além disso, é definido o operador linear:

$$\mathcal{D}(x_r, \sigma) = x(t) - E(\sigma)x(t - r).$$

Nesta seção o seguinte funcional de Lyapunov-Krasovskii, também apresentado em (3.44), é novamente utilizado

$$V_{total}^{neutro}(x_{\bar{t}}) = V(x_t) + V_r(x_r) + V_\eta(x_t), \quad (4.18)$$

no qual,  $x_{\bar{t}}$  corresponde ao valor de  $x(t)$  no intervalo  $[t - \max\{r, d(t)\}, t]$ , para  $r, d(t) \in \mathbb{R}_+$ ,  $V(x_t)$  é dado como (3.3), com  $f(x(t)) = x(t)$ ,  $V_\eta(x_t)$  é dado em (3.20) e  $V_r(x_r)$  que leva em conta apenas o retardo no tempo  $r$ , é dado em (3.45).

Então, a seguir são apresentadas condições suficientes para verificar a estabilidade do sistema em (4.17).

**Teorema 4.3** *Considere o sistema do tipo neutro incerto em (4.17) com o operador  $\mathcal{D}(x_r, \sigma)$  estável para todo domínio de incertezas e suponha que as matrizes deste sistema sejam partições da matriz  $\mathcal{G}(\sigma)$  definida em (4.1) com  $\mathcal{G}(\sigma) \in \mathcal{P}$  (4.2). Sejam dados  $\tau > 0$ , um escalar referente ao valor nominal do retardo no tempo,  $\mu \geq 0$ , um limitante superior para a perturbação no retardo  $d(t)$ , e  $N$ , um inteiro positivo referente ao número de discretizações desejado. Então, o sistema em (4.17) é assintoticamente estável, independente do retardo  $r$ , se existirem matrizes de dimensão  $n_x \times n_x$ :  $F$ ,  $G$ ,  $P = P^T$ ,  $S_n = S_n^T$ ,  $Q_n$ ,  $R_{n,m} = R_{m,n}^T$  ( $n, m = 0, 1, \dots, N$ ),  $U = U^T$ ,  $Z = Z^T$ , tais que a LMI em (3.6) e a LMI abaixo sejam satisfeitas:*

$$\begin{bmatrix} \Xi_{q,v}^r & \begin{pmatrix} D^{pa} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} D^{pb} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ * & -R_d - S_d & 0 \\ * & * & -3S_d \end{bmatrix} < 0, \quad (4.19)$$

na qual  $v$  representa os vértices do politopo  $\mathcal{P}$ , com  $v = 1, 2, \dots, \kappa$ ,

$$\Xi_{q,v}^r = \begin{bmatrix} FA_v + A_v^T F^T + Q_0 + Q_0^T + S_0 & P - F + A_v^T G^T & FA_{d,v} - Q_N & \mu FA_{d,v} & \mu FE_v \\ * & -G - G^T + 2\mu U + Z & GA_{d,v} & \mu GA_{d,v} & \mu GE_v \\ * & * & -S_N & 0 & 0 \\ * & * & * & -\mu U & 0 \\ * & * & * & * & -Z \end{bmatrix}, \quad (4.20)$$

os termos  $D^{pa}$  e  $D^{pb}$  são dados ambos em (3.12) e os  $R_d$  e  $S_d$  dados em (3.13) e (3.14), respectivamente.  $\square$

**Demonstração:** Esta demonstração segue os mesmos passos da demonstração do Teorema 4.1, considerando-se o sistema do tipo neutro incerto em (4.17) e o funcional de Lyapunov-Krasovskii em (4.18).  $\blacksquare$

A seguir são apresentadas novas condições de análise de estabilidade para o sistema em (4.17). Sendo que estas condições são obtidas utilizando-se o seguinte funcional de Lyapunov-Krasovskii dependente de parâmetros:

$$V_{total}^{neutro}(x_{\bar{t}}, \sigma) = V(x_{\bar{t}}, \sigma) + V_r(x_r, \sigma) + V_\eta(x_t, \sigma), \quad (4.21)$$

no qual  $x_{\bar{t}}$  corresponde ao valor de  $x(t)$  no intervalo  $[t - \max\{r, d(t)\}, t]$ , para  $r$  e  $d(t) \in \mathbb{R}_+$ ,  $V(x_{\bar{t}})$  é dado como em (4.5), com  $f(x(t)) = x(t)$ , e o termo  $V_r(x_r, \sigma)$  que leva em conta apenas o retardo no tempo  $r$ , é dado por:

$$V_r(x_r, \sigma) = \int_{-r}^0 \dot{x}^T(t + \xi) Z(\sigma) \dot{x}(t + \xi) d\xi, \quad \text{sendo} \quad Z(\sigma) = Z^T(\sigma) \quad \text{e} \quad Z(\sigma) = \sum_{v=1}^{\kappa} \sigma_v Z^v.$$

O termo  $V_\eta(x_t, \sigma)$  que leva em conta a perturbação variante no tempo  $\eta(t)$ , é dado por:

$$V_\eta(x_t, \sigma) = \int_{-\mu}^{\mu} \int_{t+\xi-\tau}^t \dot{x}^T(s) U(\sigma) \dot{x}(s) d\xi ds, \quad \text{sendo} \quad U(\sigma) = U^T(\sigma) \quad \text{e} \quad U(\sigma) = \sum_{v=1}^{\kappa} \sigma_v U^v.$$

**Teorema 4.4** *Considere o sistema do tipo neutro incerto em (4.17) invariante no tempo com o operador  $\mathcal{D}(x_r, \sigma)$  estável para todo domínio de incertezas e suponha que suas matrizes sejam partições da matriz  $\mathcal{G}(\sigma)$  definida em (4.1) com  $\mathcal{G}(\sigma) \in \mathcal{P}$  (4.2). Sejam dados  $\tau > 0$ , um escalar referente ao valor nominal do retardo no tempo,  $\mu \geq 0$ , um limitante superior para a perturbação no retardo  $d(t)$ , e  $N$ , um inteiro positivo referente ao número de discretizações desejado. Então, o sistema em (4.17) é assintoticamente estável, independente do retardo  $r$ , se existirem matrizes de dimensão  $n_x \times n_x$ :  $F, G, P^v = P^{T,v}, S_n^v = S_n^{T,v}, Q_n^v, R_{n,m}^v = R_{m,n}^{T,v}, U^v = U^{T,v}, Z^v = Z^{T,v}, (v = 1, \dots, \kappa$  e  $n, m = 0, 1, \dots, N)$ , tais que a LMI em (4.12) e a LMI abaixo sejam satisfeitas:*

$$\begin{bmatrix} \Xi_v^r & \begin{pmatrix} D^{pa,v} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} D^{pb,v} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ * & -R_d^v - S_d^v & 0 \\ * & * & -3S_d^v \end{bmatrix} < 0, \quad (4.22)$$

nas quais  $v$  representa os vértices do politopo  $\mathcal{P}$  ( $v = 1, 2, \dots, \kappa$ ),

$$\Xi_v^r = \begin{bmatrix} FA_v + A_v^T F^T + Q_{0,v} + Q_{0,v}^T + S_{0,v} & P_v - F + A_v^T G^T & FA_{d,v} - Q_{N,v} & \mu FA_{d,v} & \mu FE_v \\ * & -G - G^T + 2\mu U_v + Z_v & GA_{d,v} & \mu GA_{d,v} & \mu GE_v \\ * & * & -S_{N,v} & 0 & 0 \\ * & * & * & -\mu U_v & 0 \\ * & * & * & * & -Z_v \end{bmatrix}, \quad (4.23)$$

$D^{pa,v}$  e  $D^{pb,v}$  são definidos como  $D^{pa}$  e  $D^{pb}$ , ambos em (3.12), e os termos  $R_d^v$  e  $S_d^v$  definidos como  $R_d$  e  $S_d$  em (3.13) e (3.14), respectivamente, adicionando o índice sobrescrito  $v$  em todas as matrizes.  $\square$

**Demonstração:** Esta demonstração segue exatamente os mesmos passos da demonstração do Teorema 4.2, considerando o sistema do tipo neutro incerto em (4.17) e o funcional de Lyapunov-Krasovskii dependente de parâmetros em (4.21). ■

Na próxima seção é apresentado um exemplo numérico que ilustra a eficiência dos resultados apresentados neste capítulo.

## 4.5 Exemplo numérico

Uma das vantagens dos métodos propostos neste capítulo em relação a outros métodos da literatura como em [32, 33], é que estes métodos são apropriados para tratar sistemas do tipo neutro totalmente incertos, especificamente a matriz  $E$  pode ser incerta. Isto se deve ao desacoplamento das matrizes do sistema das matrizes do funcional, o que evitou produtos da forma:  $APE$  ou  $A_dPE$ .

Outra vantagem que é ilustrada a seguir, é que os métodos propostos baseados no funcional de Lyapunov-Krasovskii dependente de parâmetros são menos conservadores que recentes métodos da literatura. A título de exemplo os métodos propostos são comparados com [32, 33] que também utilizam a técnica de discretização de Gu.

**Exemplo 4.1** Considere o sistema incerto:

$$\dot{x}(t) - E(\sigma)\dot{x}(t - \tau) = A(\sigma)x(t) + A_d(\sigma)x(t - \tau) \quad (4.24)$$

com

$$A(\sigma) = \begin{bmatrix} a - 2 & 0 \\ 0 & a - 0.9 \end{bmatrix}, \quad A_d(\sigma) = \begin{bmatrix} b - 1 & 0 \\ b - 1 & b - 1 \end{bmatrix}, \quad E(\sigma) = \begin{bmatrix} c + 0.5 & 0 \\ 0 & c + 0.5 \end{bmatrix},$$

sendo  $a$ ,  $b$  e  $c$  escalares que representam parâmetros incertos.

Neste exemplo considera-se o problema de se obter o máximo intervalo de estabilidade para este sistema em relação ao retardo no tempo  $\tau$ , i.e.  $\tau \in [0, \tau_{max}]$ . Inicialmente, para que os métodos propostos em [33, Prop. 3] e [32, Cor. 1] possam ser utilizados, é considerado que  $c = 0$  e  $a, b \in [-\bar{\sigma}, \bar{\sigma}]$ ,  $\bar{\sigma} > 0$ .

Considerando um valor pré-especificado para  $\bar{\sigma}$ , obtêm-se os resultados apresentados na Tabela 4.1, baseados no Teorema 4.2 e os métodos propostos em [33, Prop. 3] e [32, Cor. 1].

Tabela 4.1: Máximo retardo no tempo para o sistema (4.24) com  $c = 0$  e  $a, b \in [-\bar{\sigma}, \bar{\sigma}]$ ,  $\bar{\sigma} > 0$ , com valores pré-especificados para  $\bar{\sigma}$ . Exemplo 4.1.

$\bar{\sigma}$	0.4	0.3	0.2	0.1	0
$\tau_{max}^{Han, Yu e Gu (2004), [33, Prop. 3]}$ e $\tau_{max}^{Han (2005), [32, Cor. 1]}$ para $N = 3$	0.65	0.90	1.30	2.07	4.73
$\tau_{max}^{Teorema 4.2}$ para $N = 3$	0.92	1.14	1.50	2.22	4.73

Agora considerando que o sistema em (4.24) seja sujeito a retardos mistos  $r$  e  $\tau$ , então:

$$\dot{x}(t) - E(\sigma)\dot{x}(t - r) = A(\sigma)x(t) + A_d(\sigma)x(t - \tau). \quad (4.25)$$

Neste caso, o método proposto em [33] não pode ser aplicado. Então, no mesmo cenário e repetindo o teste anterior, mas, considerando agora o Teorema 4.4 proposto e o método proposto em [32, Teor. 2], a Tabela 4.2 apresenta os resultados obtidos.

Tabela 4.2: Máximo retardo no tempo para o sistema (4.25) com  $c = 0$ ,  $a, b \in [-\bar{\sigma}, \bar{\sigma}]$ ,  $\bar{\sigma} > 0$ , para valores pré-especificados para  $\bar{\sigma}$ . Exemplo 4.1.

$\bar{\sigma}$	0.4	0.3	0.2	0.1	0
$\tau_{max}^{Han (2005), [32, \text{Teor. 2}]}$ para $N = 3$	0.48	0.58	0.72	0.94	1.37
$\tau_{max}^{\text{Teorema 4.2}}$ para $N = 3$	0.60	0.69	0.82	1.01	1.37

Finalmente, considerando que o sistema em (4.24) seja *totalmente* incerto, os métodos propostos em [32] e [33] não podem ser aplicados, pois, neste caso, a matriz  $E(\sigma)$  é incerta. Então, para  $a, b, c \in [-\bar{\sigma}, \bar{\sigma}]$ ,  $\bar{\sigma} > 0$ , e aplicando os métodos propostos nos teoremas 4.1 e 4.2, obtêm-se os resultados apresentados na Tabela 4.3.

Tabela 4.3: Máximo retardo no tempo para o sistema (4.24) com  $a, b, c \in [-\bar{\sigma}, \bar{\sigma}]$ ,  $\bar{\sigma} > 0$  com valores pré-especificados para  $\bar{\sigma}$ . Exemplo 4.1.

$\bar{\sigma}$	0.1	0.2	0.3	0.4
$\tau_{max}^{\text{Teorema 4.1}}$ para $N = 3$	0.73	0.41	0.21	—
$\tau_{max}^{\text{Teorema 4.2}}$ para $N = 3$	1.90	1.00	0.52	0.21

## 4.6 Conclusões do capítulo

Neste capítulo foram apresentados resultados de análise de estabilidade de sistemas do tipo neutro incertos. A primeira vantagem dos métodos propostos em relação a outros métodos presentes na literatura, como em [32, 33], é que os métodos propostos são apropriados para lidar com sistemas do tipo neutro totalmente incertos, especificamente, a matriz  $E$  pode ser incerta.

Outra vantagem foi ilustrada por meio de um exemplo numérico, no qual os métodos propostos se mostraram mais eficientes que métodos recentes da literatura, também baseados na técnica de discretização de Gu. A ferramenta que tornou possível a obtenção de condições menos conservadoras foi a utilização de um funcional de Lyapunov-Krasovskii dependente de parâmetros. Note que este tipo de funcional é facilmente aplicado aos tipos de sistemas estudados no capítulo anterior. Ademais, extensões para sistemas sujeitos a múltiplos retardos no tempo e sistemas sujeitos a retardos distribuídos também podem ser obtidas, veja [27].

No próximo capítulo serão ilustradas outras vantagens pela utilização desses métodos no contexto de projeto de controladores e filtros.

# Capítulo 5

## Projeto de controladores e filtros para sistemas do tipo neutro

Neste capítulo são apresentadas novas condições para o projeto de controladores e filtros com índice de desempenho  $\mathcal{H}_\infty$ . Essas condições são obtidas estendendo alguns dos resultados de análise apresentados nos capítulos anteriores.

O primeiro resultado deste capítulo, Teorema 5.1, apresenta um método para projeto de controladores  $\mathcal{H}_\infty$ , por meio de realimentação de estados para sistemas do tipo neutro.

No restante deste capítulo é abordado o problema de projeto de filtros. Inicialmente, é considerado o projeto de filtros do tipo Kalman/Luenberger para sistemas do tipo neutro precisamente conhecidos e, em seguida, será considerado o projeto de filtros para sistemas do tipo neutro incertos.

O objeto geral de estudo deste capítulo corresponde ao sistema do tipo neutro dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) - E(\sigma)\dot{x}(t - \tau) &= A(\sigma)x(t) + A_d(\sigma)x(t - \tau) + B_u(\sigma)u(t) + B_w(\sigma)w(t) \\ z(t) &= C(\sigma)x(t) + C_d(\sigma)x(t - \tau) + D_u(\sigma)u(t) + D_w(\sigma)w(t) \\ x(t) &= \phi(t), \quad \dot{x}(t) = \dot{\phi}(t), \quad \forall t \in [-\tau, 0], \end{aligned} \quad (5.1)$$

sendo  $\tau \geq 0$  o retardo no tempo,  $\phi(t) \in \mathcal{C}_\tau^{n_x}$  a condição inicial,  $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$  o vetor de estados,  $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$  a entrada de controle,  $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$  a entrada de distúrbios e  $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$  a saída controlada. As matrizes do sistema têm dimensões apropriadas, e podem ser incertas. Nesse caso, define-se uma matriz  $\mathcal{G}(\sigma)$ , que agrega todas essas matrizes, da seguinte forma

$$\mathcal{G}(\sigma) \triangleq \begin{bmatrix} A(\sigma) & A_d(\sigma) & B_u(\sigma) & B_w(\sigma) & E(\sigma) \\ C(\sigma) & C_d(\sigma) & D_u(\sigma) & D_w(\sigma) & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.2)$$

a qual pertence a um conjunto politópico:  $\mathcal{G}(\sigma) \in \mathcal{P}$ . O conjunto  $\mathcal{P}$ , dado em (4.2), é um politopo no espaço de matrizes definido pelo conjunto de todas as matrizes obtidas pela combinação convexa de seus  $\kappa$  vértices. Além disso, é assumido o operador discreto  $\mathcal{D}(x_\tau, \sigma) = \dot{x}(t) - E(\sigma)\dot{x}(t - \tau)$  estável.

Considera-se para o projeto de controladores e filtros, o índice de desempenho  $\mathcal{H}_\infty$

$$J(t) \triangleq \int_0^\infty [z^T(t)z(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t)] dt, \quad (5.3)$$



com  $\gamma > 0$ .

Neste capítulo, os resultados apresentados no Teorema 5.1, Corolário 5.1 e no Teorema 5.3, partem do princípio de se utilizar um funcional de Lyapunov-Krasovskii dependente de parâmetros. Então, esses métodos têm como caso particular, resultados obtidos por meio do conceito da estabilidade quadrática, ou seja, utilizar um funcional de Lyapunov-Krasovskii independente de parâmetros.

A seguir são apresentados os resultados deste capítulo.

## 5.1 Controladores $\mathcal{H}_\infty$ por realimentação de estados

Nesta seção, considera-se o diagrama de blocos apresentado na Figura 5.1, que corresponde a um esquema geral de controle realimentado. O sistema controlado  $\mathcal{S}$  é um sistema linear do tipo neutro como descrito em (5.1). Para o controle é escolhido  $y(t) = [x^T(t) \ x^T(t - \tau)]^T$  e  $\mathcal{K} = [K \ K_d]$ , obtendo a lei de controle com memória:

$$u(t) = Kx(t) + K_dx(t - \tau). \quad (5.4)$$

Assim, pode-se considerar os casos alternativos, controle sem memória, i.e.  $K_d = 0$ , ou controle puramente atrasado, i.e.  $K = 0$ .

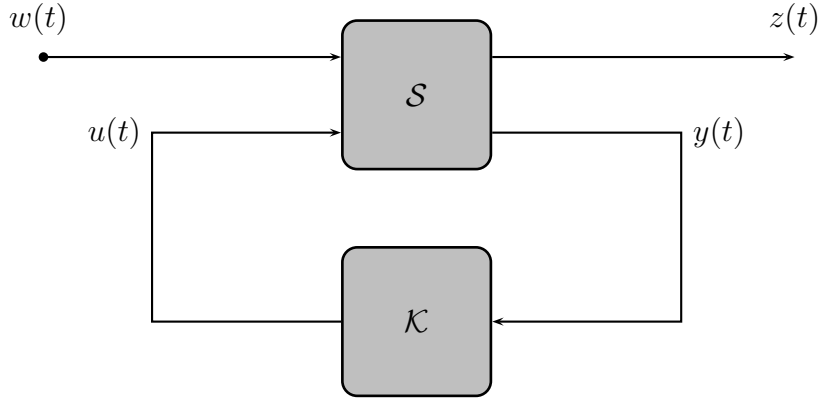


Figura 5.1: Diagrama de blocos geral do sistema de controle em malha-fechada.

Portanto, o sistema em malha-fechada é dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) - E(\sigma)\dot{x}(t - \tau) &= A^K(\sigma)x(t) + A_d^K(\sigma)x(t - \tau) + B_w(\sigma)w(t) \\ z(t) &= C^K(\sigma)x(t) + C_d^K(\sigma)x(t - \tau) + D_w(\sigma)w(t) \end{aligned} \quad (5.5)$$

com

$$\begin{aligned} A^K(\sigma) &\triangleq A(\sigma) + B_u(\sigma)K, & A_d^K(\sigma) &\triangleq A_d(\sigma) + B_u(\sigma)K_d, \\ C^K(\sigma) &\triangleq C(\sigma) + D_u(\sigma)K, & C_d^K(\sigma) &\triangleq C_d(\sigma) + D_u(\sigma)K_d. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Então, o primeiro resultado deste capítulo é apresentado no próximo teorema.

**Teorema 5.1** *Considere o sistema do tipo neutro incerto em (5.1) invariante no tempo com o operador  $\mathcal{D}(x_\tau, \sigma)$  estável para todo domínio de incertezas e suponha que as matrizes deste sistema pertençam a matriz  $\mathcal{G}(\sigma)$  definida em (5.2) com  $\mathcal{G}(\sigma) \in \mathcal{P}$  (4.2). Sejam dados  $\tau > 0$ , um escalar*

referente ao retardo no tempo,  $\delta_1$  e  $\delta_2$ , parâmetros de ajustes escalares,  $\gamma > 0$ , o nível de atenuação de distúrbios  $\mathcal{H}_\infty$ , e  $N$ , um inteiro positivo referente ao número de discretizações desejado. Então, o sistema em (5.1) é estabilizável por um controlador  $\mathcal{H}_\infty$  de realimentação de estados com os ganhos  $K = \bar{K}\bar{F}^{-1}$  e  $K_d = \bar{K}_d\bar{F}^{-1}$ , que garante ao sistema em malha fechada (5.5) estabilidade robusta para o retardo no tempo  $\tau$  e nível de atenuação de distúrbios  $\gamma$  para todo  $w(t) \neq 0$ , se existirem matrizes de dimensão  $n_x \times n_x$ :  $\bar{F}$ ,  $\bar{G}$ ,  $\bar{K}$ ,  $\bar{K}_d$ ,  $\bar{P}^v = \bar{P}^{T,v}$ ,  $\bar{S}_n^v = \bar{S}_n^{T,v}$ ,  $\bar{Q}_n^v$ ,  $\bar{R}_{n,m}^v = \bar{R}_{m,n}^{T,v}$  ( $v = 1, \dots, \kappa$  e  $n, m = 0, 1, \dots, N$ ) e duas matrizes de dimensão  $n_u \times n_x$ :  $\bar{K}$  e  $\bar{K}_d$ , tais que as seguintes LMIs sejam satisfeitas

$$\begin{bmatrix} \bar{P}^v & \bar{Q}_s^v \\ * & \bar{R}_s^v + \bar{S}_s^v \end{bmatrix} > 0 \quad (5.7)$$

e

$$\begin{bmatrix} \bar{\Xi}_v & \begin{pmatrix} \bar{D}^{na,v} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \bar{D}^{nb,v} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ * & -\bar{R}_d^v - \bar{S}_d^v & 0 \\ * & * & -3\bar{S}_d^v \end{bmatrix} < 0, \quad (5.8)$$

nas quais  $v$  representa os vértices do politopo  $\mathcal{P}$  ( $v = 1, 2, \dots, \kappa$ ). Os termos  $\bar{Q}_s^v$ ,  $\bar{R}_s^v$  e  $\bar{S}_s^v$  são definidos como  $Q_s$ ,  $R_s$  e  $S_s$  em (3.8), (3.9) e (3.10), respectivamente, reescritos com a barra e com o índice  $v$  sobrescritos em todas as matrizes desses termos,

$$\bar{\Xi}_v = \begin{bmatrix} \text{sm}\{A_v\bar{F}^T + B_{u,v}\bar{K}^T + \delta_1\bar{F}\} + \bar{S}_0^v & \delta_2\bar{F} - \delta_1\bar{G} + \bar{Q}_0^{T,v} & \bar{F}A_v^T + \bar{K}B_{u,v}^T - \bar{G}^T & \dots \\ * & -\delta_2(\bar{G} + \bar{G}^T) & \bar{P}^v & \dots \\ * & * & -\bar{G} - \bar{G}^T & \dots \\ * & * & * & \dots \\ * & * & * & \dots \\ * & * & * & \dots \\ \dots & A_{d,v}\bar{F}^T + B_{u,v}\bar{K}_d^T - \delta_1E_v\bar{F}^T & B_{w,v} & \bar{F}C_v^T + \bar{K}D_{u,v}^T \\ \dots & -\bar{Q}_N^v - \delta_2E_v\bar{F}^T & 0 & 0 \\ \dots & A_{d,v}\bar{F}^T + B_{u,v}\bar{K}_d^T & B_{w,v} & 0 \\ \dots & -\bar{S}_N^v & 0 & \bar{F}C_{d,v}^T + \bar{K}_dD_{u,v}^T \\ \dots & * & -\gamma^2I & D_{w,v}^T \\ \dots & * & * & -I \end{bmatrix}, \quad (5.9)$$

$\bar{D}^{na,v}$  e  $\bar{D}^{nb,v}$  são definidos como  $D^{na}$  e  $D^{nb}$  ambos em (3.38) e os termos  $\bar{R}_d^v$  e  $\bar{S}_d^v$  definidos como  $R_d$  e  $S_d$  em (3.13) e (3.14), respectivamente, reescritos com a barra e com o índice  $v$  sobrescritos em todas as matrizes desses termos.  $\square$

**Demonstração:** Deseja-se mostrar que se as LMIs em (5.7) e (5.8) são satisfeitas, então, condições que garantem a estabilidade do sistema em malha fechada (5.5), com índice de desempenho  $\mathcal{H}_\infty$ , também serão satisfeitas.

Inicialmente, considere o índice de desempenho  $\mathcal{H}_\infty$  em (5.3). Assuma que o sistema do tipo neutro em malha fechada (5.5) é estável e, sem perda de generalidade, que a condição inicial é nula. Assim, o funcional em (4.5) satisfaz  $V(x_t, \sigma)|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow 0$  e  $V(x_t, \sigma)|_{\phi(t)=0} = 0$ . Então, para qualquer

$w(t) \neq 0, w(t) \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$ , segue que

$$J(t) \leq \int_0^\infty \left[ z^T(t)z(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) + \dot{V}(x_t, \sigma) \right] dt. \quad (5.10)$$

Seguindo os mesmos passos apresentados na demonstração do Teorema 4.2 e aplicando o complemento de Schur, conclui-se que o sistema em malha fechada (5.5) é assintoticamente estável com índice de desempenho  $\mathcal{H}_\infty$ , se a LMI em (4.12) e a desigualdade abaixo forem verificadas

$$\begin{bmatrix} \Xi_v^\gamma & \begin{pmatrix} D^{na,v} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} D^{nb,v} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ * & -R_d^v - S_d^v & 0 \\ * & * & -3S_d^v \end{bmatrix} < 0, \quad (5.11)$$

com  $v$  representando os vértices do politopo  $\mathcal{P}$  ( $v = 1, 2, \dots, \kappa$ ),

$$\Xi_v^\gamma = \begin{bmatrix} \text{sm}\{FA_v^K + X\} + S_0^v & Y^T - X + Q_0^{T,v} & -F + A_v^{K,T}G^T & FA_{d,v}^K - XE_v & FB_{w,v} & C_v^{K,T} \\ * & -Y - Y^T & P^v & -Q_N^v - YE_v & 0 & 0 \\ * & * & -G - G^T & GA_{d,v}^K & GB_{w,v} & 0 \\ * & * & * & -S_N^v & 0 & C_{d,v}^{K,T} \\ * & * & * & * & -\gamma^2 I & D_{w,v}^T \\ * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

sendo que,  $D^{na,v}$  e  $D^{nb,v}$  são definidos como  $D^{na}$  e  $D^{nb}$ , ambos em (3.38), e os termos  $R_d^v$  e  $S_d^v$  definidos como  $R_d$  e  $S_d$  em (3.13) e (3.14), respectivamente, adicionando o índice sobrescrito  $v$  em todas as matrizes.

Portanto, se as LMIs em (5.7) e (5.8) são satisfeitas, então a LMI em (4.12) e a desigualdade em (5.11) também serão. Note que se as LMIs em (5.7) e (5.8) são satisfeitas, então,  $F$  e  $G$  são não-singulares.

Portanto, define-se as variáveis linearizantes:

$$[\bar{F}, \bar{G}] \triangleq [F^{-1}, G^{-1}], [\bar{P}^v, \bar{Q}_n^v] \triangleq \bar{G}[P^v \bar{G}^T, Q_n^v \bar{F}^T], [\bar{R}_{n,m}^v, \bar{S}_n^v] \triangleq \bar{F}[R_{n,m}^v, S_n^v] \bar{F}^T. \quad (5.13)$$

Agora, pré e pós multiplicando as LMIs em (4.12) por  $\text{diag}\{\bar{G}, \bar{F}, \dots, \bar{F}\}$  e  $\text{diag}\{\bar{G}, \bar{F}, \dots, \bar{F}\}^T$ , respectivamente, obtém-se as LMIs em (5.7).

Em seguida, são feitas escolhas particulares para as matrizes  $X$  e  $Y$  na desigualdade em (5.11), da forma:

$$X = \delta_1 F, \quad Y = \delta_2 G, \quad (5.14)$$

sendo  $\delta_1$  e  $\delta_2$  parâmetros de ajuste escalares, e define-se as novas variáveis:

$$[\bar{K}, \bar{K}_d] \triangleq [K \bar{F}, K_d \bar{F}]. \quad (5.15)$$

Finalmente, pré e pós multiplicando a desigualdade em (5.11) com os termos em (5.6), (5.13), (5.14) e (5.15), por  $\text{diag}\{\bar{F}, \bar{G}, \bar{G}, \bar{F}, \bar{F}, I, I, \bar{F}, \dots, \bar{F}\}$  e  $\text{diag}\{\bar{F}, \bar{G}, \bar{G}, \bar{F}, \bar{F}, I, I, \bar{F}, \dots, \bar{F}\}^T$ , res-

pectivamente, obtém-se a LMI em (5.8). Completando a demonstração.  $\blacksquare$

Apesar do Teorema 5.1 poder ser aplicado quando  $E(\sigma) = 0$  em (5.1), ele pode ser melhor adaptado para tratar tal caso, necessitando o ajuste de apenas um escalar  $\delta$ . Isto é formalizado a seguir.

**Corolário 5.1** *Considere o sistema incerto em (5.1), com  $E(\sigma) = 0$ , invariante no tempo e suponha que suas matrizes pertençam a matriz  $\mathcal{G}(\sigma)$  definida em (5.2) com  $\mathcal{G}(\sigma) \in \mathcal{P}$  (4.2). Sejam dados  $\tau > 0$ , um escalar referente ao retardo no tempo,  $\delta$ , um parâmetro de ajuste escalar,  $\gamma > 0$ , o nível de atenuação de distúrbios  $\mathcal{H}_\infty$ , e  $N$ , um inteiro positivo referente ao número de discretizações desejado. Então, o sistema em (5.1), com  $E(\sigma) = 0$ , é estabilizável por um controlador  $\mathcal{H}_\infty$  de realimentação de estados com os ganhos  $K = \tilde{K}\tilde{F}^{-1}$  e  $K_d = \tilde{K}_d\tilde{F}^{-1}$ , que garante ao sistema em malha fechada (5.5), com  $E(\sigma) = 0$ , estabilidade robusta para o retardo no tempo  $\tau$  e nível de atenuação de distúrbios  $\gamma$  para todo  $w(t) \neq 0$ , se existirem matrizes de dimensão  $n_x \times n_x$ :  $\tilde{F}$ ,  $\tilde{X}$ ,  $\tilde{K}$ ,  $\tilde{K}_d$ ,  $\tilde{P}^v = \tilde{P}^{T,v}$ ,  $\tilde{S}_n^v = \tilde{S}_n^{T,v}$ ,  $\tilde{Q}_n^v$ ,  $\tilde{R}_{n,m}^v = \tilde{R}_{m,n}^{T,v}$  ( $v = 1, \dots, \kappa$  e  $n, m = 0, 1, \dots, N$ ), e matrizes de dimensão  $n_u \times n_x$ :  $\tilde{K}$  e  $\tilde{K}_d$ , tais que as seguintes LMIs sejam satisfeitas*

$$\begin{bmatrix} \tilde{P}^v & \tilde{Q}_s^v \\ * & \tilde{R}_s^v + \tilde{S}_s^v \end{bmatrix} > 0 \quad (5.16)$$

e

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Xi}_v & \begin{pmatrix} \tilde{D}^{na,v} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \tilde{D}^{nb,v} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ * & -\tilde{R}_d^v - \tilde{S}_d^v & 0 \\ * & * & -3\tilde{S}_d^v \end{bmatrix} < 0, \quad (5.17)$$

nas quais  $v$  representa os vértices do politopo  $\mathcal{P}$  ( $v = 1, 2, \dots, \kappa$ ). Os termos  $\tilde{Q}_s^v$ ,  $\tilde{R}_s^v$  e  $\tilde{S}_s^v$  são definidos como  $Q_s$ ,  $R_s$  e  $S_s$  em (3.8), (3.9) e (3.10), respectivamente, reescrevendo-os com til e com o índice  $v$  sobrescritos em todas as matrizes desses termos. Além disso,

$$\tilde{\Xi}_v = \begin{bmatrix} \text{sm}\{A_v\tilde{F}^T + B_{u,v}\tilde{K}^T + \tilde{X}\} + \tilde{S}_0^v & \tilde{Q}_0^{T,v} & \delta\tilde{F}A_v^T + \delta\tilde{K}B_{u,v}^T - \tilde{F}^T & \dots \\ * & -\tilde{X} - \tilde{X}^T & \tilde{P}^v & \dots \\ * & * & -\delta(\tilde{F} + \tilde{F}^T) & \dots \\ * & * & * & \dots \\ * & * & * & \dots \\ * & * & * & \dots \\ \dots & A_{d,v}\tilde{F}^T + B_{u,v}\tilde{K}_d^T & B_{w,v} & \tilde{F}C_v^T + \tilde{K}_dD_{u,v}^T \\ \dots & -\tilde{Q}_N^v & 0 & 0 \\ \dots & \delta A_{d,v}\tilde{F}^T + \delta B_{u,v}\tilde{K}_d^T & \delta B_{w,v} & 0 \\ \dots & -\tilde{S}_N^v & 0 & \tilde{F}C_{d,v}^T + \tilde{K}_dD_{u,v}^T \\ \dots & * & -\gamma^2 I & D_{w,v}^T \\ \dots & * & * & -I \end{bmatrix}, \quad (5.18)$$

$\tilde{D}^{na,v}$  e  $\tilde{D}^{nb,v}$  são definidos como  $D^{na}$  e  $D^{nb}$ , ambos em (3.38), e os termos  $\tilde{R}_d^v$  e  $\tilde{S}_d^v$  definidos como

$R_d$  e  $S_d$  em (3.13) e (3.14), respectivamente, reescrevendo-os com til e com o índice  $v$  sobrescritos em todas as matrizes desses termos.  $\square$

**Demonstração:** Deseja-se mostrar que se as LMIs em (5.16) e (5.17) são satisfeitas, então, a LMI em (4.12) e a desigualdade em (5.11), também serão satisfeitas<sup>1</sup>.

Assume-se que as LMIs em (5.16) e (5.17) são satisfeitas, então,  $F$  é não singular. Assim, define-se as variáveis linearizantes:

$$\tilde{F} \triangleq F^{-1}, \quad [\tilde{P}^v, \tilde{Q}_n^v, \tilde{R}_{n,m}^v, \tilde{S}_n^v, \tilde{X}] \triangleq \tilde{F}[P^v, Q_n^v, R_{n,m}^v, S_n^v, X]\tilde{F}^T. \quad (5.19)$$

Portanto, pré e pós multiplicando a LMI em (4.12) por  $\text{diag}\{\tilde{F}, \dots, \tilde{F}\}$  e  $\text{diag}\{\tilde{F}, \dots, \tilde{F}\}^T$ , respectivamente, a LMI em (5.16) é obtida.

Finalmente, pré e pós multiplicando a desigualdade em (5.11), com  $E_v = 0$ ,  $Y = X^T$  (sem perda de generalidade, pois  $E_v = 0$ ), e com a escolha particular  $G = \delta F$ , respectivamente, por  $\text{diag}\{\tilde{F}, \tilde{F}, \tilde{F}, \tilde{F}, \tilde{F}, I, I, \tilde{F}, \dots, \tilde{F}\}$  e  $\text{diag}\{\tilde{F}, \tilde{F}, \tilde{F}, \tilde{F}, \tilde{F}, I, I, \tilde{F}, \dots, \tilde{F}\}^T$ ; e em seguida, definindo as novas variáveis linearizantes:

$$[\tilde{K}, \tilde{K}_d] \triangleq [K\tilde{F}, K_d\tilde{F}],$$

obtém-se a LMI em (5.17). Completando a demonstração.  $\blacksquare$

Na próxima seção serão apresentadas condições para o projeto de filtros para sistemas do tipo neutro precisamente conhecidos.

## 5.2 Filtros do tipo Kalman/Luenberger $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas precisamente conhecidos

O problema de filtragem consiste em gerar estimativas  $\hat{z}(t)$  do sinal  $z(t)$ , baseadas no vetor  $y(t)$  de saídas medidas, conforme apresentado na Figura 5.2.

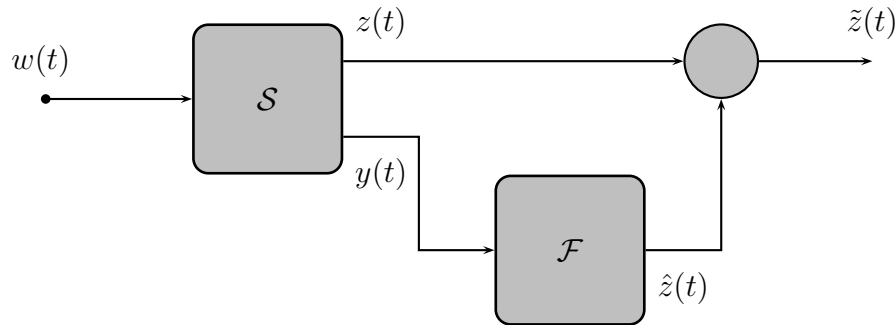


Figura 5.2: Diagrama de blocos geral do problema de filtragem.

<sup>1</sup>Verificar a LMI em (4.12) e a desigualdade em (5.11) é suficiente para verificar a estabilidade do sistema em malha fechada (5.5) com  $E(\sigma) = 0$  e índice de desempenho  $\mathcal{H}_\infty$ . Veja demonstração do Teorema 5.1.

Como objeto de estudo é considerado o sistema a seguir:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) - E\dot{x}(t - \tau) &= Ax(t) + A_d x(t - \tau) + B_w w(t) \\ y(t) &= Lx(t) + L_d x(t - \tau) + L_w w(t) \\ x(t) &= \phi(t), \dot{x}(t) = \dot{\phi}(t), \quad \forall t \in [-\tau, 0],\end{aligned}\tag{5.20}$$

sendo  $\tau > 0$  o retardo no tempo,  $\phi(t) \in \mathcal{C}_\tau^{n_x}$  a condição inicial,  $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$  o vetor de estado,  $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$ , a entrada de distúrbios e  $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$  a saída medida. As matrizes  $A$ ,  $A_d$ ,  $B_w$ ,  $E$ ,  $L$ ,  $L_d$  e  $L_w$  são constantes com dimensões apropriadas. Além disso, é definido o operador  $\mathcal{D}(x_\tau) = x(t) - Ex(t - \tau)$ .

Nesta seção é considerado o filtro do tipo Kalman/Luenberger dado por:

$$\dot{\hat{x}}(t) - E\dot{\hat{x}}(t - \tau) = A\hat{x}(t) + A_d \hat{x}(t - \tau) + K(y(t) - L\hat{x}(t) - L_d \hat{x}(t - \tau)),\tag{5.21}$$

sendo  $K$  o ganho do filtro a ser determinado.

Então, a dinâmica de erro de estimação é dada por:

$$\dot{\mathcal{D}}(\tilde{x}_\tau) = A^L \tilde{x}(t) + A_d^L \tilde{x}(t - \tau) + B_w^L w(t)\tag{5.22}$$

com  $\tilde{x}(t) \triangleq x(t) - \hat{x}(t)$ ,  $\mathcal{D}(\tilde{x}_\tau) \triangleq \tilde{x}(t) - E\tilde{x}(t - \tau)$  e

$$A^L = A - KL, \quad A_d^L = A_d - KL_d, \quad B_w^L = B_w - KL_w.\tag{5.23}$$

Ademais, o erro de estimação é definido como  $z(t) \triangleq C(x(t) - \hat{x}(t))$ , no qual  $C$  é uma matriz constante, então,

$$\tilde{z}(t) = C\tilde{x}(t).\tag{5.24}$$

Para o filtro a ser projetado é considerado o índice de desempenho  $\mathcal{H}_\infty$  de  $w(t)$  para  $\tilde{z}(t)$ . Na seqüência são apresentadas condições suficientes para se projetar filtros do tipo Kalman/Luenberger com índice de desempenho  $\mathcal{H}_\infty$ , para sistemas do tipo neutro precisamente conhecidos como em (5.20).

**Teorema 5.2** *Considere o sistema do tipo neutro em (5.20) com o operador  $\mathcal{D}(\tilde{x}_\tau)$  estável para todo domínio de incertezas. Sejam dados  $\tau > 0$ , um escalar referente ao retardo no tempo,  $\delta$ , um parâmetro de ajuste escalar,  $\gamma > 0$ , o nível de atenuação de distúrbios  $\mathcal{H}_\infty$ , e  $N$ , um inteiro positivo referente ao número de discretizações desejado. Então, o filtro em (5.21) com o ganho  $K = F^{-1}\bar{K}$  garante que a dinâmica de erro de estimação (5.22) é assintoticamente estável para o retardo no tempo  $\tau$  e nível de atenuação de distúrbios  $\gamma$  para todo  $w(t) \neq 0$ , se existirem matrizes de dimensão  $n_x \times n_x$ :  $F$ ,  $X$ ,  $Y$ ,  $P = P^T$ ,  $S_n = S_n^T$ ,  $Q_n$ ,  $R_{n,m} = R_{m,n}^T$  ( $n, m = 0, 1, \dots, N$ ), e uma matriz de dimensão  $n_x \times n_y$ :  $\bar{K}$ , tais que a LMI em (3.6) e a LMI abaixo sejam satisfeitas:*

$$\begin{bmatrix} \Xi^L & \begin{pmatrix} D^{na} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} D^{nb} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ * & -R_d - S_d & 0 \\ * & * & -3S_d \end{bmatrix} < 0,\tag{5.25}$$

com

$$\Xi^L = \begin{bmatrix} \text{sm}\{FA - \bar{K}L + X\} + S_0 & Y^T - X + Q_0^T & \delta(A^T F^T - L^T \bar{K}^T) - F & \dots \\ * & -Y - Y^T & P & \dots \\ * & * & -\delta(F + F^T) & \dots \\ * & * & * & \dots \\ * & * & * & \dots \\ * & * & * & \dots \\ \dots & FA_d - \bar{K}L_d - XE & FB_w - \bar{K}L_w & C^T \\ \dots & -Q_N - YE & 0 & 0 \\ \dots & \delta(FA_d - \bar{K}L_d) & \delta(FB_w - \bar{K}L_w) & 0 \\ \dots & -S_N & 0 & 0 \\ \dots & * & -\gamma^2 I & 0 \\ \dots & * & * & -I \end{bmatrix}, \quad (5.26)$$

$D^{na}$  e  $D^{nb}$  são ambos definidos em (3.38) e os termos  $R_d$  e  $S_d$  são definidos em (3.13) e (3.14), respectivamente.  $\square$

**Demonstração:** Deseja-se mostrar que se as LMIs em (3.6) e (5.25) são satisfeitas, então, o filtro em (5.21) com o ganho  $K = F^{-1}\bar{K}$  garante que a dinâmica de erro de estimação (5.22) é assintoticamente estável para o retardo no tempo  $\tau$  e nível de atenuação de distúrbios  $\gamma$  para todo  $w(t) \neq 0$ .

Note que, para verificar se a dinâmica de erro de estimação em (5.22), é assintoticamente estável, uma condição suficiente é verificar se a LMI em (3.6) e a LMI em (5.11) com

$$v = 1, \quad A^K = A^L, \quad A_d^K = A_d^L, \quad B_w = B_w^L, \quad C^K = C, \quad C_d^K = 0, \quad D_w = 0, \quad (5.27)$$

são satisfeitas.

Então, a LMI em (5.25) é obtida da desigualdade em (5.11) com as substituições em (5.27), as matrizes que definem o sistema de dinâmica de erro de estimação em (5.23), a escolha particular  $G = \delta F$ , sendo  $\delta$  um parâmetro de ajuste escalar, e definindo a nova variável linearizante  $\bar{K} = FK$ . Completando a demonstração.  $\blacksquare$

Na próxima seção são apresentadas condições para o projeto de filtros para sistemas do tipo neutro incerto.

### 5.3 Filtros $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas incertos

O problema de filtragem considerado nesta seção é apresentado na Figura 5.2, sendo que, o sistema  $S$  corresponde ao sistema do tipo neutro:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) - E(\sigma)\dot{x}(t-r) &= A(\sigma)x(t) + A_d(\sigma)x(t-d(t)) + B_w(\sigma)w(t) \\ z(t) &= C(\sigma)x(t) + C_d(\sigma)x(t-\tau) + D_w(\sigma)w(t) \\ y(t) &= L(\sigma)x(t) + L_d(\sigma)x(t-\tau) + L_w(\sigma)w(t) \\ x(t) &= \phi(t) \quad \forall t \in [-\max\{r, d(t)\}, 0] \end{aligned} \quad (5.28)$$

com  $r \geq 0$ ,  $\tau > 0$  e  $d(t) = \tau + \eta(t) > 0$  retardos no tempo,  $\phi(t) \in \mathcal{C}_{\max\{r, d(t)\}}^{n_x}$  a condição inicial,  $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$  o vetor de estado,  $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$  a entrada de distúrbios,  $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$  a saída controlada e  $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$  é a saída medida. As matrizes do sistema têm dimensões apropriadas e podem ser incertas. Nesse caso, define-se uma matriz  $\mathcal{G}(\sigma)$ , que agrega todas essas matrizes, da seguinte forma

$$\mathcal{G}(\sigma) \triangleq \begin{bmatrix} A(\sigma) & A_d(\sigma) & B_w(\sigma) & E(\sigma) \\ C(\sigma) & C_d(\sigma) & D_w(\sigma) & 0 \\ L(\sigma) & L_d(\sigma) & L_w(\sigma) & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.29)$$

tal que:  $\mathcal{G}(\sigma) \in \mathcal{P}$ . O conjunto politópico  $\mathcal{P}$  é dado em (4.2).

Para a estimativa  $\hat{z}(t)$  do sinal  $z(t)$ , é projetado um filtro  $\mathcal{F}$ , com a seguinte descrição

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A_f \hat{x}(t) + A_{\tau f} \hat{x}(t - \tau) + B_f y(t) \\ \hat{z}(t) &= C_f \hat{x}(t) + C_{\tau f} \hat{x}(t - \tau) + D_f y(t) \\ \hat{x}(t) &= 0, \forall t \in [-\tau, 0] \end{aligned} \quad (5.30)$$

com  $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^{n_f}$ , sendo as matrizes  $A_f$ ,  $A_{\tau f}$ ,  $B_f$ ,  $C_f$ ,  $C_{\tau f}$ , e  $D_f$ , parâmetros do filtro a serem determinados. Note que, o filtro acima não considera o valor exato do retardo variante no tempo,  $d(t)$ , e sim o valor nominal deste retardo,  $\tau$ .

Agora considerando a identidade  $x(t - d(t)) = x(t - \tau) - \int_{d(t)}^{\tau} \dot{x}(t - \xi) d\xi$ , o sistema aumentado obtido pela conexão do sistema  $\mathcal{S}$  com filtro  $\mathcal{F}$ , pode ser descrito como:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= \tilde{A}(\sigma) \tilde{x}(t) + \tilde{A}_\tau(\sigma) \tilde{x}(t - \tau) + \tilde{E}(\sigma) \dot{\tilde{x}}(t - r) + \tilde{B}(\sigma) w(t) - \tilde{A}_d(\sigma) \int_{d(t)}^{\tau} \dot{\tilde{x}}(t - \xi) d\xi \\ \tilde{z}(t) &= \tilde{C}(\sigma) \tilde{x}(t) + \tilde{C}_\tau(\sigma) \tilde{x}(t - \tau) + \tilde{D}(\sigma) w(t) \end{aligned} \quad (5.31)$$

com  $\tilde{x}(t) \triangleq [x^T(t) \quad x^T(t) - \hat{x}^T(t)]^T$ ,  $\tilde{z}(t) \triangleq z(t) - \hat{z}(t)$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{A}(\sigma) &= \begin{bmatrix} A(\sigma) & 0 \\ A(\sigma) - B_f L(\sigma) - A_f & A_f \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_\tau(\sigma) = \begin{bmatrix} A_d(\sigma) & 0 \\ A_d(\sigma) - B_f L_\tau(\sigma) - A_{\tau f} & A_{\tau f} \end{bmatrix}, \\ \tilde{E}(\sigma) &= \begin{bmatrix} E(\sigma) & 0 \\ E(\sigma) & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}(\sigma) = \begin{bmatrix} B(\sigma) \\ B(\sigma) - B_f L_w(\sigma) \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_d(\sigma) = \begin{bmatrix} A_d(\sigma) & 0 \\ A_d(\sigma) & 0 \end{bmatrix}, \\ \tilde{C}(\sigma) &= [C(\sigma) - D_f L(\sigma) - C_f \quad C_f], \quad \tilde{C}_\tau(\sigma) = [C_\tau(\sigma) - D_f L_\tau(\sigma) - C_{\tau f} \quad C_{\tau f}], \end{aligned} \quad (5.32)$$

e  $\tilde{D}(\sigma) = D(\sigma) - D_f L_w(\sigma)$ . Ademais, define-se o operador discreto  $\mathcal{D}(\tilde{x}_r, \sigma) = \dot{\tilde{x}}(t) - E(\sigma) \dot{\tilde{x}}(t - r)$ .

Portanto, o problema de projeto de filtro robusto considerado tem como objetivo obter a estimativa  $\hat{z}(t)$  do sinal  $z(t)$ , tal que, para um dado retardo no tempo, deve-se assegurar um nível pré-especificado de atenuação de distúrbios  $\mathcal{H}_\infty$ . A seguir são apresentadas condições suficientes para resolver este problema.

**Teorema 5.3** *Considere o sistema do tipo neutro incerto em (5.1) invariante no tempo com o operador  $\mathcal{D}(\tilde{x}_r, \sigma)$  estável,  $r \in [0, \infty)$ ,  $d(t) \in [\tau - \mu, \tau + \mu]$  e suponha que suas matrizes pertençam a matriz  $\mathcal{G}(\sigma)$  definida em (5.29) com  $\mathcal{G}(\sigma) \in \mathcal{P}$  (4.2). Sejam dados  $\tau > 0$ , um escalar referente*



ao valor nominal, e  $\mu \geq 0$ , um limitante superior para a perturbação do retardo no tempo  $d(t)$ ,  $\delta_1$  e  $\delta_2$ , parâmetros de ajustes escalares,  $\gamma > 0$ , o nível de atenuação de distúrbios  $\mathcal{H}_\infty$ , e  $N$ , um inteiro positivo referente ao número de discretizações desejado. Então, o filtro em (5.30) com  $A_f = G_2^{-1}\bar{A}_f$ ,  $A_{\tau f} = G_2^{-1}\bar{A}_{\tau f}$ ,  $B_f = G_2^{-1}\bar{B}_f$ ,  $C_f = \bar{C}_f$ ,  $C_{\tau f} = \bar{C}_{\tau f}$ ,  $D_f = \bar{D}_f$  garante que a dinâmica de erro de estimação (5.31) é assintoticamente estável para os retardos no tempo  $r \in [0, \infty)$  e  $d(t) \in [\tau - \mu, \tau + \mu]$  e nível de atenuação de distúrbios  $\gamma$  para todo  $w(t) \neq 0$ , se existirem matrizes de dimensões apropriadas<sup>2</sup>:  $\bar{A}_f, G_2, \bar{B}_f, \bar{C}_f, \bar{D}_f, F_1, G_1, P^v = P^{v,T}, Q_v^v, R_{n,m}^v = R_{m,n}^{v,T}, S_n^v = S_n^{v,T}, U^v = U^{v,T}, Z^v = Z^{v,T}$ , ( $v = 0, 1, \dots, \kappa$ )( $n, m = 0, 1, \dots, N$ ), tais que a LMI em (4.12) e a seguinte LMI sejam satisfeitas:

$$\begin{bmatrix} \Xi_v^F & \begin{pmatrix} D^{pa,v} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} D^{pb,v} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ * & -R_d^v - S_d^v & 0 \\ * & * & -3S_d^v \end{bmatrix} < 0, \quad (5.33)$$

nas quais  $v$  representa os vértices do politopo  $\mathcal{P}$  ( $v = 1, 2, \dots, \kappa$ ),  $\Xi_v^F = [\Xi_{v(p,q)}^F]$  para  $0 \leq p, q \leq 7$ , sendo  $\Xi_{v(p,q)}^F$  nas posições  $(p, q)$  de  $\Xi_v^F$ , cujos elementos não nulos são dados por:

$$\begin{aligned} \Xi_{v(1,1)}^F &= \text{sm}\{F_1 A_v \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_\delta [G_2 A_v - \bar{B}_f L_v] \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_\delta \bar{A}_f (\mathcal{I}_2 - \mathcal{I}_1) + Q_{0,v}\} + S_{0,v}, \\ \Xi_{v(1,2)}^F &= \{G_1 A_v \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_I [G_2 A_v - \bar{B}_f L_v] \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_I \bar{A}_f (\mathcal{I}_2 - \mathcal{I}_1)\}^T - F_1 \mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_\delta G_2 \mathcal{I}_2 + P_v, \\ \Xi_{v(1,3)}^F &= F_1 A_{d,v} \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_\delta [G_2 A_{d,v} - \bar{B}_f L_{\tau,v}] \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_\delta \bar{A}_{\tau f} (\mathcal{I}_2 - \mathcal{I}_1) - Q_{N,v}, \\ \Xi_{v(1,4)}^F &= (F_1 + \mathcal{I}_\delta G_2) E_v \mathcal{I}_1, \\ \Xi_{v(1,5)}^F &= \mu (F_1 + \mathcal{I}_\delta G_2) A_{d,v} \mathcal{I}_1 \\ \Xi_{v(1,6)}^F &= F_1 B_v + \mathcal{I}_\delta [G_2 B_v - \bar{B}_f L_{w,v}] \\ \Xi_{v(1,7)}^F &= \mathcal{I}_1^T [C_v^T - L_v^T \bar{D}_f^T] + (\mathcal{I}_2^T - \mathcal{I}_1^T) \bar{C}_f^T, \\ \Xi_{v(2,2)}^F &= \text{sm}\{\mu Z_v - G_1 \mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_I G_2 \mathcal{I}_2\} + U_v, \\ \Xi_{v(2,3)}^F &= G_1 A_{d,v} \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_I [G_2 A_{d,v} - \bar{B}_f L_{\tau,v}] \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_I \bar{A}_{\tau f} (\mathcal{I}_2 - \mathcal{I}_1), \\ \Xi_{v(2,4)}^F &= (G_1 + \mathcal{I}_I G_2) E_v \mathcal{I}_1 \\ \Xi_{v(2,5)}^F &= \mu (G_1 + \mathcal{I}_I G_2) A_{d,v} \mathcal{I}_1 \\ \Xi_{v(2,6)}^F &= G_1 B_v + \mathcal{I}_I [G_2 B_v - \bar{B}_f L_{w,v}], \\ \Xi_{v(3,3)}^F &= -S_{N,v} \\ \Xi_{v(3,7)}^F &= \mathcal{I}_1^T [C_{\tau,v}^T - L_{\tau,v}^T \bar{D}_f^T] + (\mathcal{I}_2^T - \mathcal{I}_1^T) \bar{C}_{\tau f}^T, \\ \Xi_{v(4,4)}^F &= -U_v \\ \Xi_{v(5,5)}^F &= -Z_v \\ \Xi_{v(6,6)}^F &= -\gamma^2 I \\ \Xi_{v(6,7)}^F &= D^T - L_w^T \bar{D}_f^T \\ \Xi_{v(7,7)}^F &= -I \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Dimensões:  $\bar{A}_f, \bar{A}_{\tau f}, G_2 \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ ,  $\bar{B}_f \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y}$ ,  $\bar{C}_f \in \mathbb{R}^{n_z \times n_x}$ ,  $\bar{D}_f \in \mathbb{R}^{n_z \times n_y}$ ,  $F_1, G_1 \in \mathbb{R}^{2n_x \times n_x}$ ,  $P^v = P^{v,T}$ ,  $Q_i^v, R_{i,j}^v = R_{j,i}^{v,T}$ ,  $S_i^v = S_i^{v,T}$ ,  $U^v = U^{v,T}$ ,  $Z^v = Z^{v,T}$ ,  $\in \mathbb{R}^{2n_x \times 2n_x}$ .

com

$$\mathcal{I}_\delta = \begin{bmatrix} \delta_1 I \\ \delta_2 I \end{bmatrix}, \quad \mathcal{I}_I = \begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix}, \quad \mathcal{I}_1 = [ I \quad 0 ], \quad \mathcal{I}_2 = [ 0 \quad I ]. \quad (5.34)$$

Os termos  $D^{pa,v}$  e  $D^{pb,v}$  são definidos como  $D^{pa}$  e  $D^{pb}$ , ambos em (3.12), e os termos  $R_d^v$  e  $S_d^v$  definidos como  $R_d$  e  $S_d$  em (3.13) e (3.14), respectivamente, adicionando o índice sobrescrito  $v$  em todas as matrizes.  $\square$

**Demonstração:** Inicialmente, é demonstrado que se as LMIs em (4.12) e (5.33) são satisfeitas, então, a dinâmica do erro de filtragem em (5.31) com as matrizes do filtro dadas da forma em (5.32) é assintoticamente estável. Neste caso, as condições dadas no Teorema 4.4 também são satisfeitas. O primeiro passo é definir a seguinte estrutura para as matrizes  $F$  e  $G$  no Teorema 4.4,

$$F = [F_1 \quad \mathcal{I}_\delta G_2], \quad G = [G_1 \quad \mathcal{I}_I G_2], \quad (5.35)$$

sendo,  $F_1$ ,  $G_1$  matrizes  $2n_x \times n_x$ ,  $G_2$  uma matriz  $n_x \times n_x$ ,  $\mathcal{I}_I$  e  $\mathcal{I}_\delta$  definidos em (5.34). É possível demonstrar por meio de transformações de congruência que a escolha acima para  $G$  é sem perda de generalidade [13].

Considerando que as LMIs em (4.12) e (4.22) são satisfeitas, com  $F$  e  $G$  dadas como em (5.35), implica que a matriz  $G_2$  é não-singular. Portanto, sendo dadas as matrizes  $F$  e  $G$  em (5.35) e  $\tilde{A}(\sigma)$ ,  $\tilde{A}_d(\sigma)$  e  $\tilde{E}(\sigma)$  em (5.32), nota-se que se as LMIs em (4.12) e (5.33) são satisfeitas, então, as LMIs no Teorema 4.4 também são satisfeitas.

Para o critério  $\mathcal{H}_\infty$ , note que, se (5.31) é estável, considerando condições iniciais nulas, i.e.,  $V(\tilde{x}_t)|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow 0$  e  $V(\tilde{x}_t)|_{\phi(t)=0} = 0$ , respectivamente, para todo  $w(t) \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$ , tem-se:

$$\begin{aligned} J(t) &\leq \int_0^\infty [\tilde{z}^T(t)\tilde{z}(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t)] dt + V(\tilde{x}_t)|_{t \rightarrow \infty} - V(\tilde{x}_t)|_{\phi(t)=0} \\ &= \int_0^\infty [\tilde{z}^T(t)\tilde{z}(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) + \dot{V}(\tilde{x}_t)] dt. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Por meio dos mesmos passos utilizados no Teorema 4.4, no entanto, utilizando-se um termo nulo com base no sistema em (5.31), escolhendo  $F$  e  $G$  como em (5.35), utilizando as matrizes do erro de filtragem em (5.32) e, finalmente, aplicando o complemento de Schur, obtém-se a LMI em (5.33).  $\blacksquare$

Na próxima seção são apresentados exemplos numéricos que ilustram a eficiência dos resultados apresentados neste capítulo.

## 5.4 Exemplos numéricos

Nesta seção são utilizados três exemplos numéricos para mostrar a eficiência dos métodos propostos. O primeiro aborda o problema de projeto de controladores  $\mathcal{H}_\infty$  por realimentação de estados, o segundo, o problema de projeto de filtros do tipo Kalman/Luenberger  $\mathcal{H}_\infty$  e o terceiro, o problema de projeto de filtros robustos com índice de desempenho  $\mathcal{H}_\infty$ .

### 5.4.1 Projeto de controladores $\mathcal{H}_\infty$ por realimentação de estados

O exemplo a seguir considera um sistema muito estudado na literatura, sendo que os resultados obtidos pelo método proposto serão comparados com outros da literatura.

**Exemplo 5.1** Considere o seguinte sistema sujeito a retardo no tempo:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + A_d x(t - \tau) + B_u u(t) + D_w w(t) \\ z(t) &= Cx(t) + D_u u(t)\end{aligned}\quad (5.37)$$

com

$$\begin{aligned}A &= \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a+1 \end{bmatrix}, & A_d &= \begin{bmatrix} b-1 & -1 \\ 0 & b-0.9 \end{bmatrix}, & B_u &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, & B_w &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ C &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, & C_d &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}, & D_u &= 0.1, & D_w &= 0.\end{aligned}$$

Inicialmente, considerando-se  $a = b = 0$ , i.e., um sistema precisamente conhecido, considere o problema de se obter um controlador  $u(t) = Kx(t)$ , dado um retardo no tempo  $\tau$ , que minimiza o índice de desempenho  $\mathcal{H}_\infty, \gamma$ .

Para  $\tau = 0.999$  são apresentados, na Tabela 5.1, os resultados obtidos via método proposto no Corolário 5.1, com  $N = 3$  e diferentes valores para  $\delta$ . Além disso, na Tabela 5.2 são apresentados alguns resultados obtidos por meio de alguns métodos na literatura.

Tabela 5.1: Ganho do controlador,  $K$ , e diferentes índices de desempenho  $\mathcal{H}_\infty, \gamma$ , obtidos via Corolário 5.1, com  $N = 3$  e diferentes valores para  $\delta$ . Exemplo 5.1.

$\delta$	0.1	0.5	1	2	10
$\gamma$	$9.1761 \times 10^{-5}$	$7.8689 \times 10^{-5}$	$1.0899 \times 10^{-4}$	$1.8593 \times 10^{-4}$	0.0012
$K^T$	$\begin{bmatrix} -7.6989 \\ -11.7380 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1.8821 \\ -4.6616 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1.0849 \\ -4.2821 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.8242 \\ -4.1619 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1.7785 \\ -8.5569 \end{bmatrix}$

Tabela 5.2: Ganho do controlador,  $K$ , e diferentes índices de desempenho  $\mathcal{H}_\infty, \gamma$ , obtidos por meio de alguns métodos da literatura. Exemplo 5.1.

	Cor. 3.2 em [12]	Lema 3.1 em [19] e Cor. 6 em [21]	Teor. 3.2 em [57]
$\gamma$	1.8822	0.2284	0.2
$K$	$[-0.10452 \quad -749058]$	$[0 \quad -182194]$	$[-0.00023 \quad -14.6794]$

Agora, fazendo-se um outro estudo com o objetivo de encontrar um controlador  $\mathcal{H}_\infty$  tal que o sistema realimentado suporte o maior retardo no tempo possível, obtém-se a Tabela 5.3, na qual são apresentados os resultados obtidos via método proposto no Corolário 5.1 e via alguns métodos na literatura. Além disso, a Tabela 5.4 é obtida aplicando o Corolário 5.1, com  $\delta = 1, N = 1$  e diferentes valores para  $\tau$ .

A seguir, considera-se o caso em que o sistema em (5.37) é incerto, com  $|a| \leq 0.2, |b| \leq 0.2$  e  $D_u = 0$ , da mesma forma como feito em [56]. Então, assumindo-se o problema de obter um controlador  $\mathcal{H}_\infty$  estabilizante, para o máximo retardo no tempo possível  $\tau$ , e para o mínimo nível

Tabela 5.3: Ganho do controlador,  $K$ , e diferentes índices de desempenho  $\mathcal{H}_\infty$ ,  $\gamma$ , obtidos por meio de alguns métodos da literatura. Exemplo 5.1.

	Cor. 3.2 em [12]	Lema 3.1 em [19]	Teor. 5 em [21]	Teor. 3.2 em [57]	Cor. 5.1 $N=1, \delta=100$
$\tau$	0.9990	1.28	1.408	6	183
$\gamma$	1.8822	0.18	106.1506	19.12	$3.8293 \times 10^3$
$K$	$\begin{bmatrix} -0.10452 \\ -749058 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -130.38 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -156.36 \\ -1439.66 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -279.35 \\ -343.63 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1.1709 \\ -1.1754 \end{bmatrix} \times 10^3$

Tabela 5.4: Alguns resultados obtidos por meio do Corolário 5.1, com  $\delta = 1$  e  $N = 1$ . Exemplo 5.1.

$\tau$	1.408	6	10
$\gamma$	$1.1351 \times 10^{-4}$	0.0039	0.0272
$K$	$[-1.5230 \quad -4.3115]$	$[-67.9239 \quad -74.1023]$	$[-463.5978 \quad -477.8049]$

de atenuação de distúrbios  $\gamma$ . A Tabela 5.5 apresenta os resultados obtidos aplicando o Corolário 5.1 levando-se e não levando-se em conta a conceito de estabilidade quadrática (EQ), em ambos casos com  $N = 2$ ,  $\delta = 1$ . A Tabela 5.5 também apresenta os resultados obtidos pelos métodos em [20, 22, 56].

Como ilustração, considere o retardo no tempo  $\tau = 1.1$  (melhor resultado obtido em [56]). Aplicando o Corolário 5.1 com  $N = 2$  e  $\delta = 1$ , obtém-se os resultados:  $\gamma = 1.6475 \times 10^{-4}$  e  $K = [-4.9392 \quad -15.8932]$ . Por outro lado, levando em conta o conceito de EQ, são obtidos:  $\gamma = 0.0010$  e  $K = [-1.2439 \quad -4.6941]$ .

Tabela 5.5: Máximo retardo no tempo obtido para o sistema incerto (5.1), via vários métodos. Exemplo 5.1.

	$\tau$	$\gamma$	$K$
Fridman e Shaked (2002) [20]	1.0512	$1.09 \times 10^4$	$[-0.4061 \quad -2.8622] \times 10^9$
Fridman e Shaked (2003) [22]	1.0496	$1.42 \times 10^4$	$[-0.4161 \quad -3.1458] \times 10^9$
Palhares et al (2005) [56]	1.1	25.1814	$[-7.6949 \quad -26.1233]$
Corolário 5.1 via EQ <sup>†</sup> , $N=2, \delta=1$	1.4410	0.0349	$[-172.4762 \quad -329.6928]$
Corolário 5.1, $N=2, \delta=1$	1.8634	44.5675	$[-347.3115 \quad -581.8803]$

<sup>†</sup> Fixando-se as matrizes do funcional para todos os vértices do politopo.

## 5.4.2 Projeto de filtros do tipo Kalman/Luenberger com índice $\mathcal{H}_\infty$

O exemplo a seguir considera um sistema do tipo neutro também estudado em um recente trabalho da literatura [99]. Os índices obtidos por meio do método proposto são comparados com os resultados obtidos em [99]. Além disso, diagramas de valores singulares são utilizados, os quais sugerem que o método proposto é pouco conservador.

**Exemplo 5.2** Considere o sistema do tipo neutro em (5.20) com a saída controlada dada em (5.24) e com as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad B_w = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.05 \\ 0.02 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T, \quad L_d = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}^T, \quad L_w = 1, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}^T.$$

A análise se dará da forma: dado um  $\gamma$ , projete um filtro do tipo Kalman/Luenberger como em (5.21), para o retardo no tempo máximo  $\tau_{max}$ , de forma que o erro de estimação seja assintoticamente estável. A título de comparação utiliza-se a Proposição 2 em [99].

A Tabela 5.6 apresenta os resultados obtidos em [99] e via Teorema 5.2, com  $N = \delta = 1$ .

As figuras 5.3 e 5.4 apresentam os diagramas dos valores singulares máximos para o filtro projetado com  $\tau = 0.9765$ . Pode-se notar que o nível de atenuação  $\gamma_a = 0.190$  é assegurado. Além disso, o filtro proposto para, por exemplo,  $\tau = 561453000.5124$  assegura o nível de atenuação  $\gamma_a \approx 0.2822$ . Como um último teste, a Figura 5.5 apresenta o diagrama de valores singulares considerando o filtro projetado para  $\tau = 0.9765$ , porém, utilizando o retardo no tempo  $\tau = 1.1350$ , neste caso  $\gamma_a = 0.2001$ , o que não garante o nível de atenuação pré-definido.

Tabela 5.6: Retardos no tempo máximos  $\tau_{max}$  e os correspondentes ganhos do filtro  $K$  para diferentes valores de  $\gamma$ .

Proposição 2 em [99]		
$\gamma$	$\tau_{max}$	$K^T$
1	5.2363	[0.5773 - 0.2403]
0.5	2.2495	[0.7067 - 0.3312]
0.3	1.1276	[0.7830 - 0.3510]
0.2	0.5856	[1.0832 - 0.6517]
Teorema 5.2 com $N = \delta = 1$		
$\gamma$	$\tau_{max}$	$K^T$
1	35636179989.9998	[0.7750 - 0.1798]
0.5	6706467003.5034	[0.8587 - 0.2352]
0.3	561453000.5124	[1.1921 - 0.4658]
0.2	0.9765	[0.7585 - 0.3487]

### 5.4.3 Projeto de filtros robustos com índice de desempenho $\mathcal{H}_\infty$

No seguinte exemplo estuda-se o problema de filtros robustos com índice de desempenho  $\mathcal{H}_\infty$ , para um sistema incerto do tipo neutro, como em (5.28), quando  $E(\sigma)$  incerta. Não foi encontrado outro método na literatura, com este tipo de configuração. Então, para ilustrar a eficiência de parte dos resultados obtidos apresenta-se simulações temporais das trajetórias do sistema e do filtro projetado.

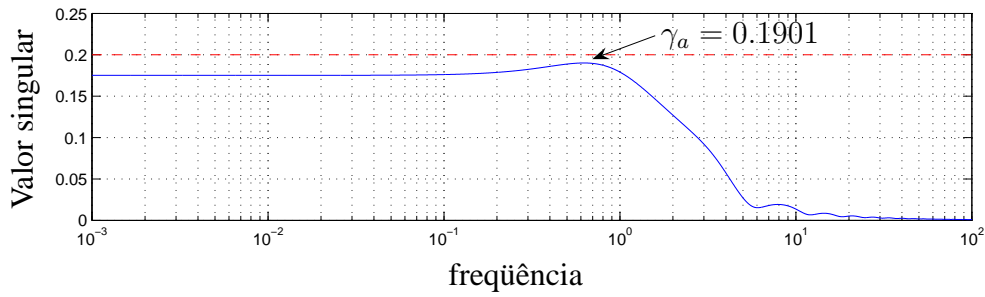


Figura 5.3: Diagrama do valor singular máximo para as dinâmicas de erro de estimação em (5.22) com  $\tau = 0.9765$  e  $K^T = [0.7585 \quad -0.3487]$ . Exemplo 5.2.

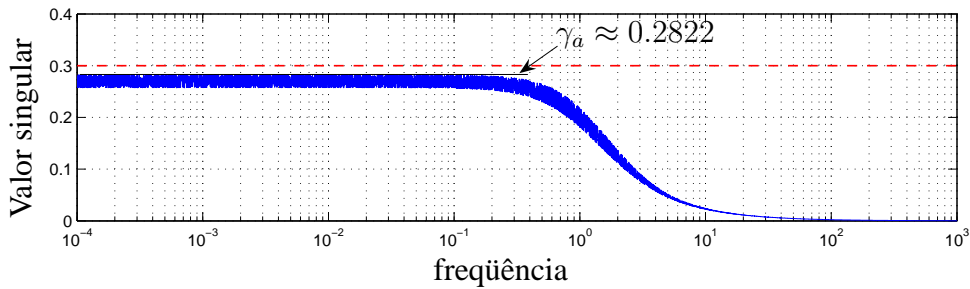


Figura 5.4: Diagrama do valor singular máximo para as dinâmicas de erro de estimação em (5.22) com  $\tau = 561453000.5124$  e  $K^T = [1.1921 \quad -0.4658]$ . Exemplo 5.2.

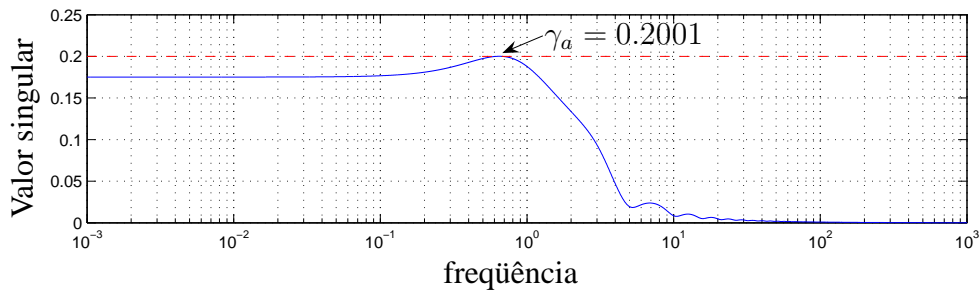


Figura 5.5: Diagrama do valor singular máximo para as dinâmicas de erro de estimação em (5.22) com  $\tau = 1.1350$  e  $K^T = [0.7585 \quad -0.3487]$ . Exemplo 5.2.

Além disso, aproveita-se este exemplo para ilustrar como os métodos de projeto propostos neste capítulo permitem obter resultados diferenciados, se forem feitas escolhas apropriadas para os parâmetros  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  e  $N$ .

**Exemplo 5.3** Considere o seguinte sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} \rho-2 & 0 \\ 0 & \rho-0.9 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \rho-1 & 0 \\ -1 & \rho-1 \end{bmatrix} x(t-d(t)) + \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{bmatrix} \dot{x}(t-r) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} w(t) \\ z(t) &= \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

sendo  $\rho$  um parâmetro incerto.

Inicialmente, supõe-se  $\rho = 0$  e  $d(t)$  constante, i.e  $d(t) = \tau$ . O objetivo é projetar um filtro  $\mathcal{H}_\infty$  para o retardo no tempo máximo  $\tau_{max}$ . Então, aplicando o Teorema 5.3 com  $\delta_1 = \delta_2 = 1$ ,  $\mu = 0$  e  $1 \leq N \leq 3$ , obtém-se:  $\tau_{max}^{N=1} = 6.0593$  e  $\gamma_{min}^{N=1} = 0.0110$ ;  $\tau_{max}^{N=2} = 6.1655$  e  $\gamma_{min}^{N=2} = 1.2689$ ;  $\tau_{max}^{N=3} = 6.1710$  e  $\gamma_{min}^{N=3} = 1.8887$ . Portanto, aumentando o número de discretizações  $N$  o Teorema 5.3 gera resultados menos conservadores.

Por outro lado, pode-se analisar a influência da seleção dos parâmetros de ajuste  $\delta_1$  e  $\delta_2$ . Aplicando o Teorema 5.3 com  $N = \delta_1 = \delta_2 = 1$ ,  $\tau = 4$  e  $\mu = 0.2$ , obtém-se:  $\gamma_{min} = 4.3522 \times 10^{-5}$ ,

$$\begin{aligned} A_f &= \begin{bmatrix} -1.4399 & 0.0012 \\ -1.3928 & -0.0057 \end{bmatrix} \times 10^{14}, & A_{\tau f} &= \begin{bmatrix} -1.2016 & -0.0019 \\ -1.2211 & -1.0179 \end{bmatrix}, \\ B_f &= \begin{bmatrix} 5.7596 & -0.0247 \\ 5.5711 & 0.1130 \end{bmatrix} \times 10^{13}, & C_f &= \begin{bmatrix} 0.4873 & 0.0029 \end{bmatrix} \times 10^{-8}, \\ C_{\tau f} &= \begin{bmatrix} -0.3650 & 0.0071 \end{bmatrix} \times 10^{-13}, & D_f &= \begin{bmatrix} 0.2000 & 2.0000 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Apesar do filtro projetado acima garantir um bom nível de atenuação de distúrbios  $\gamma_{min}$ , os altos ganhos nas matrizes  $A_f$  e  $B_f$  são indesejáveis.

Este problema pode ser superado ajustando os valores dos parâmetros  $\delta_1$  e  $\delta_2$ . Por exemplo, escolhendo  $\delta_1 = 1$  e  $\delta_2 = 100$ , obtém-se:  $\gamma_{min} = 8.5598 \times 10^{-6}$ ,

$$\begin{aligned} A_f &= \begin{bmatrix} -227.7698 & 3.8622 \\ -252.7580 & -68.6506 \end{bmatrix}, & A_{\tau f} &= \begin{bmatrix} -2.1861 & 0.0109 \\ -3.8437 & -1.6319 \end{bmatrix}, \\ B_f &= \begin{bmatrix} 45.7072 & -3.9101 \\ 51.3307 & 67.7912 \end{bmatrix}, & C_f &= \begin{bmatrix} 0.7246 & 0.2830 \end{bmatrix} \times 10^{-9}, \\ C_{\tau f} &= \begin{bmatrix} 0.1684 & 0.0252 \end{bmatrix} \times 10^{-10}, & D_f &= \begin{bmatrix} 0.2000 & 2.0000 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Para verificar o desempenho do filtro em (5.38), as respostas temporais do sistema e filtro são apresentadas nas figuras 5.6 e 5.7. Para esta simulação, o retardo no tempo do sistema assume a forma  $d(t) = 4 + 0.2 \cos(t)$  e o retardo no tempo para o filtro é escolhido como  $\tau = 4$ ;  $w(t)$  é escolhido como um sinal aleatório, com magnitude no intervalo  $[-1, 1]$  para todo  $t \in [0, 5]$  e as condições iniciais do sistema são escolhidas como  $\phi(t) = [\cos(t) \quad -\cos(t)]^T$ , para todo  $t \in [-4.2, 0]$ .

Analisando o sistema no contexto incerto com  $|\rho| < 0.2$  e o retardo no tempo  $d(t) = \tau + \eta(t)$ ,  $|\eta(t)| \leq \mu < \tau$ , pode-se checar qual o maior intervalo para o retardo no tempo  $d(t) \in [\tau - \mu, \tau + \mu]$ , dado  $\mu$ , tal que exista um filtro  $\mathcal{H}_\infty$  para o sistema do tipo neutro sujeito a retardos no tempo mistos. Aplicando o Teorema 5.3, obtém-se os resultados apresentados na Tabela 5.7. Note que o Teorema 5.3 garante que o sistema de erro de filtragem em (5.31) seja assintoticamente estável para todo retardo

no tempo  $r \in [0, \infty)$ .

Tabela 5.7: Intervalos máximos para o retardo no tempo,  $d(t) \in [\tau_{max}-\mu, \tau_{max}+\mu]$ , com os respectivos índices de desempenho  $\mathcal{H}_\infty$ ,  $\gamma_{min}$ , obtidos utilizando o Teorema 5.3 com  $N = 1$ ,  $\delta_1 = \delta_2 = 1$  e diferentes valores para  $\mu$ . Exemplo 5.3.

$\mu$	0	0.10	0.20	0.30	0.40	0.45
$\tau_{max}$	3.0932	2.6701	2.0132	1.3480	0.7681	0.5239
$\gamma_{min}$	0.0717	0.0826	0.0431	0.0182	0.0045	0.0219

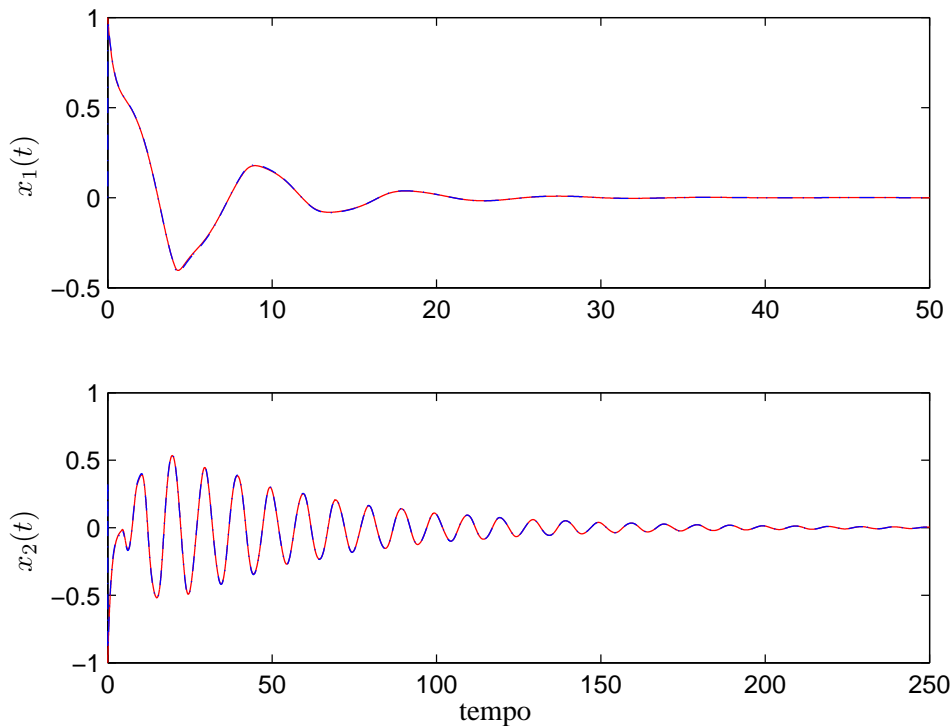


Figura 5.6: Respostas temporais do sistema (linha contínua) e do filtro (linha tracejada).

## 5.5 Conclusões do capítulo

Neste capítulo foram apresentados métodos para projeto de controladores e filtros, que garantem um nível pré-determinado de atenuação de distúrbios  $\mathcal{H}_\infty$ .

Destacam-se três vantagens dos métodos aqui propostos em relação a outros na literatura. A primeira é o fato de se mostram menos conservadores; a segunda é devido os teoremas 5.1 e 5.3 serem capazes de lidar com sistemas do tipo neutro com incertezas em todas as matrizes; e a terceira



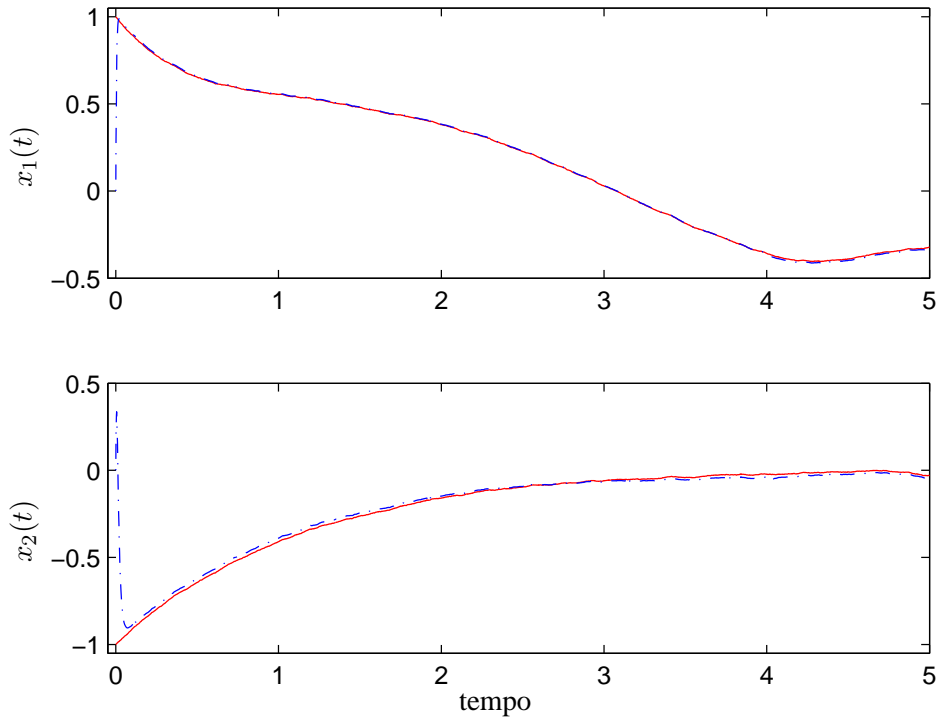


Figura 5.7: Respostas temporais do sistema (linha contínua) e do filtro (linha tracejada).

diz respeito, especificamente, a estrutura do filtro proposta na Seção 5.3, pois, a estrutura do filtro escolhida não depende do conhecimento exato do valor do retardo no tempo.

É importante salientar que os métodos propostos podem obter soluções melhores, se escolhas apropriadas forem feitas para os parâmetros  $\delta_1$  e  $\delta_2$  (δ Cor. 5.1) e um número maior de partições,  $N$ .

Note que os métodos de análise propostos no capítulo anterior foram facilmente estendidos para tratar problemas de projeto. Para comparação, veja a Proposição 5.22 em [27], a qual foi obtida da mesma forma que o Teorema 3.2, mas, sem utilizar o termo nulo. Assim, pode ser observado nessa proposição o grande número de produtos entre as matrizes do sistema e as matrizes do funcional, os quais aumentam quando se considera um número maior de partições  $N$ . Portanto, estender a Proposição 5.22 em [27] para o problema de projeto de controladores/filtros não é fácil, pois são gerados vários produtos entre diferentes variáveis de decisão, impossibilitando a formulação do problema baseado somente em termos de LMIs. Uma solução para o problema de projeto de controladores estabilizantes foi proposta por Gu e Han em [26], no qual a estratégia proposta consiste na utilização de um algoritmo iterativo, que é iniciado a partir de um controlador estabilizante dado.

# Capítulo 6

## Extensões para sistemas não-lineares

Neste capítulo são apresentadas condições de análise de estabilidade e projeto de controladores para alguns problemas relacionados a sistemas não-lineares com retardo no tempo.

O primeiro sistema não-linear tratado neste capítulo diz respeito a redes neurais artificiais analógicas. De maneira concisa, as RNAs são sistemas paralelos distribuídos compostos por unidades de processamento simples, que calculam determinadas funções matemáticas. A qualidade da RNA como sistema rápido é perdida quando implementadas em computadores. Para o máximo proveito do paralelismo das RNAs, a implementação em hardware é essencial [49]. Outra vantagem da implementação analógica é a ligação direta com as informações do mundo, ao passo que implementações digitais necessitam de rápidos conversores digitais para analógico e vice-versa. Um ponto relevante neste tema tem sido a análise do efeito do retardo no tempo no acoplamento/interconexão na rede.

Outro ponto pitoresco no contexto da presença do retardo no tempo é que sua presença, intencionalmente forçada em um sistema, pode beneficiar a estabilidade, desempenho ou, até mesmo, levar a dinâmicas mais sofisticadas. Um exemplo interessante é o sincronismo de lasers caóticos por realimentação de saída com memória, para transmissão de informação, os quais não exibem naturalmente comportamento caótico, mas, este pode ser induzido por realimentação de saída com memória (mais detalhes veja [80]).

Como último ponto neste capítulo, são apresentados também novas condições de análise de estabilidade e síntese de controladores para sistemas não-lineares aproximados por modelos nebulosos Takagi-Sugeno (TS). Para uma introdução sobre abordagem nebulosa TS veja [83].

### 6.1 Redes neurais artificiais analógicas

Hopfield em [35] mostrou que é possível relacionar redes neurais artificiais recorrentes com sistemas físicos, por meio de um “simples” circuito analógico, no qual, cada  $i$ -ésimo neurônio é representado por um circuito linear, que consiste de um resistor  $R_i$ , um capacitor  $C_i$ , uma fonte de corrente  $I_i$  e uma função de ativação não-linear de  $g_i(\cdot)$ . Entre o canal de comunicação de um  $j$ -ésimo neurônio e um  $i$ -ésimo neurônio há uma condutância  $w_{j,i} = 1/R_{j,i}$  e os neurônios são conectados através de uma junção aditiva de corrente, veja modelo ilustrativo na Figura 6.1. Assim, aplicando a *lei de Kirchoff*

das correntes nesse circuito, chega-se a seguinte equação diferencial:

$$\frac{dv_i(t)}{dt} = -\frac{v_i(t)}{C_i R_i} + \frac{1}{C_i} \sum_{j=1}^{n_n} w_{i,j} g_i(v_i(t)) + \frac{I_i}{C_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n_n. \quad (6.1)$$

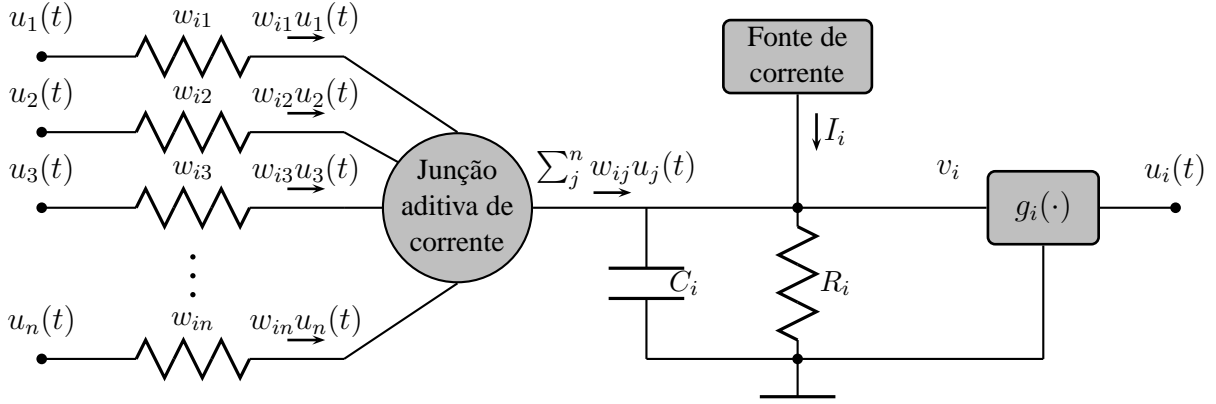


Figura 6.1: Modelo aditivo de um neurônio

No trabalho pioneiro de Marcus [50], introduziu-se um retardo no tempo constante  $\tau \geq 0$  em (6.1), obtendo:

$$\frac{dv_i(t)}{dt} = -\frac{v_i(t)}{C_i R_i} + \frac{1}{C_i} \sum_{j=1}^{n_n} w_{i,j} g_i(v_i(t - \tau)) + \frac{I_i}{C_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n_n. \quad (6.2)$$

No entanto, ao contrário do sistema descrito em (6.1), o sistema (6.2) tem um comportamento dinâmico mais realístico e complicado, devido à incorporação do retardo no tempo. Em [37] um novo termo foi considerado, de forma que, além do retardo no tempo na propagação dos sinais, o modelo da RNA inclui informação sobre a propagação instantânea dos sinais, sendo este um modelo mais geral,

$$\frac{dv_i(t)}{dt} = -\frac{v_i(t)}{C_i R_i} + \frac{1}{C_i} \sum_{j=1}^{n_n} w_{i,j}^0 g_i(v_i(t)) + \frac{1}{C_i} \sum_{j=1}^{n_n} w_{i,j}^1 g_i(v_i(t - \tau)) + \frac{I_i}{C_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n_n. \quad (6.3)$$

Sendo o objetivo nesta seção propor uma condição de análise de estabilidade de RNAs, por meio de abordagens do tipo LMI, o sistema acima é reescrito de forma mais apropriada, fazendo as mudanças de variáveis:  $a_i = 1/(R_i C_i)$ ,  $i = 1, \dots, n_n$ ,  $w_{i,j} = w_{i,j}/C_i$ ,  $i, j = 1, \dots, n_n$  e  $I_i = I_i/C_i$ ,  $i = 1, \dots, n_n$ .

Assim, a rede neural com retardo variante no tempo com  $n_n$  neurônios é equivalente a:

$$\frac{dv(t)}{dt} = -Av(t) + W_0 g(v(t)) + W_1 g(v(t - \tau)) + I, \quad (6.4)$$

na qual  $v(t) = [v_1(t), v_2(t), \dots, v_{n_n}(t)]^T \in \mathbb{R}^{n_n}$  é o vetor de estados da rede neural,  $A = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_{n_n}) \in \mathbb{R}^{n_n \times n_n}$  é uma matriz diagonal com elementos positivos,  $a_i > 0$ ,  $W_0 = (w_{i,j}^0) \in \mathbb{R}^{n_n \times n_n}$  e  $W_1 = (w_{i,j}^1) \in \mathbb{R}^{n_n \times n_n}$  são, respectivamente, pesos de conexão da matriz e os pesos de

conexão da matriz com o retardo,  $g(v(t)) = [g_1(v_1(t)), g_2(v_2(t)), \dots, g_{n_n}(v_{n_n}(t))]^T \in \mathbb{R}^{n_n}$  é a função de ativação dos neurônios com  $g(0) = 0$  e  $I = [I_1, I_2, \dots, I_{n_n}]^T \in \mathbb{R}^{n_n}$  é um vetor constante.

Outra característica importante sobre a RNA em (6.4) diz respeito à existência e unicidade da solução. Portanto, para que essa RNA tenha uma solução e que esta seja única, certas restrições são impostas às suas funções de ativação  $g(v(\cdot))$ . Para que exista uma solução, é suficiente que  $g(v(\cdot))$  seja contínua em todos seus argumentos. Entretanto, esta única restrição não garante a unicidade da solução. Portanto, para que isto aconteça, é imposto que  $g(\cdot)$  satisfaça a condição:

$$0 \leq \frac{g_j(v_1) - g_j(v_2)}{v_1 - v_2} \leq \bar{g}_j, \quad (6.5)$$

com  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$ ,  $v_1 \neq v_2$ ,  $\bar{g}_j \in \mathbb{R}_+$ ,  $g_j(0) = 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, n_n$ . A demonstração dessa afirmação é encontrada em [97]. Além disso, note que a condição em (6.5) é Lipschitz.

Hipóteses do tipo setor para funções de ativação são usualmente consideradas em trabalhos da literatura, veja por exemplo [1, 7, 8, 62, 96].

Considera-se, aqui, que o ponto fixo  $v^*$  do sistema (6.4) é deslocado para a origem por meio da transformação  $x = v - v^*$ . Como resultado dessa transformação, considera-se o estudo da estabilidade assintótica de RNAs com ponto fixo na origem e descrita como:

$$\dot{x}(t) = -Ax(t) + W_0 f(x(t)) + W_1 f(x(t - \tau)), \quad (6.6)$$

sendo que  $x = [x_1, x_2, \dots, x_{n_n}]^T \in \mathbb{R}^{n_n}$  é o vetor de estado do sistema transformado  $f(x) = [f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f_{n_n}(x_{n_n})]^T \in \mathbb{R}^{n_n}$  com  $f_i(x_i) = g_i(x_i + v_i^*) - g_i(v_i^*)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n_n$ , e  $\tau$  o retardo no tempo.

Portanto, considerando o sistema transformado em (6.6), a função de ativação  $f(\cdot)$  é limitada, crescente e satisfaz a seguinte condição.

**Hipótese 6.1** A função de ativação  $f(\cdot)$  é limitada e satisfaz:

$$0 \leq \frac{f_j(x)}{x} \leq \bar{g}_j, \quad (6.7)$$

sendo,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\bar{g}_j \in \mathbb{R}_+$ ,  $f_j(0) = 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, n_n$ . ✂

Note que a condição anterior é obtida fazendo  $v_1 = x + v^*$  e  $v_2 = v^*$  na condição em (6.5).

Uma condição suficiente para verificar a estabilidade assintótica da RNA em (6.6) é apresentada a seguir.

**Teorema 6.1** Considere a RNA sujeita a retardo no tempo em (6.6) e suponha que a Hipótese 6.1 seja satisfeita. Sejam dados  $\tau > 0$ , um escalar referente ao retardo no tempo, e  $N$ , um inteiro positivo referente ao número de discretizações desejado. Então, o sistema em (6.6) é assintoticamente estável se existirem matrizes de dimensão  $n_n \times n_n$ :  $F$ ,  $G$ ,  $P = P^T$ ,  $S_n = S_n^T$ ,  $Q_n$ ,  $R_{n,m} = R_{m,n}^T$  ( $n, m = 0, 1, \dots, N$ ), tais que a LMI em (3.6) e a LMI abaixo sejam satisfeitas:

$$\begin{bmatrix} \Upsilon^{RNA} & D^{pa} & D^{pb} \\ * & -R_d - S_d & 0 \\ * & * & -3S_d \end{bmatrix} < 0, \quad (6.8)$$

com

$$\Upsilon^{RNA} = \begin{bmatrix} \text{sm}\{F(-A + W_0\Sigma_{\bar{g}}) + Q_0\} + S_0 & P - F + (-A + W_0\Sigma_{\bar{g}})^T G^T & FW_1\Sigma_{\bar{g}} - Q_N \\ * & -G - G^T & GW_1\Sigma_{\bar{g}} \\ * & * & -S_N \end{bmatrix},$$

sendo  $\Sigma_{\bar{g}} = \text{diag}\{\bar{g}_1, \bar{g}_2, \dots, \bar{g}_{n_n}\}$ , com  $\bar{g}_i$  o limitante superior em (6.7). Os termos  $D^{pa}$  e  $D^{pb}$  são ambos definidos em (3.12), e os termos  $R_d$  e  $S_d$  são definidos em (3.13) e (3.14), respectivamente.  $\square$

**Demonstração:** Para demonstrar as condições apresentadas neste Teorema é selecionado o funcional de Lyapunov-Krasovskii em (3.3) com  $f(x(t)) = x(t)$ . Então, como demonstrado no Teorema 3.2, se  $S_N > 0$  e se a LMI em (3.6) for satisfeita, o funcional em (3.3) satisfaz a condição  $V(x_t) \geq \epsilon \|x(t)\|^2$  ( $\epsilon > 0$ ). Note que, se a LMI (6.8) é satisfeita, então  $S_N > 0$ .

Demonstra-se que a condição em (3.2) é satisfeita. Considere a RNA em (6.6) e duas matrizes quaisquer de dimensões apropriadas,  $F$  e  $G$ , tal que:

$$0 = 2 [x^T(t)F + \dot{x}^T(t)G] \{-\dot{x}(t) - Ax(t) + W_0f(x(t)) + W_1f(x(t - \tau))\},$$

então considerando o termo nulo acima e a Hipótese 6.1, tem-se a desigualdade:

$$0 \leq 2 [x^T(t)F + \dot{x}^T(t)G] \{-\dot{x}(t) + (-A + W_0\Sigma_{\bar{g}})x(t) + W_1\Sigma_{\bar{g}}x(t - \tau)\}.$$

O restante da demonstração segue os mesmos passos da demonstração no Teorema 3.2, porém, utilizando a desigualdade acima ao invés do termo nulo em (3.15). Completando a demonstração.  $\blacksquare$

## 6.2 Sincronismo de osciladores caóticos por meio de controladores com memória

Considere o seguinte esquema de sincronização mestre-escravo:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} : \begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B\rho[Cx(t)] \\ p(t) &= Hx(t) \end{cases} \\ \mathcal{S} : \begin{cases} \dot{y}(t) &= Ay(t) + B\rho[Cy(t)] + u(t) \\ q(t) &= Hy(t) \end{cases} \quad (6.9) \\ \mathcal{L} : u(t) &= K[p(t - \tau) - q(t - \tau)] \end{aligned}$$

sendo que  $\mathcal{M}$  é o sistema mestre,  $\mathcal{S}$  é o sistema escravo e  $\mathcal{L}$  é a lei de controle com memória. Os vetores de estados são  $x, y \in \mathbb{R}^{n_{xy}}$ , a saída de cada sistema é dada por  $p, q \in \mathbb{R}^{n_{pq}}$ , as matrizes  $A \in \mathbb{R}^{n_{xy} \times n_{xy}}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n_{xy} \times n_{\rho}}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{n_{\rho} \times n_{xy}}$ ,  $H \in \mathbb{R}^{n_{pq} \times n_{xy}}$ ,  $K \in \mathbb{R}^{n_{xy} \times n_{pq}}$  e a função  $\rho(\cdot)$  satisfaz a condição de setor, com  $\rho_i(\cdot)$   $i = 1, 2, \dots, n_{\rho}$  pertencendo ao setor  $[0, \bar{\rho}]$ , i.e.,  $\rho_i(\nu)(\rho_i(\nu) - \bar{\rho}\nu) \leq 0$  para  $i = 1, 2, \dots, n_{\rho}$ . A Figura 6.2 ilustra o esquema de sincronização mestre-escravo considerado.

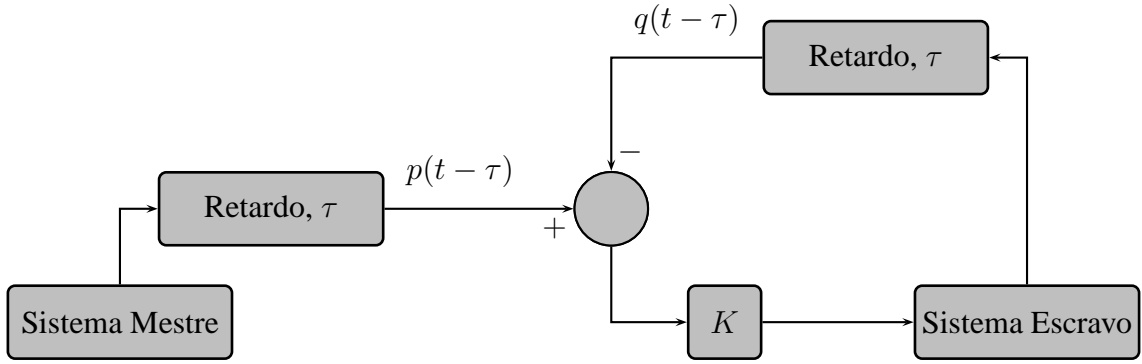


Figura 6.2: Esquema de sincronização mestre-escravo

Neste problema a sincronização é obtida quando o sistema escravo segue a trajetória imposta pelo mestre. Portanto, o propósito da síntese do controlador  $\mathcal{L}$  é fazer com que  $\|x(t) - y(t)\| \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ , sendo  $\|\cdot\|$  a norma Euclidiana no  $\mathbb{R}^{n_{xy}}$ . Assim, por meio da definição de erro entre os sinais dado por  $e(t) = x(t) - y(t)$ , a dinâmica de erro, considerando (6.9), pode ser definida como:

$$\varepsilon : \dot{e}(t) = Ae(t) + B\eta[Ce(t), y(t)] + Ue(t - \tau) \quad (6.10)$$

com  $\eta[Ce(t), y(t)] = \rho[Ce(t) + Cy(t)] - \rho[Cy(t)]$  e  $U = -KH$ . Além disso, é definida a condição inicial  $\phi(t) \in \mathcal{C}_\tau^{n_{xy}}$ .

Conseqüentemente, supondo-se a não-linearidade  $\rho(\cdot)$  e o sistema de erro (6.10), a hipótese a seguir é considerada.

**Hipótese 6.2** A não-linearidade  $\eta(Ce, y)$  pertence ao setor  $[0, \bar{\rho}]$ :

$$0 \leq \frac{\eta_i(c_i^T e, y)}{c_i^T e} = \frac{\rho_i(c_i^T e + c_i^T y) - \rho_i(c_i^T y)}{c_i^T e} \leq \bar{\rho}$$

sendo que  $c_i^T$  denota  $i$ -ésima linha do vetor  $C$ , então, a seguinte desigualdade é obtida<sup>1</sup>

$$\eta_i(c_i^T e, y)(\eta_i(c_i^T e, y) - \bar{\rho}c_i^T e) \leq 0, \quad \forall e, y; \quad i = 1, 2, \dots, n_\rho. \quad (6.11)$$

✱

A seguir é apresentado o primeiro resultado nesta seção, condições para a análise de estabilidade do sistema de erro em (6.10).

**Teorema 6.2** Considere o sistema de erro de sincronismo em (6.10) e suponha que a Hipótese 6.2 seja satisfeita. Sejam dados  $\tau > 0$ , um escalar referente ao retardo no tempo, e  $N$ , um inteiro positivo referente ao número de discretizações desejado. Então, o esquema mestre-escravo em (6.9) sincroniza para um dado ganho do controlador  $K$ , sendo o sistema de erro em (6.10) assintoticamente estável, se existirem matrizes de dimensão  $n_{xy} \times n_{xy}$ :  $F, G, P = P^T, S_n = S_n^T, Q_n, R_{n,m} = R_{n,m}^T$

<sup>1</sup>Para detalhes veja [5].

( $n, m = 0, 1, \dots, N$ ) e uma matriz diagonal de dimensão  $n_\rho \times n_\rho$ :  $\Sigma_\nu$ , tais que a LMI em (3.6) e a LMI abaixo sejam satisfeitas:

$$\begin{bmatrix} \Upsilon^{SNC} & \begin{pmatrix} D^{pa} \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} D^{pb} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ * & -R_d - S_d & \\ * & * & -3S_d \end{bmatrix} < 0, \quad (6.12)$$

com

$$\Upsilon^{SNC} = \begin{bmatrix} \text{sm}\{FA + Q_0\} + S_0 & P - F + A^T G^T & -F(KH) - Q_N & FB + \bar{\rho}\Sigma_\nu C^T \\ * & -G - G^T & -G(KH) & GB \\ * & * & -S_N & 0 \\ * & * & * & -2\Sigma_\nu \end{bmatrix},$$

$D^{pa}$  e  $D^{pb}$  são ambos definidos em (3.12), e os termos  $R_d$  e  $S_d$  são definidos em (3.13) e (3.14), respectivamente.  $\square$

**Demonstração:** Para demonstrar as condições apresentadas neste Teorema é selecionado o funcional de Lyapunov-Krasovskii,  $V(e_t)$ , que é definido como (3.3), simplesmente substituindo  $x(t)$  por  $e(t)$  e fazendo  $f(x(t)) = e(t)$ . Portanto, como demonstrado no Teorema 3.2, se  $S_N > 0$  e se a LMI em (3.6) for satisfeita, o funcional em (3.3) satisfaz a condição  $V(e_t) \geq \epsilon \|e(t)\|^2$  ( $\epsilon > 0$ ). Note que se a LMI (6.12) é satisfeita, então,  $S_N > 0$ .

Agora é demonstrado que a condição  $\dot{V}(e_t) \leq \epsilon \|e(t)\|^2$  ( $\epsilon > 0$ ) é satisfeita. Considere o sistema de erro de sincronismo em (6.10) e duas matrizes quaisquer de dimensões apropriadas,  $F$  e  $G$ , tem-se o seguinte termo nulo:

$$0 = 2 [e^T(t)F + \dot{e}^T(t)G] \{-\dot{e}(t) + Ae(t) + B\eta[Ce(t), y(t)] + Ue(t - \tau)\}. \quad (6.13)$$

Por outro lado, considerando a Hipótese 6.2, mais especificamente a desigualdade (6.11), tem-se:

$$\begin{aligned} 0 &\leq -2 \sum_{i=1}^{n_\rho} \nu_i \eta_i (c_i^T e, y) (\eta_i (c_i^T e, y) - \bar{\rho} c_i^T e) \\ &= -2 \Sigma_\nu \eta^T [Ce(t), y(t)] \{\eta [Ce(t), y(t)] - \bar{\rho} C^T e(t)\}, \end{aligned}$$

com  $\Sigma_\nu = \text{diag}\{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{n_\rho}\} > 0$ .

Então, o restante da demonstração segue os mesmos passos da demonstração no Teorema 3.2, mas utilizando o termo nulo em (6.13) e somando a desigualdade acima, ao invés do termo nulo em (3.15). Completando a demonstração.  $\blacksquare$

Estabelecida a condição para analisar a estabilidade do sistema de erro em (6.10), o próximo teorema apresenta condições suficientes para o projeto de controladores por realimentação de saída com memória tal que o esquema mestre-escravo dado em (6.9) sincronize.

**Teorema 6.3** Considere o sistema de erro de sincronismo em (6.10) e suponha que a Hipótese 6.2 seja satisfeita. Sejam dados  $\tau > 0$ , um escalar referente ao retardo no tempo,  $\delta \neq 0$ , um parâmetro escalar de ajuste, e  $N$ , um inteiro positivo referente ao número de discretizações desejado. Então,

o esquema mestre-escravo em (6.9) sincroniza com o ganho do controlador dado por  $K = F^{-1}\bar{K}$ , sendo o sistema de erro em (6.10) assintoticamente estável se existirem matrizes de dimensão  $n_{xy} \times n_{xy}$ :  $F$ ,  $P = P^T$ ,  $S_n = S_n^T$ ,  $Q_n$ ,  $R_{n,m} = R_{m,n}^T$  ( $n, m = 0, 1, \dots, N$ ), uma matriz diagonal de dimensão  $n_\rho \times n_\rho$ :  $\Sigma_\nu$ , e uma matriz de dimensão  $n_{xy} \times n_{pq}$ :  $\bar{K}$ , tais que a LMI em (3.6) e a LMI abaixo sejam satisfeitas:

$$\begin{bmatrix} \bar{\Upsilon}^{SNC} & \begin{pmatrix} D^{pa} \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} D^{pb} \\ 0 \end{pmatrix} \\ * & -R_d - S_d & 0 \\ * & * & -3S_d \end{bmatrix} < 0, \quad (6.14)$$

com

$$\bar{\Upsilon}^{SNC} = \begin{bmatrix} \text{sm}\{FA + Q_0\} + S_0 & P - F + \delta A^T F^T & -\bar{K}H - Q_N & FB + \bar{\rho}\Sigma_\nu C^T \\ * & -\delta(F + F^T) & -\delta\bar{K}H & \delta FB \\ * & * & -S_N & 0 \\ * & * & * & -2\Sigma_\nu \end{bmatrix},$$

$D^{pa}$  e  $D^{pb}$  são ambos definidos em (3.12), e os termos  $R_d$  e  $S_d$  são definidos em (3.13) e (3.14), respectivamente.  $\square$

**Demonstração:** Esta demonstração segue diretamente da LMI em (6.12). Note que a LMI em (6.14) é obtida fazendo a escolha particular  $G = \delta F$ , sendo  $\delta$  um parâmetro de ajuste escalar, e definindo a variável linearizante  $\bar{K} = FK$  na LMI em (6.12). Completando a demonstração.  $\blacksquare$

### 6.3 Sistemas não-lineares representados via o modelo nebuloso Takagi-Sugeno

Considere os sistemas não-lineares que podem ser aproximados por um modelo nebuloso Takagi-Sugeno (TS) sujeito a retardo no tempo com  $r$  regras.

**Regra  $i$ :** SE  $\theta_1$  é  $\mu_{i1}$  e  $\dots$  e  $\theta_p$  é  $\mu_{ip}$  ENTÃO

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_i x(t) + A_{d,i} x(t - \tau) + B_{u,i} u(t) \\ x(t) &= \phi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \end{aligned} \quad (6.15)$$

sendo  $\phi(t) \in \mathcal{C}_\tau^{n_x}$  a condição inicial,  $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$  o vetor de estados,  $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$  o vetor de entrada de controle,  $\tau$  o retardo no tempo. As matrizes  $A_i$ ,  $A_{d,i}$  e  $B_{u,i}$  são constantes de dimensões apropriadas.  $\theta_j(x)$  e  $\mu_{i,j}$  ( $i = 1, 2, \dots, r$  e  $j = 1, 2, \dots, p$ ) são, respectivamente, as variáveis premisas (as quais são funções das variáveis de estado) e os conjuntos nebulosos.

O modelo global inferido a partir (6.15) é:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r \bar{h}_i(\theta(t)) [A_i x(t) + A_{d,i} x(t - \tau) + B_{u,i} u(t)] \\ &\triangleq A(t)x(t) + A_d(t)x(t - \tau) + B_u(t)u(t) \end{aligned} \quad (6.16)$$

com  $\bar{h}_i(\theta(t)) = w_i(\theta(t)) / \sum_{i=1}^r w_i(\theta(t))$ , sendo  $\theta = [\theta_1, \dots, \theta_p]$  e  $w_i: \mathbb{R}^p \rightarrow [0, 1]$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) a



função de pertinência do sistema relacionada a  $i$ -ésima regra. Sendo que as funções de pertinências normalizadas  $\tilde{h}_i(\theta(t))$  satisfazem

$$\tilde{h}_i(\theta(t)) \geq 0, \sum_{i=1}^r \tilde{h}_i(\theta(t)) = 1, \sum_{i=1}^r \dot{\tilde{h}}_i(\theta(t)) = 0. \quad (6.17)$$

Para simplificar a notação, usa-se  $\tilde{h}_i(t)$  para denotar  $\tilde{h}_i(\theta(t))$ .

Para o controle utiliza-se a técnica de compensação paralela distribuída (PDC), veja [82]. Nesta técnica, as regras do controle compartilham os mesmos conjuntos nebulosos do modelo TS.

**Regra de controle  $i$  :** SE  $\theta_1$  é  $\mu_{i1}$  e  $\dots$  e  $\theta_p$  é  $\mu_{ip}$  ENTÃO

$$u(t) = K_i x(t) + K_{d,i} x(t - \tau), \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

Então, a lei de controle inferida é dada por

$$u(t) = \sum_{i=1}^r \tilde{h}_i(t) [K_i x(t) + K_{d,i} x(t - \tau)].$$

Assim, o objetivo de controle é determinar ganhos locais  $K_i$  e  $K_{d,i}$  tal que o sistema em malha fechada

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r \tilde{h}_i(t) \sum_{j=1}^r \tilde{h}_j(t) [(A_i + B_{u,i} K_j) x(t) + (A_{d,i} + B_{u,i} K_{d,j}) x(t - \tau)] \\ &\triangleq [A(t) + B_u(t) K(t)] x(t) + [A_d(t) + B_u(t) K_d(t)] x(t - \tau) \end{aligned} \quad (6.18)$$

seja assintoticamente estável.

A seguir, é apresentado o primeiro resultado desta seção, condições para a análise de estabilidade do modelo TS em (6.15).

**Teorema 6.4** *Considere o modelo TS (6.15) com  $u(t) = 0$ . Sejam dados  $\tau > 0$ , escalar referente ao retardo no tempo, e  $N$ , um inteiro positivo referente ao número de discretizações desejado. Então, o modelo TS em (6.15) com  $u(t) = 0$  é assintoticamente estável se existirem matrizes de dimensões  $n_x \times n_x$ :  $F, G, P = P^T, S_n = S_n^T, Q_n, R_{n,m} = R_{m,n}^T$  ( $n, m = 0, 1, \dots, N$ ), tais que a LMI em (3.6) e a LMI abaixo sejam satisfeitas:*

$$\begin{bmatrix} \Psi_i & D^{pa} & D^{pb} \\ * & -R_d - S_d & 0 \\ * & * & -3S_d \end{bmatrix} < 0, \quad (6.19)$$

para  $i = 1, \dots, r$ , com

$$\Psi_i = \begin{bmatrix} \text{sm}\{FA_i + Q_0\} + S_0 & P_i - F + A_i^T G^T & FA_{d,i} - Q_N \\ * & -G - G^T & GA_{d,i} \\ * & * & -S_N \end{bmatrix},$$

$D^{pa}$  e  $D^{pb}$  são ambos definidos em (3.12), e os termos  $R_d$  e  $S_d$  são definidos em (3.13) e (3.14),

respectivamente. □

**Demonstração:** Pelo Teorema 3.2, tem-se que verificar a estabilidade do modelo TS em (6.15) com  $u(t) = 0$ , corresponde a verificar se a LMI em (3.6) e a desigualdade abaixo são satisfeitas

$$\Omega(t) = \begin{bmatrix} \Psi(t) & D^{pa} & D^{pb} \\ * & -R_d - S_d & 0 \\ * & * & -3S_d \end{bmatrix} < 0, \quad (6.20)$$

com

$$\Psi(t) = \begin{bmatrix} \text{sm}\{FA(t) + Q_0\} + S_0 & P_i - F + A^T(t)G^T & FA_d(t) - Q_N \\ * & -G - G^T & GA_d(t) \\ * & * & -S_N \end{bmatrix},$$

$D^{pa}$  e  $D^{pb}$  são ambos definidos em (3.12), e os termos  $R_d$  e  $S_d$  são definidos em (3.13) e (3.14), respectivamente.

Então, note que a desigualdade em (6.20) pode ser reescrita como

$$\Omega(t) = \sum_{i=1}^r \tilde{h}_i(t) \Omega_i,$$

com  $\Omega_i$  definida em (6.19). Portanto, para garantir que a desigualdade em (6.20) seja satisfeita é suficiente que  $\Omega_i < 0$  para todo  $i = 1, \dots, r$ . Completando a demonstração. ■

O resultado acima pode ser adaptado para o problema de projeto de controladores estabilizantes, via compensação paralela distribuída.

**Teorema 6.5** *Considere o modelo TS em (6.15). Sejam dados  $\tau > 0$ , escalar referente ao retardo no tempo,  $\delta \neq 0$ , um parâmetro de ajuste escalar, e  $N$ , um inteiro positivo referente ao número de discretizações desejado. Então, o modelo TS em (6.15) é estabilizável por meio das condições nebulosas (**Regra de controle**), com  $K_j = \hat{K}_j \hat{F}^{-T}$  e  $K_{d,j} = \hat{K}_{d,j} \hat{F}^{-T}$ , se existirem matrizes de dimensão  $n_x \times n_x$ :  $\hat{F}$ ,  $\hat{P} = \hat{P}^T$ ,  $\hat{S}_n = \hat{S}_n^T$ ,  $\hat{Q}_n$ ,  $\hat{R}_{n,m} = \hat{R}_{m,n}^T$  ( $n, m = 0, 1, \dots, N$ ) e matrizes de dimensão  $n_u \times n_x$ :  $\hat{K}_j$  e  $\hat{K}_{d,j}$  ( $j = 1, \dots, r$ ), tais que as LMIs a seguir sejam satisfeitas*

$$\begin{bmatrix} \hat{P} & \hat{Q}_s \\ * & \hat{R}_s + \hat{S}_s \end{bmatrix} > 0 \quad (6.21)$$

e

$$\hat{\Omega}_{i,i} < 0, \quad \hat{\Omega}_{i,j} + \hat{\Omega}_{j,i} < 0, \quad (6.22)$$

para  $i, j = 1, 2, \dots, r$  e  $i < j$  com

$$\hat{\Omega}_{i,j} = \begin{bmatrix} \hat{\Psi}_{i,j} & \hat{D}^{pa} & \hat{D}^{pb} \\ * & -\hat{R}_d - \hat{S}_d & 0 \\ * & * & -3\hat{S}_d \end{bmatrix} < 0.$$

Os termos  $\hat{Q}_s$ ,  $\hat{R}_s$  e  $\hat{S}_s$  são definidos como  $Q_s$ ,  $R_s$  e  $S_s$  em (3.8), (3.9) e (3.10), respectivamente,

reescrevendo-os com circunflexo em todas as matrizes desses termos:

$$\hat{\Psi}_{i,j} = \begin{bmatrix} \text{sm}\{A_i \hat{F}^T + B_{u,i} \hat{K}_j^T + \hat{Q}_0\} + \hat{S}_0 & \hat{P} - \hat{F}^T + \delta(\hat{F} A_i^T + \hat{K}_j B_{u,i}^T) & A_{d,i} \hat{F}^T + B_{u,i} \hat{K}_{d,j}^T - \hat{Q}_N \\ * & -\delta(\hat{F} + \hat{F}^T) & \delta(A_{d,i} \hat{F}^T + B_{u,i} \hat{K}_{d,j}^T) \\ * & * & -\hat{S}_N \end{bmatrix},$$

$\hat{D}^{pa}$  e  $\hat{D}^{pb}$  são definidos como  $D^{pa}$  e  $D^{pb}$ , ambos em (3.12), e os termos  $\hat{R}_d$  e  $\hat{S}_d$  são, respectivamente, definidos como  $R_d$  e  $S_d$  em (3.13) e (3.14) reescrevendo-os com o circunflexo em todas as matrizes desses termos.  $\square$

**Demonstração:** Pelo Teorema 3.2, temos que verificar a estabilidade do modelo TS em malha fechada (6.18) corresponde a verificar se são satisfeitas a LMI em (3.6) e a desigualdade abaixo

$$\tilde{\Omega}(t) < 0,$$

sendo  $\tilde{\Omega}(t)$  definido como (6.20), fazendo as substituições:  $A(t)$  por  $A(t) + B_u(t)K(t)$  e  $A_d(t)$  por  $A_d(t) + B_u(t)K_d(t)$ . Além disso, note que a desigualdade acima pode ser reescrita como

$$\tilde{\Omega}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \tilde{h}_i(t) \tilde{h}_j(t) \tilde{\Omega}_{i,j} = \sum_{i=1}^r \tilde{h}_i^2(t) \tilde{\Omega}_{i,i} + \sum_{i < j}^r \tilde{h}_i(t) \tilde{h}_j(t) (\tilde{\Omega}_{i,j} + \tilde{\Omega}_{j,i}) < 0 \quad (6.23)$$

com

$$\tilde{\Omega}_{i,j} = \begin{bmatrix} \tilde{\Psi}_{i,j} & D^{pa} & D^{pb} \\ * & -R_d - S_d & 0 \\ * & * & -3S_d \end{bmatrix} < 0,$$

sendo

$$\tilde{\Psi}_{i,j} = \begin{bmatrix} \text{sm}\{F(A_i + B_{u,i}K_j) + Q_0\} + S_0 & P_i - F + (A_i + B_{u,i}K_j)^T G^T & F(A_{d,i} + B_{u,i}K_{d,j}) - Q_N \\ * & -G - G^T & G(A_{d,i} + B_{u,i}K_{d,j}) \\ * & * & -S_N \end{bmatrix}.$$

Portanto, uma condição suficiente para verificar se a desigualdade em (6.23) é satisfeita, corresponde a verificar se:

$$\tilde{\Omega}_{i,i} < 0, \quad \tilde{\Omega}_{i,j} + \tilde{\Omega}_{j,i} < 0, \quad (6.24)$$

para  $i, j = 1, \dots, r$  com  $i < j$ .

Então, definindo as novas variáveis:  $\hat{F} \triangleq F^{-1}$  e

$$[\hat{P} \hat{Q}_n \hat{S}_n \hat{R}_{n,m}] \triangleq \hat{F} [P \ Q_n \ S_n \ R_{n,m}] \hat{F}^T$$

para  $n, m = 0, 1, \dots, N$ . Em seguida, pré e pós multiplicando a LMI em (3.6) por  $\text{diag}\{\hat{F}, \dots, \hat{F}\}$  e  $\text{diag}\{\hat{F}, \dots, \hat{F}\}^T$ , respectivamente, obtém-se a LMI em (6.21)

Para obter a LMI em (6.22) são definidas as novas variáveis linearizantes

$$[\hat{K}_j \ \hat{K}_{d,j}] \triangleq [K_j \ K_{d,j}] \hat{F}. \quad (6.25)$$

Assim, pré e pós multiplicando a desigualdade em (6.24) por, respectivamente,  $\text{diag}\{\hat{F}, \dots, \hat{F}\}$  e  $\text{diag}\{\hat{F}, \dots, \hat{F}\}^T$ ; em seguida fazendo a escolha particular  $G = \delta F$ , com  $\delta$  sendo um parâmetro escalar de ajuste; e fazendo a mudança de variáveis em (6.25); obtém-se a LMI em (6.22).

Note que, o bloco (2, 2) em  $\hat{\Omega}_{i,j}$  em (6.22) é  $-\delta(\hat{F} + \hat{F}^T)$ , com  $\delta \neq 0$ , portanto, se esse bloco for definido negativo, implica que  $\hat{F}$  não é singular. Completando a demonstração. ■

## 6.4 Exemplos numéricos

Nesta seção são apresentados alguns exemplos numéricos com o objetivo de evidenciar as potencialidades dos métodos propostos.

Nos dois primeiros exemplos é estudada a estabilidade de redes neurais artificiais implementadas de forma analógica. Nos quais compara-se os resultados obtidos por meio do método proposto com outros da literatura. Também, utiliza-se um diagrama de bifurcação para verificar um dos resultados obtidos.

Em seguida, estudam-se os problemas de análise de estabilidade e síntese de controladores, no contexto de sincronismo de osciladores caóticos do tipo Lur'e. Nesse exemplo, novamente, os métodos propostos se mostram superiores a outros da literatura.

Finalmente, estuda-se dois problemas em sistemas não-lineares modelados via abordagem Takagi-Sugeno. No primeiro exemplo, compara-se o método de análise proposto com resultados apresentados em [47].

### 6.4.1 Redes neurais artificiais

Nesta seção é estudado o problema de análise de estabilidade de RNAs. Utiliza-se resultados apresentados na literatura e meios gráficos para ilustrar a eficiência do método proposto.

**Exemplo 6.1** Babcock e Westervelt em [2] estudaram uma RNA de dois neurônios com dois retardos no tempo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + a_1 \tanh[x_2(t - \tau_1)] \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + a_2 \tanh[x_1(t - \tau_2)] \end{cases} \quad (6.26)$$

sendo que  $a_1, a_2, \tau_1$  e  $\tau_2$  são constantes positivas.

Em [2] foi mostrado que, quando  $a_1 a_2 < -1$  e  $\tau_1 + \tau_2$  é limitado por um determinado valor, a origem do sistema (6.26) é estável. Quando a soma dos atrasos se incrementa até um valor crítico, a origem se torna instável e a rede oscila em um ciclo limite.

Mais tarde Wei e Ruan em [88] confirmaram a análise apresentada em [2] e mostraram que a RNA é estável considerando, e.g.,  $a_1 = 2, a_2 = -1.5$  e  $\tau_1 + \tau_2 < 0.8$ .

Portanto, considerando um caso ligeiramente modificado com  $\tau_1$  e  $\tau_2$  iguais, i.e,  $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ , e escolhendo  $a_1 = 2$  e  $a_2 = -1.5$ , pode-se obter o maior retardo no tempo  $\tau_{max}$ , considerando a rede neural (6.6), com as seguintes matrizes,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad W_0 = 0, \quad W_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1.5 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Sigma_{\bar{g}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A título de comparação, utilizando o método proposto em [75] obtém-se o retardo no tempo máximo  $\tau_{max} = 0.4283$ . Por outro lado, aplicando o Teorema 6.1 obtêm-se os resultados apresentados na Tabela 6.1, na qual são apresentados os valores obtidos para o máximo retardo no tempo considerando diferentes números de partições no método proposto.

Tabela 6.1: Retardos no tempo máximos obtidos por meio do Teorema 6.1, considerando diferentes valores para  $N$ . Exemplo 6.1

$N$	1	2	3
$\tau_{max}$	0.4351	0.4352	0.4352

Ainda no contexto de verificar a qualidade da análise da estabilidade, a Figura 6.3 apresenta o diagrama de bifurcação da RNA utilizando como o parâmetro de controle o retardo no tempo  $\tau$ . Note que a bifurcação de Hopf ocorre muito próximo do máximo retardo no tempo obtido pelo método proposto.

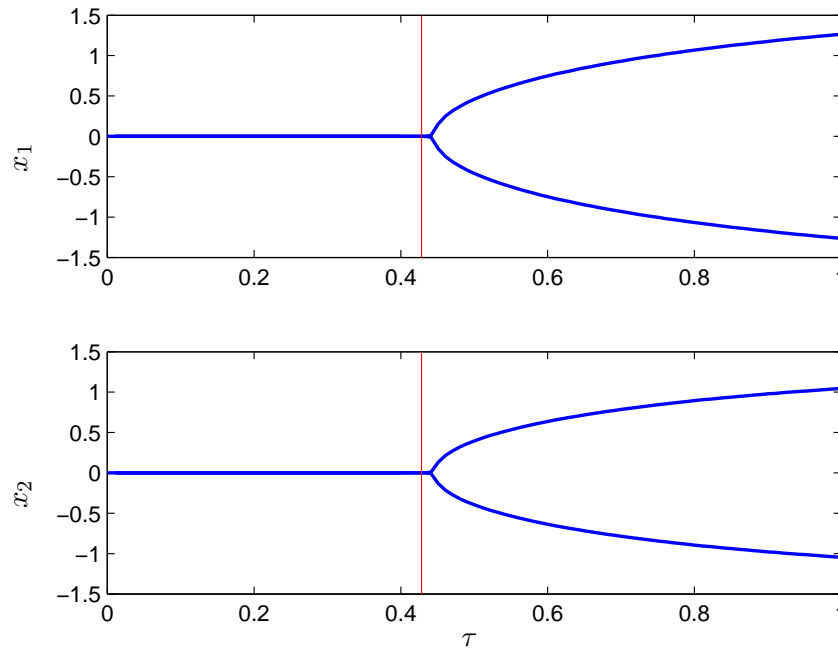


Figura 6.3: Diagrama de bifurcação para  $x_1$  e  $x_2$ , respectivamente, utilizando o  $\tau$  como parâmetro de controle. A linha vertical marca  $\tau = 0.4352$ . Exemplo 6.1

**Exemplo 6.2** Neste exemplo é considerada a mesma RNA estudada em [75, 91, 94], da forma apre-

sentada em (6.6) com as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 4.1989 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7160 & 0 \\ 0 & 0 & 1.9985 \end{bmatrix}, \quad W_1 = \begin{bmatrix} -0.1052 & -0.5069 & -0.1121 \\ -0.0257 & -0.2808 & 0.0212 \\ 0.1205 & -0.2153 & 0.1315 \end{bmatrix},$$

$$\Sigma_{\bar{g}} = \text{diag}\{4.1989, 0.7160, 1.9985\}, \quad W_0 = 0.$$

Então, considerando os resultados obtidos nas referências citadas acima, e via Teorema 6.1, obtém-se a Tabela 6.1 que apresenta os retardos no tempo máximos,  $\tau_{max}$ .

Tabela 6.2: Máximos retardos no tempo obtidos via métodos em [94, 91, 75] e Teorema 6.1 para  $N = 2$ . Exemplo 6.2

$\tau_{max}^{Ye, Michel e Wang (1994), [94]}$	$\tau_{max}^{Xu, Lam e Ho (2006), [91]}$	$\tau_{max}^{Souza, Palhares e Ekel (2007), [75]}$	$\tau_{max}^{Teorema 6.1 N = 2, 3}$
0.4121	1.7644	2.2056	2.7715

## 6.4.2 Sincronismo de osciladores caóticos do tipo Lur'e

Nesta seção, estuda-se os problemas de análise de estabilidade e projeto de controladores para o esquema de sincronização apresentado na Figura 6.2. Utiliza-se o modelo do circuito de Chua, sendo que tal circuito, com a escolha apropriada de seus parâmetros, apresenta comportamento caótico.

**Exemplo 6.3** Considere o circuito de Chua dado pelas equações:

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - \rho(x)) \\ \dot{y} = x - y - z \\ \dot{z} = -by \end{cases} \quad (6.27)$$

sendo  $\rho(x)$  uma função não-linear dada por:  $\rho(x) = m_1x + \frac{1}{2}(m_0 - m_1)(|x + c| - |x - c|)$ . Atribuindo os valores  $a = 9$ ,  $b = 14.28$ ,  $c = 1$ ,  $m_0 = -1/7$ ,  $m_1 = 2/7$  neste sistema de equações, obtém-se um comportamento caótico.

O sistema em (6.27) pode ser representado como um sistema do tipo Lur'e com:

$$A = \begin{bmatrix} -am_1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -b & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -a(m_0 - m_1) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T,$$

sendo que a função  $\eta(\nu) = 1/2(|\nu + c| - |\nu - c|)$  pertence ao setor  $[0, \bar{\rho}]$  com  $\bar{\rho} = 1$ .

Considerando que a conexão entre os sistemas mestre e escravo feita apenas por meio da primeira variável no vetor de estado, é escolhido a matriz  $H = [1 \ 0 \ 0]$ . Este exemplo também foi estudado em [92], no qual foi considerada a matriz de ganhos para o controlador:  $K = [6.0229 \ 1.3367 \ -2.1264]^T$ . Assim, com este controlador, os resultados obtidos por meio do Teorema 6.2 proposto são comparados com outros resultados da literatura, conforme apresentado na Tabela 6.3.

Tabela 6.3: Retardos no tempo máximos obtidos por meio dos métodos em [36, 80, 92] e Teorema 6.2 para  $N = 2$  e  $N = 3$ . Exemplo 6.3

$\tau_{max}^{Yalçin, Suykens e Vandewalle (2001), [92]}$	$\tau_{max}^{Huang, Li e Zhong (2006), [36]}$	$\tau_{max}^{Souza et al (2008), [80]}$	$\tau_{max}^{Teorema 6.2 N = 2, 3}$
0.039	0.083	0.141	0.160

As figuras 6.4 e 6.5, apresentam os atratores obtidos pelos sistemas mestre e escravo, com  $\tau = 0.16$  e  $\tau = 0.21$ , respectivamente. Note que, para o retardo no tempo  $\tau = 0.21$ , o esquema não sincroniza.

Agora, considerando o problema de sintetizar um controlador por realimentação de saída com memória, estabilizante, para o maior retardo no tempo possível,  $\tau_{max}$ , utiliza-se o Teorema 6.3. Inicialmente, com  $\delta = 1$  e  $N = 2$  obtém-se:

$$\tau_{max}^{Teorema 6.3, \delta = 1 e N = 2} = 0.169 \quad e \quad K = [3.5856 \quad 0.8255 \quad -2.5030]^T.$$

Por outro lado, para o ajuste  $\delta = 0.294$ , obtém-se:

$$\tau_{max}^{Teorema 6.3, \delta = 0.294 e N = 2} = 0.218 \quad e \quad K = [3.5667 \quad 0.5693 \quad -3.2867]^T.$$

Para ilustrar a eficiência do projeto proposto, os atratores obtidos pelos sistemas mestre e escravo, considerando diferentes condições iniciais, o retardo no tempo  $\tau = 0.218$  e ganho do controlador  $K = [3.5667 \quad 0.5693 \quad -3.2867]^T$  são apresentados na Figura 6.6.

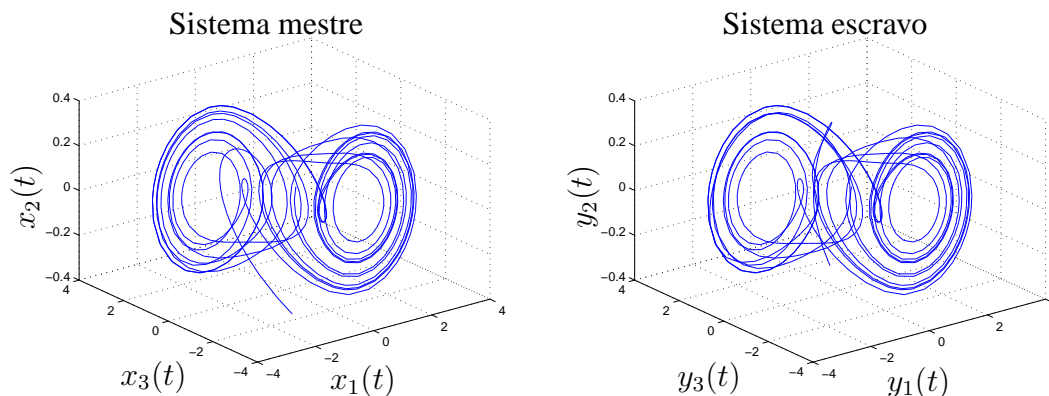


Figura 6.4: Atratores duplos gerados pelos sistemas mestre e escravo considerando o retardo no tempo  $\tau = 0.16$ .

### 6.4.3 Sistemas não-lineares modelados via abordagem Takagi-Sugeno

Nesta seção, considera-se os problemas de análise de estabilidade e projeto de controladores para sistemas não-lineares modelados por meio da apresentação nebulosa Takagi-Sugeno. No primeiro exemplo estuda-se o problema de análise de estabilidade, no qual os índices obtidos pelo método proposto se mostram superiores a outros obtidos em resultados na literatura. No segundo, estuda-se o problema de projeto de controladores, considerando diferentes contextos de controle.

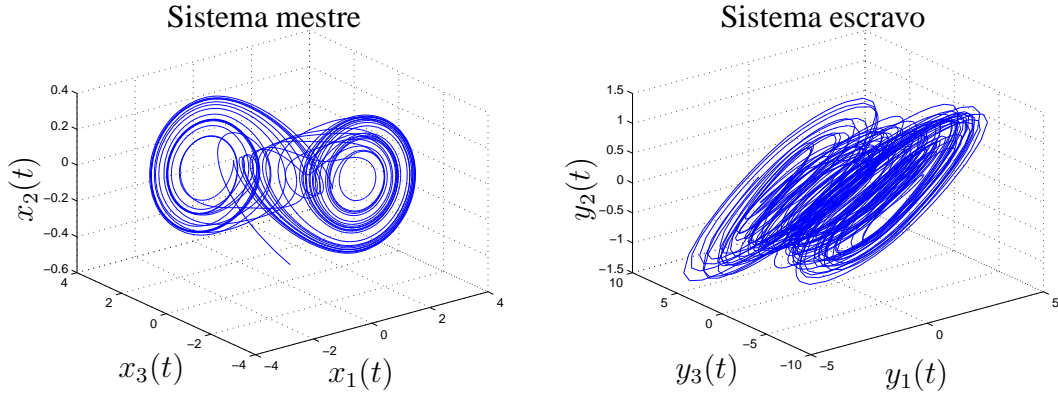


Figura 6.5: Atratores duplos gerados pelos sistemas mestre e escravo considerando o retardo no tempo  $\tau = 0.21$ .

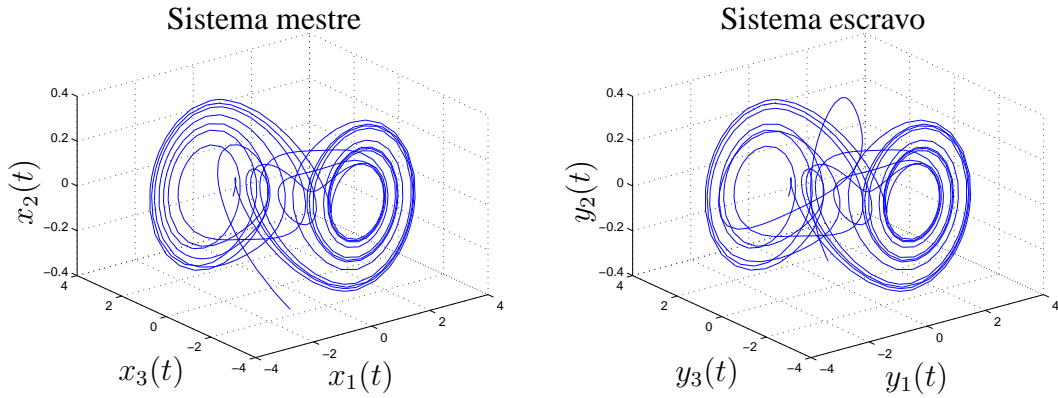


Figura 6.6: Atratores duplos gerados pelos sistemas mestre e escravo obtidos com os resultados de projeto:  $\tau = 0.218$  e  $K = [3.5667 \ 0.5693 \ -3.2867]^T$ .

**Exemplo 6.4** Considere o sistema não-linear sujeito a retardo no tempo:

$$\ddot{y}(t) = -6\dot{y}(t) \sin^2(y(t)) - 8y(t) + y(t - \tau) - 2\dot{y}(t - \tau),$$

que pode ser reescrito como

$$\begin{bmatrix} \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -6 \sin^2(y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t - \tau) \\ \dot{y}(t - \tau) \end{bmatrix}.$$

Este sistema é exatamente representado pelo modelo nebuloso TS em (6.16), com:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -6 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{d,i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},$$

sendo  $i = 1, 2$ ,  $\bar{h}_1 = \sin^2(y(t))$  e  $\bar{h}_2 = \cos^2(y(t))$ .

Este sistema foi estudado em [47], no qual foram obtidos resultados por meio de um funcional de Lyapunov-Krasovskii dependente do grau de ativação das funções de pertinência, especificamente os



teoremas 2.3.1 e 2.4.1. Utilizando-se esses resultados, o retardo no tempo máximo computado tal que o sistema permaneça estável é, respectivamente:

$$\tau_{max}^{Lin et al (2007), [47, Teor. 2.3.1]} = 0.3195 \quad e \quad \tau_{max}^{Lin et al (2007), [47, Teor. 2.4.1]} = 0.3222.$$

Nessa mesma referência são propostos outros métodos, obtidos por meio de um funcional de Lyapunov-Krasovskii independente do grau de ativação das funções de pertinência, especificamente os corolários 2.5.3 e 2.3.1. Então, utilizando-se esses resultados, considerando o mesmo cenário anterior, obtém-se:

$$\tau_{max}^{Lin et al (2007), [47, Coro. 2.5.3]} = 0.2570 \quad e \quad \tau_{max}^{Lin et al (2007), [47, Coro. 2.3.1]} = 0.3078.$$

Por outro lado, considerando o Teorema 6.4 proposto nesta tese, obtém-se os resultados apresentados na Tabela 6.4.

Tabela 6.4: Retardo no tempo máximo obtido por meio do Teorema 6.4. Exemplo 6.4.

$N$	1	2	3	4
$\tau$	0.3675	0.3699	0.3699	0.3699

**Exemplo 6.5** Considere o sistema nebuloso em (6.15) ou de forma similar o sistema em (6.16) com:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.4 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0.3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_{d,1} = - \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}, \quad A_{d,2} = - \begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad B_{u,i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (6.28)$$

sendo as funções de pertinência dadas por:  $\hbar_1 = \sin^2(x(t))$  e  $\hbar_2 = \cos^2(x(t))$ , para  $i = 1, 2$ .

Considerando o problema de projetar um controlador para que o sistema acima estabilize para o maior retardo no tempo possível, utiliza-se o Teorema 6.5, considerando  $\delta = 1$  e  $N = 3$ , em diferentes contextos de controle. Os resultados obtidos são apresentados abaixo:

- Controlador com memória: retardo no tempo máximo obtido é  $\tau_{max} = 1.6940$  sendo as matrizes de ganhos:

$$\begin{aligned} K_1 &= \begin{bmatrix} -5.5956 & -2.9708 \end{bmatrix}, & K_2 &= \begin{bmatrix} -5.4245 & -2.5270 \end{bmatrix}, \\ K_{d,1} &= \begin{bmatrix} 1.4484 & 0.5300 \end{bmatrix}, & K_{d,2} &= \begin{bmatrix} 0.3479 & 0.3673 \end{bmatrix}; \end{aligned} \quad (6.29)$$

- Controlador sem memória: retardo no tempo máximo obtido é  $\tau_{max} = 1.6940$  com as matrizes de ganhos:

$$K_1 = \begin{bmatrix} -7.8888 & -3.8963 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} -10.5788 & -4.2060 \end{bmatrix}; \quad (6.30)$$

- Controlador de memória pura: retardo no tempo máximo obtido é  $\tau_{max} = 0.6950$  com as

matrizes de ganhos:

$$K_{d,1} = \begin{bmatrix} -0.2769 & -0.9910 \end{bmatrix}, \quad K_{d,2} = \begin{bmatrix} 0.7311 & 1.2569 \end{bmatrix}. \quad (6.31)$$

A título de ilustração, as figuras 6.7 a 6.9 apresentam as evoluções dos estados do sistema considerando os controladores PDC apresentados acima. Note que, o controlador com memória, Figura 6.7, apresenta uma resposta mais suave que o controlador que não leva em conta a memória, Figura 6.8, por outro, o controlador de memória pura garante a estabilidade do sistema para um valor menor do retardo no tempo máximo, Figura 6.9.

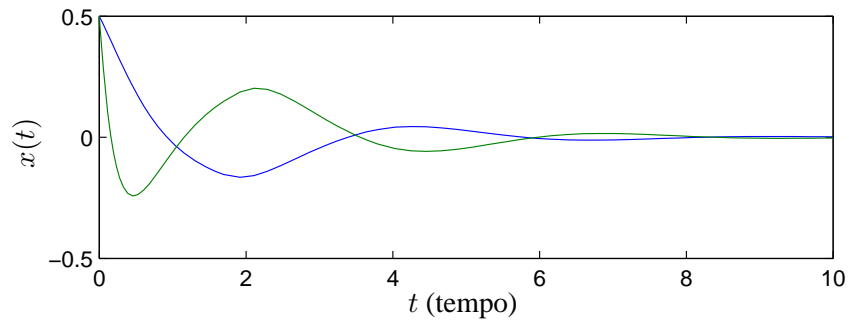


Figura 6.7: Resposta temporal do sistema em (6.15) com (6.28), controlado por meio da técnica PDC com os ganhos controlador dados em (6.29), para o retardo no tempo constante,  $\tau = 1.6940$  e condição inicial  $x(t) = [0.5 \ 0.5]^T \forall t \in [-\tau, 0]$ . Exemplo 6.5.

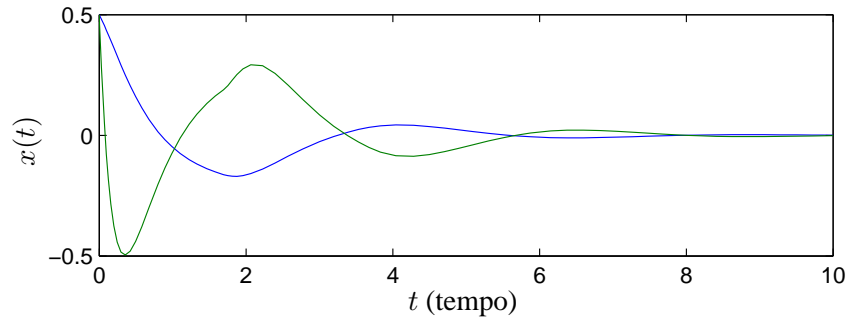


Figura 6.8: Resposta temporal do sistema em (6.15) com (6.28), controlado por meio da técnica PDC com os ganhos controlador dados em (6.30), para o retardo no tempo constante,  $\tau = 1.6940$  e condição inicial  $x(t) = [0.5 \ 0.5]^T \forall t \in [-\tau, 0]$ . Exemplo 6.5.

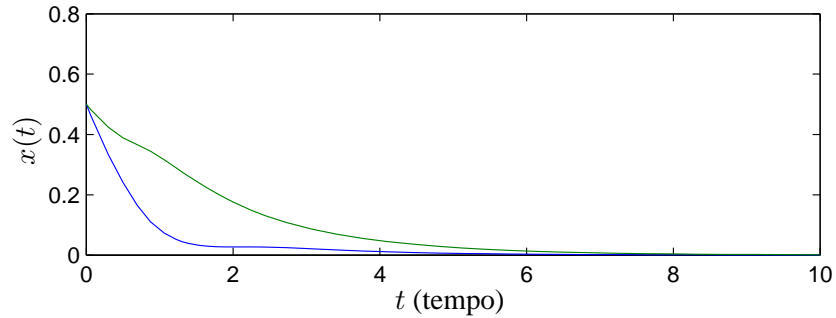


Figura 6.9: Resposta temporal do sistema em (6.15) com (6.28), controlado por meio da técnica PDC com os ganhos controlador dados em (6.31), para o retardo no tempo constante,  $\tau = 0.6950$  e condição inicial  $x(t) = [0.5 \ 0.5]^T \forall t \in [-\tau, 0]$ . Exemplo 6.5.

## 6.5 Conclusões do capítulo

Neste capítulo, parte dos resultados obtidos anteriormente foram estendidos para análise de estabilidade e síntese de controladores para algumas classes de sistemas não-lineares.

Os resultados obtidos neste trabalho se mostram menos conservadores que outros resultados encontrados na literatura, como ilustrado nos exemplos numéricos.

Note também que os resultados apresentados neste capítulo podem ser facilmente estendidos para lidar com outras peculiaridades de sistemas reais, tais como: retardo incerto, múltiplos retardos no tempo, retardos distribuídos e incertezas paramétricas. Os resultados relacionados com retardo no tempo incerto e incertezas paramétricas podem ser acessados em [76, 81, 66, 67, 74, 73]. Em [77] considerou-se uma classe mais geral de redes neurais artificiais, a saber: Cohen-Grossberg. No contexto de modelos TS sujeitos a retardo no tempo, nos trabalhos [66, 67] utilizou-se um novo funcional de Lyapunov-Krasovskii que é dependente do grau de ativação das funções de pertinência. Em [70] estudou-se o problema de sincronismo de redes neurais artificiais, seguindo as diretrizes básicas apresentadas neste capítulo.

# Capítulo 7

## Conclusões e perspectivas

Este trabalho centrou-se no estudo de sistemas a tempo contínuo sujeitos a retardo no tempo, sendo propostos novos métodos de análise de estabilidade e síntese de controladores e filtros, podendo incluir índice de desempenho  $\mathcal{H}_\infty$ . O foco principal é o estudo de sistemas lineares, entretanto, foram apresentados também resultados para determinadas classes de sistemas não-lineares.

Esta tese é dividida em duas partes; na primeira, mostra-se que estudar a estabilidade de um sistema linear autônomo com retardo constante no tempo é equivalente a avaliar as raízes de uma função racional de grau apropriado. Este resultado fez-se possível devido ao emprego de uma simples *transformação bilinear*.

Os resultados obtidos nessa primeira parte foram apresentados em [11].

Como propostas para a continuidade dos resultados apresentados nessa primeira parte do trabalho, pode-se listar os seguintes objetivos:

- O primeiro e mais importante objetivo é tentar estabelecer a relação entre  $\Delta_\tau(s)$  e  $\Delta_T^k(s)$ , para qualquer sistema linear sujeito a retardo no tempo, como em (2.1). Note que o resultado apresentado supõe que o sistema sujeito a retardo no tempo seja estável para  $\tau = 0$  e que as raízes de  $\Delta_\tau(s)$  não cruzam o eixo imaginário simultaneamente;
- Estabelecer uma formulação computacionalmente eficiente para condições de análise de estabilidade que sejam dependentes do retardo no tempo;
- Obter condições de análise de estabilidade que sejam independentes do retardo no tempo, menos conservadoras e computacionalmente eficientes, talvez no formato de LMIs;
- Obter condições dependentes e independentes do retardo no tempo para síntese de controladores;
- Extensões para sistemas incertos sujeitos a retardo no tempo.

Na segunda parte desta tese, a metodologia empregada consistiu na seleção apropriada de funcionais de Lyapunov-Krasovskii, uma estratégia de discretização, relaxações matriciais e desigualdades matriciais; para obter condições suficientes para análise de estabilidade e síntese de controladores e filtros, para sistemas lineares e não-lineares com retardo no tempo.

Os resultados gerados relativos a esta segunda parte da tese foram publicados ou submetidos em [66, 69, 71, 72, 73, 74, 76, 79, 81], que demonstram a originalidade e importância dos resultados obtidos. Ademais, resultados obtidos que não fazem parte desta tese, mas que seguem as diretrizes básicas apresentadas nessa parte são [67, 70, 77, 80].

Como propostas para a continuidade dos resultados apresentados nessa segunda parte do trabalho, pode-se listar:

- Propor condições de síntese de controladores, levando-se em conta possíveis saturações nos atuadores;
- Obter condições de síntese de controladores para sistemas controlados em redes;
- Desenvolver métodos de detecção de faltas em redes de controle;
- Desenvolver condições para síntese de controladores proporcional-integral-derivativo (PID);
- Obtenção de condições para síntese de controladores por realimentação de saída;
- Estudo de técnicas de aproximação de LMIs por polinômios, para tratar sistemas com incertezas politópicas;
- Estudo de diferentes formas para as matrizes do funcional de Lyapunov-Krasovskii em (3.3).

Espera-se que os resultados apresentados nesta tese contribuam para o enriquecimento da discussão, desafios e fronteiras acerca da análise de estabilidade e controle robusto de sistemas sujeitos a retardo no tempo.

# Referências Bibliográficas

- [1] S. Arik. Stability analysis of delayed neural networks. *IEEE Transactions on Circuits and Systems – Part I*, 47:381–402, 2000.
- [2] K. L. Babcock e R. M. Westervelt. Dynamics of simple electronic neural networks. *Physica D*, 28:305–316, 1987.
- [3] P. Baldi e A. F. Atiya. How delays affect neural dynamics and learning. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 5:612–621, 1994.
- [4] R. S. Borden. *A Course in Advanced Calculus*. North Holland/Elsevier, New York, NY, 1983.
- [5] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, e V. Balakrishnan. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. *Studies in Applied Mathematics*, volume 15 of *SIAM*. 1994.
- [6] R. Brayton. Nonlinear oscillations in a distributed network. *Quarterly of Applied Mathematics*, 24:289–301, 1976.
- [7] T. Chen e L. Rong. Delay-independent stability analysis of Cohen–Grossberg neural networks. *Physics Letters A*, 317:436–449, 2003.
- [8] W.-H. Chen, Z.-H. Guan, e X. Lu. Delay-dependent exponential stability of neural networks with variable delays. *Physics Letters A*, 326:355–363, 2004.
- [9] J. A. Cook e B. K. Powell. Modelling of an internal combustion engine for control analysis. *IEEE Control Systems Magazine*, pp. 20–25, 1988.
- [10] J. J. Craig, P. Hsu, e S. S. Sastry. Adaptive control of mechanical manipulations. *International Journal of Robotics Research*, 6(2):16–28, 1987.
- [11] M. C. de Oliveira, F. O. Souza, e R. M. Palhares. Assessing stability of time-delay systems using rational systems. *Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 4012–4017, Cancun, México, 2008. Artigo ThTA07.6.
- [12] C. E. de Souza e X. Li. Delay-dependent robust  $\mathcal{H}_\infty$  control of uncertain linear state delayed systems. *Automatica*, 35(7):1313–1321, 1999.
- [13] Z. Duan, J. Zhang, C. Zhang, e E. Mosca. Robust  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  filtering for uncertain linear systems. *Automatica*, 42:1919–1926, 2006.

- [14] F. Feng. On practical stability of linear multivariable feedback systems with time-delays. *Automatica*, 27:389–394, 1991.
- [15] E. Fridman. A new Lyapunov technique for robust control of systems with uncertain non-small delays. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, pp. 1–15, 2005.
- [16] E. Fridman. Descriptor discretized Lyapunov functional method: analysis and design. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(5):890–897, 2006.
- [17] E. Fridman. Stability of systems with uncertain delays: a new “complete” Lyapunov-Krasovskii functional. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(5):885–890, 2006.
- [18] E. Fridman e S.-I. Niculescu. On complete Lyapunov-Krasovskii functional techniques for uncertain systems with fast-varying delays. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 18:364–374, 2008.
- [19] E. Fridman e U. Shaked. New bounded real lemma representations for time-delay systems and their applications. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(12):1973–1979, 2001.
- [20] E. Fridman e U. Shaked. A descriptor system approach to  $\mathcal{H}_\infty$  control of linear time-delay systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(2):253–270, 2002.
- [21] E. Fridman e U. Shaked. Stability and  $\mathcal{H}_\infty$  control systems with time-varying delays. *Proceedings of the 15th IFAC Triennial World Congress*, pp. 19–24, Barcelona (Espanha), 2002.
- [22] E. Fridman e U. Shaked. Delay-dependent stability and  $\mathcal{H}_\infty$  control: constant and time-varying delays. *International Journal of Control*, 76(1):48–60, 2003.
- [23] J. M. Gomes da Silva Jr. e V. J. S. Leite. Sistemas lineares com atrasos de tempo. L. A. Aguirre, editor, *Enciclopédia de Automática – Controle & Automação*, volume 2, pp. 108–123. Blucher, 2007.
- [24] K. Gu. Discretized LMI set in the stability problem of linear time delay systems. *International Journal of Control*, 68:923–934, 1997.
- [25] K. Gu. A further refinement of discretized Lyapunov functional method for the stability of time-delay systems. *International Journal of Control*, 74(10):967–976, 2001.
- [26] K. Gu e Q.-L. Han. Controller design for time-delay systems using discretized Lyapunov functional approach. *Conference on Decision and Control*, Sydney, Australia, Dezembro 2000.
- [27] K. Gu, V. Kharitonov, e J. Chen. *Stability of time-delay systems*. Birkhäuser, Boston, MA, 2003.
- [28] K. Gu e S.-I. Niculescu. Additional dynamics in transformed time-delay systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(3):572–575, 2000.
- [29] J. K. Hale. *Theory of functional differential equations*. Springer-Verlag, New York, 1977.

- [30] J. K. Hale e S. M. Verduyn Lunel. *Introduction to functional differential equations*. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [31] Q.-L. Han. Robust stability of uncertain delay-differential systems of neutral type. *Automatica*, 38(4):719–723, 2002.
- [32] Q.-L. Han. On stability of linear neutral systems with mixed time delays: a discretized Lyapunov functional approach. *Automatica*, 41:1209–1218, 2005.
- [33] Q.-L. Han, X. Yu, e K. Gu. On computing the maximum time-delay bound for stability of linear neutral systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49(12):2281–2285, 2004.
- [34] Y. He, M. Wu, J.-H. She, e G.-P. Liu. Delay-dependent robust stability criteria for uncertain neutral systems with mixed delays. *Systems & Control Letters*, 51:57–65, 2004.
- [35] J. J. Hopfield. Neural networks and physics systems with emergent collective computation abilities. *Proceedings of the National Academic Science of the USA*, 79(2):2554–2558, 1982.
- [36] H. Huang, H. X. Li, e J. Zhong. Master-slave synchronization of general Lur’e systems with time-varying delay and parameter uncertainty. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 16(2):281–294, 2006.
- [37] M. P. Joy. On the global convergence of a class of functional differential equations with applications in neural network theory. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 232:61–81, 1999.
- [38] M. Kao e J. J. Moskwa. *Turbocharged diesel engine modeling for nonlinear engine control and state estimation*, volume 117 of *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, pp. 20–30. American Society of Mechanical Engineers, New York, 1995.
- [39] V. L. Kharitonov e A. P. Zhabko. Lyapunov-Krasovskii approach to the robust stability analysis of time-delay systems. *Automatica*, 39:15–20, 2003.
- [40] V. B. Kolmanovskii. Stability of some systems with delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(5):984–989, 1999.
- [41] V. B. Kolmanovskii e A. Myshkis. *Introduction to the theory and applications of functional differential equations*. Dordrecht: Kluwer Academy, 1999.
- [42] N. N. Krasovskii. *Stability of motion*. Stanford University Press, [Russo], Moscow, 1959; [Inglês], Stanford, CA, 1963, 1963.
- [43] J. Lam, H. Gao, e C. Wang. Stability analysis for continuous systems with two additive time-varying delay components. *Systems & Control Letters*, 56:16–24, 2007.
- [44] Y. S. Lee, Y. S. Moon, W. H. Kwon, e P. G. Park. Delay-dependent robust  $\mathcal{H}_\infty$  control for uncertain systems with a state-delay. *Automatica*, 40(1):65–72, 2004.



- [45] V. J. S. Leite, P. L. D. Peres, E. B. Castelan, e S. Tarbouriech.  $\mathcal{H}_\infty$  guaranteed cost of neutral systems with time-varying delay. *5th IFAC Symposium on Robust Control Systems - ROCOND 06*, volume 1, pp. 1–6, Toulouse, França, 2006. Artigo No 244.
- [46] V. J. S. Leite, P. L. D. Peres, E. B. Castelan, e S. Tarbouriech. Estabilidade robusta de sistemas neutrais com atrasos variantes no tempo. *Sociedade Brasileira de Automática*, 18(4):434–446, 2007.
- [47] C. Lin, Q.-G. Wang, T. H. Lee, e Y. He. *LMI approach to analysis and control of Takagi-Sugeno fuzzy systems with time delay*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, NY, 2007.
- [48] J. M. Liu, H. F. Chen, e S. Tang. Optical-communication systems based chaos in semiconductor lasers. *IEEE Transactions Circuits and Systems-I*, 48(12):1475–1483, 2001.
- [49] R. P. Malhotra e R. Siferd. Evaluation of electronic artificial neural network implementations. *Proceedings of the IEEE*, 2:885–891, 1993. CH3306-8/93/0000-088.
- [50] C. M. Marcus e R. M. Westervelt. Stability of analog neural networks with delay. *Physics Reviews A*, 39(2):347–359, 1989.
- [51] F. C. Moon e M. A. Johnson. *Nonlinear dynamics and chaos in manufacturing process*, pp. 3–32. Dynamics and chaos in manufacturing process. John Wiley & Sons, Willey, New York, 1998.
- [52] Y. S. Moon, P. G. Park, W. H. Kwon, e Y. S. Lee. Delay-dependent robust stabilization of uncertain state-delayed systems. *International Journal of Control*, 74:1447–1455, 2001.
- [53] S. I. Niculescu. *Delay effects on stability*, volume 269. In Lecture Notes in Control and Information Sciences, Berlin: Springer, 2001.
- [54] S.-I. Niculescu. On delay-dependent stability under model transformations of some neutral linear systems. *International Journal of Control*, 74:609–617, 2001.
- [55] N. Olgac e R. Sipahi. An exact method for the stability analysis of time-delayed linear time-invariant systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(5):793–797, 2002.
- [56] R. M. Palhares, C. D. Campos, P. YA. Ekel, M. C. R. Leles, e M. F. S. V. D’Angelo. Delay-dependent robust  $\mathcal{H}_\infty$  control to uncertain linear systems with lumped delays. *IEE Proceedings Control Theory and Applications*, 152(1):27–33, 2005.
- [57] R. M. Palhares, C. D. Campos, P. YA. Ekel, M. C. R. Leles, e M. F. S. V. D’Angelo. Delay-dependent robust  $\mathcal{H}_\infty$  control to uncertain linear systems with time-varying delays. *Computers and Mathematics with Applications*, 50:13–32, 2005.
- [58] R. M. Palhares e E. N. Gonçalves. Desigualdades matriciais lineares em controle. L. A. Aguirre, editor, *Enciclopédia de Automática – Controle & Automação*, volume 1, pp. 155–195. Blucher, 2007.

- [59] P. Park. A delay-dependent stability criterion for systems with uncertain time-invariant delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44:876–877, 1999.
- [60] Z. V. Rekasius. A stability test for systems with delays. *Proceedings Joint Automatic Control Conference*, San Francisco, USA, 1980. Artigo No. TP9-A.
- [61] J.-P. Richard. Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems. *Automatica*, 39:1667–1694, 2003.
- [62] T. Roska, C. W. Wu, M. Balsi, e L. O. Chua. Stability and dynamics of delay-type general neural networks. *IEEE Transactions on Circuits and Systems – Part I*, 39:487–490, 1992.
- [63] C. Santacesaria e R. Scattolini. Easy tuning of Smith predictor in presence of delay uncertainty. *Automatica*, 29:1595–1597, 1993.
- [64] F. G. Shinskey. *Process Control Systems*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1967.
- [65] T. T. Soong. *Active Structural Control: Theory and Practice*. Addison–Wesley Pub (Sd), New York, 1990.
- [66] F. O. Souza, L. A. Mozelli, e R. M. Palhares. Condições de estabilidade e estabilização de sistemas não-lineares com retardo no tempo via abordagem TS. *XVII Congresso Brasileiro de Automática - CBA2008*, Juiz de Fora, Brasil, 2008.
- [67] F. O. Souza, L. A. Mozelli, e R. M. Palhares. On stability and stabilization of TS fuzzy time-delay systems. 2008. Submetido.
- [68] F. O. Souza e R. M. Palhares. Análise da estabilidade assintótica em redes neurais artificiais sujeitas a retardo no tempo e incertezas do tipo politópicas. *XVI Congresso Brasileiro de Automática - CBA2006*, pp. 19–24, Salvador, Brasil, 2006.
- [69] F. O. Souza e R. M. Palhares. Novel delay-dependent Kalman/Luenberger-type filter design for neutral systems. 2008. Submetido.
- [70] F. O. Souza e R. M. Palhares. Synchronization of chaotic delayed artificial neural networks: an  $\mathcal{H}_\infty$  control approach. *International Journal of Systems Science*, 2009. Por aparecer.
- [71] F. O. Souza, R. M. Palhares, e K. A. Barbosa. New improved delay-dependent  $\mathcal{H}_\infty$  filter design for uncertain neutral systems. *IET Control Theory and Applications*, 2(12):1033–1043, 2008.
- [72] F. O. Souza, R. M. Palhares, K. A. Barbosa, e M. C. de Oliveira. Projeto de filtro  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas sujeitos a retardo no tempo. *XVII Congresso Brasileiro de Automática - CBA2008*, Juiz de Fora, Brasil, 2008.
- [73] F. O. Souza, R. M. Palhares, e M. C. de Oliveira. Robust stability analysis of neural networks with uncertain delay. *XVII Congresso Brasileiro de Automática - CBA2008*, Juiz de Fora, Brasil, 2008.

- [74] F. O. Souza, R. M. Palhares, M. C. de Oliveira, E. M. A. M. Mendes, e L. A. B. Tôrres. Sincronismo de osciladores caóticos por meio de controladores com memória. *XVII Congresso Brasileiro de Automática - CBA2008*, Juiz de Fora, Brasil, 2008.
- [75] F. O. Souza, R. M. Palhares, e P. Ya. Ekel. Asymptotic stability analysis in uncertain multi-delayed state neural networks via Lyapunov-Krasovskii theory. *Mathematical and Computer Modelling*, 45:1350–1362, 2007.
- [76] F. O. Souza, R. M. Palhares, e P. Ya. Ekel. Improved asymptotic stability analysis in uncertain delayed state neural networks. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2009. doi:10.1016/j.chaos.2007.01.110.
- [77] F. O. Souza, R. M. Palhares, e P. Ya. Ekel. Novel stability criterion for uncertain delayed Cohen-Grossberg neural networks using discretized Lyapunov-Functional. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2009. doi:10.1016/j.chaos.2008.09.009.
- [78] F. O. Souza, R. M. Palhares, F. G. Guimarães, e M. C. de Oliveira. Estimação do conjunto de Pareto para o problema de controle misto  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  em sistemas sujeitos a retardo variante no tempo e incertezas do tipo politópicas. *XVI Congresso Brasileiro de Automática - CBA2006*, pp. 262–267, Salvador, Brasil, 2006.
- [79] F. O. Souza, R. M. Palhares, e V. J. S. Leite. Improved robust  $\mathcal{H}_\infty$  control for neutral systems via discretized Lyapunov-Krasovskii functional. *International Journal of Control*, 81(9):1462–1474, 2008.
- [80] F. O. Souza, R. M. Palhares, E. M. A. M. Mendes, e L. A. B. Tôrres. Further results on master-slave synchronization of general Lur’e systems with time-varying delay. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 18(1):187–202, 2008.
- [81] F. O. Souza, R. M. Palhares, E. M. A. M. Mendes, e L. A. B. Tôrres. Robust  $\mathcal{H}_\infty$  control for master-slave synchronization of Lur’e systems with time-delay feedback control. *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, 18(4):1161–1173, 2008.
- [82] Kazuo Tanaka e Hua O. Wang. *Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A Linear Matrix Inequality Approach*. John Wiley and Sons, 2001.
- [83] M. C. M. Teixeira e E. Assunção. Extensões para sistemas não-lineares. L. A. Aguirre, editor, *Enciclopédia de Automática – Controle & Automação*, volume 1, pp. 218–243. Blucher, 2007.
- [84] A. Thowsen. An analytic stability test for a class of time-delay systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC - 26(3):735–736, 1981.
- [85] A. Thowsen. The Routh-Hurwitz method for stability determination of linear differential-difference systems. *International Journal of Control*, 33(5):991–995, 1981.
- [86] B. H. Tongue. *Principles of Vibration*. Oxford University Press, New York, 1996.

- [87] E. I. Verriest. Linear systems with rational distributed delay: reduction and stability. *1999 European Control Conference*, Karlsruhe, Germany, 31 de ago. a 3 de set., 1999.
- [88] J. Wei e S. Ruan. Stability and bifurcation in a neural network model with two delays. *Physica D*, 130:255–272, 1999.
- [89] M. Wu, Y. He, J.-H. She, e G.-P. Liu. Delay-dependent criteria for robust stability of time-varying delay systems. *Automatica*, 40:1435–1439, 2004.
- [90] S. Xu e J. Lam. Improved delay-dependent stability criteria for time-delay systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50:384–387, 2005.
- [91] S. Xu, J. Lam, e D. W. C. Ho. A new LMI condition for delay-dependent asymptotic stability of delayed Hopfield neural networks. *IEEE Transactions On Circuits And Systems—II: Express Briefs*, 53(3):230–234, 2006.
- [92] M. E. Yalçın, J. A. K. Suykens, e J. Vandewalle. Master-slave synchronization of Lur’e systems with time-delay. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 11(6):1707–1722, 2001.
- [93] K. Yamanaka e E. Shimemura. Effects of mismatched Smith controller on stability in systems with time-delay. *Automatica*, 23:787–791, 1987.
- [94] H. Ye, A. N. Michel, e K. Wang. Global stability and local stability of Hopfield neural networks with delays. *Physics Reviews E*, 50:4206–4213, 1994.
- [95] D. Yue e Q.-L. Han. A delay-dependent stability criterion of neutral systems and its application to a partial element equivalent circuit model. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-II*, 51(12):685–689, 2004.
- [96] Z. Zeng, J. Wang, e X. Liao. Global asymptotic stability and global exponential stability of neural networks with unbounded time-varying delays. *IEEE Transactions on Circuits and Systems—II: Express Briefs*, 52(3):168–173, 2005.
- [97] J. Zhang. Global stability analysis in delayed cellular neural networks. *Computers and Mathematics with Applications*, 45:1707–1720, 2003.
- [98] J. Zhang, C. R. Knospe, e P. Tsiotras. New results for the analysis of linear systems with time-invariant delays. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 13:1149–1175, 2003.
- [99] X. M. Zhang e Q.-L. Han. Stability analysis and  $\mathcal{H}_\infty$  filtering for delay differential systems of neutral type. *IET Control Theory & Applications*, 1(3):749–755, 2007.
- [100] Q.-C. Zhong. *Robust Control of Time-delay Systems*. Springer, London, 2006.
- [101] K. Zhou, J. C. Doyle, e K. Glover. *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall, Inc, Englewood Cliffs, NJ, 1996.